Lehrbuch

der

Ingenieur- und Maschinen-Mechanik.

Lehrbuch

der

Ingenieur- und Maschinen-Mechanik.

Mit

den nöthigen Hülfslehren aus der Analysis

für den

Unterricht an technischen Lehranstalten

sowie zum

Gebrauche für Techniker

bearbeitet

von

Julius Weisbach,

Professor an der königlich Sächsischen Bergakademie zu Freiberg.

In drei Theilen.

Erster Theil.

Theoretische Mechanik.

Zweite, verbesserte und vervollständigte Auflage.

Mit 667 in den Text eingedruckten Holzschnitten.

Braunschweig,

Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.

1850.

Vorrede zur ersten Auflage.

Nicht ohne Zagen schicke ich hier den ersten Theil meiner elementaren Bearbeitung der Ingenieur- und Maschinenmechanik in die Welt. Obwohl ich mir sagen kann, daß ich bei dieser Schrift mit aller möglichen Sorgfalt und Bedachtsamkeit zu Werke gegangen bin, so befürchte ich dennoch, den Wünschen Aller in ihr nicht entsprechen zu können. Die Ansichten, Wünsche und Ansprüche sind nun einmal so sehr verschieden, daß es nicht möglich ist, alle zu befriedigen. Mancher wird das eine Kapitel zu ausführlich, Mancher wird es zu kurz finden; Einige werden in der Behandlung gewisser Materien eine höhere Wissenschaftlichkeit vermissen, während Andere vielleicht gerade hierin eine größere Popularität gewünscht hätten. Indeß vieljährige Studien, vielfacher Unterricht und mannichfaltige Beobachtungen und Erfahrungen haben mich nun einmal auf die Methode geführt, nach welcher das vorliegende Werk bearbeitet ist, und welche ich für den beabsichtigten Zweck als die angemessenste halte.

Mein Hauptbestreben bei Bearbeitung dieses Werkes war darauf gerichtet, die größte Einfachheit bei der Entwickelung und Beweisführung zu erzielen und alle in der Anwendung auf die Praxis wichtigen Sätze nur mit Hülfe der niedern Mathematik abzuhandeln. Wenn man berücksichtigt, welche mannichfache Kenntnisse ein Techniker sich anzueignen hat, um in seinem Fache etwas Tüchtiges zu leisten, so muß es uns, als Lehrer und Schriftsteller für Techniker, eine Pflicht sein, das gründliche Studium der Wissenschaft durch Vereinfachung im Vortrage, durch Be-

seitigung alles Ueberflüssigen und durch die Anwendung der bekanntesten und zugänglichsten Hülfslehren zu erleichtern. Ich habe deshalb auch in dem vorliegenden Werke die Anwendung der Differenzial- und Integralrechnung gänzlich vermieden. Wenn auch jetzt die Gelegenheit zur Erlernung dieser Rechnung nicht so selten mehr ist, so ist es doch eine unbestreitbare Thatsache, daß ohne immerwährende Uebung die nöthige Fertigkeit in Handhabung derselben sehr bald verloren geht, und es deshalb manchen übrigens sehr tüchtigen Praktiker giebt, welcher mit der früher erlernten Differenzial- und Integralrechnung nicht mehr umzugehen versteht. Da ich mit manchen Schriftstellern, welche in populären Schriften die schwierigeren Sätze ohne Beweise mittheilen, nicht einerlei Meinung bin, so habe ich es vorgezogen, praktisch wichtige Sätze stets auf elementarem, wenn auch zuweilen etwas weitläufigem Wege, abzuleiten oder zu beweisen. Man wird daher in diesem Werke nur selten eine Formel ohne ihre Begründung hingestellt finden. Einige ganz allgemeine Kenntnisse gewisser Lehren aus der Naturlehre, zumal aber eine gründliche Kenntniß der reinen Elementarmathematik, müssen wir allerdings bei dem Studium dieser Schrift voraussetzen. Vorzüglich bin ich bemüht gewesen, bei Bearbeitung dieses Werkes, die rechte Mitte zwischen Generalisiren und Specialisiren zu halten. Obwohl ich die Vorzüge des Generalisirens nicht verkenne, so bin ich doch der Meinung, daß man in diesem Werke, wie bei jedem elementaren Vortrage, das allzugroße Generalisiren zu vermeiden habe. Das Einfache kommt ja in der Praxis häufiger vor, als das Zusammengesetzte. Auch ist nicht zu leugnen, daß in der Betrachtung des allgemeinen Falles oft die tiefere Kenntniß des specielleren Falles verloren geht, und daß es nicht selten leichter ist, aus dem Einfachen das Zusammengesetztere abzuleiten, als aus dem Allgemeineren das Einzelne herauszuziehen.

Man erwarte in der Ingenieur- und Maschinenmechanik keine Maschinenbaulehre oder Maschinenbaukunst, sondern nur die Einleitung oder Vorbereitungswissenschaft zu dieser. Die Mechanik soll sich insofern zur Maschinenbaukunst verhalten, wie die darstellende Geometrie zum Maschinenzeichnen. Nach Erlangung der Kenntnisse der Mechanik und der darstellenden Geometrie scheint es am zweckmäßigsten zu sein, den Unterricht

über Maschinenbaukunst und den über Maschinenzeichnen in einem Curse zu vereinigen.

Vielleicht wird noch in Zweifel gezogen, daß es zweckmäßig sei, die Ingenieur- und Maschinenmechanik in zwei Theile, in einen theoretischen und in einen angewandten, zu theilen. Wenn man berücksichtigt, daß dieses Werk Unterricht über alle mechanische Verhältnisse der Bau- und Maschinenlehre ertheilen soll, so stellt sich die Nützlichkeit, oder vielmehr die Nothwendigkeit dieser Eintheilung von selbst heraus. Um ein Bauwerk und zumal um eine Maschine vollständig beurtheilen zu können, sind oft die verschiedensten Lehren der Mechanik, z. B. die der Reibung, die der Festigkeit, die der Trägheit, des Stoßes, des Ausflusses u. s. w. in Anspruch zu nehmen, es ist also das Material zum mechanischen Studium eines Bau- oder Maschinenwerkes fast aus allen Theilen der Mechanik zusammenzulesen. Da es nun aber für den praktischen Gebrauch viel zweckmäßiger ist, die mechanischen Lehren über jede Maschine im Zusammenhange studiren zu können, als sie aus fast allen Theilen der Mechanik zusammentragen zu müssen, so möchte die Nützlichkeit der gemachten Theilung außer allem Zweifel sein.

Immer die Anwendung im Praktischen vor Augen habend, bin ich beim Aufsetzen dieses Werkes stets bemüht gewesen, die vorgetragenen Lehren durch passende Beispiele aus dem Leben soviel wie möglich zu erläutern. Mit Recht kann ich aber auch behaupten, daß sich dieses Werk durch die große Anzahl und passende Auswahl durchgerechneter Beispiele vor vielen ähnlichen Werken auszeichnet. Nächstdem hoffe ich auch, daß die große Anzahl der sorgfältig ausgeführten Figuren dem beabsichtigten Zwecke dieser Schrift sehr förderlich sein werde. Endlich muß ich es der Verlagshandlung noch besonders Dank wissen, daß sie dem Werke in aller Hinsicht die vorzüglichste Ausstattung hat zu Theil werden lassen. Auf die Richtigkeit der Rechnungen ist eine besondere Sorgfalt verwendet worden; in der Regel ist jedes Beispiel, und zwar nicht von einer und derselben Person, dreimal durchgerechnet worden. Es möchte daher nicht so leicht sein, wesentliche oder ansehnliche Fehler in denselben aufzufinden. In den Beispielen sowie in den Formeln habe ich immer das preußische Maaß und Gewicht

zu Grunde gelegt, in der Erwartung, daß die größere Zahl der Leser mit diesem zu rechnen gewohnt sein werde. Aber auch in Hinsicht auf die Correctheit des hier so schwierigen Druckes möchte wenig zu wünschen übrig bleiben. Die bis jetzt gefundenen Schreib- und Druckfehler sind dem Buche beigefügt. Ich glaube nicht, daß noch eine größere Ergänzung zu diesem Verzeichnisse nöthig sein werde. Eine nähere Prüfung der Zeichnungen wird die Ueberzeugung herbeiführen, daß auch bei Ausführung dieser mit Sorgfalt zu Werke gegangen ist. Größere Zeichnungen, und zumal solche, welche Gegenstände nach allen drei Raumdimensionen abbilden, sind nach der von mir zuerst abgehandelten axonometrischen Projectionsmethode (s. polytechn. Mittheilungen, Band I., Tübingen 1845) ausgeführt. Diese Zeichnungsmethode hat mit der isometrischen Perspective gleiche Vorzüge, zeichnet sich aber von dieser noch dadurch aus, daß sie nicht nur schönere, sondern auch solche Bilder liefert, welche die Vorstellung des abgebildeten Gegenstandes leichter erwecken, als die isometrische Perspective. In der Regel sind die Zeichnungen im Buche so ausgeführt, daß die Breiten- oder Tiefendimensionen bei gleicher Größe im abgebildeten Gegenstande nur halb so groß erscheinen, als die Längen- und Höhendimensionen.

Wesentlich zur Correctheit dieses Werkes haben die Revisionen des Herrn Ernst Röting, Studirenden an der hiesigen Bergakademie, beigetragen, weshalb ich nicht unterlassen kann, meinen Dank hier öffentlich auszusprechen.

Endlich ist es nöthig, dem Leser noch anzuzeigen, daß er in dem Buche viel Neues und manches, dem Verfasser Eigenthümliches vorfinden wird. Ohne mich auf viele kleine Artikel, die fast in jedem Kapitel vorkommen, einzulassen, will ich den Leser nur auf folgende umfassendere Gegenstände aufmerksam machen. Eine allgemeine und leicht ausführbare Bestimmung der Schwerpunkte ebener Flächen und ebenflächigen Polyeder wird man in den Paragraphen 107, 112 und 113 finden, eine angenäherte Formel für die Kettenlinie in dem Paragraphen 148; Ergänzungen zur Axenreibung in den Paragraphen 167, 168, 169, 172 und 173. Die Lehre vom Stoße wird namentlich durch die Paragraphen 277 und 278

eine wesentliche Ergänzung erhalten haben, da man seither den Stoß unvollkommen elastischer Körper zu wenig berücksichtigt und den Fall, wenn ein vollkommen elastischer Körper mit einem unvollkommen elastischen Körper zusammenstößt, gar nicht betrachtet hat. Die meisten Ergänzungen und zum Theil ganz neue Gesetze wird man allerdings in der Hydraulik mitgetheilt finden, da ich diesen Theil schon seit einer Reihe von Jahren zu einem Gegenstande meiner speciellen Studien gemacht habe. Die Gesetze der vom Verfasser zuerst beobachteten unvollkommenen Contraction der Wasserstrahlen, treten hier zum ersten Male in einem Lehrbuche der Mechanik auf. Ebenso werden die für die Praxis sehr wichtigen Hauptresultate der Versuche des Verfassers über den Ausfluß des Wassers durch Schieber, Hähne, Klappen und Ventile mitgetheilt. Endlich führt der Verfasser auch die Hauptergebnisse seiner neuesten Versuche, betreffend den Ausfluß des Wassers durch schiefe Ansatzröhren, gebrochene, krumme und lange gerade Röhren u. s. w. hier auf, obgleich das dritte Heft seiner diese Versuche umfassenden »Untersuchungen im Gebiete der Mechanik und Hydraulik« dem Drucke noch nicht hat übergeben werden können. Den Kapiteln über die fließenden Wasser, über das Wassermessen und über den Wasserstoß sind ebenfalls durch den Verfasser einige Bereicherungen zu Theil geworden.

Uebrigens kann ich dem Leser nicht bergen, daß ich jetzt, nach Beendigung des ersten Bandes, auch hin und wieder Einiges anders aufgefaßt oder behandelt zu haben wünsche; doch muß ich hinzufügen, daß sich wesentliche Mängel mir noch nicht herausgestellt haben. Wenn hie und da noch Manches vermißt wird, so muß ich auf den zweiten Band verweisen, welcher nicht bloß zufällig, sondern meist absichtlich Ergänzungen zum ersten Bande nachbringen wird, wie auch schon im ersten Bande an vielen Stellen angedeutet wird. Der Druck des zweiten Bandes wird nun seinen ununterbrochenen Fortgang haben, so daß sich erwarten läßt, daß das ganze Buch am Ende dieses Jahres in den Händen der Leser sein werde. Auch wird nun bald das unter dem Namen »der Ingenieur« in der Mechanik citirte Hülfsbuch, welches in einer Sammlung von Formeln, Regeln und Tabellen der Arithmetik, Geometrie und Mechanik besteht, erscheinen.

Es sollte mir eine große Beruhigung und Freude gewähren, wenn mit diesem Werke das erreicht wird, was ich damit bezielt habe, nämlich Praktikern ein nützlicher Rathgeber in Fällen der Anwendung, Lehrern der praktischen Mechanik ein brauchbarer Leitfaden beim Unterrichte, und Studirenden des Ingenieur- und Maschinenwesens ein willkommenes Hülfsmittel zur Erlernung der Mechanik zu sein.

Freiberg, den 19. März 1846.

Julius Weisbach.

Vorrede zur zweiten Auflage.

Die vorliegende zweite Auflage vom ersten Bande der Ingenieur- und Maschinenmechanik ist in der Methode und Anordnung nicht wesentlich von der ersten Auflage verschieden. Nur der innere Ausbau dieses Werkes hat mit dieser zweiten Auflage manche Veränderungen und Vervollständigungen erlitten, auch ist die Ausdehnung desselben nicht unbedeutend größer geworden. Ueberdies hat sich der Verfasser bemüht, die bemerkten Mängel und Unrichtigkeiten so viel wie möglich in dieser zweiten Bearbeitung zu beseitigen. Die größere Ausdehnung dieser Auflage ist besonders aus drei Zugaben erwachsen. Die erste derselben besteht in einer gedrängten und möglichst populären Darstellung des sogenannten Infinitesimalcalcüls am Kopfe des ganzen Werkes, und ist besonders deshalb hinzugefügt worden, um verwickelte und zugekünstelte Entwickelungen mittels des niedern Calcüls zu vermeiden, und um zugleich dem Leser mehr Selbstständigkeit in der Mechanik zu verschaffen und ihn auf einen höheren Standpunkt in diesem wichtigen Gebiete zu stellen. Durch Anwendung der in diesem Vorcurs enthaltenen Lehren aus der Analysis ist es möglich geworden, auch solche praktisch wichtige Gegenstände mit in den Vortrag aufzunehmen, welche sich entweder gar nicht, oder nur sehr unvollständig mittels der elementaren Algebra und Geometrie behandeln lassen. Um aber Denjenigen, welche sich mit den vorausgeschickten Elementen der Differenzial- und Integralrechnung nicht bekannt gemacht haben, keine Störungen zu bereiten, sind alle diejenigen Paragraphen, in welchen die Anwendung dieses Calcüls vorkommt, durch ein Sternchen (*) besonders ausgezeichnet worden.

Die zweite Zugabe besteht in einem neuen Kapitel in der Hydrostatik, und behandelt die Molecularwirkungen des Wassers. Da die Kenntniß der Molecularkräfte (Capillarität) bei hydraulischen und pneumatischen Beobachtungen und Messungen von Wichtigkeit ist, so hat es der Verfasser für zweckmäßig gehalten, in einem besonderen Kapitel die Hauptlehren über diese Kräfte des Wassers hier einzuschalten. Endlich ist dem ganzen Werke noch ein Kapitel über die Schwingungen und Wellenbewegungen als Anhang beigegeben worden. Der Verfasser hat sich dazu bewogen gefunden, weil eine nähere Kenntniß der Schwingungen für den Ingenieur von großer Wichtigkeit ist. Der große Einfluß, welchen die Schwingungen auf den Gang und auf die Haltbarkeit und Dauerhaftigkeit der Maschinen und anderer Bauwerke ausüben, ist ein Gegenstand, dem man nicht zuviel Aufmerksamkeit schenken kann! Ueberdies verdanken wir den Schwingungsbeobachtungen die neuesten Bestimmungen der für die Praxis so sehr wichtigen Elasticitätsmodule. Auch der magnetischen Kraft habe ich in dem Anhange gedacht, vorzüglich weil dieselbe der Ingenieur beim Orientiren in unterirdischen Räumen, und an Orten, welche keine freie Aussicht gewähren, nicht entbehren kann. Die Theorie der Wasserwellen, welche den Schluß dieses Bandes ausmacht, gehört ganz in die Hydraulik; ihre Aufnahme in diese Schrift bedarf daher keiner weiteren Rechtfertigung. Leider läßt sie nur noch Vieles zu wünschen übrig!

Was den übrigen Theil dieser Schrift anlangt, so hat vorzüglich das Kapitel über die Elasticität und Festigkeit umfänglichere Veränderungen und Ergänzungen erfahren; nächstdem ist aber auch der Hydraulik durch die fortgesetzten Versuche des Verfassers manche Ergänzung und Berichtigung zu Theil geworden.

Möchte auch diese zweite Auflage sich der Beachtung und des Beifalles erfreuen, womit die erste Auflage aufgenommen und der Verfasser in der weiteren Bearbeitung dieses Werkes aufgemuntert worden ist.

Freiberg, den 15ten Mai 1850.

Julius Weisbach.

Inhalt des ersten Theiles.

I. Hülfslehren aus der Analysis.

II. Theoretische Mechanik.

Erster Abschnitt.
Phoronomie oder rein mathematische Bewegungslehre.

Zweiter Abschnitt.
Mechanik oder physische Bewegungslehre im Allgemeinen.

Dritter Abschnitt.
Statik fester Körper.

Vierter Abschnitt.
Dynamik fester Körper.

Fünfter Abschnitt.
Statik flüssiger Körper.

Sechster Abschnitt.
Dynamik flüssiger Körper.

Anhang.
Theorie der Schwingungen.

Hülfslehren aus der Analysis.

Art. 1. Die Abhängigkeit einer Größe y von einer anderen Größe x wird durch eine mathematische Formel, z. B. $y = 3x^2$, oder $y = ax^m$ u. s. w. angegeben. Man schreibt allgemein $y = f(x)$ oder $z = \varphi(y)$ u. s. w., und nennt y eine Funktion von x, so wie z eine Funktion von y. Die Zeichen f, φ u. s. w. deuten nur allgemein an, daß y von x, oder z von y abhänge; sie lassen die Abhängigkeit dieser Größen von einander ganz unbestimmt, schreiben also die algebraische Operation, durch welche y aus x, oder z aus y hervorgeht, nicht vor.

Eine Funktion $y = f(x)$ ist eine unbestimmte Gleichung; es giebt unendlich viele Werthe von x und y, welche derselben entsprechen, giebt man jedoch die eine (x), so ist die andere (y) durch die Funktion bestimmt, und verändert man die eine, so erleidet die andere ebenfalls eine Veränderung. Man nennt deshalb die unbestimmten Größen x und y Variable oder veränderliche Größen, dagegen die gegebenen oder als gegeben anzusehenden Größen, die also die Operation vorschreiben, durch welche y aus x hervorgeht, Constanten oder beständige Größen. Von den veränderlichen Größen heißt diejenige, welche willkürlich anzunehmen ist, die Urvariable, und dagegen diejenige, welche als Funktion der letzteren durch eine bestimmte Operation aus dieser bestimmt wird, die Abhängigvariable. In $y = ax^m$ sind a und m die Constanten und es ist x die Ur-, dagegen y die Abhängigvariable.

Die Abhängigkeit einer Größe z von zwei anderen x und y wird durch das Zeichen $z = f(x,y)$ ausgedrückt. Es ist in diesem Falle z Funktion von x und y zugleich, und man hat es daher hier mit zwei Urvariablen zu thun.

Art. 2. Jede durch eine Funktion oder Formel $y = f(x)$ ausgedrückte Abhängigkeit einer Größe y von einer anderen Größe x läßt sich durch

eine ebene Curve oder krumme Linie APQ, Fig. 1. und Fig. 2., darstellen; den verschiedenen Werthen der Urvariablen x entsprechen die Abscissen AM, AN u. s. w., und den verschiedenen Werthen der Abhängigvariablen

Fig. 1.

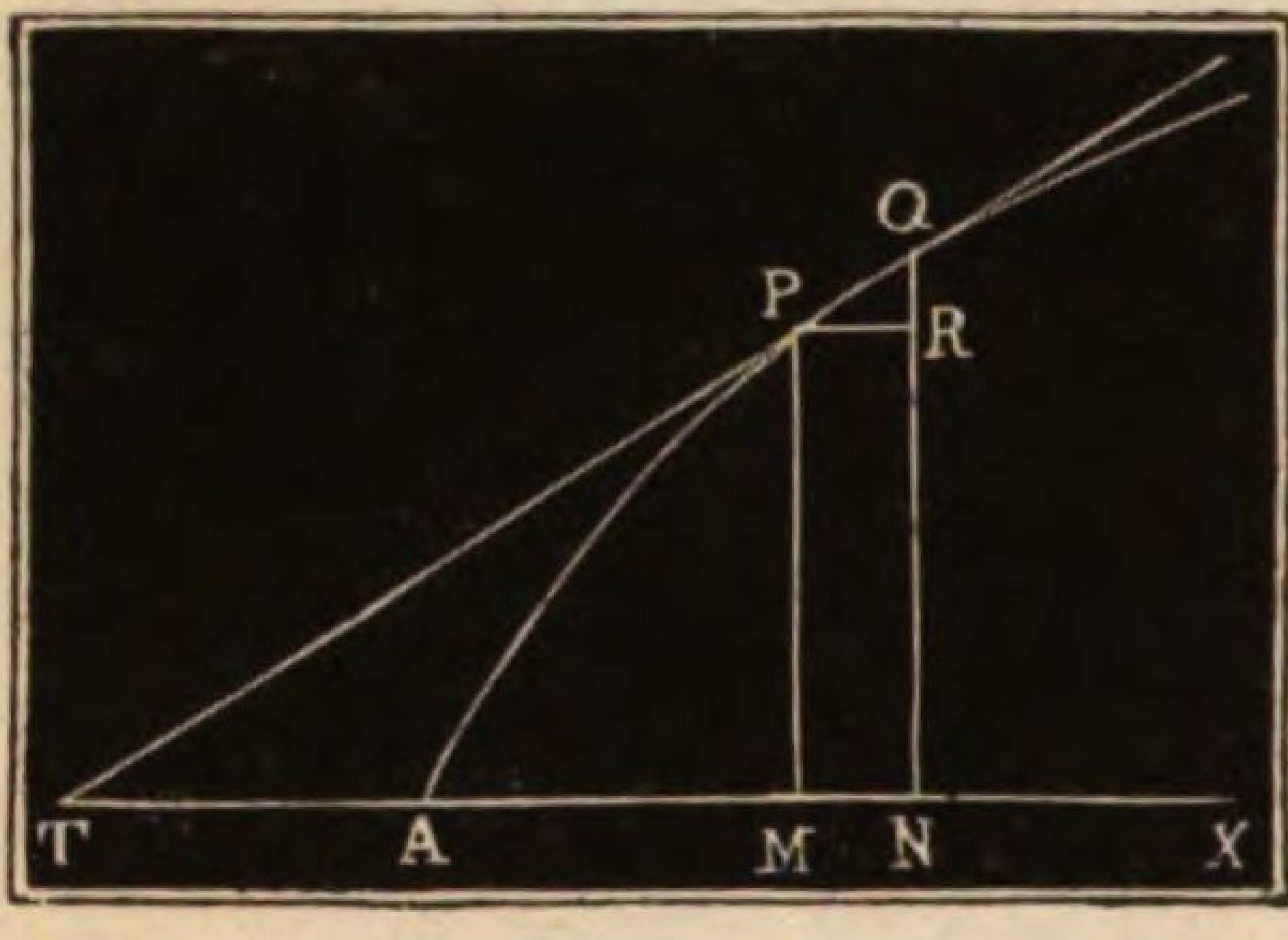
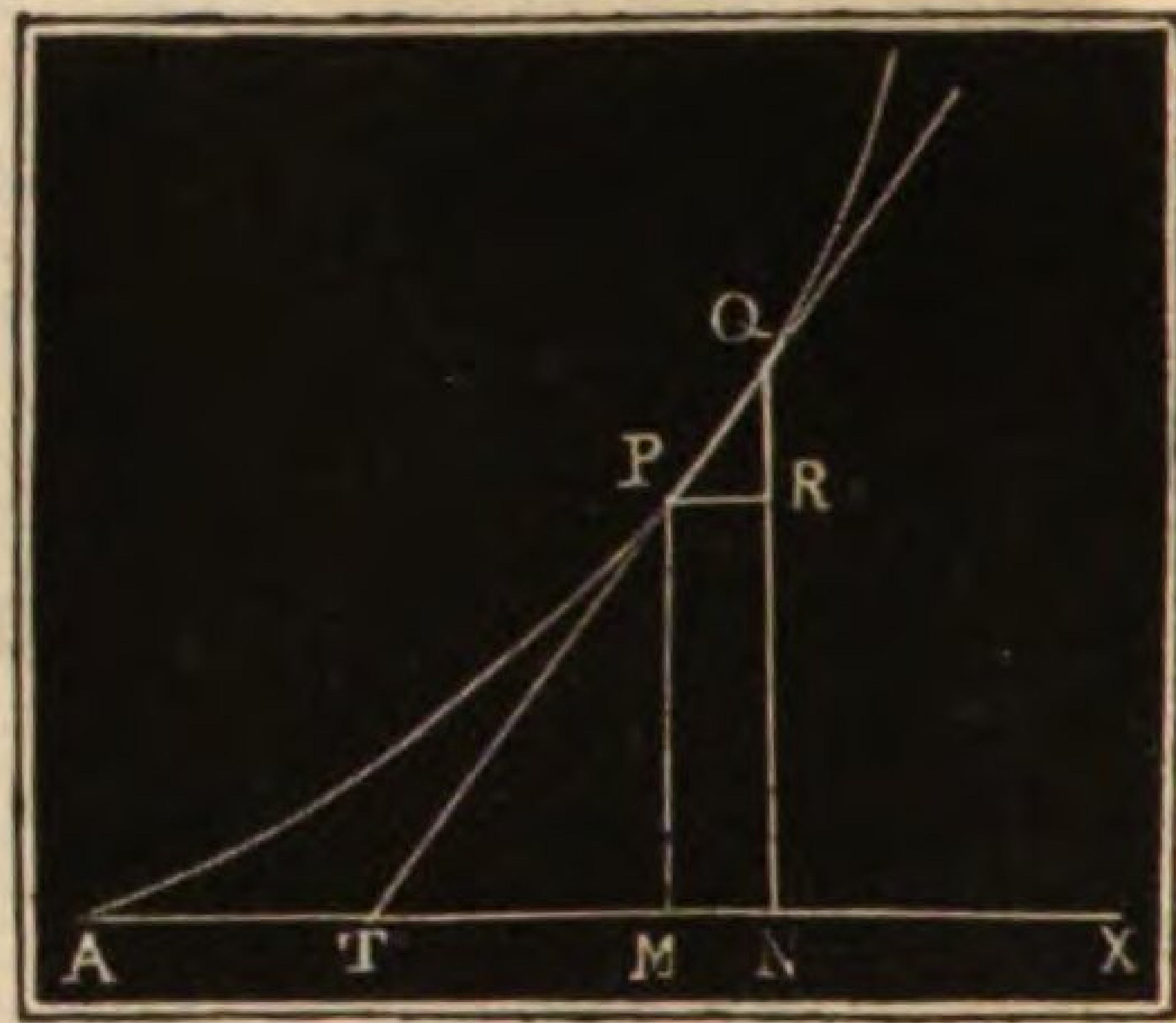
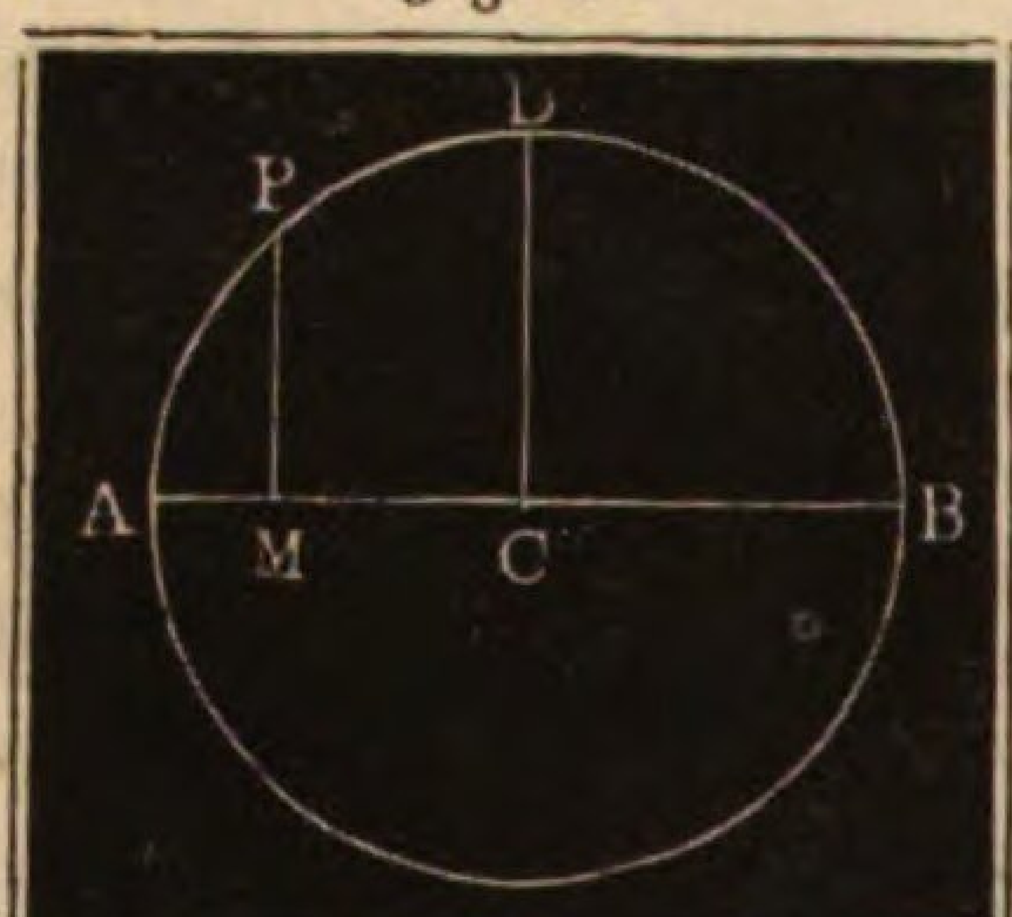


Fig. 2.



y die Ordinaten MP, NQ u. s. w. der Curve. Die Coordinaten (Abscissen und Ordinaten) der Curve stellen also die beiden Variablen der Funktion vor. Die graphische oder bildliche Darstellung einer Funktion oder die Zurückführung derselben auf eine Curve, vereinigt mehrere Vortheile in sich. Sie liefert uns erstens einen Ueberblick von dem Zusammenhange zwischen zwei veränderlichen Größen, sie ersetzt uns zweitens die Stelle einer Tabelle, oder eines Inbegriffes von je zwei zusammengehörigen Werthen einer Funktion, sie verschafft uns drittens die Kenntniß von den mannichfaltigsten Eigenschaften und Beziehungen der Funktionen. Der mit dem Halbmesser $CA = CB = r$ beschriebene Kreis ADB, Fig. 3.,

Fig 3

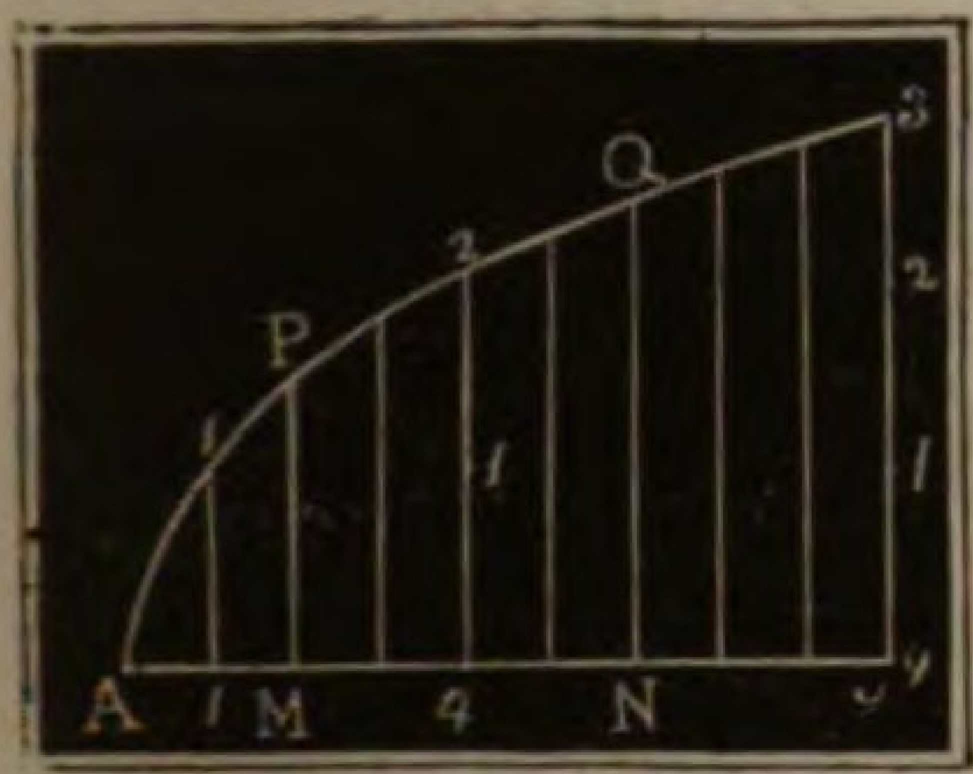


welcher der Funktion $y = \sqrt{2rx - x^2}$ entspricht, gewährt uns z. B. nicht allein eine Uebersicht über die verschiedenen Werthe, welche diese Funktion annehmen kann, sondern macht uns auch mit anderen Eigenthümlichkeiten dieser Funktion bekannt, da die Eigenschaften des Kreises auch ihre Bedeutung in der Funktion haben, wie wir besonders im Folgenden sehen werden.

Art. 3. Die Naturgesetze lassen sich in der Regel durch Funktionen zwischen zwei oder mehreren Größen ausdrücken und sind deshalb auch meist einer graphischen Darstellung fähig. Beim freien Fallen der Körper im luftleeren Raume hat man z. B. für die Fallgeschwindigkeit y, welche der Fallhöhe x entspricht, $y = \sqrt{2gx}$; diese Formel stimmt aber auch mit der Gleichung $y = \sqrt{px}$ der Parabel überein, wenn man den Parameter (p) der letzteren gleichsetzt der doppelten Beschleunigung $(2g)$ der

Schwere, daher läßt sich auch das Fallgesetz durch eine Parabel APQ, Fig. 4., mit dem Parameter $p = 2g$ graphisch darstellen. Die Abscissen AM, AN . . dieser Curve sind natürlich die Fallräume, und die entsprechenden Ordinaten MP, NQ . . die zugehörigen Geschwindigkeiten.

Fig. 4.



Ist a ein gewisses Luftvolumen unter der Pressung von 1 Atmosphäre, so hat man dem Mariotte'schen Gesetze zu Folge das Volumen derselben Luftmenge unter der Pressung von x Atmosphären: $y = \frac{a}{x}$.

Für $x = 1$ ist $y = a$, für $x = 2$, $y = \frac{a}{2}$, für $x = 4$, $y = \frac{a}{4}$,

» $x = 10$ » $y = \frac{a}{10}$, » $x = 100$, $y = \frac{a}{100}$, » $x = \infty$, $y = 0$;

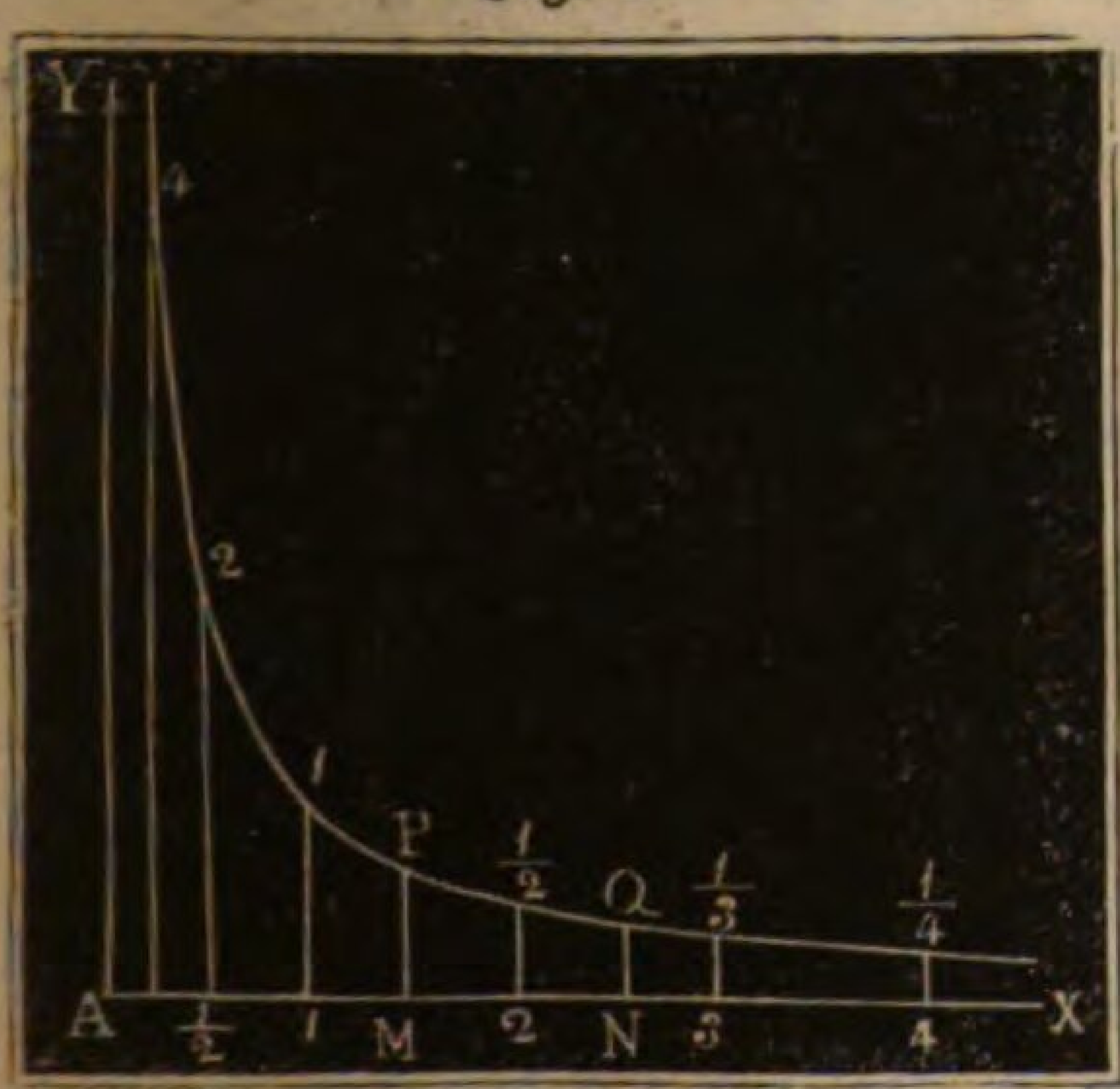
man sieht also, daß das Volumen immer kleiner und kleiner wird, je größer die Spannung ist, und daß, wenn das Mariotte'sche Gesetz bei allen Spannungen richtig bliebe, einer unendlich großen Spannung x ein unendlich kleines Volumen y entspräche.

Ferner $x = \frac{1}{2}$ giebt $y = 2a$, $x = \frac{1}{4}$, giebt $y = 4a$,
$x = \frac{1}{10}$ » $y = 10a$, $x = 0$, » $y = \infty a$,

je kleiner hiernach die Spannung wird, je größer fällt auch das Volumen aus, und wenn die Spannung unendlich klein ist, so stellt sich das Volumen unendlich groß heraus.

Die Curve, welche diesem Gesetze entspricht, ist in Fig. 5. abgebildet; AM, AN . . sind die Spannungen oder Abscissen, MP, NQ . . die entsprechenden Volumen oder Ordinaten. Man sieht, diese Curve nähert sich allmälig den Axen AX und AY der Coordinaten, ohne sie je zu erreichen.

Fig. 5.



Die Abhängigkeit der Expansivkraft y des gesättigten Wasserdampfes von der Temperatur x läßt sich wenigstens innerhalb gewisser Grenzen durch die Formel

$$y = \left(\frac{a+x}{b}\right)^m \text{ Atmosphären}$$

ausdrücken, und es ist erfahrungsmäßig, wenigstens innerhalb gewisser Grenzen, $a = 75$, $b = 175$ und

$m = 6$. Wenn wir hiernach $y = \left(\frac{75 + x}{175}\right)^6$ setzen, und eine unbeschränkte Richtigkeit dieser Formel annehmen, so erhalten wir:

$$\text{für } x = 100^0,\ y = \left(\frac{175}{175}\right)^6 = \quad 1 \text{ Atmosphäre,}$$

$$\text{» } x = \quad 50^0,\ y = \left(\frac{125}{175}\right)^6 = 0{,}133 \quad \text{»}$$

$$\text{» } x = \quad 0^0,\ y = \left(\frac{75}{175}\right)^6 = 0{,}006 \quad \text{»}$$

$$\text{» } x = -75^0,\ y = \left(\frac{0}{175}\right)^6 = 0{,}000 \quad \text{»}$$

$$\text{ferner für } x = 120^0,\ y = \left(\frac{195}{175}\right)^6 = 1{,}914 \quad \text{»}$$

$$\text{» } x = 150^0,\ y = \left(\frac{225}{175}\right)^6 = 4{,}517 \quad \text{»}$$

$$\text{» } x = 200^0,\ y = \left(\frac{275}{175}\right)^6 = 15{,}058 \quad \text{»}$$

Fig. 6.



Die entsprechende Curve führt PQ, Figur 6., vor Augen; man sieht dieselbe geht in einem Abstande $AO = -75$ vom Anfangspunkte A der Coordinaten durch die Abscissenaxe, und in einem Abstande $AS = 0{,}006$ von eben diesem Punkte durch die Ordinatenaxen; ferner einer Abscisse $AM < 100$ entspricht eine Ordinate MP unter 1 und einer Abscisse $AN > 100$ gehört die Ordinate $NQ > 1$ zu; auch ist wahrzunehmen, daß nicht nur y mit x in's Unendliche wächst, sondern auch, daß die Curve immer steiler und steiler ansteigt, je größer x wird.

Art. 4. Wenn man die Urvariable einer Funktion oder Abscisse $AM = x$, Fig. 7. und 8. auf folg. S., der entsprechenden Curve um eine unendlich kleine, künftig durch dx zu bezeichnende Größe MN wachsen läßt, so geht die entsprechende Abhängigvariable oder Ordinate $MP = y$ in $NQ = y_1$ über, und wird um den durch dy zu bezeichnenden unendlich kleinen Werth $RQ = NQ - MP$ größer. Beide Wachsthümer dx und dy von x und y nennt man Differenziale oder Elemente der Veränderlichen oder Coordinaten x und y, und es ist nun unsere Haupt-

aufgabe, für die am häufigsten vorkommenden Funktionen die Differenziale, oder vielmehr die Verhältnisse zwischen den zusammengehörigen Elementen

Fig. 7.

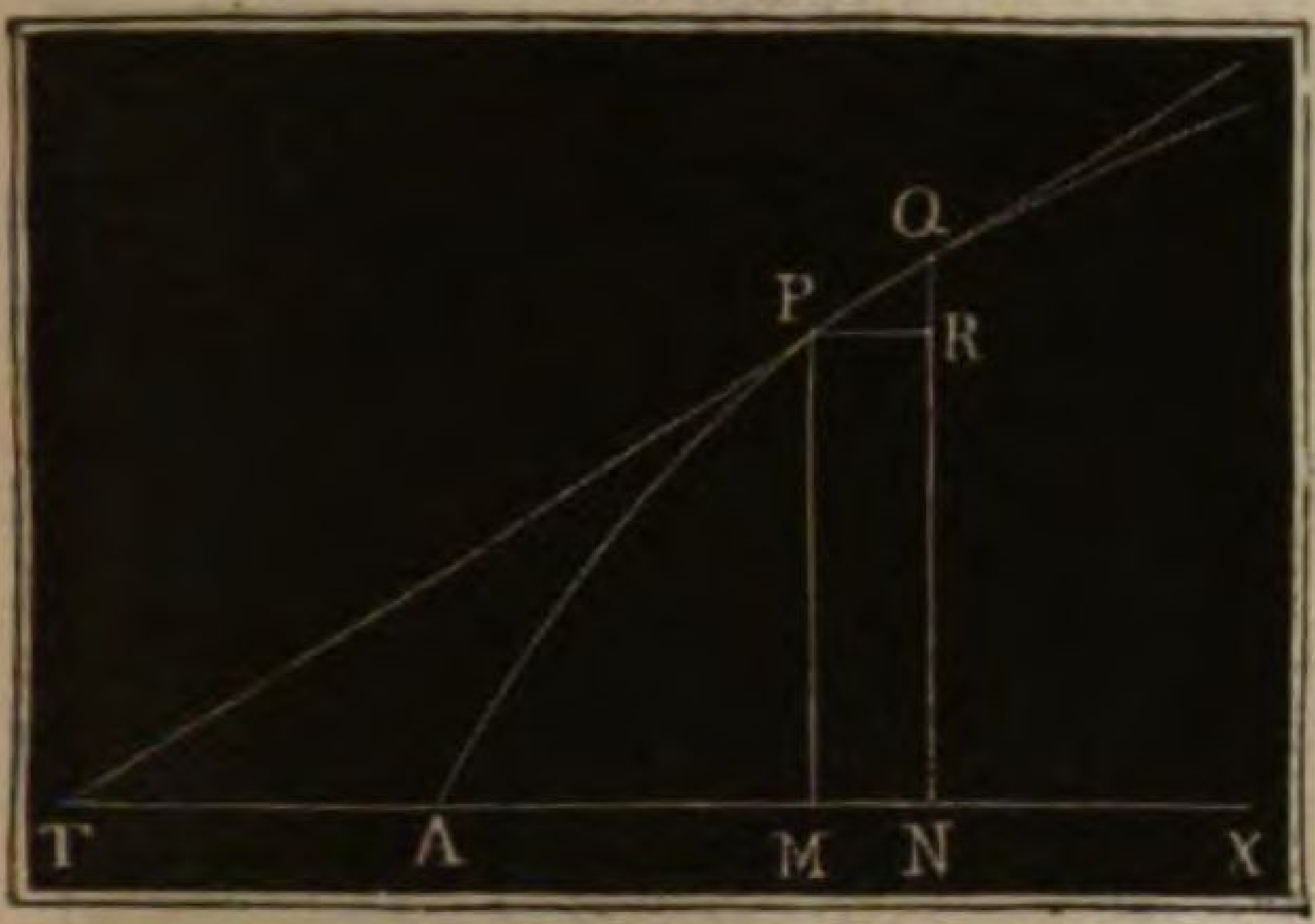
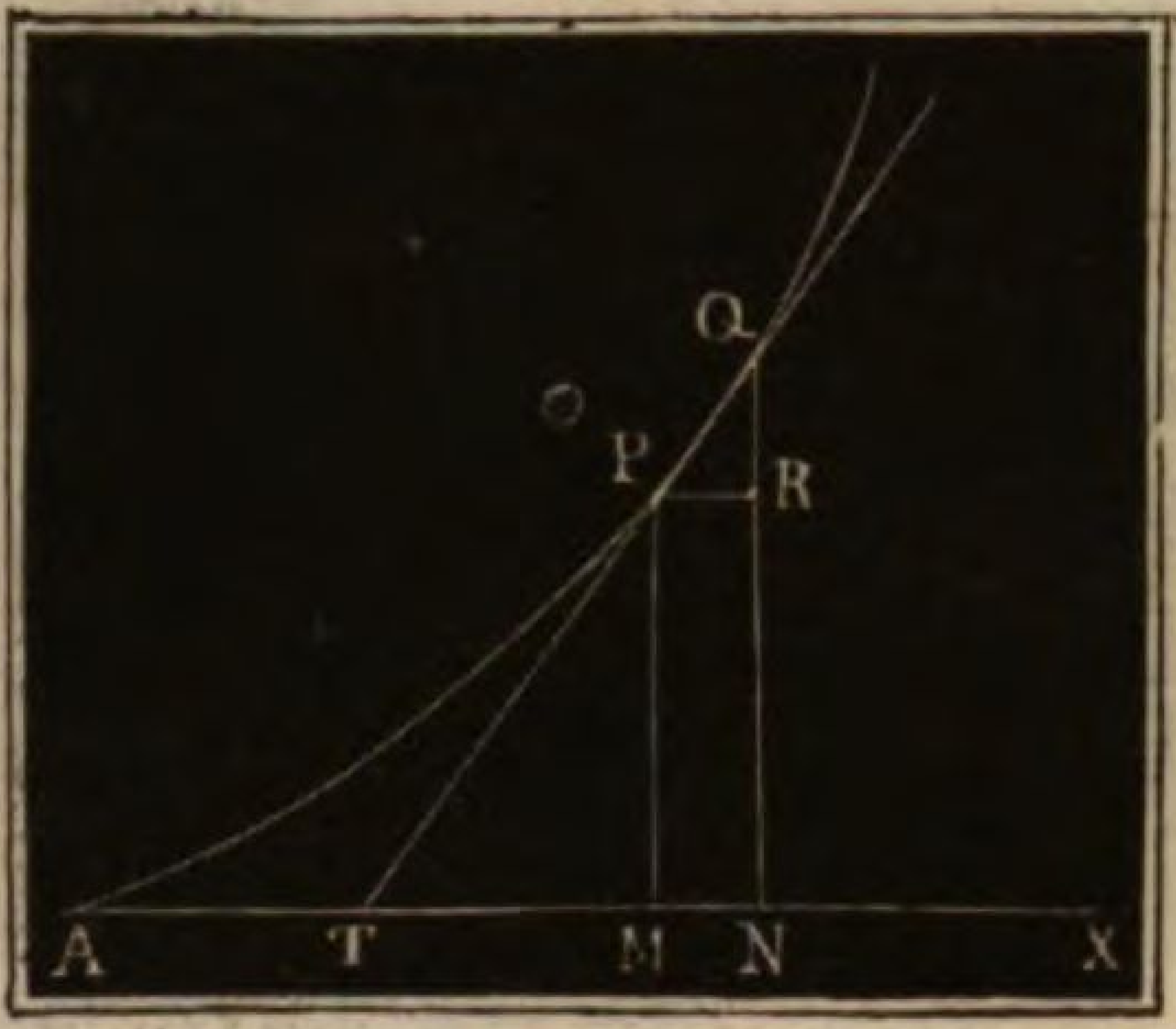


Fig. 8.



ihrer Variablen x und y zu finden. Setzt man in der Funktion $y = f(x)$, wo x die Abscisse AM und y die Ordinate MP vorstellt,

statt x, $x + dx = AM + MN = AN$, so erhält man
statt y, $y + dy = MP + RQ = NQ$, also

$$y + dy = f(x + dx),$$

und zieht man hiervon den ersten Werth von y ab, so bleibt das Element oder Differenzial der Variablen y, d. i. $dy = df(x) = f(x+dx) - f(x)$ übrig.

Dies ist die allgemeinste Regel zur Bestimmung des Differenziales einer Funktion, aus welcher sich durch Anwendung auf verschiedene Funktionen wieder andere mehr oder weniger allgemeine Regeln ableiten lassen.

Ist z. B. $y = x^2$, so hat man

$$dy = (x + dx)^2 - x^2, \text{ oder, da}$$

$$(x + dx)^2 = x^2 + 2x dx + dx^2 \text{ zu setzen ist,}$$

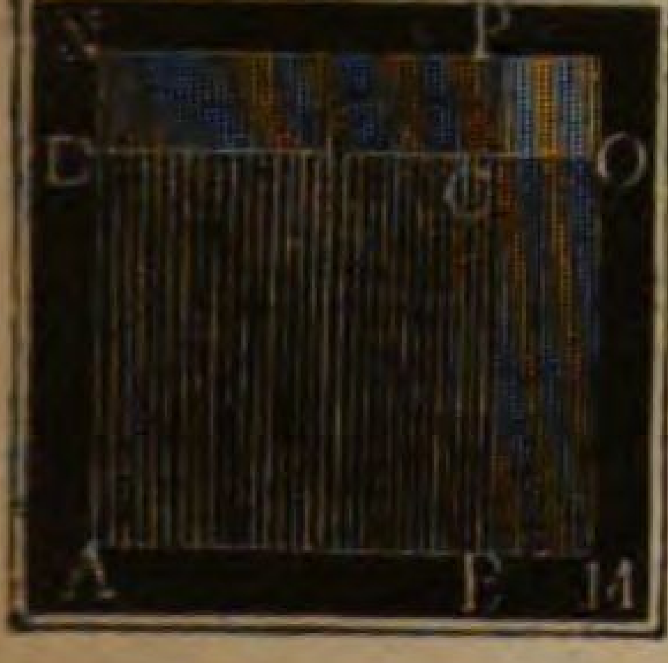
$$dy = 2x dx + dx^2 = (2x + dx)\, dx;$$

und einfacher, da dx als unendlich kleine Größe gegen $2x$ verschwindet, oder $2x$ durch Hinzutritt von dx nicht angebbar verändert wird und deshalb unbeachtet gelassen werden kann,

$$dy = d(x^2) = 2x dx.$$

Es entspricht $y = x^2$ dem Inhalte eines Quadrates $ABCD$, Fig. 9., dessen Seite $AB = AD = x$ ist, und es läßt sich auch aus der Figur entnehmen, daß durch Zunahme der Seite um $BM = DN = dx$, das Quadrat um zwei Rechtecke BO und $DP = 2x dx$ und um ein Quadrat $OP = (dx)^2$ wächst, daß also bei einem unendlich kleinen Wachsthum dx von x, das Quadrat $y = x^2$ um das Element $2x dx$ zunimmt.

Fig. 9.



Art. 5. Die gerade Linie PQ, Fig. 10. und 11., welche durch zwei unendlich nahe liegende Punkte P und Q einer Curve geht, heißt Tangente

Fig. 10.

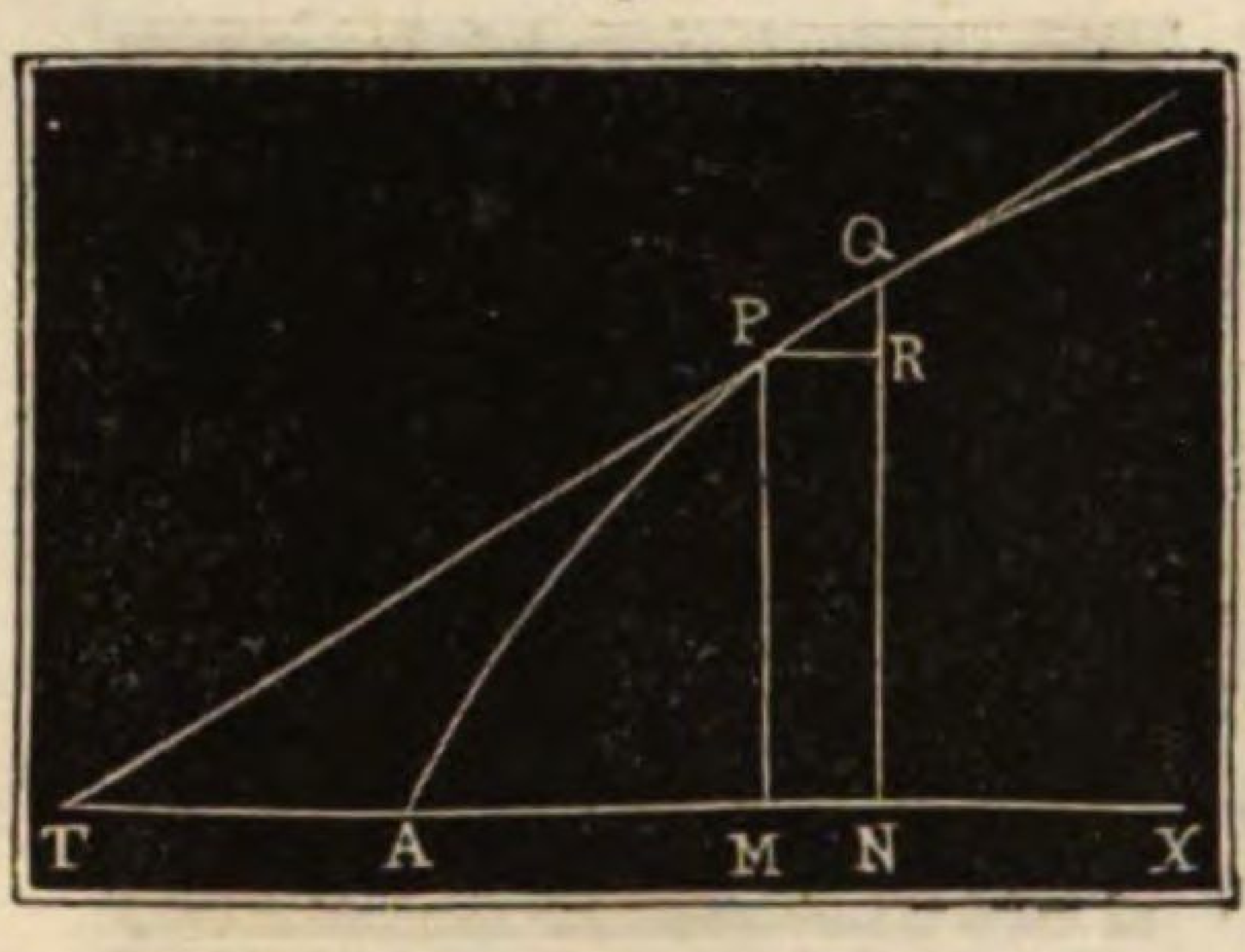
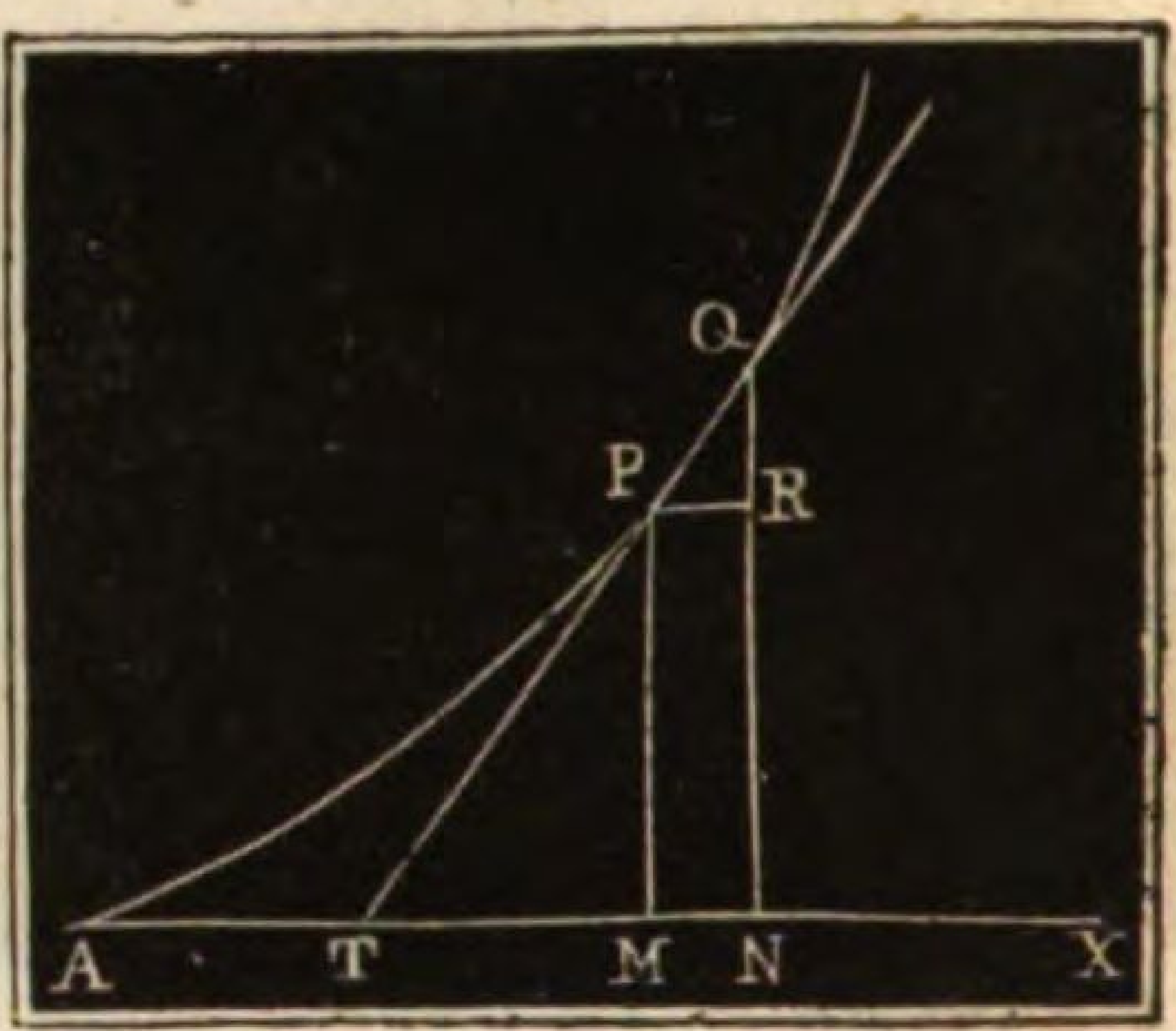


Fig. 11.



oder Berührungslinie dieser Curve und giebt die Richtung derselben zwischen diesen Punkten an. Man giebt die Richtung der Tangente durch den Winkel $PTM = \alpha$ an, unter welchem die Abscissenaxe AX von dieser Linie geschnitten wird. Bei einer concaven Curve wie APQ, Fig. 10., liegt die Tangente außerhalb der Curve und Abscissenaxe, bei einer converen Curve APQ, Fig. 11., hingegen befindet sie sich zwischen der Curve und Abscissenaxe.

In dem unendlich kleinen rechtwinkeligen Dreiecke PQR, Fig. 10. und 11., mit den Katheten $PR = dx$ und $RQ = dy$ ist der Winkel QPR gleich dem Tangentenwinkel $PTM = \alpha$, und da

$$tang.\ QPR = \frac{QR}{PR} \text{ ist,}$$

so hat man auch

$$tang.\ \alpha = \frac{dy}{dx},$$

es giebt also das Verhältniß oder der Quotient der beiden Elemente dy und dx die trigonometrische Tangente des Tangentenwinkels an.

Z. B. für die Parabel, deren Gleichung $y^2 = px$ ist, hat man, wenn man $y^2 = px = z$ setzt, $dz = (y+dy)^2 - y^2 = y^2 + 2ydy + dy^2 - y^2 = 2ydy + dy^2$, oder da dy^2 gegen $2ydy$ oder, was auf eins herauskommt, dy gegen $2y$ verschwindet,

$$dz = 2ydy, \text{ und ebenso}$$
$$dz = p(x + dx) - px = pdx.$$

Es ist hiernach $2ydy = pdx$, und daher für den Tangentenwinkel der Parabel:

$$tang.\ \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y} = \frac{y^2}{2xy} = \frac{y}{2x}.$$

In der Regel nennt man das bestimmte Stück PT der Berührungslinie zwischen dem Berührungspunkte P und dem Durchschnittspunkte T mit der Abscissenaxe, Tangente, und die Projection TM desselben in der Abscissenaxe, Subtangente, und hat daher

$$subtang.\ TM = PM\ cotang.\ PTM$$
$$= y\ cotang.\ \alpha = y\,\frac{dx}{dy},$$

z. B. bei der Parabel $subtang. = y \cdot \frac{2x}{y} = 2x$. Es ist also hier die Subtangente der doppelten Abscisse gleich, und hiernach die Lage der Tangente für jeden Punkt P der Parabel leicht anzugeben.

Art. 6. Für eine Funktion $y = a + m\,f(x)$ hat man

$$dy = [a + m\,f(x + dx)] - [a + m\,f(x)]$$
$$= a - a + mf\,(x + dx) - mf\,(x)$$
$$= m\,[f\,(x + dx) - f\,(x)];$$

d. i. I. $d\,[a + m\,f\,(x)] = m\,df\,(x)$,

z. B. $d\,(5 + 3\,x^2) = 3\,[(x + d\,x)^2 - x^2] = 3\,.\,2x\,dx = 6\,x\,dx$.

Es ist ebenso $d\,(4 - \frac{1}{2}x^3) = -\frac{1}{2}\,d\,(x^3) = -\frac{1}{2}\,[(x + d\,x)^3 - x^3]$ $= -\frac{1}{2}(x^3 + 3\,x^2dx + 3\,xdx^2 + dx^3 - x^3) = -\frac{1}{2}.3x^2dx = -\frac{3}{2}x^2dx$.

Wir können hiernach folgende wichtige Regel aufstellen: Die constanten Glieder (a, 5) einer Funktion verschwinden beim Differenziiren, und die constanten Faktoren (m, 3) bleiben hierbei unverändert.

Die Richtigkeit dieser Regel läßt sich auch graphisch darthun. Für die Curve APQ, Fig. 12., deren Coordinaten ein Mal $AM = x$ und $MP = y = f(x)$, und ein anderes Mal $A_1M_1 = x$ und $M_1P = a + y$ $= a + f(x)$ sind, ist $PR = dx$ und $RQ = dy = d\,f(x)$ und auch $= d\,(a + y) = d\,[a + f\,(x)]$; und für die Curven AP_1Q_1 und APQ, Fig. 13., deren zusammengehörige Ordinaten MP_1 und MP, so wie

Fig. 12.

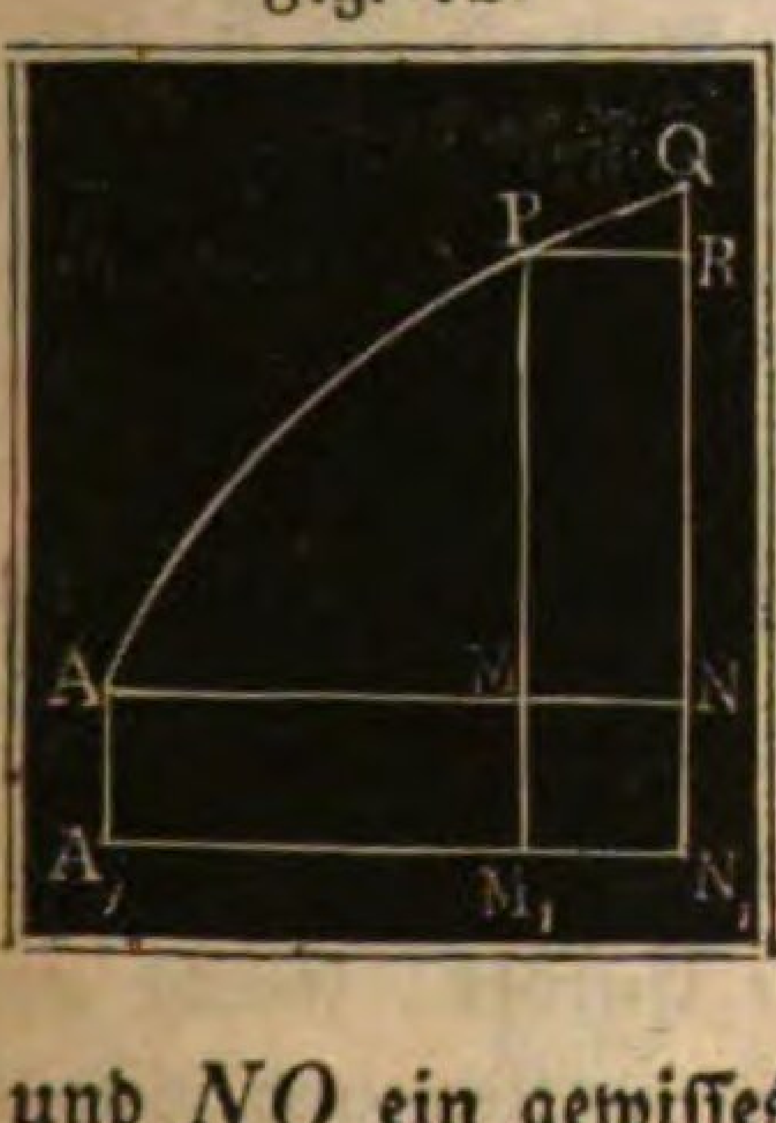
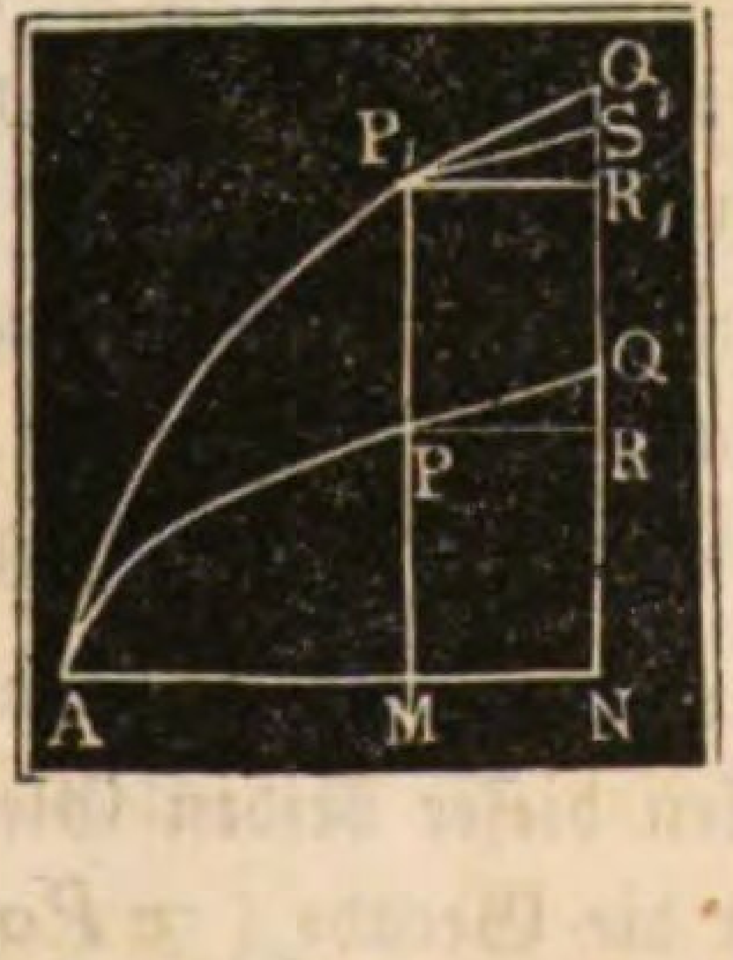


Fig. 13.



NQ_1 und NQ ein gewisses Verhältniß zu einander haben, ist auch das Verhältniß zwischen den Differenzialien $Q_1R_1 = NQ_1 - MP_1$ und

$QR = NQ - MP$ beständig dasselbe, ist also $MP_1 = mMP = mf(x)$, so hat man auch $R_1Q_1 = mRQ$, d. i. $d[mf(x)] = mdf(x)$.

Ist $y = f(x) + \varphi(x)$, so hat man

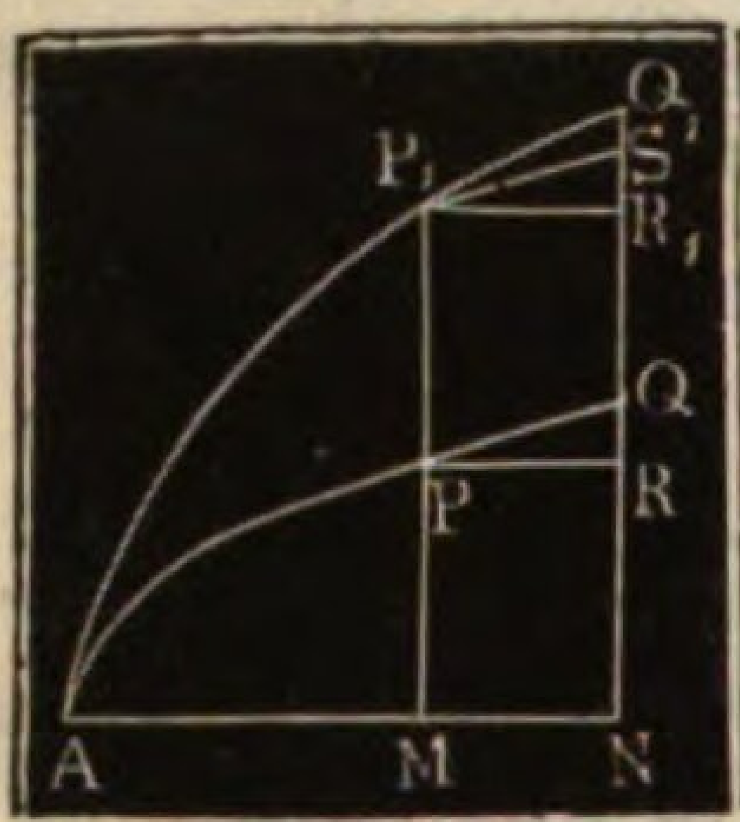
$$dy = f(x + dx) + \varphi(x + dx) - f(x) - \varphi(x)$$
$$= f(x + dx) - f(x) + \varphi(x + dx) - \varphi(x),$$

d. i. II. $d[f(x) + \varphi(x)] = df(x) + d\varphi(x)$.

Es ist also das Differenzial von der Summe aus mehreren Funktionen gleich der Summe von den Differenzialien der einzelnen Funktionen.

3. B. $d(2x + 3x^2 - \frac{1}{2}x^3) = 2dx + 6xdx - \frac{3}{2}x^2dx$
$= (2 + 6x - \frac{3}{2}x^2)dx$.

Fig. 14.

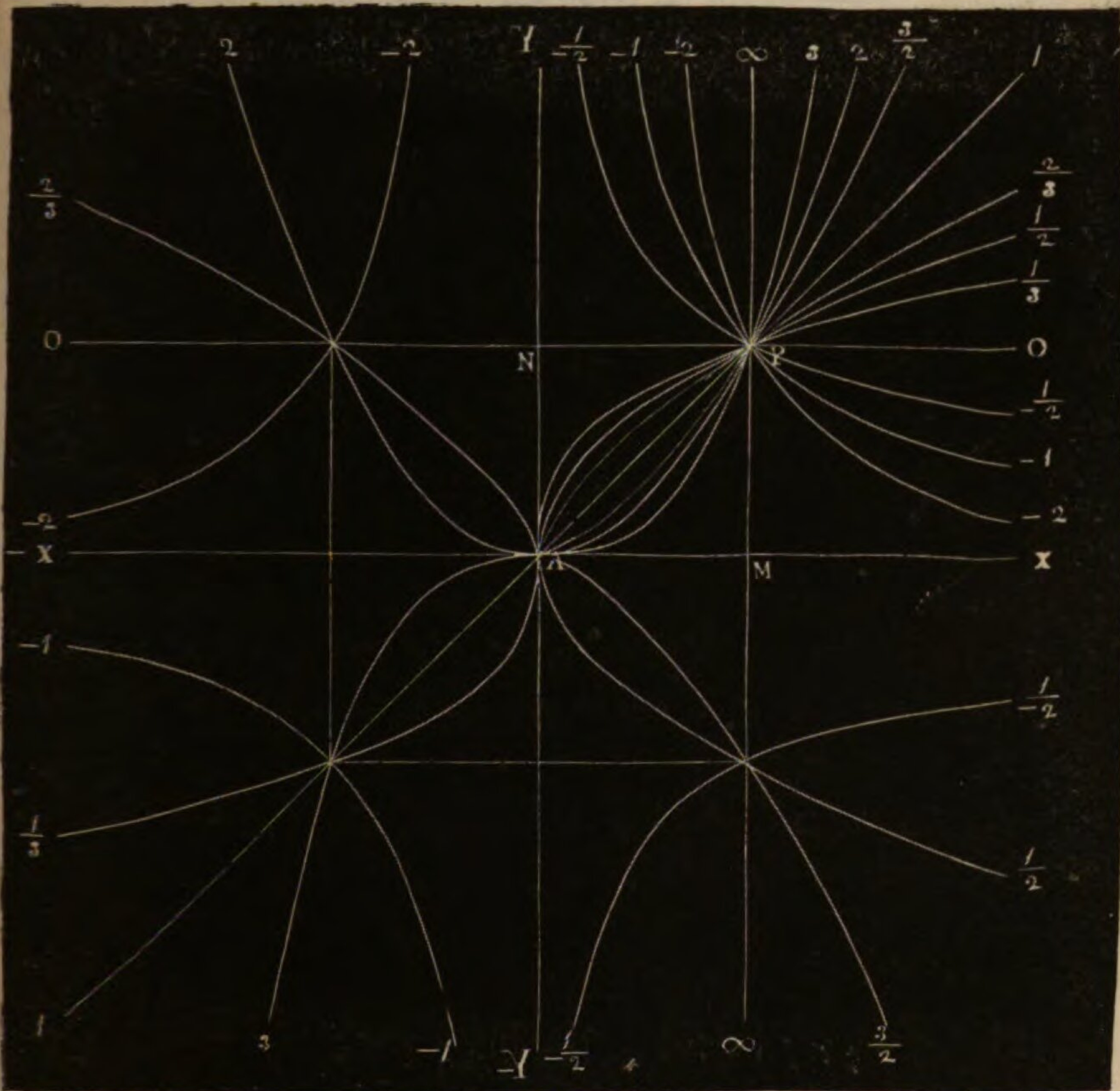


Die Richtigkeit dieser Regel ist auch aus der Betrachtung einer Curve APQ, Fig. 14., abzuleiten. Ist $MP = f(x)$ und $P_1P = \varphi(x)$, so hat man $MP_1 = y = f(x) + \varphi(x)$, und $dy = R_1Q_1 = R_1S + SQ_1 = RQ + SQ_1 = df(x) + d\varphi(x)$, da P_1S parallel zu PQ gelegt werden und deshalb $R_1S = RQ$ und $QS = PP_1$ gesetzt werden kann.

Art. 7. Die Funktion $y = x^n$ ist die wichtigste der ganzen Analysis, weil man fast bei allen Untersuchungen auf dieselbe stößt. Wenn man dem Exponenten n alle möglichen Werthe, positive und negative, ganze und gebrochene u. s. w. beilegt, so liefert sie auch die verschiedenartigsten Curven, wie durch Fig. 15. a. f. S. veranschaulicht wird. Es ist hier A der Null- oder Anfangspunkt der Coordinaten, $X\overline{X}$ die Abscissen- und $Y\overline{Y}$ die Ordinaten-Axe. Setzt man in $y = x^n$, $x = 1$, so erhält man auch $y = 1$, macht man daher die Coordinaten AM und $MP = 1$, oder construirt man aus $AM = AN = 1$ ein Quadrat, so erhält man in dem Eck P desselben den Punkt, durch welchen die Curve stets gehen muß, welches auch der Exponent n sein möge. Nimmt man $n = 1$, setzt man also $y = x$, so bekommt man die von beiden Axen $X\overline{X}$ und $Y\overline{Y}$ gleichviel abweichende Gerade $(1\,A\,1)$; nimmt man $n > 1$, so erhält man convexe Curven, setzt man dagegen $n < 1$, so ergeben sich concave Curven; jene laufen anfangs unter und von P aus über der geraden Linie $(1\,A\,1)$ hin, bei diesen ist das Umgekehrte der Fall. Für $n = 0$ ist $y = x^0 = 1$, und für $n = \infty$ ist $y = x^\infty = x^{1/_0}$, also umgekehrt $x = y^0 = 1$; der ersten dieser beiden Gleichungen entspricht die Gerade $(0\,P\,0)$ und der zweiten die Gerade $(\infty\,P\,\infty)$. Man sieht, die Curven, welche positiven Werthen von n entsprechen, ziehen sich anfangs unter, und von P aus über der Geraden $(0\,P\,0)$ hin, die Curven, welche aus negativen Werthen

von n resultiren, laufen hingegen erst über, und jenseits P unter $(0\,P\,0)$ hin. Für jene Curven ist für $x = 0$ auch $y = 0$ und für $x = \infty$

Fig. 15.



auch $y = \infty$, für diese hingegen für $x = 0$, $y = \infty$ und für $x = \infty$ $y = 0$. Während sich jene immer mehr und mehr von den Coordinaten-axen $X\overline{X}$ und $Y\overline{Y}$ entfernen, je weiter man sie verfolgt, nähern sich diese einerseits immer mehr und mehr der Axe $X\overline{X}$ und andererseits der Axe $Y\overline{Y}$, ohne sie jedoch wirklich zu erreichen.

Die Funktionen $y = x^{1/2}$, $x^{3/2}$, $x^{-1/2}$ u. s. w., d. i.

$$y = \sqrt{x},\ \sqrt{x^3} = \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ u. s. w.}$$

geben für jedes x einen positiven und einen gleich großen negativen, für

ein negatives x aber einen imaginären Werth; deshalb finden sich auch die entsprechenden Curven nur im ersten und zweiten der von den Axen $X\overline{X}$ und $Y\overline{Y}$ begrenzten Quadranten. Die Funktionen

$$y = x^{-1},\ x^{1/3},\ x^{5/3} \text{ u. s. w., d. i.}$$

$$y = \frac{1}{x},\ \sqrt[3]{x},\ \sqrt[3]{x^5} \text{ u. s. w.}$$

geben für jedes negative x auch ein negatives y, weshalb die entsprechenden Curven außer dem ersten Quadranten XAY noch den dritten $\overline{X}A\overline{Y}$ einnehmen. Die Funktionen

$$y = x^2,\ x^{-2},\ x^{2/3} \text{ u. s. w., d. i.}$$

$$y = x^2,\ \frac{1}{x^2},\ \sqrt[3]{x^2} \text{ u. s. w.}$$

erhalten selbst bei negativem x positive y, und deshalb bleiben die zugehörigen Curven stets über der Abscissenaxe $X\overline{X}$ oder im ersten und vierten Quadranten.

Art. 8. Wenn wir in der Funktion $y = x^n$, x um dx wachsen lassen, so erhalten wir den Werth $y_1 = (x + dx)^n$, und daher das Differenzial oder Element $dy = y_1 - y = (x + dx)^n - x^n$.

Der binomischen Reihe

$$(a + x)^n = a^n + n a^{n-1} x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} x^3 + \ldots$$

zufolge ist aber

$$(x + dx)^n = x^n + n x^{n-1} dx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} dx^2 + \ldots,$$

daher erhalten wir denn

$$dy = d(x^n) = n x^{n-1} dx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} dx^2 + \ldots$$

$$= \left(n x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} dx + \ldots\right) dx;$$

oder da $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} dx + \ldots$ wegen der unendlichen Kleinheit von dx gegen $n x^{n-1}$ verschwindet, $d(x^n) = n x^{n-1} dx$.

Z. B. $d(x^5) = 5x^4 dx$, $d(\sqrt{x^3}) = d(x^{3/2}) = {}^3\!/_2 x^{1/2} dx$,

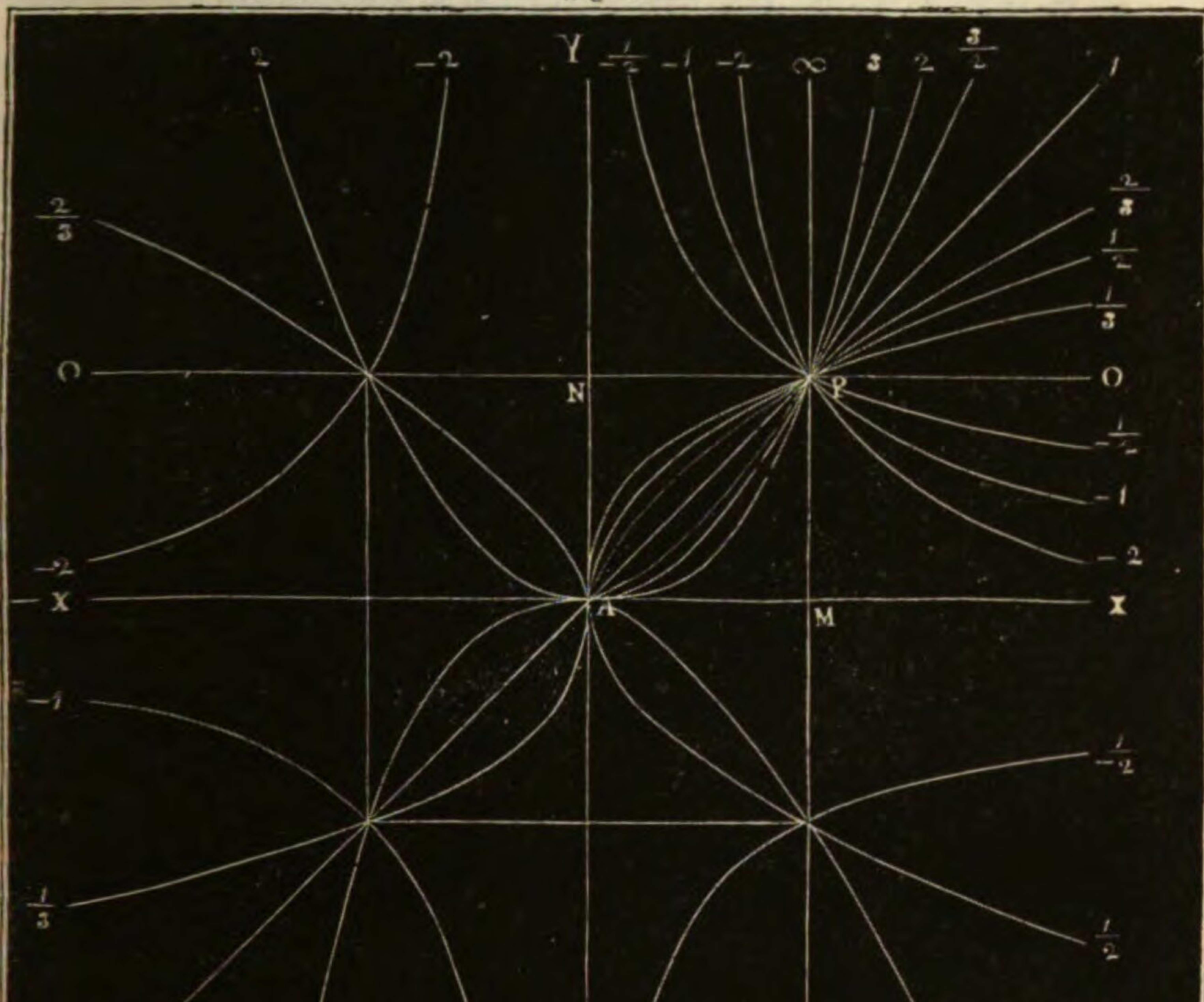
$$d\left(\frac{4}{x^2}\right) = 4 d(x^{-2}) = -8x^{-3} dx; \text{ ferner}$$

$$d\sqrt{2rx-x^2} = d\sqrt{u} = d(u^{1/2}) = \tfrac{1}{2}u^{-1/2}du = \tfrac{1}{2}\,\frac{d(2rx-x^2)}{u^{1/2}}$$

$$= \tfrac{1}{2}\cdot\frac{2r\,dx - 2x\,dx}{\sqrt{u}} = \frac{(r-x)\,dx}{\sqrt{2rx-x^2}}.$$

Aus der wichtigen Formel $d(x^n) = nx^{n-1}\,dx$ folgt nun auch die Formel für den Tangentenwinkel der entsprechenden und in Fig. 16. abge-

Fig. 16.



bildeten Curven; es ist nämlich $tang.\,\alpha = \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$.

Hiernach hat man z. B. für die sogenannte Neil'sche Parabel, deren Gleichung $y = \sqrt[2]{\frac{x^3}{a}}$ ist,

$$tang.\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{a}}\,\frac{d\,(x^{3/2})}{dx} = \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\tfrac{3}{2}x^{1/2} = \tfrac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{a}}.$$

Art. 9. Wenn man in dem Elementeverhältniß $\frac{dy}{dx}$ oder in der Formel für die Tangente des Tangentenwinkels für x nach und nach verschiedene Werthe setzt, so erhält man durch dieselbe die verschiedenen Lagen der Berührungslinie. Nimmt man $x = 0$, so erhält man die Tangente des Tangentenwinkels im Anfangspunkt, nimmt man $x = \infty$, so erhält man dieselbe für einen unendlich entfernten Punkt der Curve. Am wichtigsten sind die Punkte, wo die Tangente einer Curve mit der einen oder der anderen Coordinatenaxe parallel läuft, weil hier in der Regel die eine oder die andere der Coordinaten x und y ihren größten oder kleinsten Werth hat, oder, wie man sagt, ein Maximum oder Minimum ist. Für den Parallelismus mit der Abscissenaxe hat man $\alpha = 0$, also auch $tang. \alpha = 0$, und für den mit der Ordinatenaxe $\alpha = 90^0$, also $tang\ \alpha = \infty$; und hiernach folgt die Regel: man findet diejenigen Werthe der Abscisse oder Urvariablen x, welchen die Maximal- oder Minimalwerthe der Ordinate oder Abhängigvariablen y entsprechen, wenn man das Differenzialverhältniß $\frac{dy}{dx} = 0$, oder $= \infty$ setzt, und die erhaltenen Gleichungen in Hinsicht auf x auflöst.

Z. B. für die Gleichung $y = 6x - {}^9\!/_2 x^2 + x^3$, welcher der Curve $APQR$ in Fig. 17. entspricht, ist

$$\frac{dy}{dx} = 6 - 9x + 3x^2 = 3(2 - 3x + x^2) = 3(1-x)(2-x),$$

und es folgt durch Nullsetzen von $\frac{dy}{dx}$, $1 - x = 0$ und $2 - x = 0$,

Fig. 17.

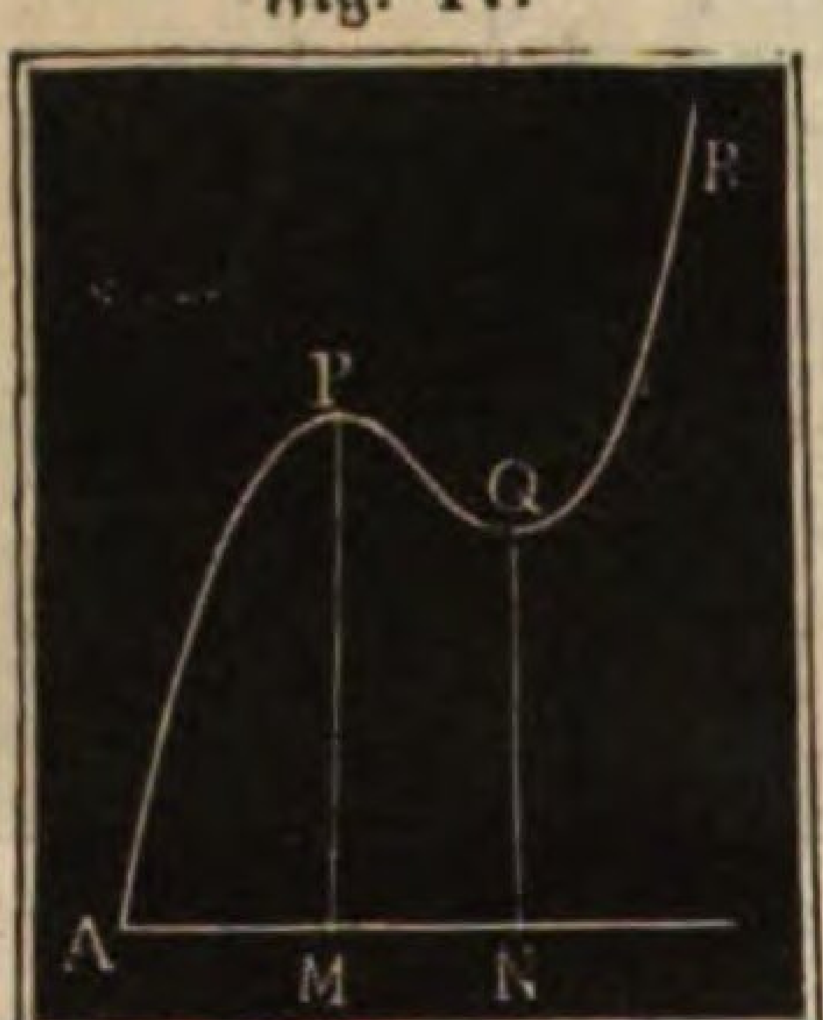
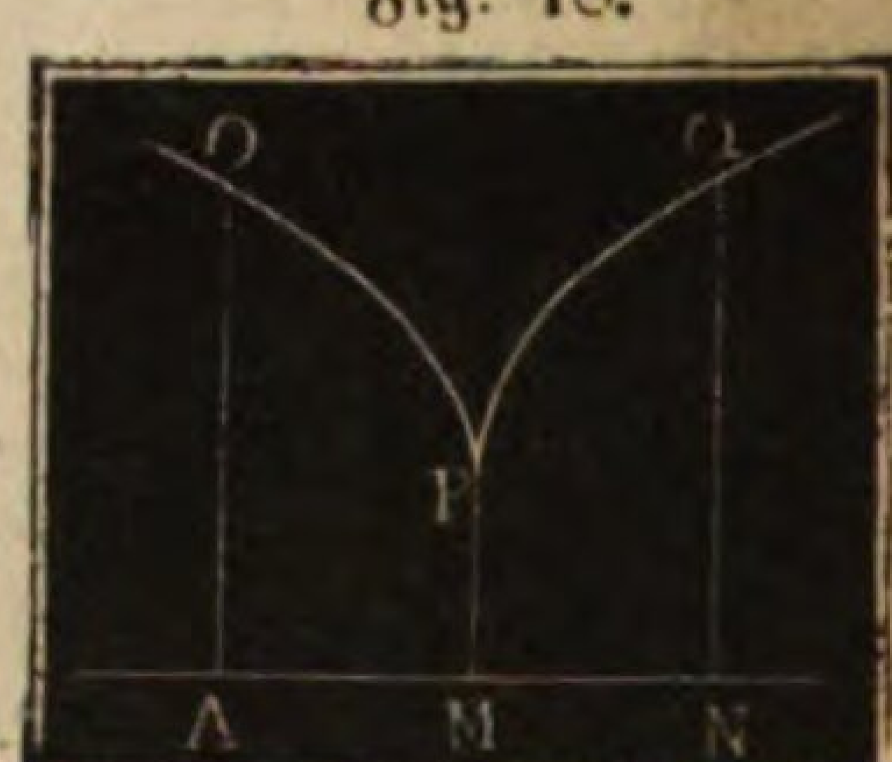


Fig. 18.



d. i. $x = 1$ und $x = 2$. Diese Werthe in die Formel

$$y = 6x - {}^9\!/_2 x^2 + x^3$$

gesetzt, ergiebt sich der Maximalwerth von y: $MP = 6 - {}^9\!/_2 + 1 = {}^5\!/_2$ und der Minimalwerth $NQ = 12 - 18 + 8 = 2$.

Ferner für die Curve OPQ, Fig. 18., deren Gleichung $y = a + (x - b)^{2/3}$

ist, hat man $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}(x-b)^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-b}}$, und um nun den Minimalwerth MP von y zu finden, setzt man $\frac{dy}{dx} = \infty$,

d. i. $\frac{2}{3\sqrt[3]{x-b}} = \infty$, $3\sqrt[3]{x-b} = 0$, d. i. $x = b$. Der entsprechende Minimalwerth ist $y = a$; nimmt man dagegen $x = 0$, so erhält man $y = a + \sqrt[3]{b^2}$, und nimmt man $x = 2b$, so stellt sich ebenfalls $y = a + \sqrt[3]{b^2}$, also in beiden Fällen ein größerer Werth von y heraus.

Art. 10. Sowie bei einer vom Anfangspunkte A aus aufsteigenden Curve y mit x wächst, und deshalb dy positiv ist, bei einer niedersteigenden hingegen y abnimmt, wenn x größer wird, und deshalb dy negativ ausfällt, und endlich an der Stelle, wo die Curve mit der Coordinatenaxe AX parallel läuft, dy Null ist, ebenso sind die gleichen Abscissen-Elementen $dx = MN = NO = PS = QT \ldots$ entsprechenden Ordinaten-Elemente $SQ = PS\ tang.\, QPS$, d. i. $dy = dx\,.\,tang.\,\alpha_1$,
$TR = QT\ tang.\, RQT$, d. i. $dy = dx\,.\,tang.\,\alpha_2$ u. s. w.
und also auch die Tangentenwinkel α_1, α_2 u. s. w. bei einer convexen Curve APR, Fig. 19. im Wachsen und bei einer concaven Curve APR, Fig. 20.,

Fig. 19.

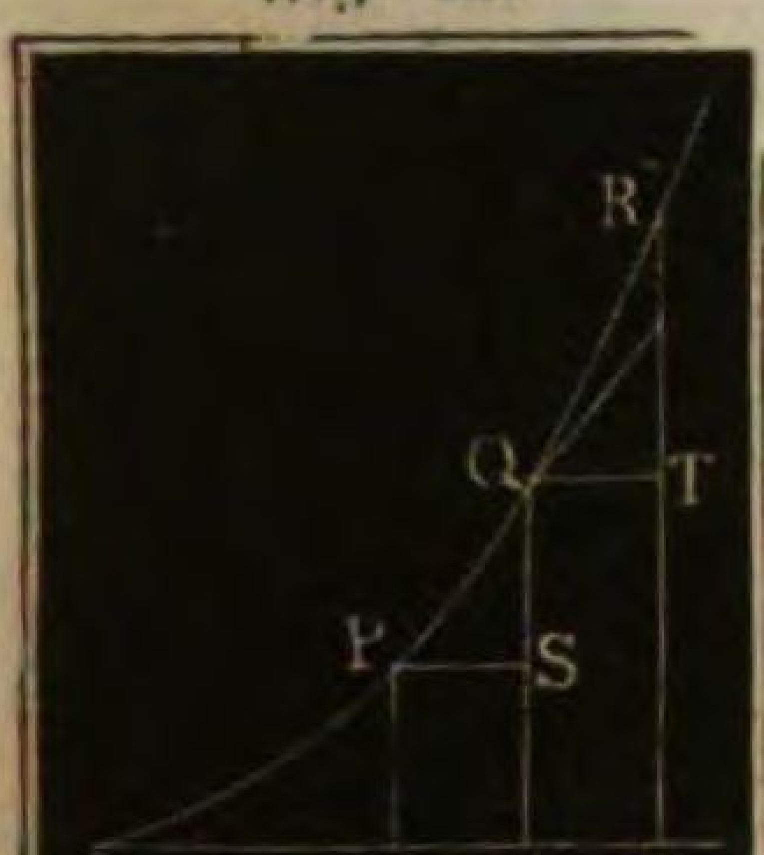


Fig. 20.

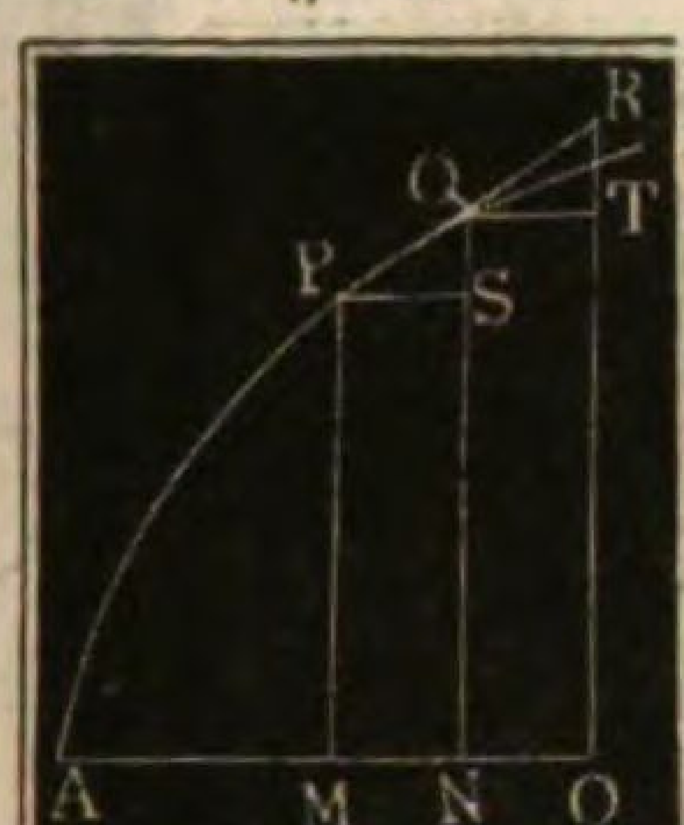
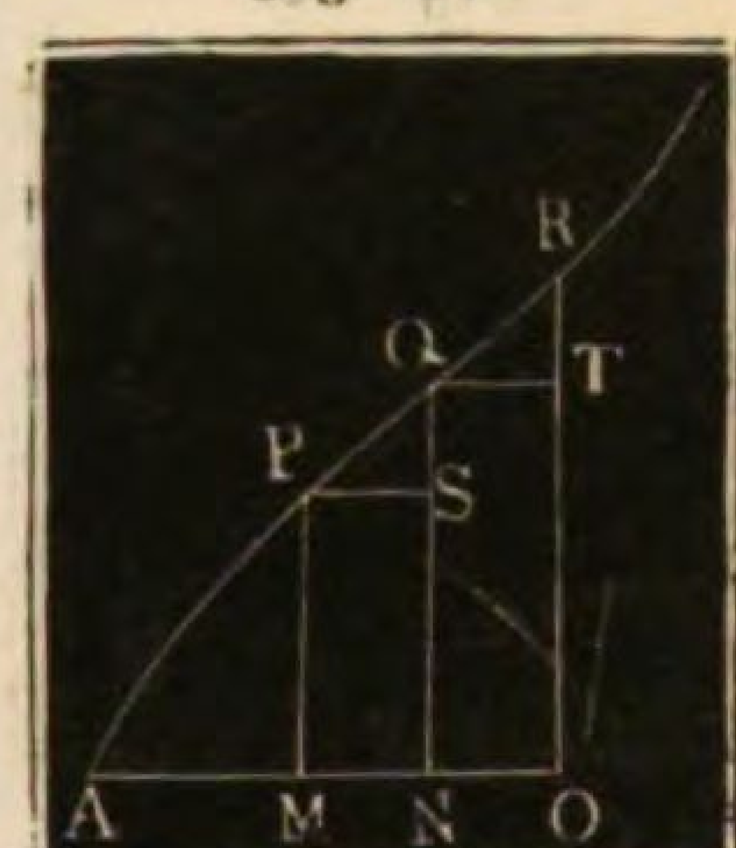


Fig. 21.



im Abnehmen begriffen, es ist folglich im ersten Falle

$$d(tang\ \alpha) = d\left(\frac{dy}{dx}\right) \text{ positiv,}$$

und im zweiten $d\,(tang.\,\alpha) = d\left(\frac{dy}{dx}\right)$ negativ, und man hat endlich auch für den **Wendepunkt** Q, Fig. 21., d. i. für die Stelle Q der Curve, wo Convexität in Concavität übergeht, oder das Umgekehrte stattfindet, auch $QS = RT$, und daher

$$(tang.\,\alpha) = d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \text{Null.}$$

Es gilt also die Regel: ist das Differenzial der Tangente des Tangentenwinkels positiv, so besitzt die Curve Convexität, ist es negativ, so hat dieselbe Concavität, und ist es Null, so hat man es mit einem Wendepunkte der Curve zu thun.

Auch ist hiernach leicht Folgendes zu ermessen. Die Stelle, wo die Curve parallel mit der Abscissenaxe läuft, für welche also $tang. \alpha = 0$ ist, entspricht einem Minimo, Maximo oder Wendepunkte der Curve, wenn diese convex, concav oder keines von beiden, wenn also

$d\,(tang. \alpha)$ positiv, oder negativ oder Null ist.

Dagegen die Stelle, wo eine Curve mit der Ordinatenaxe parallel läuft, also $tang. \alpha = \infty$ ist, entspricht einem Minimo, Maximo oder Wendepunkte der Curve, wenn dieselbe concav, convex oder theils concav, theils convex, wenn also $d\,(tang. \alpha)$ vor und nach dieser Stelle negativ,

» » » » » positiv, oder

vor dieser Stelle ein anderes Zeichen hat als nach derselben.

Ein Curvenstück mit Wendepunkt Q der ersten Art führt Figur 22., und ein solches mit einem Wendepunkt der zweiten Art Figur 23. vor Augen. Man sieht, die entsprechende Ordinate NQ ist weder ein Maximum noch ein Minimum, denn es sind in keinem Falle die benachbarten Ordinaten MP und OR beide größer oder kleiner als NQ.

Fig. 22

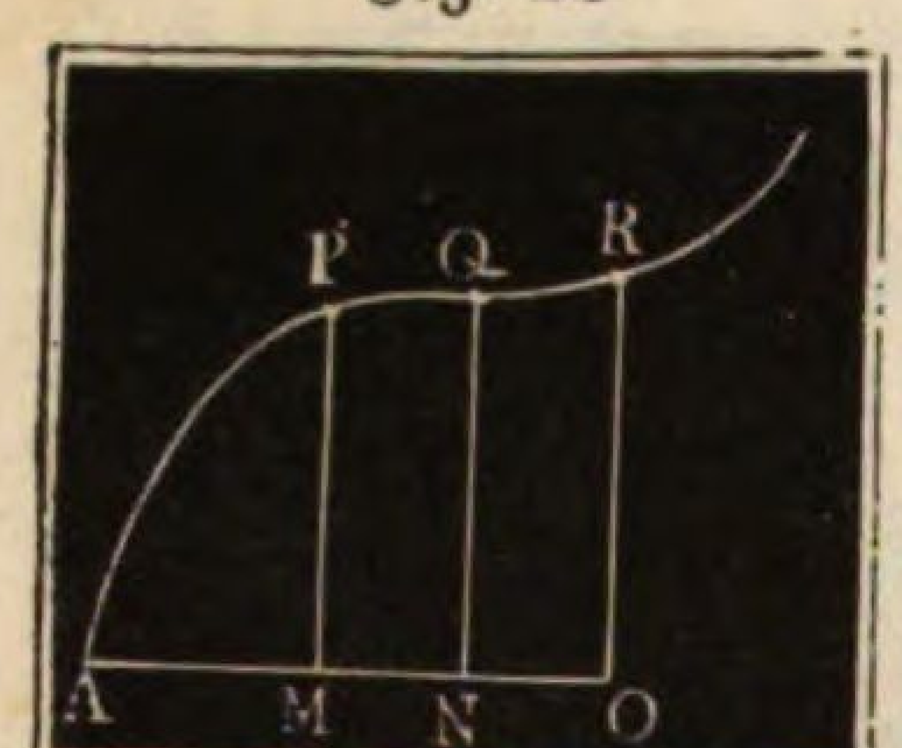


Fig. 23.

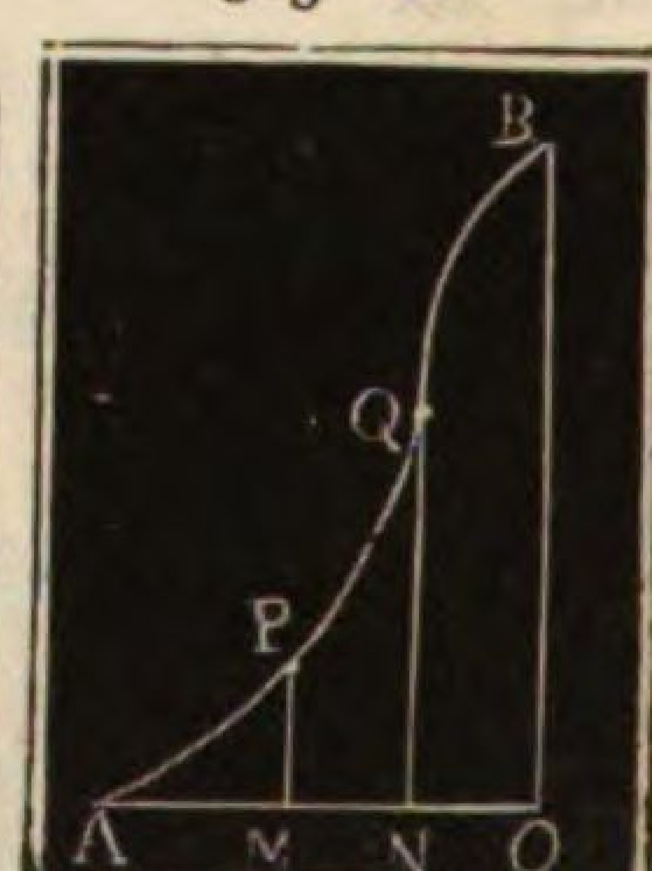
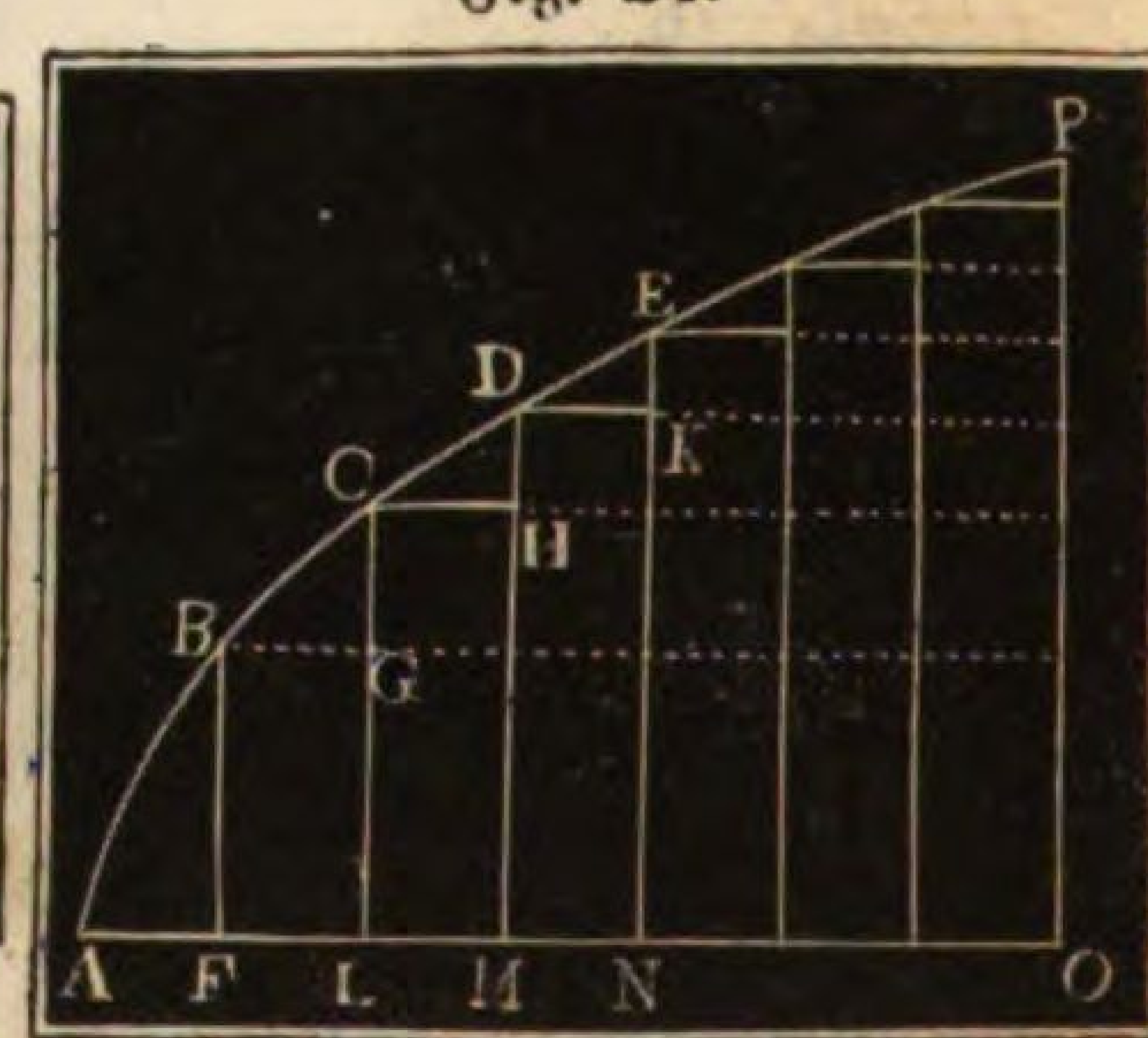


Fig. 24.



Art. 11. Die der Abscisse $AO = x$, Fig. 24., entsprechende Ordinate $OP = y$ läßt sich aus unendlich vielen ungleichen Elementen $dy = FB$, GC, HD, KE . . . zusammensetzen, die lauter gleichen Elementen $dx = AF = FL = LM = MN$ . . . entsprechen. Wäre daher $dy = \varphi(x) \,.\, dx$ gegeben, so würde man y durch Summation aller derjenigen Werthe von dy finden, die sich herausstellen wenn man in $\varphi(x) \,.\, dx$ statt x nach und nach $dx, 2\,dx, 3\,dx, 4\,dx$.. bis $n\,dx = x$ einsetzt. Diese Summation deutet man durch das sogenannte Integralzeichen $\int$ an, welches man vor den allgemeinen Ausdruck für die zu summirenden Elemente setzt, schreibt also statt

$$y = [\varphi(dx) + \varphi(2\,dx) + \varphi(3\,dx) + \ldots + \varphi(x)]\,dx,$$
$$y = \int \varphi(x)\,dx.$$

Auch nennt man in diesem Falle y das **Integral** von $\varphi(x)\,dx$, so wie $\varphi(x)\,dx$ das Differenzial von y.

Zuweilen kann man das Integral $\int\varphi(x)\,dx$ durch wirkliches Summiren der Reihe $\varphi(dx)$, $\varphi(2\,dx)$, $\varphi(3\,dx)$ u. s. w bestimmen, viel einfacher ist es jedoch bei Ausmittelung eines Integrals eine der im Folgenden entwickelten Regeln der sogenannten **Intregralrechnung** in Anwendung zu bringen.

Für das Differenzial $dy = mx\,dx$ hat man z. B. das Integral

$$y = \int mx\,dx = m\,dx\,(dx + 2\,dx + 3\,dx + \ldots + x)$$
$$= \left(1 + 2 + 3 + \ldots + \frac{x}{dx}\right) m\,dx^2,$$

oder, da 1, 2, 3 . . . $\frac{x}{dx}$ eine gewöhnliche arithmetische Progression bildet (s. Ingenieur S. 141.), deren erstes Glied $= 1$, letztes Glied $= \frac{x}{dx}$ und Anzahl der Glieder ebenfalls $= \frac{x}{dx}$ ist,

$$\int mx\,dx = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{dx}\right)\frac{x}{dx}\,m\,dx^2,$$

und einfacher, da 1 gegen die unendlich große Zahl $\frac{x}{dx}$ verschwindet,

$$\int mx\,dx = \tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{dx}\right)^2 .\, m\,dx^2 = \tfrac{1}{2} m x^2.$$

Art. 12. Aus der Formel $d[a + mf(x)] = m\,df(x)$ folgt durch Umkehrung $\int m\,df(x) = a + mf(x) = a + m\int df(x)$,

oder $df(x) = \varphi(x)\,.\,dx$ gesetzt,

$$\text{I.}\quad \int m\varphi(x)\,dx = a + m\int\varphi(x)\,dx,$$

und hieraus folgt, daß der **constante Faktor** m beim Integriren sowie beim Differenziiren **unverändert bleibt**, und daß durch bloßes Integriren ein etwa vorhandenes **constantes Glied** a **nicht bestimmt werden kann**; daß also das Integriren allein ein noch **unbestimmtes** Integral liefert. Um das constante Glied zu finden, müssen zwei zusammengehörige Werthe von x und $y = \int\varphi(x)\,dx$ bekannt sein. Ist für $x = c$, $y = k$, und hat man $y = \int\varphi(x)\,dx = a + f(x)$ gefunden, so muß auch $k = a + f(c)$ sein, und es giebt daher die Subtraction $y - k = f(x) - f(c)$, also in diesem Falle

$$y = \int\varphi(x)\,dx = k + f(x) - f(c);$$

und man hat hiernach die Constante $a = k - f(c)$.

Wenn man z. B. weiß, daß das unbestimmte Integral

$$y = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} \text{ für } x = 1,\ y = 3 \text{ giebt,}$$

so hat man die nöthige Constante $a = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, und daher das Integral

$$y = \int x\,dx = a + \frac{x^2}{2} = \frac{5 + x^2}{2}.$$

Selbst die Constantenbestimmung läßt das Integral noch unbestimmt, weil noch für x als Urvariable jeder beliebige Werth angenommen werden kann; will man aber einen ganz bestimmten Werth k_1 des Integrales haben, der einem bestimmten Werth c_1 von x entspricht, so muß man noch diesen in das gefundene Integral ein-, also $k_1 = k + f(c_1) - f(c)$ setzen.

So giebt z. B. $y = \int x\,dx = \frac{5+x^2}{2}$, für $x = 5$, $y = 15$.

Meist ist derjenige Werth von x bekannt, bei welchem $y = 0$ ist; in diesem Falle hat man also $k = 0$, und es führt daher das unbestimmte Integral $\int \varphi(x)\,dx = f(x)$ auf das bestimmte $k_1 = f(c_1) - f(c)$, das also gefunden wird, wenn man in den Ausdruck $f(x)$ für das unbestimmte Integral die beiden gegebenen Grenzwerthe c_1 und c von x einsetzt, und die erhaltenen Werthe von einander subtrahirt. Um dies anzudeuten, schreibt man statt $\int \varphi(x)\,dx$, $\int_c^{c_1} \varphi(x)\,dx$, wenn also z. B. $\int \varphi(x)\,dx = \frac{x^2}{2}$ ist, $\int_c^{c_1} \varphi(x)\,dx = \frac{c_1^2 - c^2}{2}$.

Die Umkehrung der Differenzialformel $d[f(x) + \varphi(x)] = df(x) + d\varphi(x)$ giebt die Integralformel $\int [df(x) + d\varphi(x)] = f(x) + \varphi(x)$, oder wenn man $df(x) = \psi(x)\,dx$ und $d\varphi(x) = \chi(x)\,dx$ setzt,

$$\text{II.} \quad \int [\psi(x)\,dx + \chi(x)\,dx] = \int \psi(x)\,dx + \int \chi(x)\,dx.$$

Es ist also hiernach das Integral von einer Summe mehrerer Differenzialien gleich der Summe von den Integralen der einzelnen Differenzialien.

$$\text{Z. B.} \int (3 + 5x)\,dx = \int 3\,dx + \int 5x\,dx = 3x + \tfrac{5}{2}x^2.$$

Art. 13. Die wichtigste Differenzialformel des Artikels 8,

$$d(x^n) = nx^{n-1}\,dx,$$

führt durch Umkehrung ebenfalls auf die wichtigste Integralformel. Es ist hier $\int nx^{n-1}\,dx = x^n$, oder $n\int x^{n-1}\,dx = x^n$, oder $\int x^{n-1}\,dx = \frac{x^n}{n}$, setzt man also $n - 1 = m$, und hiernach

$n = m + 1$, so erhält man folgendes wichtige **Integral**:

$$\int x^m\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1},$$

das allein in der Anwendung mindestens eben so oft vorkommt, als alle übrigen zusammen.

Diese Form des Integrales weist auch darauf hin, daß dieses dem in Art. 7. abgehandelten und in Fig. 15. abgebildeten Curvensysteme entspreche.

Hiernach ist z. B. $\int 5x^3 dx = 5 \int x^3 dx = {}^5\!/_4 x^4$; ferner

$$\int \sqrt[3]{x^4}\, dx = \int x^{4/3} dx = {}^3\!/_7 x^{7/3} = {}^3\!/_7 \sqrt[3]{x^7};$$

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = {}^1\!/_2 \int x^{-1/2} dx = {}^1\!/_2 \frac{x^{1/2}}{1/2} = \sqrt{x};$$

$$\int (4 - 6x^2 + 5x^4)\, dx = \int 4 dx - \int 6x^2 dx + \int 5x^4 dx$$
$$= 4\int dx - 6\int x^2 dx + 5\int x^4 dx = 4x - 2x^3 + x^5;$$ ferner,

wenn man $3x - 2 = u$, also $3dx = du$, oder $dx = \frac{du}{3}$ einsetzt,

$$\int \sqrt{3x-2}\; dx, = \int u^{1/2} \frac{du}{3} = {}^1\!/_3 \frac{u^{3/2}}{3/2} = {}^2\!/_9 \sqrt{u^3}$$
$$= {}^2\!/_9 \sqrt{(3x-2)^3};$$

endlich, wenn $2x^2 - 1 = u$, also $4xdx = du$, d. i. $xdx = \frac{du}{4}$ gesetzt wird:

$$\int \frac{5x\,dx}{\sqrt[3]{2x^2-1}} = \int \frac{5\,du}{4\sqrt[3]{u}} = {}^5\!/_4 \int u^{-1/3} du = {}^5\!/_4 \frac{u^{2/3}}{2/3} = {}^{15}\!/_8 \sqrt[3]{u^2}$$
$$= {}^{15}\!/_8 \sqrt[3]{(2x^2-1)^2}.$$

Durch Hinzufügung der Grenzwerthe lassen sich diese unbestimmten Integrale sogleich in bestimmte verwandeln, z. B.

$$\int_1^2 5x^3 dx = {}^5\!/_4 (2^4 - 1^4) = {}^5\!/_4 . (16 - 1) = 18\,{}^3\!/_4,$$

$$\int_4^9 \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{9} - \sqrt{4} = 1,$$

$$\int_1^6 \sqrt{3x-2}\; .\, dx = {}^2\!/_9 (\sqrt{16^3} - \sqrt{1^3}) = {}^2\!/_9 (64 - 1) = 14.$$

Wäre z. B. $\int (4 - 6x^2 + 5x^4)\, dx = 7$ für $x = 0$, so hätte man allgemein: $\int (4 - 6x^2 + 5x^4) dx = 7 + 4x - 2x^3 + x^5$.

Art. 14. Die binomische Reihe:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1} x + \frac{n(n-1)}{1.2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} x^3 + \ldots,$$

giebt, wenn man n unendlich groß setzt, so daß 1, 2, 3 u. s. w. gegen n verschwindet,

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n^2}{1.2}x^2 + \frac{n^3}{1.2.3}x^3 + \ldots$$

Setzt man ferner $x = dx$, und statt $n = \frac{x}{dx}$, so erhält man

$$(1+dx)^{\frac{x}{dx}} = 1 + \frac{x}{dx} \cdot dx + \frac{1}{1.2}\left(\frac{x}{dx}\right)^2 dx^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{x}{dx}\right)^3 dx^3 + \ldots$$
$$= 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots,$$

nehmen wir endlich $x = 1$, so erhalten wir

$$(1+dx)^{\frac{1}{dx}} = 1 + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{24} + \ldots = 2{,}71828\ldots,$$

eine Zahl, welche stets durch den Buchstaben e bezeichnet und die **Basis des natürlichen oder hyperbolischen Potenzen- oder Logarithmen-Systemes** genannt wird.

Da $(1 + dx)^{\frac{x}{dx}} = \left[(1+dx)^{\frac{1}{dx}}\right]^x = e^x$, so hat man hiernach für die sogenannte **Exponentialfunktion** e^x die Reihe:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} \ldots$$

Setzt man $a = e^{1/m}$, so ist $1/m = Log. nat. a$, d. i. der **natürliche oder hyperbolische Logarithme** von a, und daher

$$a^x = (e^{1/m})^x = e^{\frac{x}{m}} = 1 + \frac{1}{1}\left(\frac{x}{m}\right) + \frac{1}{1.2}\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{x}{m}\right)^3 + \ldots$$

Setzt man $y = a^x = e^{\frac{x}{m}}$, so hat man umgekehrt

$$x = Log._a\, y \text{ und } \frac{x}{m} = Log.\, nat.\, y, \text{ daher}$$

$$Log._a\, y = m\, Log.\, nat.\, y, \text{ so wie umgekehrt}$$

$$Log\, nat.\, y \text{ oder } Log._e\, y = \frac{1}{m}\, Log._a\, y.$$

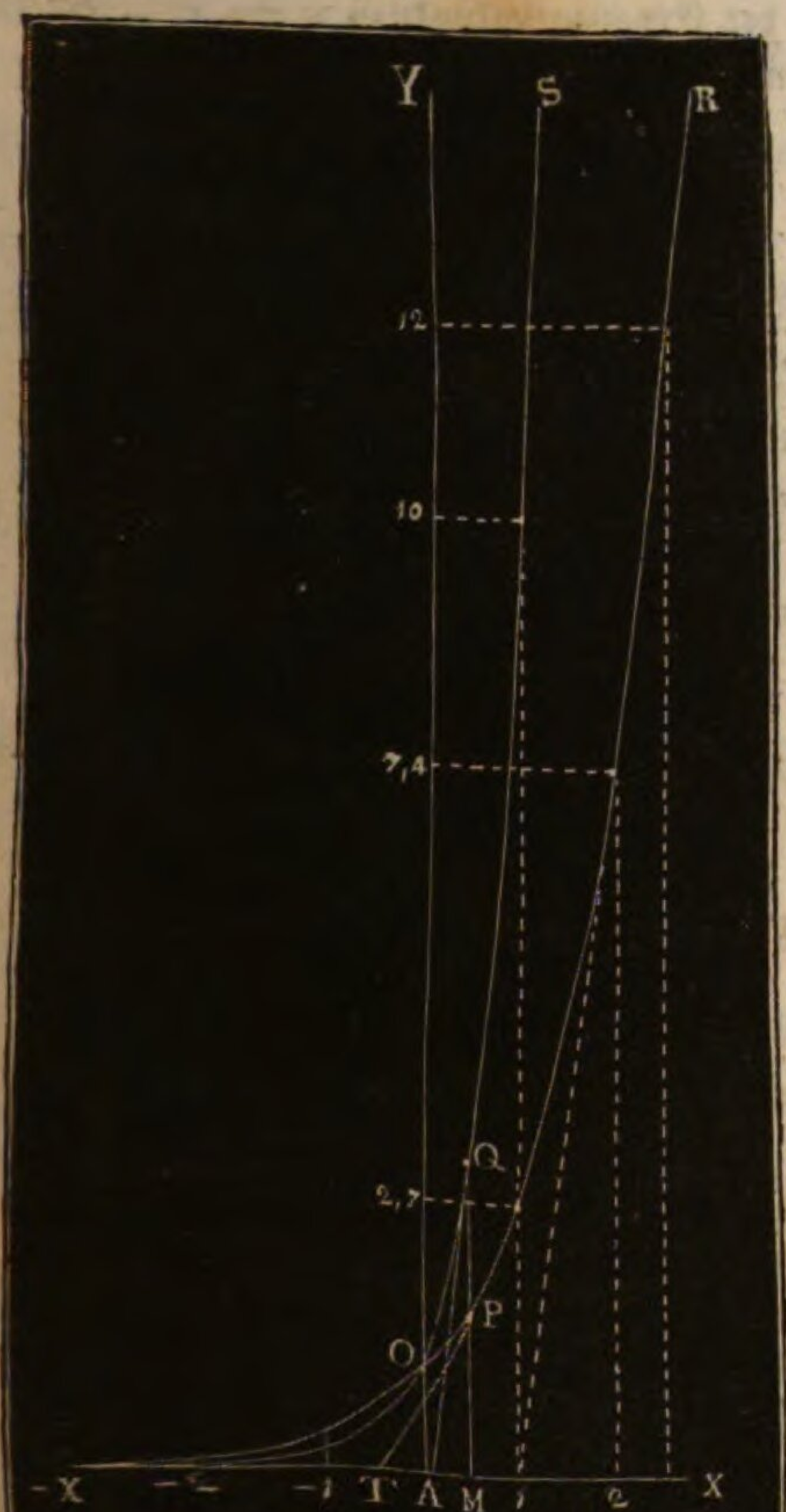
Die Zahl m heißt der **Modul** des der Grundzahl a entsprechenden Logarithmensystemes. Es läßt sich also mit Hülfe desselben der natürliche Logarithme in jeden künstlichen, und umgekehrt ein solcher in den natürlichen verwandeln. Für das **Briggische** Logarithmensystem ist die Basis

$a = 10$, daher $1/m = Log.\ nat.\ 10 = 2{,}30258\ldots$, und umgekehrt der Modul $m = \frac{1}{Log.\ nat.\ 10} = 0{,}43429\ldots$

Es ist also $Log.\ y = 0{,}43429\ Log.\ nat.\ y$, und
$Log.\ nat.\ y = 2{,}30258\ Log.\ y$.
(Vergleiche Ingenieur, Seite 136 u. s. w.)

Art. 15. Der Lauf der Curven, welche den Exponentialfunktionen $y = e^x$ oder $y = 10^x$ entsprechen, wird durch Fig. 25. veranschaulicht.

Fig. 25.



Für $x = 0$ ist in beiden Fällen $y = e^0 = a^0 = 1$, deshalb gehen denn auch beide Curven PR und QS durch denselben Punkt (O) in der Ordinatenaxe. Für $x = 1$, giebt $y = e^x = 2{,}718\ldots$, und $y = 10^x = 10$, für $x = 2$, giebt $y = e^x = 2{,}718^2 = 7{,}389$ und $y = 10^x = 10^2 = 100$ u. s. w.; es steigen also auf der positiven Seite der Abscissenaxe beide Curven, zumal aber die letztere, sehr stark an; dagegen ist für $x = -1$:

$$e^x = e^{-1} = \frac{1}{2{,}718\ldots} = 0{,}368$$ und

$$10^x = 10^{-1} = 0{,}1;$$

ferner für $x = -2$,

$$e^x = e^{-2} = \frac{1}{2{,}718^2} = 0{,}135$$

und $10^x = 10^{-2} = 0{,}01$; endlich für $x = -\infty$, geben beide Gleichungen

$$e^{-\infty} = \frac{1}{e^\infty} = \frac{1}{a^\infty} = 0.$$

Es nähern sich also beide Curven auf der negativen Seite der Abscis-

senaxe dieser Axe immer mehr und mehr, und zwar die letztere mehr als die erstere; jedoch findet ein wirkliches Zusammentreffen mit dieser Axe nie Statt.

Da aus $y = e^x$, $x = Log.\ nat.\ y$ und ebenso

aus $y = a^x$, $x = Log._a\ y$ folgt,

so geben diese Curven auch eine Scala der natürlichen und Briggischen Logarithmen ab; es sind nämlich die Abscissen die Logarithmen der Ordinaten; es ist z. B. $AM = Log. nat. MP = Log.\ MQ$ u. s. w.

Art. 16. Das Differenzial der Exponentialfunktion $y = a^x$ ergiebt sich durch Anwendung der allgemeinsten Regel des Differenziirens:

$$dy = a^{x+dx} - a^x = a^x \cdot a^{dx} - a^x = a^x\ (a^{dx} - 1);$$

da aber die Exponentialreihe

$$a^x = 1 + \frac{x}{m} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \ldots,$$

$$a^{dx} = 1 + \frac{dx}{m} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{dx}{m}\right)^2 + \ldots$$

giebt, und der letzte Werth $a^{dx} = 1 + \frac{dx}{m}$ gesetzt werden kann, so erhält man hiernach $dy = a^x\left(1 + \frac{dx}{m} - 1\right)$, d. i.

I. $d\,(a^x) = \frac{a^x\,dx}{m} = Ln.a.a^x\,dx$, und $a = e$, so wie $m = 1$ gesetzt.

I*). $d\ (e^x) = e^x\,dx$.

Der Tangentenwinkel α der Exponentialcurve ist folglich bestimmt durch die einfache Formel:

$$tang.\ \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{a^x\,dx}{m\,dx} = \frac{a^x}{m} = \frac{y}{m} = y\ Log.\ nat.\ a.$$

Bei der Curve QS, Fig. 25., ist folglich die $Subtang. = y\ cotg.\ \alpha = m$, also constant, und bei der Curve PR ist sie stets $= 1$.

Durch Umkehrung giebt die erste der beiden Differenzialformeln:

$$dx = m \cdot \frac{d\,(a^x)}{a^x},$$ oder statt x, y gesetzt,

$$dy = m\,\frac{d\,(a^y)}{a^y};$$

nun ist aber für $x = a^y$, $y = Log._a\ x$, daher hat man:

II. $d\,(Log._a\,x) = m\,\frac{dx}{x} = \frac{dx}{x\;Log.nat.a}$, so wie

II*). $d\,(Log.nat\;x) = \frac{dx}{x}$.

Mittels dieser vier Regeln sind nun leicht folgende Beispiele durchzurechnen.

$d\,(e^{3x+1}) = e^{3x+1}\,.\,d\,(3x+1) = 3e^{3x+1}\,dx.$

$d\,(Log.nat\;\sqrt[2]{x}) = \frac{d\,\sqrt[2]{x}}{\sqrt{x}} = \frac{d\,(x^{1/2})}{x^{1/2}} = {}^1/_2\,\frac{x^{-1/2}dx}{x^{1/2}} = \frac{dx}{2x}$,

oder auch $= d({}^1/_2 Log.nat.x) = {}^1/_2\,d\,(Log.nat.x) = {}^1/_2 \cdot \frac{dx}{x}$.

$$d\;Log\;nat.\left(\frac{2+x}{x^2}\right) = d\;[Log.\;(2+x) - Log.\;x^2]$$
$$= d\;Log.\;(2+x) - d\;Log.\;(x^2)$$
$$= \frac{dx}{2+x} - 2\,\frac{dx}{x} = -\,\frac{(4+x)\,dx}{x\,(2+x)}.$$

Art. 17. Wenn man die Differenzialformeln des vorigen Artikels umkehrt, so stößt man, wie folgt, auf andere wichtige Integralformeln.

Aus $d\,(a^x) = \frac{a^x\,dx}{m}$, folgt $\int\frac{a^x\,dx}{m} = a^x$, d. i.

I. $\int a^x\,dx = m a^x = a^x : Log.\;nat.\;a$, und daher

I*). $\int e^x\,dx = e^x$.

Ferner aus $d\,(Log._a\;x) = \frac{m\,dx}{x}$, folgt $\int\frac{m\,dx}{x} = Log._a x$, d. i.

II. $\int\frac{dx}{x} = \frac{1}{m}\;Log._a\;x = Log.\;nat.\;x$, und dasselbe giebt auch

die Formel $d\,(Log.\;nat.\;x) = \frac{dx}{x}$.

Hiernach lassen sich leicht folgende Beispiele berechnen.

$\int e^{5x-1}dx = {}^1/_5\int e^{5x-1}\,d\,(5x-1) = {}^1/_5\;e^{5x-1}$.

$\int\frac{3\,dx}{7x+2} = {}^3/_7\int\frac{d(7x+2)}{7x+2} = {}^3/_7\;Log.\;nat.\;(7x+2)$

$$\int\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)dx = \int\left(x + 1 + \frac{2}{x-1}\right)dx$$
$$= \int x\,dx + \int dx + 2\int\frac{d\,(x-1)}{x-1} = \frac{x^2}{2} + x + 2\,Log.\,nat.\,(x-1).$$

Die erste Integralformel $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$ läßt das letzte Integral unbestimmt, denn $m = -1$ gesetzt, folgt

$$\int \frac{dx}{x} = \int x^{-1} dx = \frac{x^0}{0} + \text{eine Constante} = \infty + \text{Constante};$$

setzen wir aber $x = 1 + u$, also $dx = du$, so erhalten wir

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{1+u} = (1 - u + u^2 - u^3 + u^4 - \ldots)\, du, \text{ und daher}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{1+u} = \int (1 - u + u^2 - u^3 + u^4 - \ldots)\, du$$

$$= \int du - \int u\,du + \int u^2 du - \int u^3 du + \ldots$$

$$= u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \ldots;$$

es läßt sich also auch $Log. nat. (1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \ldots$, oder

$$\text{III.} \quad Log. nat. x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots$$

setzen.

Mit Hülfe dieser Reihe lassen sich die Logarithmen solcher Zahlen berechnen, welche wenig von 1 abweichen, hat man aber von größeren Zahlen die Logarithmen zu finden, so schlage man folgenden Weg ein.

Nimmt man u negativ, so giebt die vorletzte Reihe:

$$Log. nat. (1 - u) = -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} - \ldots;$$

und es folgt nun durch die Subtraction beider Reihen:

$$Log. nat. (1+u) - Log. nat. (1-u) = 2\left(u + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \ldots\right), \text{ d. i.}$$

$$Log. nat. \left(\frac{1+u}{1-u}\right) = 2\left(u + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \ldots\right), \text{ oder}$$

$$\frac{1+u}{1-u} = x, \text{ also } u = \frac{x-1}{x+1} \text{ gesetzt,}$$

$$\text{IV.} \quad Log. nat. x = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \ldots\right].$$

Diese Reihe ist auch zur Bestimmung der Logarithmen von solchen Zahlen zu gebrauchen, welche bedeutend von 1 abweichen, da $\frac{x-1}{x+1}$ stets unter 1 ist.

Es ist auch $Log.(x+y)-Log.x=Log.\left(\frac{x+y}{x}\right)=Log.\left(1+\frac{y}{x}\right)$

$$=\frac{y}{x}-\tfrac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2+\tfrac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^3-\text{ic.}$$

$$=2\left[\frac{y}{2x+y}+\tfrac{1}{3}\left(\frac{y}{2x+y}\right)^3+\tfrac{1}{5}\left(\frac{y}{2x+y}\right)^5+\ldots\right]$$

und daher

V. $$Log.(x+y)=Log.x+2\left[\frac{y}{2x+y}+\tfrac{1}{3}\left(\frac{y}{2x+y}\right)^3+\ldots\right].$$

Diese Formel ist anzuwenden, um aus einem Logarithmen einen nächst größeren zu berechnen.

Z. B. $$Log.nat.2=2\left[\frac{2-1}{2+1}+\tfrac{1}{3}\cdot\left(\frac{2-1}{2+1}\right)^3+\ldots\right]$$

$$=2\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{27}+\tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{1}{243}+\ldots\right)$$

$$=2\left\{\begin{matrix}0{,}33333\\0{,}01234\\0{,}00082\\0{,}00007\end{matrix}\right\}=2\;.\;0{,}34656=0{,}69312,$$

genauer $= 0{,}69314718.$

$Log\ nat.8=Log.nat.2^3=3\,Log.nat.2$ ist hiernach $=2{,}0794415,$ und endlich nach der letzten Formel

$$Log.nat.10=Log.nat.(8+2)$$

$$=Log.\,nat.8+2\left[\frac{2}{16+2}+\tfrac{1}{3}\left(\frac{2}{16+2}\right)^3+\ldots\right]$$

$$=2{,}0794415+0{,}2231436=2{,}302585.$$

(Vergl. Artikel 14.).

Art. 18. Von praktischer Wichtigkeit sind endlich noch die **trigonometrischen** und **Kreisfunktionen**, weshalb wir deren Differenziale und Integrale ebenfalls noch kennen lernen müssen.

Die Funktion $y=sin.x$ giebt für $x=0,\ y=0;$

für $x=\frac{\pi}{4}=\frac{3{,}141}{4}=0{,}785\ldots\ y=\sqrt{\tfrac{1}{2}}=0{,}707,$

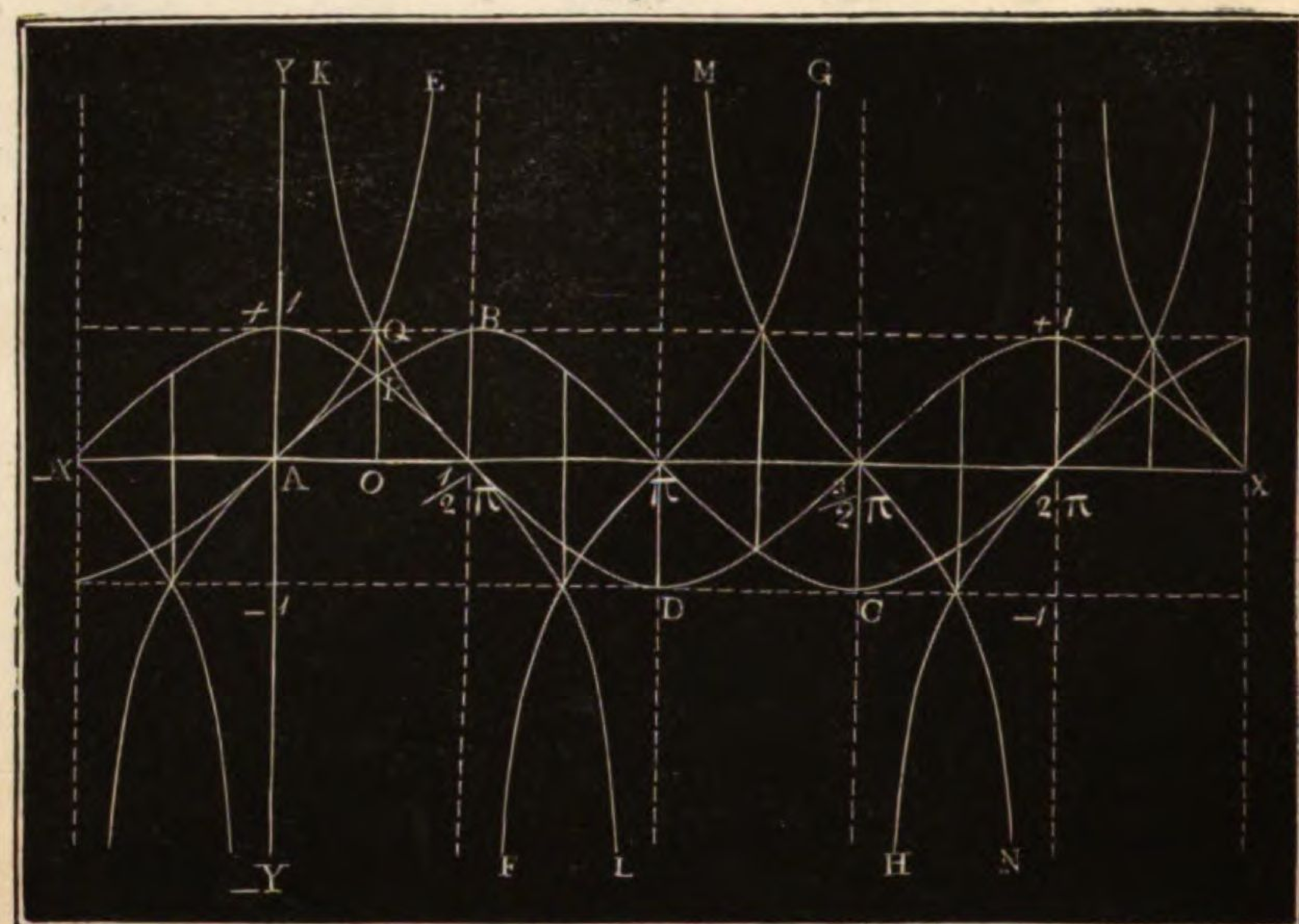
für $x=\frac{\pi}{2},\ y=1,$ für $x=\pi,\ y=0;$

für $x=\tfrac{3}{2}\pi,\ y=-1,$ für $x=2\pi,\ y=0$ u. s. w.,

trägt man daher x als Abscissen AO und y als die entsprechenden Ordinaten OP auf, so erhält man die schlangenförmige Curve ($APBC\ 2\pi$),

Fig. 26., welche sich nach beiden Seiten von A ins Unendliche fortsetzen läßt. Die Funktion $y = cos.x$ giebt für $x = 0$, $y = 1$, für $x = \frac{\pi}{4}$,

Fig. 26.



$y = \sqrt{1/2}$, für $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$, für $x = \pi, y = -1$, für $x = 3/2\,\pi$, $y = 0$, für $x = 2\pi$, $y = 1$ u. s. w.; ihr entspricht daher genau dieselbe Schlangenlinie $\left(+ 1\, P \frac{\pi}{2}\, D \frac{3\pi}{2} + 1\right)$ wie der Sinusfunktion, nur ist dieselbe auf den Abscissenaxen um $1/2\,\pi = 1{,}570$ . . weiter vor oder hinter der Sinuscurve.

Ganz anders sind aber die Curven gestaltet, welche den Funktionen $y = tang.x$ und $y = cotang.x$ entsprechen. Setzt man in $y = tang.x$, $x = 0$, $1/4\,\pi$, $1/2\,\pi$, so erhält man $y = 0, 1, \infty$, und daher eine Curve (AQE), welche sich einer durch den Theilpunkt $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ der Abscissenaxe AX gehenden Parallele zur Ordinatenaxe AY immer mehr und mehr nähert, ohne sie je zu erreichen. Nimmt man ferner $x = \frac{\pi}{2}$, π, $3/2\,\pi$, so erhält man $y = -\infty, 0, +\infty$, und daher eine Curve $(F\pi G)$, die sich den Parallelen durch $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ und $(3/2\,\pi)$ bis ins Unendliche nähert, oder wie man sagt, diese Parallelen zu Asymptoten hat.

Bei ferneren Annahmen für x wiederholen sich dieselben Werthe von y, und deshalb wird also auch der Funktion $y = tang.\,x$ durch lauter Curven wie $(F\pi G)$, welche um π in der Richtung der Abscissenaxe von einander abstehen, entsprochen.

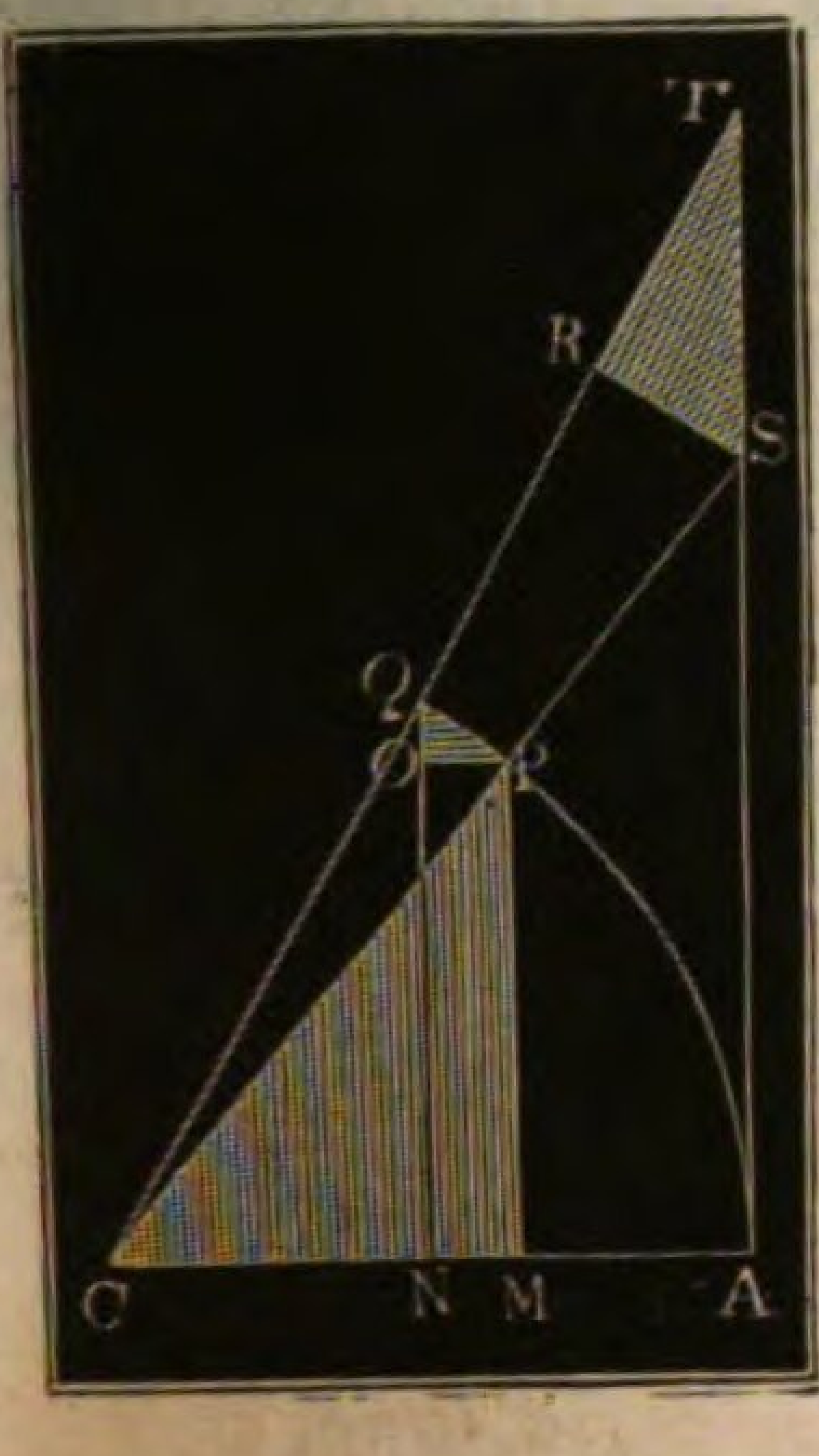
Die Funktion

$y = colang.\,x$, giebt für $x = 0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \pi;\ y = \infty,\ 1,\ 0,\ -\infty,$

daher entspricht derselben eine Curve $(KQ\frac{\pi}{2}L)$, welche von der Tangentencurve nur der Lage nach verschieden ist; auch ist leicht einzusehen, daß noch unendlich viele Curvenzweige, wie z. B. $(M\frac{3\pi}{2}N)$ u. s. w. dieser Funktion angehören.

Art. 19. Die Differenziale der trigonometrischen Linien oder Funktionen ergeben sich durch Betrachtung der Figur 27., in welcher

Fig. 27.



$CA = CP = CQ = 1$, Bog. $AP = x$, $PQ = dx$, ferner

$PM = sin.\,x \quad CM = cos.\,x,\ AS = tang.\,x,$ endlich

$OQ = NQ - MP = sin.(x + dx) - sin.\,x$
$= d\ sin.\,x,$

$OP = -(CN - CM) = -cos.(x + dx) - cos.\,x$
$= -\,d\ cos.\,x,$ und

$ST = AT - AS = tang.(x + dx) - tang.\,x$
$= d\ tang.\,x$ ist.

Da das Bogenelement PQ rechtwinkelig auf dem Halbmesser CP steht, und der Winkel PCA zwischen zwei Linien CP und CA dem Winkel PQO zwischen ihren Perpendikeln PQ und OQ gleich ist, so sind die Dreiecke CPM und QPO einander ähnlich, und es ist:

$$\frac{OQ}{PQ} = \frac{CM}{CP},\ \text{d. i.}\ \frac{d\ sin.\,x}{dx} = \frac{cos.\,x}{1},\ \text{daher}$$

I. $d\ sin.\,x = cos.\,x\ .\ d\,x$; ebenso auch

$$\frac{OP}{PQ} = \frac{PM}{CP},\ \text{d. i.}\ \frac{-\,d\ cos.\,x}{dx} = \frac{sin.\,x}{1},\ \text{d. i.}$$

II. $d\,(cos.\,x) = -\,sin.\,x\,dx.$

Man ersieht hieraus, daß kleine Fehler im Bogen oder Winkel auf den Sinus um so mehr Einfluß haben, je größer $cos.\,x$, je kleiner also der Bogen oder Winkel ist, daß dagegen dieselben den Cosinus um so mehr

verändern, je größer $sin.\, x$ ist, je mehr also der Bogen sich $\frac{\pi}{2}$ nähert, und daß endlich das Differenzial des Cosinus das entgegengesetzte Zeichen von dem des Bogens hat, also, wie bekannt, eine Zunahme von x eine Abnahme von $cos.\, x$ liefert, und umgekehrt eine Abnahme von x ein Wachsen von $cos.\, x$ giebt.

Legt man SR rechtwinkelig auf CT, so erhält man ein Dreieck SRT, welches wegen der Gleichheit der Winkel RTS und CQN oder CPM dem Dreiecke CPM ähnlich ist, und weshalb man hat:

$$\frac{ST}{SR} = \frac{CR}{CM}, \text{ d. i. } \frac{d\,tang.\, x}{SR} = \frac{1}{cos.\, x}.$$

Nun ist aber auch $\frac{SR}{CS} = \frac{PQ}{CP}$, d. i. $SR = \frac{CS\,.\,dx}{1}$ und

$$CS = secans.\, x = \frac{1}{cos.\, x}, \text{ daher } SR = \frac{dx}{cos.\, x} \text{ und}$$

$$\text{III.} \quad d\,(tang.\, x) = \frac{dx}{(cos.\, x)^2}.$$

Führt man statt x, $\frac{\pi}{2} - x$, also statt dx, $d\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -dx$ ein, so erhält man

$$d\ tang. \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\frac{dx}{\left[cos.\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]^2}, \text{ d. i.}$$

$$\text{IV.} \quad d\,(cotg.\, x) = -\frac{dx}{(sin.\, x)^2}.$$

Durch Umkehrung geben diese Formeln für das Differenzial des Bogens:

$$dx = \frac{d\,sin.\, x}{cos.\, x} = -\frac{d\,cos.\, x}{sin.\, x} = (cos.\, x)^2\ d\ tang.\ x$$
$$= -(sin.\, x)^2\ d\ cotang.\ x,$$

oder

$$dx = \frac{d\ sin.\, x}{\sqrt{1-(sin.\, x)^2}} = -\frac{d\ cos.\ x}{\sqrt{1-(cos.\, x)^2}} = \frac{d\ tang.\ x}{1+(tang.\, x)^2}$$
$$= -\frac{d\,cotang.\, x}{1+(cotang.\, x)^2}.$$

Bezeichnet man nun $sin.\, x$ durch y, und x durch $arc.\ (sin. = y)$, so erhält man:

$$\text{V.} \quad d\ arc.\ (sin. = y) = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}, \text{ und auf gleiche Weise findet man}$$

$$\text{VI.} \quad d\ arc.\ (cos. = y) = -\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}, \text{ endlich}$$

VII. $d\ arc.\ (tang. = y) = \frac{dy}{1+y^2}$, so wie

VIII. $d\ arc.\ (cotang. = y) = -\ \frac{dy}{1+y^2}$.

Art. 20. Die letzten Differenzialformeln geben durch Umkehrung folgende Integralformeln

I. $\int cos.x\,dx = sin.x$,

II. $\int sin.x\,dx = -\ cos.x$,

III. $\int \frac{dx}{cos.x^2} = tang.x$,

IV. $\int \frac{dx}{sin.x^2} = -\ cotg.x$,

ferner:

V. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc.\ (sin. = x) = -\ arc.\ (cos. = x)$,

VI. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arc.\ (tang. = x) = -\ arc.\ (cotang. = x)$,

und hierzu lassen sich leicht noch folgende finden.

Es ist $d\,(Log.nat.sin.x) = \frac{d\,sin.x}{sin.x} = \frac{cos.x\,.\,dx}{sin.x} = cotg.x\,.\,dx$,

folglich

VII. $\int cotg.x\,dx = Log.nat.sin.x$, ebenso

VIII. $\int tang.x\,dx = -\ Log.nat.cos.x$;

ferner $d\,(Log\ nat.tang.x) = \frac{d\,tang.x}{tang.x} = \frac{dx}{cos.x^2\,tang.x}$

$$= \frac{dx}{sin.x\ cos.x} = \frac{d\,(2x)}{sin.\,2x},$$

IX. daher $d\,(Log.nat\ tg.\tfrac{1}{2}x) = \frac{dx}{sin.x}$, und

X. $\int \frac{dx}{sin.x} = Log.\ nat.\ tang.\ \frac{x}{2}$, ebenso

XI. $\int \frac{dx}{cos.x} = Log.\ nat.\ tang.\ \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$

$$= Log.\ nat.\ cotg.\ \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$$

Ferner $\frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1+x} + \frac{b}{1-x} = \frac{a(1-x)+b(1+x)}{(1+x)(1-x)}$, gesetzt, folgt $1 = a(1-x) + b(1+x)$. Nimmt man $1+x=0$, also $x=-1$, so erhält man hiernach $1 = a(1+1)$, daher $a = \tfrac{1}{2}$, und nimmt man

$1-x=0$, also $x=1$, so ergiebt sich $1=2b$, daher $b=\frac{1}{2}$ und

$\frac{1}{1-x^2}=\frac{\frac{1}{2}}{1+x}+\frac{\frac{1}{2}}{1-x}$, endlich aber

$$\int\frac{dx}{1-x^2}=\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x}+\tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{1-x}$$
$$=\tfrac{1}{2}\,Log.nat.\,(1+x)-\tfrac{1}{2}\,Log.nat.\,(1-x),$$

d. i.

$$\text{XII.}\ \int\frac{dx}{1-x^2}=\tfrac{1}{2}\ Log.\ nat.\ \left(\frac{1+x}{1-x}\right),$$ und ebenso

$$\text{XIII.}\ \int\frac{dx}{x^2-1}=\tfrac{1}{2}\ Log.\ nat.\ \left(\frac{x-1}{x+1}\right).$$

Endlich ist

$$\text{XIV.}\ \int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=Log.nat.\ (x+\sqrt{1+x^2})$$ so wie

$$\text{XV.}\ \int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=Log.nat.\ (x+\sqrt{x^2-1}).$$

Art. 21. Um $arc.\,(tang.=x)=\int\frac{dx}{1+x^2}$ zu finden, darf man nur $\frac{1}{1+x^2}$ durch Division in eine Reihe verwandeln und dann Glied für Glied integriren. Man erhält so

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+x^8-\ldots,$$ und

$$\int\frac{dx}{1+x^2}=\int dx-\int x^2\,dx^0+\int x^4\,dx-\int x^6\,dx+\ldots,$$ d. i.

$$\text{I.}\quad arc.\,(tang.=x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}-\ldots,$$ z. B.

$\frac{\pi}{4}=arc.\,(tang=1)=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots$, also den Halbkreis $\pi=4\,(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots)$, oder

$\frac{\pi}{6}=arc.\,(tang.=\sqrt{\frac{1}{3}})=\sqrt{\frac{1}{3}}(1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^2}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^3}+\ldots)$,

folglich $\pi=6\sqrt{\frac{1}{3}}\,(1-\frac{1}{9}+\frac{1}{45}-\frac{1}{189}+\ldots)=3{,}1415926\ldots$

Auf gleiche Weise erhält man aus

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{3}{8}x^4+\tfrac{5}{16}x^6+\ldots$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\int dx+\tfrac{1}{2}\int x^2\,dx+\tfrac{3}{8}\int x^4\,dx+\tfrac{5}{16}\int x^6\,dx+\ldots,$$ d. i.

$$\text{II.}\quad arc.\,(sin.=x)=x+\frac{1\,x^3}{2.3}+\frac{1.3\,x^5}{2.4.5}+\frac{1\ 3.5x^7}{2.4.6.7}+\ldots,$$

z. B. $\frac{\pi}{6} = arc.(sin. = \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{24} + \frac{3}{640} + \frac{5}{7168} + \ldots)$, also

$$\pi = 3 \left\{ \begin{matrix} 1,04167 \\ 0,00468 \\ 0,00070 \end{matrix} \right\} = 3,141 \ldots$$

Ferner ist, wenn man

$$sin.x = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \ldots \text{ setzt,}$$

$$\frac{d(sin.x)}{dx} = cos.x = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + 4A_4 x^3 + \ldots$$

$$\frac{d(cos.x)}{dx} = -sin.x = 2A_2 + 2.3A_3 x + 3.4A_4 x^2 + \ldots$$

$$-\frac{d(sin.x)}{dx} = -cos.x = 2.3.A_3 + 2.3.4.A_4 x + \ldots$$

$$-\frac{d(cos.x)}{dx} = sin.x = 2.3.4.A_4 + \ldots$$

Nun ist aber für $x = 0$, $sin.x = 0$, und $cos.x = 1$, daher folgt aus der ersten Reihe $A_0 = 0$, aus der zweiten $A_1 = cos.0 = 1$, aus der dritten $A_2 = 0$, aus der vierten $A_3 = -\frac{1}{2.3}$, aus der fünften $A_4 = 0$ u. s. w. und wenn man diese Werthe in die fingirte Reihe einsetzt, die Sinusreihe:

$$\text{III.} \quad sin.x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{ꝛc.}$$

Auf gleiche Weise ergiebt sich

$$\text{IV.} \quad cos.x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{ꝛc., ferner}$$

$$\text{V.} \quad tang.x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{3.5} + \frac{17x^7}{3.5.7.3} + \ldots \text{ und}$$

$$\text{VI.} \quad cotang.x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{3.5.3} - \frac{2x^5}{3.5.7.9} - \text{ꝛc.}$$

(Vergl. Ingenieur, Seite 225.)

Art. 22. Ist $y = f(x)\varphi(x)$, d. i. ein Produkt von zwei Funktionen der Urvariablen x, so hat man für das Differenzial

$$dy = f(x + dx)\varphi(x + dx) - f(x)\varphi(x), \text{ oder}$$

$f(x + dx) = f(x) + df(x)$ und $\varphi(x + dx) = \varphi(x) + d\varphi(x)$ substituirt,

$dy = [f(x) + df(x)]\,[\varphi(x) + d\varphi(x)] - f(x)\varphi(x)$, also, wenn man die Multiplication ausführt, und $f(x)\varphi(x)$ gegen $f(x)\varphi(x)$ hebt,

$dy = \varphi(x).df(x) + f(x).d\varphi(x) + df(x).d\varphi(x)$, und endlich,

wenn man $df(x) \,.\, d\varphi(x)$ als ein Produkt zweier Elemente oder unendlich kleiner Größen ausfallen läßt,

I. $d[f(x)\varphi(x)] = \varphi(x)\,df(x) + f(x)\,d\varphi(x)$.

Z. B. $d(x^2 Log.nat.x) = Log.nat.x \,.\, d(x^2) + x^2\, d\,Log.nat.x$

$= Log.nat.x \,.\, 2x\,dx + x^2 \,.\, \frac{dx}{x} = (2\,Log.nat.x + 1)\,x\,dx.$

Ferner

$d[(3x-1)\sqrt{x^2+1}] = \sqrt{x^2+1}\,.\,d(3x-1) + (3x-1)\,d[(x^2+1)^{1/2}]$

$= \sqrt{x^2+1} \,.\, 3\,dx + (3x-1) \,.\, \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x^2-x+1}{\sqrt{x^2+1}}.2\,dx.$

Umgekehrt giebt diese Formel

$d\varphi(x) = \frac{d[f(x)\varphi(x)] - \varphi(x)\,df(x}{f(x)}$, oder $f(x)\varphi(x) = \psi(x)$

und folglich $\varphi(x) = \frac{\psi(x)}{f(x)}$ gesetzt,

$$d\varphi(x) = \frac{d\psi(x) - \frac{\psi(x)}{f(x)}\,.\,df(x)}{f(x)}, \text{ d. i.}$$

II. $$d\left(\frac{\psi(x)}{f(x)}\right) = \frac{f(x)\,d\psi(x) - \psi(x)\,df(x)}{[f(x)]^2}.$$

Z. B. $d\left(\frac{x^2-1}{x+2}\right) = \frac{(x+2)\,d(x^2-1) - (x^2-1)\,d(x+2)}{(x+2)^2}$

$= \frac{(x+2)\,2x\,dx - (x^2-1)\,dx}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}\,dx.$

Durch Umkehrung der vorletzten Differenzialformel erhält man endlich noch folgende unter dem Namen der **Reductionsformel** bekannte Integralregel: $f(x)\varphi(x) = \int\varphi(x)\,df(x) + \int f(x)\,d\varphi(x)$, oder

III. $\int\varphi(x)\,df(x) = f(x)\varphi(x) - \int f(x)\,d\varphi(x)$.

Z. B. $\int Log.nat.x \,.\, dx = Log.nat.x \,.\, x - \int x \,.\, d\,Log.nat.x$

$= x\,Log.nat.x - \int\frac{x\,dx}{x} = x(Log.nat.x - 1).$

$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - \int e^x \,.\, 2x\,dx = x^2 e^x - 2\int x \,.\, e^x\,dx$

$= x^2 e^x - 2(x e^x - \int e^x\,dx) = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x)$

$= (x^2 - 2x + 2)\,e^x.$

Art. 23. Eine Fläche ABC, Fig. 28, welche von einer Curve AB und ihren Coordinaten AC und BC begrenzt wird, läßt sich durch unendlich viele Ordinaten wie MP, NQ u. s. w. in lauter streifenförmige Elemente

von der constanten Breite $MN = dx$ und der veränderlichen Länge $MP = y$ zerlegen; setzen wir daher diesen Flächenraum $ABC = F$, so haben wir für sein Element $MNQP$: $dF = y\,dx$,
und daher für ihn selbst: $F = \int y\,dx$.

Z. B. für eine Parabel mit dem Parameter p ist $y^2 = px$, und daher für die Fläche derselben

$$F = \int \sqrt{px}\,dx = \sqrt{p}\int x^{1/2}dx = \frac{\sqrt{p}x^{3/2}}{3/2} = \tfrac{2}{3}x\sqrt{px} = \tfrac{2}{3}xy.$$

Die Parabelfläche ABC ist also zwei Drittel von dem sie umschließenden Rechtecke $ACBD$.

Fig. 28.

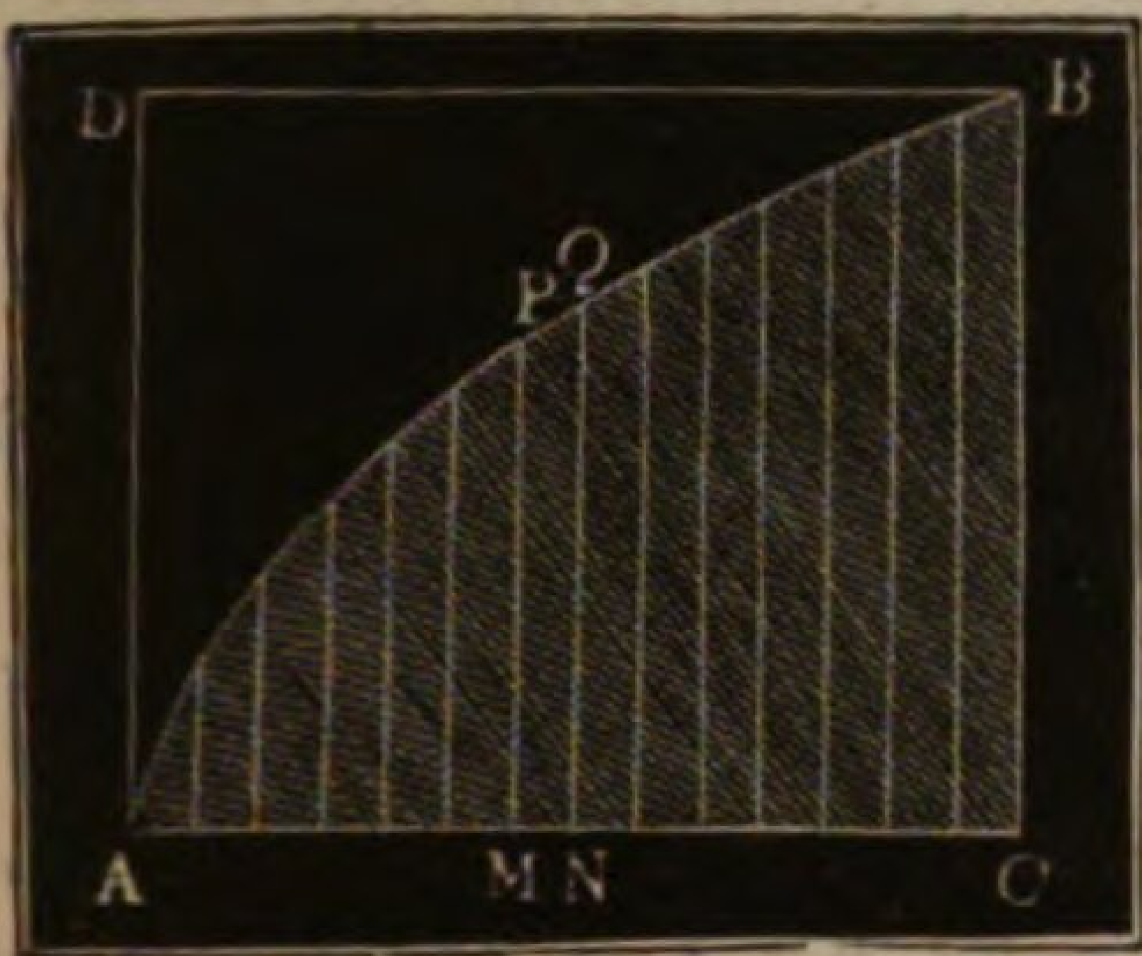
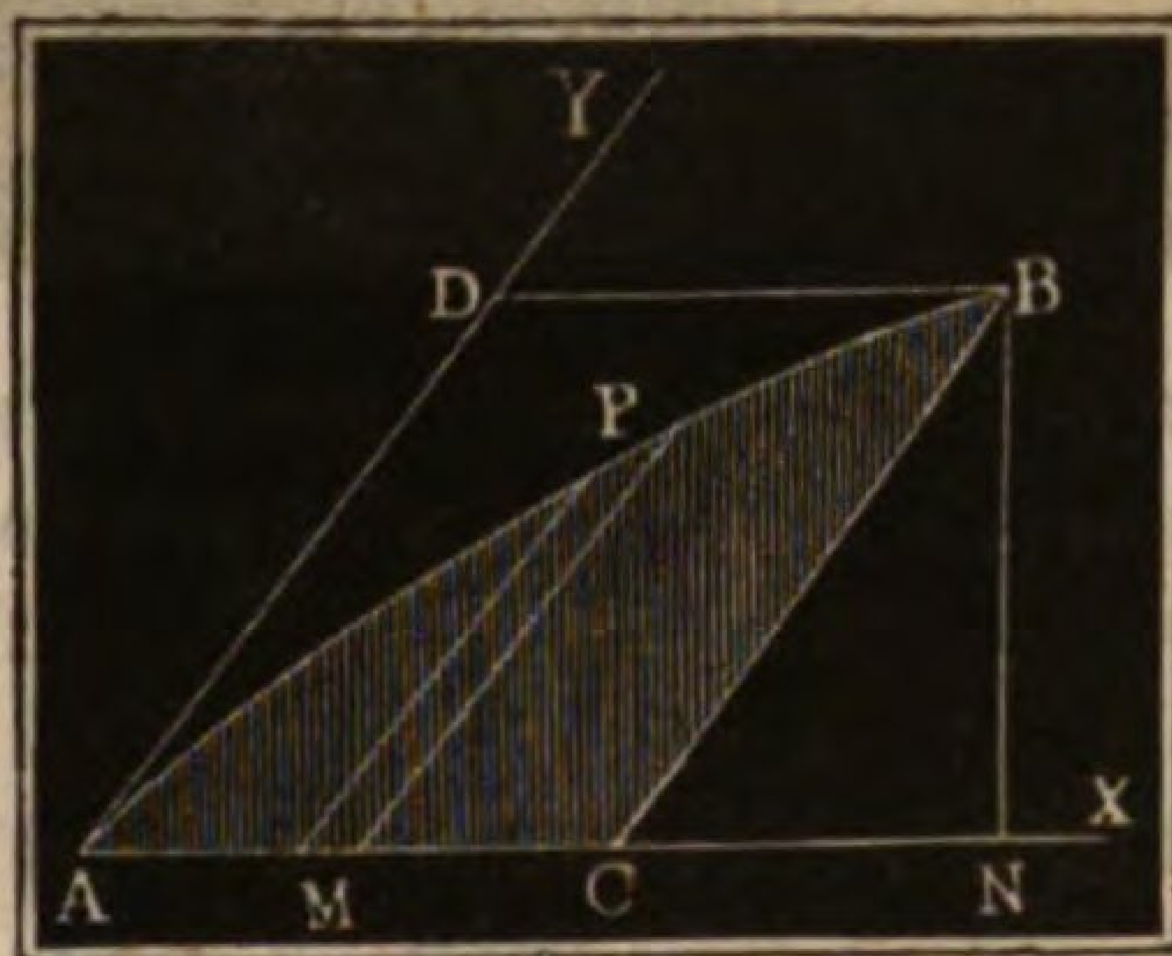
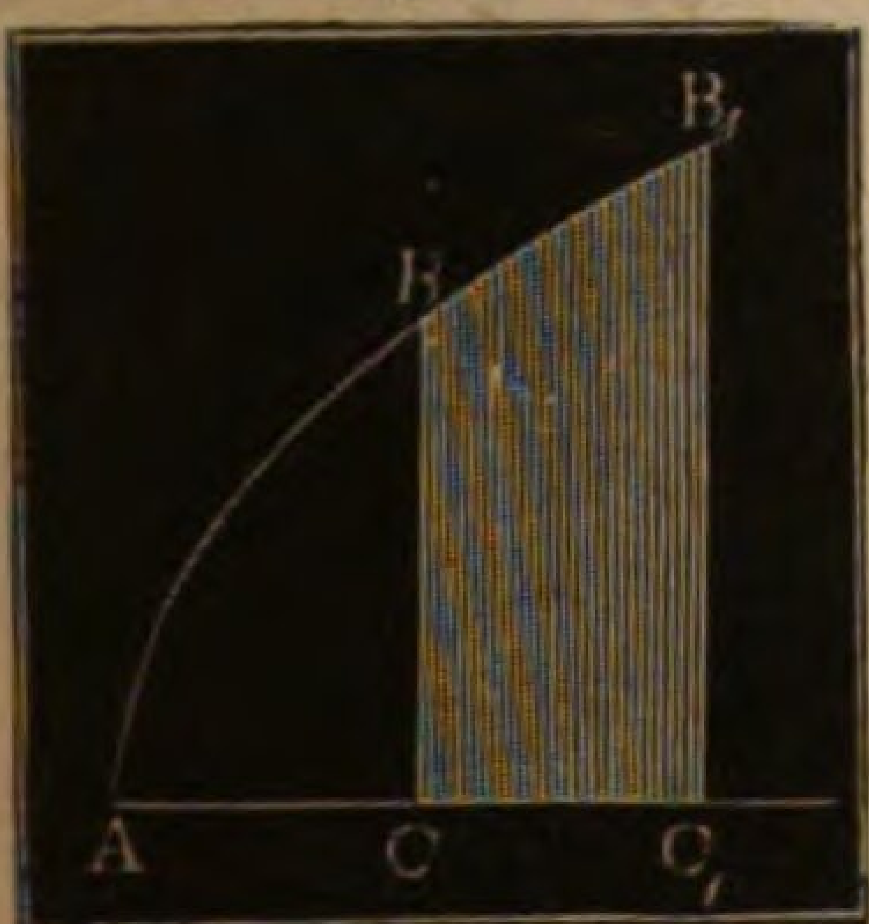


Fig. 29.



Diese Formel gilt auch für schiefwinkelige, unter einem Winkel α zusammenstoßende Coordinaten, z. B. für die Fläche ABC, Fig. 29., wenn nur statt $BC = y$ der Normalabstand $BN = y\,sin.\,\alpha$ eingesetzt wird; man hat also hier $F = sin.\,\alpha \int y\,dx$, z. B. bei der Parabelfläche, wenn die Abscissenaxe AX einen Durchmesser und die Ordinatenaxe AY eine Tangente der Parabel bildet, also $y^2 = p_1 x = \frac{px}{sin.\,\alpha^2}$ ist (s. Ingenieur Seite 243.), $F = \tfrac{2}{3}xy\,sin.\,\alpha$, d. i. Fläche $ABC = \tfrac{2}{3}$ Parallelogramm $ABCD$.

Fig. 30.



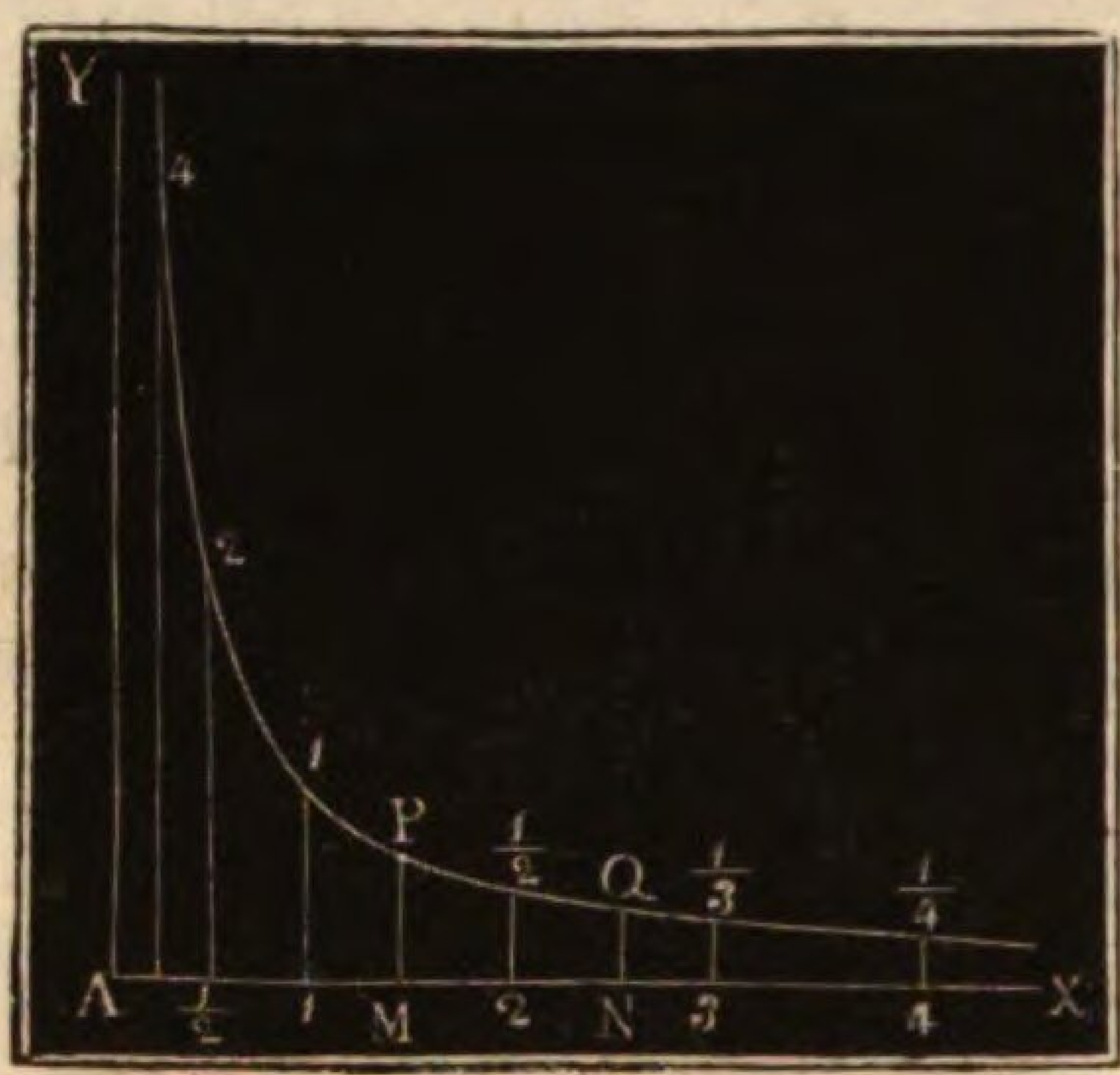
Für eine Fläche $BCC_1B_1 = F$ zwischen den Abscissen $AC_1 = c_1$ und $AC = c$, Fig. 30., ist nach Artikel 12, $F = \int_c^{c_1} y\,dx$.

Z. B. für $y = \frac{a^2}{x}$ ist $F = \int_c^{c_1} \frac{a^2\,dx}{x}$
$= a^2\,(Log.\,nat.\,c_1 - Log.\,nat.\,c)$, d. i.
$F = a^2\,Log.\,nat.\left(\frac{c_1}{c}\right)$.

Der Gleichung $\frac{a^2}{x}$ entspricht die oben in Artikel 3 kennen gelernte Curve PQ, Fig. 31. (s. folgd. Seite), und wenn

daher $AN = c_1$ und $AM = c$ ist, so giebt $F = a^2 \, Log \; nat. \left(\frac{c_1}{c}\right)$ den Flächenraum von $MNQP$ an. Nimmt man noch der Einfachheit wegen, $a = c = 1$, so hat man $F = Log. \, nat. \; x$; es sind hiernach die Flächenräume $(1\,MP\,1)$, $(1\,NQ\,1)$ u. s. w. die natürlichen Logarithmen der Abscissen AM, AN u. s. w. Die Curve selbst ist eine sogenannte gleichseitige Hyperbel, und die Geraden AX und AY, welchen sich die Curve immer mehr und mehr nähert, ohne sie zu erreichen, sind die Asymptoten derselben.

Fig. 31.

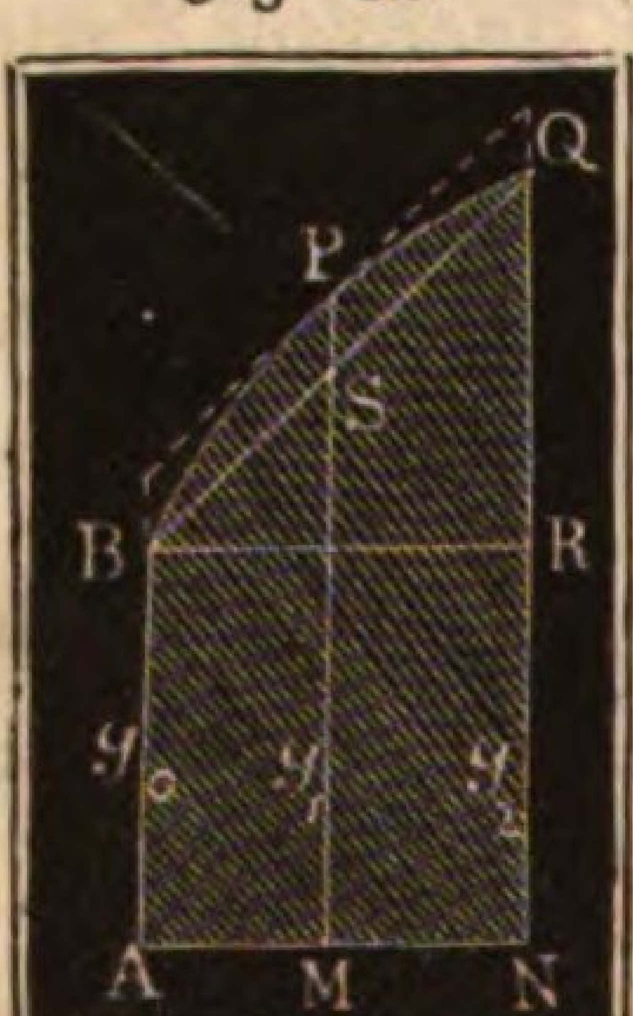


Wegen dieses Zusammenhanges zwischen den Abscissen und den Flächenräumen, werden die natürlichen Logarithmen sehr oft hyperbolische Logarithmen genannt.

Art. 24. Man kann auch jedes Integral $\int y \, dx = \int \varphi(x) \, dx$ gleich dem Inhalte einer Fläche F setzen, und wenn sich nun die Integration durch eine der bekannten Regeln nicht vollziehen läßt, so kann man es wenigstens annähernd finden, wenn man durch Anwendung der bekannten geometrischen Hülfsmittel den Inhalt des entsprechenden Flächenraumes ausmittelt.

Für eine Fläche $ABQN$, Fig. 32., die durch die Grundlinie $AN = x$ und durch die drei gleich weit von einander abstehenden Ordinaten $AB = y_0$, $MP = y_1$ und $NQ = y_2$ bestimmt ist, hat man den trapezoidalen Theil $ABQN = F_1 = (y_0 + y_2) \frac{x}{2}$ und den segmentförmigen Theil $BPQS$, wenn man BPQ als Parabel ansieht,

Fig. 32.



$$F_2 = \tfrac{2}{3} PS \,.\, BR = \tfrac{2}{3}(MP - MS) \,.\, AN$$
$$= \tfrac{2}{3}\left(y_1 - \frac{y_0 + y_2}{2}\right) x,$$

daher die ganze Fläche

$$F = F_1 + F_1 = \left[\tfrac{1}{2}(y_0 + y_2) + \tfrac{2}{3}\left(y_1 - \frac{y_0 + y_2}{2}\right)\right] x$$

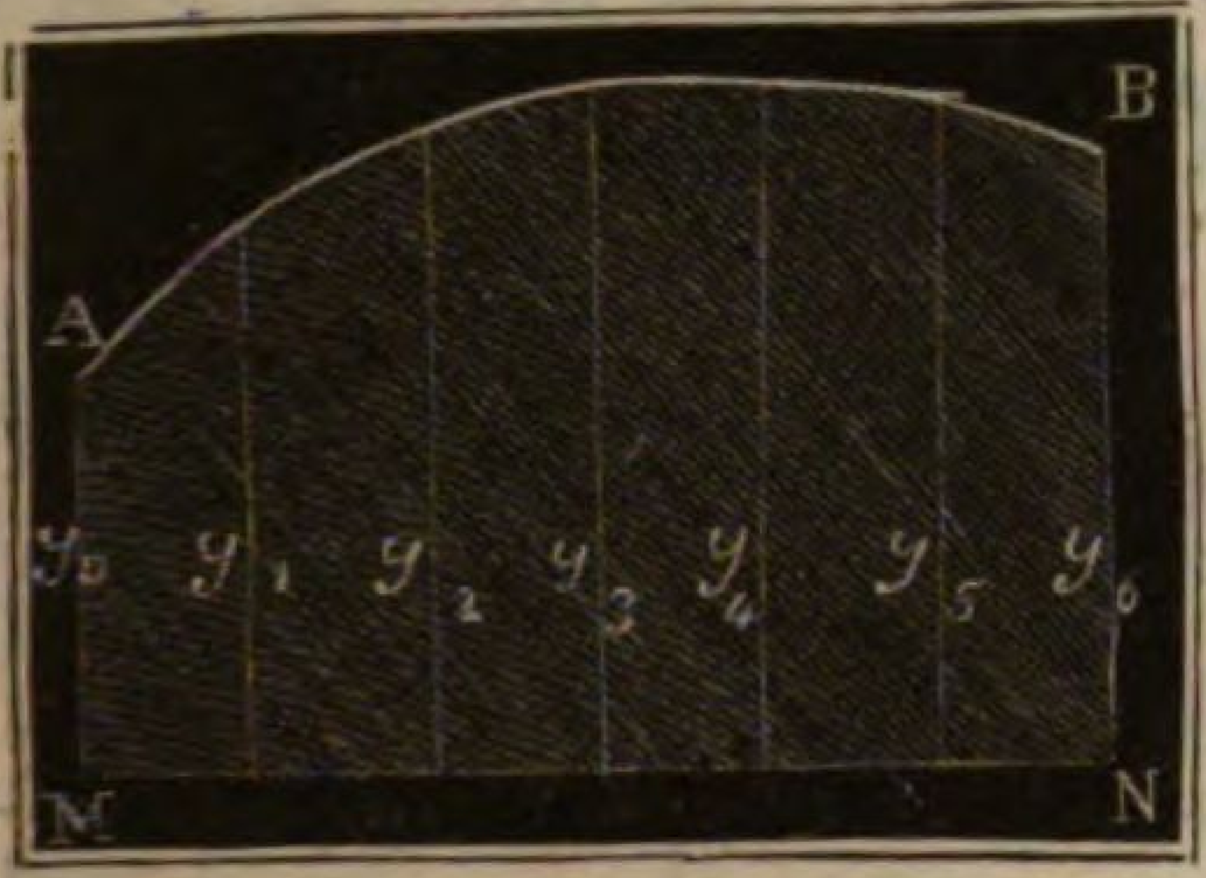
$$= \left[\tfrac{1}{6}(y_0 + y_2) + \tfrac{2}{3} y_1\right] x = (y_0 + 4 y_1 + y_2) \cdot \frac{x}{6}.$$

Führt man eine mittlere Ordinate y ein, und setzt $F = xy$, so erhält man hiernach für dieselbe:

$$y = \frac{y_0 + 4y_1 + y_2}{6}.$$

Um nun hiernach den Inhalt einer Fläche $MABN$, Fig. 33., zu finden, welche über einer gegebenen Grundlinie $MN = x$ steht, und durch eine ungerade Anzahl von Ordinaten y_0, y_1, y_2, y_3 ... y_n bestimmt ist, durch diese also in eine gerade Anzahl von gleich breiten Streifen zerlegt wird, bedarf es nur einer wiederholten Anwendung der letzten Regel. Es ist die Breite eines Streifens $= \frac{x}{n}$ und hiernach die Fläche

Fig. 33.



des ersten Streifenpaares $= \frac{y_0 + 4y_1 + y_2}{6} \cdot \frac{2x}{n}$,

" zweiten " $= \frac{y_2 + 4y_3 + y_4}{6} \cdot \frac{2x}{n}$,

" dritten " $= \frac{y_4 + 4y_5 + y_6}{6} \cdot \frac{2x}{n}$ u. s. w.;

also der Inhalt der ersten sechs Streifen oder ersten drei Streifenpaare, da hier $n = 6$ ist:

$$F = (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6)\,\frac{x}{3.6}$$

$$= [y_0 + y_6 + 4(y_1 + y_3 + y_5) + 2(y_2 + y_4)]\,\frac{x}{18};$$

und nun leicht zu ermessen, daß der Inhalt einer in vier Streifenpaare zerlegten Fläche

$$F = [y_0 + y_8 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6)]\,\frac{x}{3.8},$$

und daß allgemein für eine Fläche aus n Streifen

$$F = [y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \cdot\cdot + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdot\cdot + y_{n-2})]\,\frac{x}{3n} \text{ ist.}$$

Auch ist die mittlere Höhe einer solchen Fläche

$$y = \frac{y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \cdot\cdot + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdot\cdot + y_{n-2})}{3n},$$

wobei n stets eine gerade Zahl sein muß.

Diese unter dem Namen der **Simpson'schen** Regel bekannte Formel (s. Ingenieur S. 254.) findet ihre Anwendung bei der Bestimmung eines

Integrales $\int_c^{c_1} y\,dx = \int_c^{c_1} \varphi(x)\,dx$, wenn man $x = c_1 - c$ in eine gerade Anzahl n gleicher Theile theilt, die Ordinaten

$$y_0 = \varphi(c_0),\ y_1 = \varphi\left(c_0 + \frac{x}{n}\right),\ y_2 = \varphi\left(c_0 + \frac{2x}{n}\right),$$

$$y_3 = \varphi\left(c_0 + \frac{3x}{n}\right) \ldots \text{ bis } y_n = \varphi(x)$$

berechnet, und diese Werthe in die Formel

$$\int_c^{c_1} y\,dx = \int_c^{c_1} \varphi(x)\,dx$$

$$= [y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2})]\,\frac{c_1 - c}{3n}$$

einsetzt.

Z. B. $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ giebt, da hier $c_1 - c = 2 - 1 = 1$ und $y = \varphi(x) = \frac{1}{x}$ ist, wenn man $n = 6$, also $\frac{x}{n} = \frac{c_1 - c}{6} = 1/6$ nimmt,

$$y_0 = \frac{1}{1} = 1{,}0000,\ y_1 = \frac{1}{7/6} = 6/7 = 0{,}8571,\ y_2 = \frac{1}{8/6} = 3/4 = 0{,}7500,$$

$$y_3 = \frac{1}{9/6} = 6/9 = 0{,}6666,\ y_4 = \frac{1}{10/6} = 0{,}6000,\ y_5 = \frac{6}{11} = 0{,}5454$$

und $y_6 = 0{,}5000$, daher

$$y_0 + y_6 = 1{,}5000,\ y_1 + y_3 + y_5 = 2{,}0692 \text{ und } y_2 + y_4 = 1{,}3500,$$

und das gesuchte Integral

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = (1{,}5000 + 4.2{,}0692 + 2.1{,}3500).1/18 = \frac{12{,}4768}{18} = 0{,}69315.$$

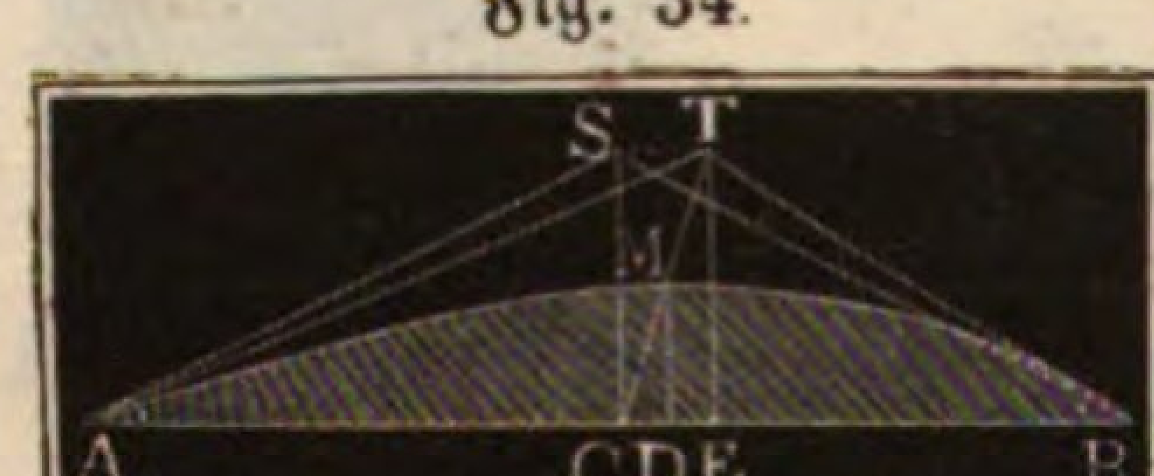
Nach Artikel 17. ist aber $\int_1^2 \frac{dx}{x} = Log.\ nat.\ 2 - Log.\ nat.\ 1$

$$= 0{,}693147,$$

also die Uebereinstimmung die erwünschte.

§. 25. Im Folgenden soll noch eine andere Regel mitgetheilt werden, welche auch bei einer ungeraden Anzahl n von Streifen angewendet werden kann. Behandelt man ein sehr gedrücktes Segment AMB, Fig. 34., als ein Parabelsegment, so hat man nach Art. 23. für den Inhalt desselben $F = 2/3\,AB.MD$, oder, wenn AT und BT Tangenten an den Enden A und B sind, und deshalb $CT = 2\,CM$ ist,

Fig. 34.



$F = 2/3 \cdot \frac{AB\ .\ TE}{2} = 2/3$ des

Dreieckes $ATB = {}^2/_3$ des gleichhohen gleichschenkligen Dreieckes ASB, und also auch $= {}^2/_3 AC \,.\, CS = {}^2/_3 \overline{AC}^2 \,.\, tang.\, SAC$. Der Winkel $SAC = SBC$ ist $= TAC + TAS = TBC - TBS$; setzt man daher die kleinen Winkel TAS und TBS einander gleich, so erhält man für dieselben

$$TAS = TBS = \frac{TBC - TAC}{2} \text{ und}$$

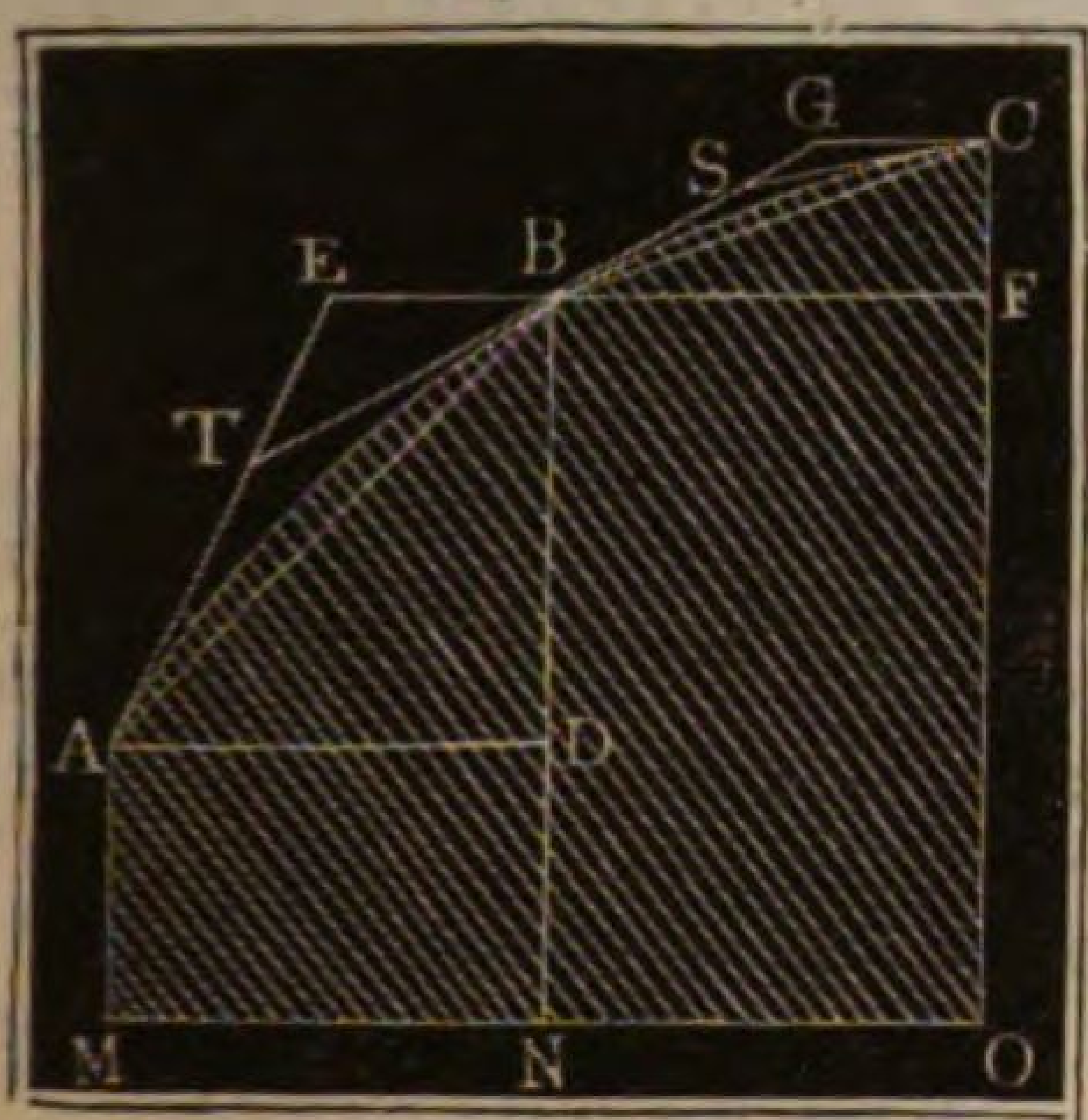
$$SAC = TAC + \frac{TBC - TAC}{2} = \frac{TAC + TBC}{2} = \frac{\delta + \varepsilon}{2},$$

wenn man die Tangentenwinkel TAC und TBC durch δ und ε bezeichnet. Da nun noch $AC = BC = {}^1/_2 AB = {}^1/_2$ Sehne s ist, so hat man

$$F = {}^1/_6\, s^2\, tang. \left(\frac{\delta + \varepsilon}{2}\right).$$

Diese Formel läßt sich nun auch auf das Flächenstück $MABN$, Fig. 35., anwenden, dessen Tangentenwinkel $TAD = \alpha$ und $TBE = \beta$ gegeben sind; setzt man nämlich noch den Sehnenwinkel $BAD = ABE = \sigma$, so hat man

Fig. 35.



$$TAB = \delta = TAD - BAD = \alpha - \sigma$$

und

$$TBE = \varepsilon = ABE - TBE = \sigma - \beta,$$

daher

$$\delta + \varepsilon = \alpha - \beta$$

und das Segment über AB:

$$F = {}^1/_6\, s^2\, tang. \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right),$$

oder, wegen der Kleinheit von $\alpha - \beta$,

$$F = \frac{s^2}{12}\, tang. (\alpha - \beta) = \frac{s^2}{12} \left(\frac{tang.\alpha - tang.\beta}{1 + tang.\alpha\; tang.\beta}\right),$$ oder, wenn α und β nicht bedeutend von einander abweichen und deshalb in $tang.\alpha\; tang.\beta$ statt α und β der Mittelwerth σ eingesetzt wird,

$$F = {}^1/_{12}\, s^2 \,.\, \frac{tang.\alpha - tang.\beta}{1 + tang.\sigma^2} = {}^1/_{12}\, s^2 \cos.\sigma^2 \,(tang.\alpha - tang.\beta),$$

und also statt $s \cos.\sigma$ die Grundlinie $MN = x$ substituirt,

$$F = \frac{x^2}{12}\,(tang.\alpha - tang.\beta),$$

und daher das ganze Flächenstück $MABN$, wenn y_0 und y_1 dessen Ordinaten MA und NB bezeichnen:

$$F_1 = (y_0 + y_1)\,\frac{x}{2} + (tang.\alpha - tang.\beta)\,\frac{x^2}{12}.$$

Stößt an das vorige Flächenstück noch ein anderes $NBCO$ mit einer gleichen Grundlinie $NO = x$, den Ordinaten BN und $CO = y_1$ und y_2 und den Tangentenwinkeln $SBF = \beta$ und $SCG = \gamma$, so hat man für dasselbe den Inhalt

$$F_2 = (y_1 + y_2)\,\frac{x}{2} + (tang.\beta - tang.\gamma)\,\frac{x^2}{12},$$

und daher für das Ganze, da sich $-\,tang.\beta$ gegen $+\,tang.\beta$ hebt,

$$F = F_1 + F_2 = (\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + \tfrac{1}{2}y_2)\,x + (tang.\alpha - tang.\gamma)\,\frac{x^2}{12}.$$

Für eine Fläche aus drei gleichbreiten Streifen ist ebenso, wenn α den Tangentenwinkel des Anfangs= und δ den des Endpunktes bezeichnet,

$$F = (\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \tfrac{1}{2}y_3)\,x + (tang.\,\alpha - tang.\,\delta)\,\frac{x^2}{12},$$

und allgemein für eine durch die Abscissen $\frac{x}{n}$, $\frac{2x}{n}$, $\frac{3x}{n}$ . . . x, die Ordinaten $y_0, y_1, y_2 \cdots y_n$ und die Tangentenwinkel $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n$ bestimmtes Flächenstück

$$F = (\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2}y_n)\,\frac{x}{n} + \tfrac{1}{12}(tg.\alpha - tg.\alpha_n)\left(\frac{x}{n}\right)^2.$$

Ein Integral

$$\int_c^{c_1} y\,dx = \int_c^{c_1} \varphi\,(x)\,dx$$

$$= (\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2}y_n)\,\frac{x}{n} + \tfrac{1}{12}(tg.\alpha - tg.\alpha_n)\left(\frac{x}{n}\right)^2$$

wird hiernach gefunden, wenn man $x = c_1 - c$ setzt,

$$y_0 = \varphi(c),\; y_1 = \varphi\left(c + \frac{x}{n}\right),\; y_2 = \varphi\left(c + \frac{2x}{n}\right),$$

$$y_3 = \varphi\left(c + \frac{3x}{n}\right) \ldots\; y_n = \varphi\,(c_1),$$

so wie $tang.\,\alpha = \frac{dy}{dx} = \psi\,(x), = \psi\,(c)$ und $tang.\,\alpha_n = \psi\,(c_1)$ berechnet, und diese Werthe in diese Gleichung einsetzt.

Z. B. für $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ hat man, wenn $n = 6$ angenommen wird, da hier

$x = c_1 - c = 2 - 1 = 1$ und $y = \varphi\,(x) = \frac{1}{x}$ ist,

$y_0 = \frac{1}{c} = 1$, $y_1 = \frac{1}{1 + \frac{1}{6}} = \frac{6}{7}$, $y_2 = \frac{6}{8}$, $y_3 = \frac{6}{9}$, $y_4 = \frac{6}{10}$,

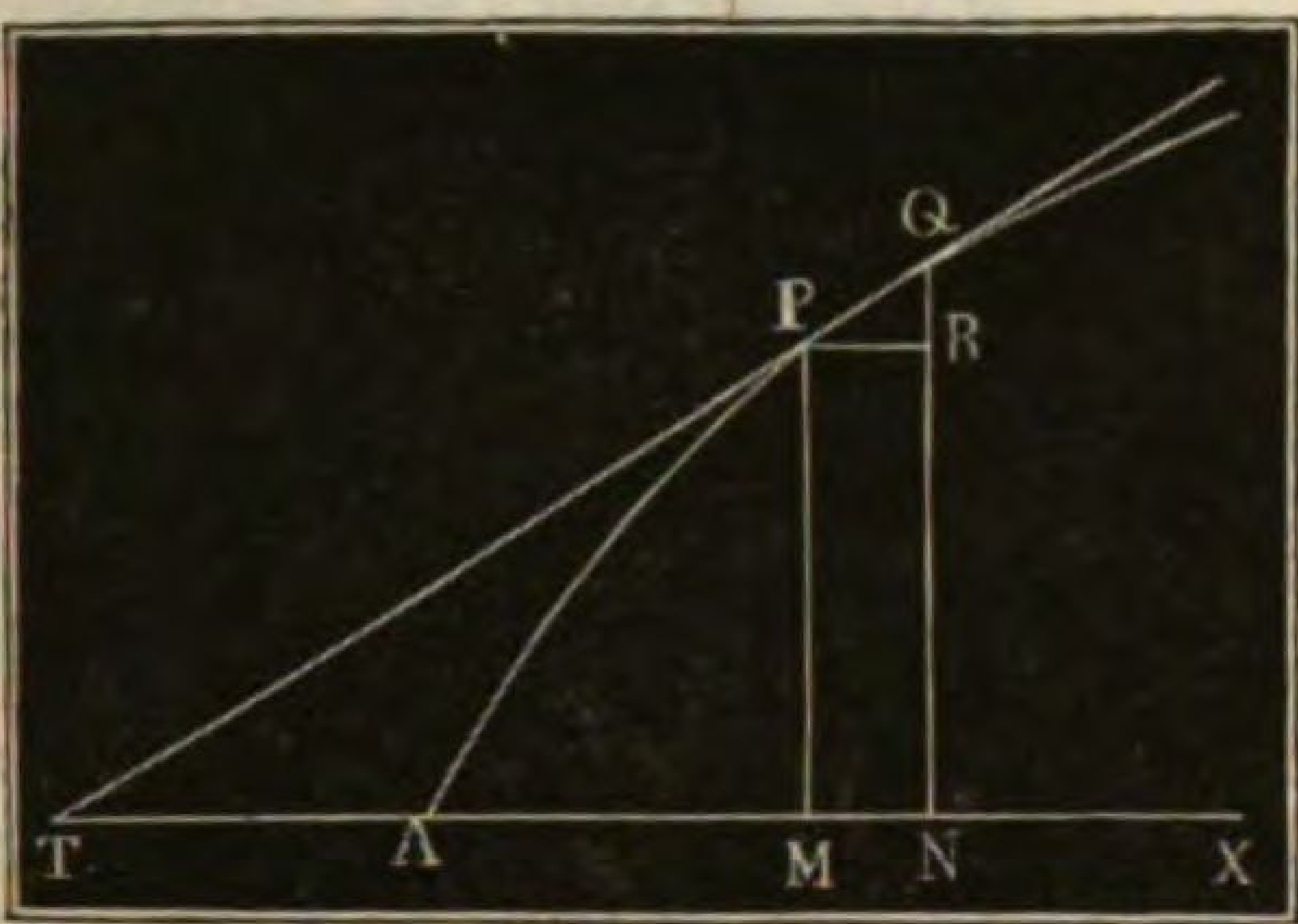
$y_5 = \frac{6}{11}$ und $y_6 = \frac{6}{12}$, ferner da sich $\frac{dy}{dx} = \frac{d\,(x^{-1})}{dx} = -\frac{1}{x^2}$ herausstellt, $tang.\alpha = -\frac{1}{1} = -1$ und $tang.\beta = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$, und daher ist

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = (\tfrac{1}{2}+\tfrac{6}{7}+\tfrac{6}{8}+\tfrac{6}{9}+\tfrac{6}{10}+\tfrac{6}{11}+\tfrac{1}{4})\cdot\tfrac{1}{6}+(-1+\tfrac{1}{4})\cdot\tfrac{1}{12}\cdot\tfrac{1}{36}$$
$$= \frac{4{,}1692}{6} - \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{12}\cdot\tfrac{1}{36} = 0{,}69487 - 0{,}00173 = 0{,}69314.$$

(Vergleiche das Beispiel des vorigen Artikels.)

§. 26. Aus der Gleichung $y = f(x)$ zwischen den Coordinaten $AM = x$ und $MP = y$ (Fig. 36.) einer Curve muß sich auch eine Gleichung zwischen dem Bogen $AP = s$ und der einen oder der anderen der beiden Coordinaten ableiten lassen. Läßt man x um $MN = PR = dx$ wachsen, so nimmt y um $RQ = dy$ und s um das Element $PQ = ds$ zu, und es ist dem Pythagoräischen Lehrsatze zu Folge

Fig. 36.



$\overline{PQ}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{QR}^2$, d. i. $ds^2 = dx^2 + dy^2$, also

$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, und hiernach der Curvenbogen selbst
$$s = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Z. B. für die Neil'sche Parabel (s. Fig. 15.), deren Gleichung $ay^2 = x^3$ ist, hat man $2ay\,dy = 3x^2dx$, daher

$$dy = \frac{3x^2dx}{2ay} \text{ und } dy^2 = \frac{9x^4dx^2}{4a^2y^2} = \frac{9x\,dx^2}{4a},$$

hiernach $ds^2 = \left(1 + \frac{9x}{4a}\right) dx^2$ und

$$s = \int\sqrt{1 + \frac{9x}{4a}}\, dx = \frac{4a}{9}\int\left(1 + \frac{9x}{4a}\right)^{\frac{1}{2}} d\left(\frac{9x}{4a}\right)$$
$$= \frac{4a}{9}\int u^{\frac{1}{2}}\, du = \frac{4a}{9}\, \tfrac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} = \tfrac{8}{27}\, a \sqrt{\left(1 + \frac{9x}{4a}\right)^3}.$$

Um die hierzu nöthige Constante zu finden, wollen wir s mit x und y zugleich anfangen lassen. Wir erhalten dann

$$0 = \tfrac{8}{27} a \sqrt{1^3} + Con., \text{ also } Con. = -\tfrac{8}{27} a \text{ und}$$
$$s = \tfrac{8}{27} a \left[\sqrt{\left(1 + \frac{9x}{4a}\right)^3} - 1\right],$$

z. B. für das Stück AP, dessen Abscisse $x = a$ ist,

$$s = \tfrac{8}{27} a\, [\sqrt{(\tfrac{13}{4})^3} - 1] = 1{,}736\, a.$$

Führt man noch den Tangentenwinkel $QPR = PTM = \alpha$ (Fig. 36.) ein, so hat man auch

$$QR = PQ . sin. QPR \text{ und } PR = PQ\, cos. QPR, \text{ d. i.}$$

$$dy = ds\, sin.\, \alpha \text{ und } dx = ds\, cos.\, \alpha,$$

und also außer $tang.\, \alpha = \frac{dy}{dx}$ (s. Art. 5.) auch

$$sin.\, \alpha = \frac{dy}{ds} \text{ und } cos.\, \alpha = \frac{dx}{ds}; \text{ so wie noch}$$

$$s = \int \sqrt{1 + tang.\, \alpha^2} . dx = \int \frac{dy}{sin.\, \alpha} = \int \frac{dx}{cos.\, \alpha}.$$

Ist nun die Gleichung zwischen zwei der Größen x, y, s und α gegeben, so kann man hiernach auch Gleichungen zwischen je zwei anderen dieser Größen finden. Ist z. B. $cos.\, \alpha = \frac{s}{\sqrt{c^2+s^2}}$, so hat man

$$dx = ds\, cos.\, \alpha = \frac{s\, ds}{\sqrt{c^2+s^2}} \text{ und}$$

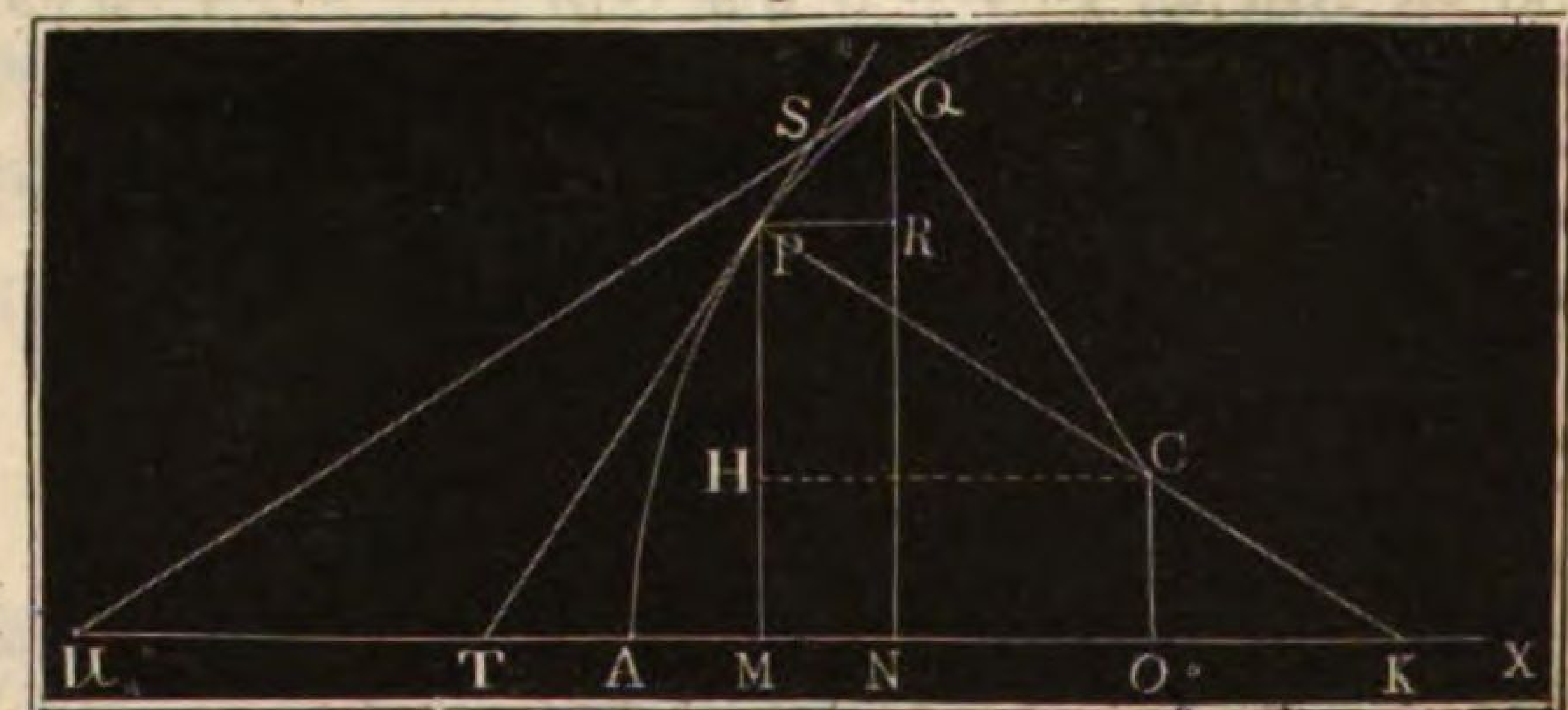
$$x = \int \frac{s\, ds}{\sqrt{c^2+s^2}} = \tfrac{1}{2} \int \frac{2 s\, ds}{\sqrt{c^2+s^2}} = \tfrac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \tfrac{1}{2} \int u^{-1/2} du = u^{1/2} du$$

$$= \sqrt{c^2 + s^2} + Con., \text{ und wenn nun } x \text{ und } s \text{ zugleich Null sind,}$$

$$x = \sqrt{c^2 + s^2} - c.$$

§. 27. Eine Gerade winkelrecht zur Tangente PT, Fig. 37., ist auch normal zur Berührungsstelle P der Curve, weil die Tangente die Richtung

Fig. 37.



dieser Stelle angiebt. Das Stück PK dieser Linie vom Berührungspunkte P bis Abscissenaxe, heißt **Normale** schlechtweg, und die Projection MK desselben in der Abscissenaxe **Subnormale**. Für die letztere hat man, da der Winkel MPK dem Tangentenwinkel $PTM = \alpha$ gleich ist, $MK = MP . tang.\, \alpha$, d. i.

$$Subnormale = y\, tang.\, \alpha = y \frac{dy}{dx},$$

z. B. für die Parabel, wo $y^2 = px$, also $dy = \frac{p\, dx}{2y}$ ist,

$$Subnormale = y \frac{p}{2y} = \frac{p}{2}; \text{ also constant.}$$

Errichtet man ferner in einem zweiten, dem P unendlich nahen Punkte Q eine andere Normallinie QC, so erhält man in dem Durchschnittspunkte C zwischen beiden ein Centrum für einen durch beide Berührungspunkte P und Q zu beschreibenden Kreis, den sogenannten Krümmungskreis, und es sind die Stücke CP und CQ der Normallinien die Halbmesser dieses Kreises oder die sogenannten Krümmungshalbmesser. Jedenfalls ist dieser Kreis derjenige unter allen durch P und Q zu legenden Kreisen, welcher sich am meisten an das Curvenelement PQ anschmiegt, und deshalb anzunehmen, daß sein Bogen PQ mit dem Curvenelemente PQ zusammenfalle.

Bezeichnen wir den Krümmungshalbmesser $CP = CQ$ durch r, den Curvenbogen AP durch s, also sein Element PQ durch ds, und den Tangentenwinkel oder Bogen von PTM durch α, also sein Element $SUM - STM$, d. i. $- UST = - PCQ$, durch $d\alpha$, so haben wir einfach, da $PQ = CP$. Bog. des Winkels PCQ ist, $ds = - r d\alpha$, und folglich den Krümmungshalbmesser $r = - \frac{ds}{d\alpha}$.

Gewöhnlich läßt sich α nur mittels der Coordinatengleichung bestimmen, indem man setzt $tang.\alpha = \frac{dy}{dx}$. Nun ist aber noch $d\, tang.\alpha = \frac{d\alpha}{cos.\alpha^2}$ und $cos.\,\alpha = \frac{dx}{ds}$, daher hat man

$$d\alpha = cos.\alpha^2 \,.\, d\; tang.\;\alpha = \frac{dx^2}{ds^2} \,.\, d\; tang.\alpha, \text{ und}$$

$$r = - \frac{ds^3}{dx^2\, d\; tang.\,\alpha}.$$

Durch Umkehrung dieser Formeln kann man auch wohl die Curve selbst rectificiren, also s selbst finden.

Für die Coordinaten $AO = u$ und $OC = v$ des Krümmungsmittelpunktes C hat man

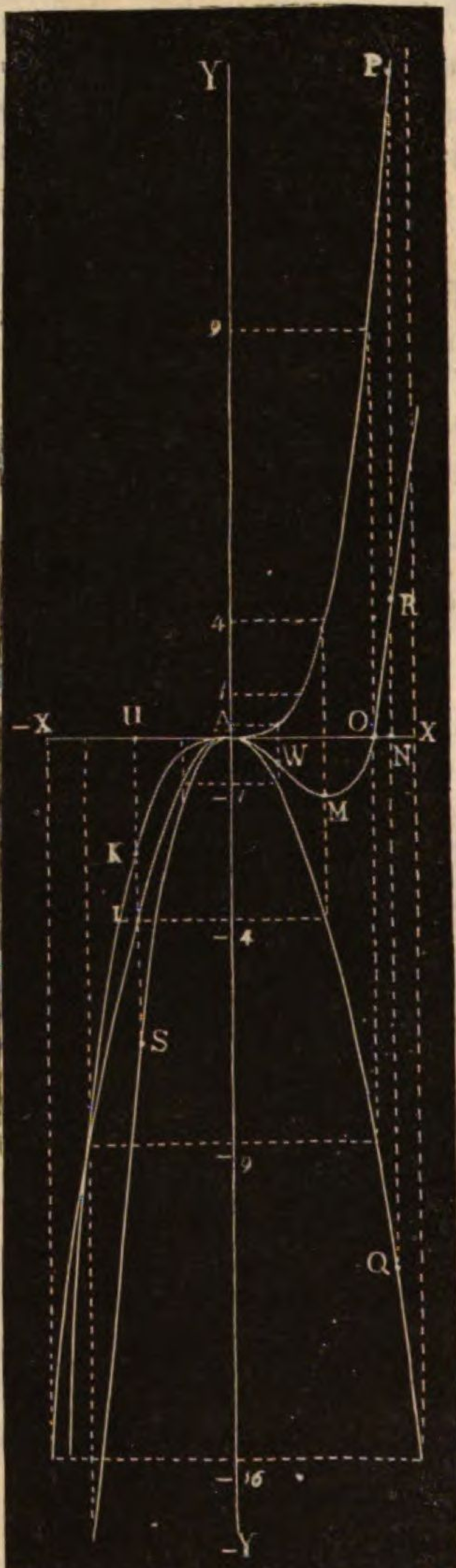
$$u = AM + HC = x + CP\,sin\; CPH, \text{ d. i.}$$
$$u = x + r\; sin.\,\alpha, \text{ so wie}$$
$$v = OC = MP - HP = y - CP\; cos.\; CPH, \text{ d. i.}$$
$$v = y - r\; cos.\;\alpha.$$

Die stetige Folge der Krümmungsmittelpunkte giebt eine Curve, welche die Evolute von AP genannt wird, und deren Lauf durch die Coordinaten u und v bestimmt wird.

§. 28. Viele Funktionen, welche in der Anwendung auf die Praxis vorkommen, lassen sich aus den oben kennen gelernten Hauptfunktionen $y = x^m$, $y = e^x$ und $y = sin.\,x$, $y = cos.\;x$ u. s. w. zusammensetzen, und sind daher auch die Eigenschaften, entsprechend der Tangenten-

lage, Quadratur, Krümmungshalbmesser u. s. w. leicht mit Hülfe der vorstehenden Lehren aufzusuchen, so wie auch die entsprechenden Curven zu construiren, wie folgendes Beispiel zeigen wird.

Fig. 38.



Die Gleichung sei

$$y = x^2 \left(\frac{x}{3} - 1\right) = \frac{x^3}{3} - x^2.$$

Für sie ist $dy = (x^2 - 2x)\,dx$, folglich $tang.\alpha = \frac{dy}{dx} = x^2 - 2x$, daher die Tangente der Abscissenaxe parallel, für $x^2 = 2x$, d. i. $x = 0$ und $x = 2$, ferner ist $d\ tang.\alpha = 2(x-1)\,dx$, und daher für $x = 1$ und $y = 1/3 - 1 = -2/3$ ein Wendepunkt. Ferner ist noch

$$ds^2 = dx^2 + (x^2 - 2x)^2\,dx^2$$
$$= [1 + (x^2 - 2x)^2]\,dx^2,$$

und daher der Krümmungshalbmesser der Curve: $r = -\frac{[1+(x^2-2x)^2]^{3/2}}{2(x-1)}$, z. B. für $x = 0$, $r = \frac{-1}{-2} = 1/2$, für $x = 1$, $r = \infty$, für $x = 2$, $r = -1/2$, $x = 3$, $r = -7{,}905$ u. s. w.

Die entsprechende Curve führt Fig. 38. vor Augen. Es ist $X\overline{X}$ die Abscissen- und $Y\overline{Y}$ die Ordinatenaxe, A aber der Anfangs- oder Nullpunkt. Durch diesen geht nicht nur die Curve KAP, welche der Gleichung $y_1 = \frac{x^3}{3}$ entspricht, sondern auch die Curve LAQ, welche der Gleichung $y_2 = -x^2$ angehört. Da $y = \frac{x^3}{3} - x^2$, so findet man einen Punkt R der Curve, welcher dieser Gleichung entspricht, wenn man $y_2 = NQ$ von $y_1 = NP$ abzieht, also $NR = NP - NQ$ macht. Dies an vielen Stellen ausgeführt, erhält man die gesuchte Curve $SAWMOR$, welche bei W einen Wendungspunkt hat, bei A und O die Abscissenaxe trifft, und bei A und M parallel mit dieser Axe läuft.

Art. 29. Wenn für eine Funktion $y = \alpha u + \beta v$ eine Reihe von zusammengehörigen Werthen der Variablen u, v und y durch Beobachtung oder Messung gefunden worden sind, so kann man nach denjenigen Werthen der Constanten α und β fragen, welche von den kleinen zufälligen und unregelmäßigen Beobachtungs- oder Messungsfehlern möglichst befreit sind und daher auch den Zusammenhang zwischen den Größen u, v und y, wovon u und v auch bekannte Funktionen einer und derselben Variablen x bedeuten können, möglichst genau ausdrücken. Unter allen Regeln, welche man zur Beantwortung dieser Frage, d. i. zur Ausmittelung der möglich oder wahrscheinlich richtigsten Werthe der Constanten anwendet, ist die sogenannte **Methode der kleinsten Quadrate** die allgemeinste und wissenschaftlich begründetste.

Sind $\left\{\begin{matrix} u_1, & v_1, & y_1 \\ u_2, & v_2, & y_2 \\ u_3, & v_3, & y_3 \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ u_n, & v_n, & y_n \end{matrix}\right\}$ die der Funktion $y = \alpha u + \beta v$ entsprechenden Resultate der Beobachtung, so hat man für die Beobachtungsfehler und deren Quadrate folgende Werthe:

$$\left\{\begin{matrix} z_1 = y_1 - (\alpha u_1 + \beta v_1) \\ z_2 = y_2 - (\alpha u_2 + \beta v_2) \\ z_3 = y_3 - (\alpha u_3 + \beta v_3) \\ . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \\ z_n = y_n - (\alpha u_n + \beta v_n) \end{matrix}\right\} \text{ und}$$

$$\left\{\begin{matrix} z_1^2 = y_1^2 - 2\alpha u_1 y_1 - 2\beta v_1 y_1 + \alpha^2 u_1^2 + 2\alpha\beta u_1 v_1 + \beta^2 v_1^2 \\ z_2^2 = y_2^2 - 2\alpha u_2 y_2 - 2\beta v_2 y_2 + \alpha^2 u_2^2 + 2\alpha\beta u_2 v_2 + \beta^2 v_2^2 \\ z_3^2 = y_3^2 - 2\alpha u_3 y_3 - 2\beta v_3 y_3 + \alpha^2 u_3^2 + 2\alpha\beta u_3 v_3 + \beta^2 v_3^2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ z_n^2 = y_n^2 - 2\alpha u_n y_n - 2\beta v_n y_n + \alpha^2 u_n^2 + 2\alpha\beta u_n v_n + \beta^2 v_n^2 \end{matrix}\right\},$$

und erhält nun für die Summe der Fehlerquadrate, wenn man sich der Abkürzung wegen des Summationszeichens Σ bedient, um eine Summation

gleichartiger Größen anzuzeigen, also $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \ldots + y_n^2 = \Sigma(y^2)$, $v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3 + \ldots + v_n y_n = \Sigma(v y)$ setzt, u. s. w.

$$\Sigma(z^2) = \Sigma(y^2) - 2\alpha\Sigma(uy) - 2\beta\Sigma(vy) + \alpha^2\Sigma(u^2) + 2\alpha\beta\Sigma(uv) + \beta^2\Sigma(v^2).$$

In dieser Gleichung sind natürlich außer der als Abhängigvariablen zu behandelnden Fehlerquadratsumme $\Sigma(z^2)$ nur die hier als Urvariabele anzusehenden Constanten α und β der Funktion $y = \alpha u + \beta v$ unbekannt. Die Methode der kleinsten Quadrate fordert nun, sowohl α als auch β so zu wählen, daß die Quadratsumme $\Sigma(z^2)$ zum Minimum werde; und deshalb müssen wir die gewonnene Funktion für $\Sigma(z^2)$ ein Mal in Beziehung auf α und ein Mal in Beziehung auf β differenziiren, und jeden der sich herausstellenden Differenzialquotienten von $\Sigma(z^2)$ gleich Null setzen. Dadurch stößt man auf folgende zwei Bestimmungsgleichungen für α und β

$$-\Sigma(uy) + \alpha\Sigma(u^2) + \beta\Sigma(uv) = 0,$$
$$-\Sigma(vy) + \beta\Sigma(v^2) + \alpha\Sigma(uv) = 0;$$

deren Auflösung auf folgende Ausdrücke führt:

$$\alpha = \frac{\Sigma(v^2)\Sigma(uy) - \Sigma(uv)\Sigma(vy)}{\Sigma(u^2)\Sigma(v^2) - \Sigma(uv)\Sigma(uv)} \text{ und}$$

$$\beta = \frac{\Sigma(u^2)\Sigma(vy) - \Sigma(uv)\Sigma(uy)}{\Sigma(u^2)\Sigma(v^2) - \Sigma(uv)\Sigma(uv)}.$$ (Vgl. Ingenieur, S. 131.)

Diese Formeln gehen für eine Funktion $y = \alpha + \beta v$, da hier $u = 1$, also $\Sigma(uv) = \Sigma(v)$, $\Sigma(uy) = \Sigma(y)$ und $\Sigma(u^2) = 1 + 1 + 1 + \ldots = n$, d. i. die Anzahl der Gleichungen oder Beobachtungen ist, in folgende über:

$$\alpha = \frac{\Sigma(v^2)\,\Sigma(y) - \Sigma(v)\,\Sigma(vy)}{n\Sigma(v^2) - \Sigma(v)\Sigma(v)},$$

$$\beta = \frac{n\Sigma(vy) - \Sigma(v)\Sigma(y)}{n\Sigma(v^2) - \Sigma(v)\Sigma(v)}.$$

Für die noch einfachere Funktion $y = \beta v$, wo $\alpha =$ Null ist erhält man

$$\beta = \frac{\Sigma(vy)}{\Sigma(v^2)},$$

und endlich für den einfachsten Fall $y = \alpha$, wo es sich also um die Ausmittelung des wahrscheinlichsten Werthes einer einzigen Größe handelt, ist

$$\alpha = \frac{\Sigma(y)}{n},$$

also dieser Werth das arithmetische Mittel aus allen durch Messung oder Beobachtung gefundenen Werthen.

Beispiel. Um das Gesetz einer gleichförmig beschleunigten Bewegung, d. i. deren Anfangsgeschwindigkeit c und Beschleunigungsmaaß p kennen zu lernen, hat man die verschiedenen Zeiten t_1, t_2, t_3 u. s. w. entsprechenden Räume s_1, s_2, s_3 u. s. w. gemessen, und dabei Folgendes gefunden:

Zeiten:	0	1	3	5	7	10 Sec.
Räume:	0	5	20	38	58½	101 Fuß.

Ist nun $s = ct + \frac{pt^2}{2}$ das dieser Bewegung zu Grunde liegende Bewegungsgesetz, so handelt es sich um die Ermittelung der Constanten c und p. Setzt man in die obigen Formeln $u = t$ und $v = t^2$, sowie $\alpha = c$, $\beta = \frac{p}{2}$ und $y = s$, so erhält man zur Berechnung von c und p folgende Formeln:

$$c = \frac{\Sigma(t^4)\Sigma(st) - \Sigma(t^3)\Sigma(st^2)}{\Sigma(t^2)\Sigma(t^4) - \Sigma(t^3)\Sigma(t^3)} \text{ und}$$

$$\frac{p}{2} = \frac{\Sigma(t^2)\Sigma(st^2) - \Sigma(t^3)\Sigma(st)}{\Sigma(t^2)\Sigma(t^4) - \Sigma(t^3)\Sigma(t^3)},$$

wonach sich folgende Rechnung führen läßt.

t	t^2	t^3	t^4	s	st	st^2
1	1	1	1	5	5	5
3	9	27	81	20	60	180
5	25	125	625	38	190	950
7	49	343	2401	58,5	409,5	2866,5
10	100	1000	10000	101	1010	10100
Summen	184 $= \Sigma(t^2)$	1496 $= \Sigma(t^3)$	13108 $= \Sigma(t^4)$	222,5 $= \Sigma(s)$	1674,5 $= \Sigma(st)$	14101,5 $= \Sigma(st^2)$.

Hieraus bestimmt sich

$$c = \frac{13108 . 1674,5 - 1496 . 14101,5}{184 . 13108 - 1496 . 1496} = \frac{85340}{17386} = 4,908 \text{ Fuß und}$$

$$\tfrac{1}{2}p = \frac{184 . 14101,5 - 1496 . 1674,5}{184 . 13108 - 1496 . 1496} = \frac{89624}{173860} = 0,5155 \text{ Fuß},$$

und daher folgende Formel für die beobachtete Bewegung

$s = 4,908t + 0,5155 . t^2$.

Nach dieser Formel hat man

für die Zeiten:	0	1	3	5	7	10 Sec.
die Räume:	0	5,43	19,36	37,43	59,62	100,63 Fuß.

Die allgemeinen Lehren der Mechanik.

Erster Abschnitt.

Phoronomie oder rein mathematische Bewegungslehre.

Erstes Kapitel.

Die einfache Bewegung.

§. 1. Jeder Körper nimmt im Raume einen gewissen Ort ein, und ein Körper ist in Ruhe (franz. repos, engl. rest), wenn er seinen Ort nicht ändert; er ist hingegen in Bewegung (fr. mouvement, engl. motion), wenn er aus einem Orte nach und nach in andere übergeht. Ruhe und Bewegung eines Körpers sind entweder absolut oder relativ, je nachdem man den Ort desselben auf einen Raum bezieht, der selbst in Ruhe oder in Bewegung ist, oder darin gedacht wird. Ruhe und Bewegung.

Auf der Erde giebt es keine Ruhe, denn alle Körper auf der Erde nehmen an ihrer Bewegung um die Sonne und um ihre eigene Axe Antheil; denken wir uns aber die Erde in Ruhe, so sind für uns auch alle diejenigen Erdkörper in Ruhe, welche ihren Ort in Beziehung auf die Erde nicht ändern.

§. 2. Die stetige Folge von Oertern, welche ein Körper in seiner Bewegung nach und nach einnimmt, bildet einen Raum, den man den Weg (franz. chemin, trajectoire, engl. way, trajectory) des bewegten Körpers nennt. Der Weg eines bewegten Punktes ist eine Linie. Der Weg eines geometrischen Körpers ist zwar wieder ein Körper, man versteht aber unter demselben gewöhnlich diejenige Linie, welche ein gewisser Punkt, z. B. der Mittelpunkt des Körpers, bei der Bewegung beschreibt. Bewegungsarten.

Eine Bewegung ist geradlinig (franz. rectiligne, engl. rectilinear), wenn ihr Weg in einer geraden Linie besteht; sie ist aber krummlinig (franz. curviligne, engl. curvilinear), wenn der Weg des bewegten Körpers eine krumme Linie ist.

In Beziehung auf Zeit (franz. temps, engl. time) ist die Bewegung entweder gleichförmig oder ungleichförmig.

§. 3. Eine Bewegung ist gleichförmig (fr. uniforme, engl. uniform), wenn durch dieselbe in gleichen und beliebig kleinen Zeittheilchen gleiche

Bewegungsarten. Wege zurückgelegt werden; sie ist ungleichförmig (franz. varié, engl. variable), wenn diese Gleichheit nicht statt hat. Werden mit dem Ablaufen der Zeit die in gleichen Zeittheilchen durchlaufenen Räume immer größer und größer, so heißt die ungleichförmige Bewegung beschleunigt (franz. accéléré, engl. increasing), nehmen diese aber immer mehr und mehr ab, so heißt sie verzögert (franz. retardé, engl. decreasing).

Von der gleichförmigen Bewegung ist die periodische Bewegung (franz. périodique, engl. periodic) dadurch unterschieden, daß bei dieser nur innerhalb gewisser gleicher Zeiträume, die man Perioden nennt, gleiche Räume durchlaufen werden.

Das beste Beispiel der gleichförmigen Bewegung giebt die scheinbare tägliche Umdrehung des Fixsternhimmels; nächstdem das Fortrücken der Zeiger einer Uhr. Beispiele der ungleichförmigen Bewegung geben fallende und in die Höhe geworfene Körper, der sinkende Wasserspiegel beim Ausfluß des Wassers aus Gefäßen u. s. w. Für die periodische Bewegung findet man Beispiele an den Pendelschwingungen, an den Kolbenspielen einer Dampfmaschine u. s. w.

Gleichförmige Bewegung. §. 4. Geschwindigkeit (franz. vitesse, engl. velocity) ist die Stärke oder Größe einer Bewegung. Je größer der Raum ist, welchen ein Körper innerhalb einer gewissen Zeit durchläuft, desto stärker ist auch seine Bewegung, oder desto größer ist auch seine Geschwindigkeit. Bei einer gleichförmigen Bewegung ist die Geschwindigkeit unveränderlich, bei einer ungleichförmigen Bewegung hingegen ändert sie sich in jedem Augenblicke. Das Maaß der Geschwindigkeit in einem gewissen Zeitpunkte ist der Weg, den der Körper von diesem an innerhalb der Zeiteinheit oder Secunde entweder wirklich zurücklegt oder zurücklegen würde, wenn von diesem Augenblicke oder Zeitpunkte an die Bewegung in eine gleichförmige überginge, also die Geschwindigkeit unveränderlich bliebe. Gewöhnlich nennt man dieses Maaß schlechtweg Geschwindigkeit.

§. 5. Wenn ein Körper in jedem Zeittheilchen den Weg σ durchläuft, und die Zeitsecunde aus n (sehr vielen) solchen Zeittheilchen besteht, so ist der Weg innerhalb einer Secunde die Geschwindigkeit oder vielmehr das Geschwindigkeitsmaaß:

$$c = n . \sigma.$$

Im Laufe einer Zeit t (Secunden) verfließen $n.t$ Zeittheilchen, in jedem wird aber der Raum σ zurückgelegt, es ist daher der ganze Weg (franz. l'espace, engl. the space), welcher der Zeit t entspricht:

$$s = n.t.\ \sigma = n.\sigma.t, \text{ d. i.}$$

$$\text{I. } s = ct.$$

Bei der gleichförmigen Bewegung ist also der Raum (s) ein Product aus Geschwindigkeit (c) und Zeit (t).

Umgekehrt ist: Gleichförmige Bewegung.

$$\text{II. } c = \frac{s}{t} \text{ und III. } t = \frac{s}{c}.$$

Beispiele: 1) Ein Dampfwagen, welcher mit einer Geschwindigkeit von 30 Fuß fortrollt, legt in 2 Stunden = 120 Minuten = 7200 Secunden den Weg (s) von 30 . 7200 = 216000 Fuß zurück. 2) Wenn zum Herausziehen einer Tonne aus einem 1200 Fuß tiefen Schachte eine Zeit von $4\frac{1}{2}$ Minuten = 270 Secunden nöthig ist, so hat man die mittlere Geschwindigkeit dieses Fördergefäßes (v) $= \frac{1200}{270} = \frac{40}{9} = 4\frac{4}{9} = 4{,}444\ldots$ Fuß anzunehmen. 3) Ein Pferd, welches sich mit 6 Fuß Geschwindigkeit fortbewegt, braucht zum Zurücklegen eines Weges von einer Meile oder 24000 Fuß eine Zeit von $\frac{24000}{6} = 4000$ Secunden oder 1 Stunde 6 Minuten und 40 Secunden.

§. 6. Vergleicht man zwei verschiedene gleichförmige Bewegungen mit einander, so stößt man auf Folgendes:

Die Räume sind $s = ct$ und $s_1 = c_1 t_1$, es ist daher ihr Verhältniß $\frac{s}{s_1} = \frac{ct}{c_1 t_1}$. Setzt man nun $t_1 = t$, so hat man $\frac{s}{s_1} = \frac{c}{c_1}$; nimmt man $c_1 = c$, so erhält man $\frac{s}{s_1} = \frac{t}{t_1}$; ist endlich $s_1 = s$, so folgt $\frac{c}{c_1} = \frac{t_1}{t}$.

Die in gleichen Zeiten durchlaufenen Räume verhalten sich also bei verschiedenen gleichförmigen Bewegungen wie die Geschwindigkeiten; die mit gleichen Geschwindigkeiten zurückgelegten Wege dagegen wie die Zeiten; die gleichen Räumen entsprechenden Geschwindigkeiten sind endlich den Zeiten umgekehrt proportional.

§. 7. Eine Bewegung ist gleichförmig verändert (franz. uniformément varié, engl. uniformly variable), wenn ihre Geschwindigkeit innerhalb gleicher, beliebig kleiner Zeittheilchen um gleichviel zu- oder abnimmt. Sie ist entweder gleichförmig beschleunigt (franz. uniformément accéléré, engl. uniformly accelerated), oder gleichförmig verzögert (franz. uniformément retardé, engl. uniformly retarded); im ersten Falle findet ein allmäliges Wachsthum, im zweiten ein Abnehmen an Geschwindigkeit Statt. Gleichförmig veränderte Bewegung.

Gleichförmig beschleunigt fällt ein Körper im luftleeren Raume, gleichförmig verzögert würde das Steigen senkrecht in die Höhe geworfener Körper erfolgen, wenn die Luft keinen Einfluß auf den Körper ausübte.

§. 8. Die Stärke oder Größe der Veränderung in der Geschwindigkeit eines Körpers heißt Acceleration oder Beschleunigung (franz. accélération, engl. acceleration); sie ist entweder positiv (Beschleunigung) oder negativ (Verzögerung), je nachdem eine Zu- oder Abnahme der Geschwindigkeit statthat. Je größer die Zu- oder Abnahme der Geschwindigkeit innerhalb einer gewissen Zeit ist, desto größer ist auch die Acceleration.

Gleichförmig veränderte Bewegung. Bei der gleichförmig veränderten Bewegung ist die Acceleration unveränderlich; es läßt sich daher auch dieselbe durch diejenige Zu- oder Abnahme an Geschwindigkeit messen, welche im Laufe einer Zeitsecunde stattfindet. Bei jeder andern Bewegung hingegen ist das Maaß der Acceleration diejenige Zu- oder Abnahme an Geschwindigkeit, welche ein Körper erhalten würde, wenn von dem Augenblicke an, für welchen man Acceleration angeben will, dieselbe ihre Veränderlichkeit verlöre, die Bewegung also in eine gleichförmig veränderte überginge.

Sehr gewöhnlich nennt man dieses Maaß selbst die Acceleration oder Beschleunigung.

§. 9. Wenn die Geschwindigkeit einer gleichförmig beschleunigten Bewegung in einem sehr kleinen (unendlich kleinen) Zeittheilchen um $\varkappa$ zunimmt, und die Zeitsecunde aus n (unendlich vielen) solchen Zeittheilchen besteht, so ist die Zunahme an Geschwindigkeit in einer Secunde, oder die sogenannte Acceleration

$$p = n\,\varkappa,$$

und die Zunahme nach t Secunden $= n\,t\,.\,\varkappa = n\,\varkappa\,.\,t = p\,t$.

Ist die Anfangsgeschwindigkeit (im Augenblicke, wenn man die Zeit t zu zählen anfängt) $= c$, so hat man hiernach die Endgeschwindigkeit, d. i. die am Ende der Zeit t erlangte:

$$v = c + pt.$$

Für die ohne Geschwindigkeit anfangende Bewegung ist $c = o$, daher $v = p\,t$, und für die gleichförmig verzögerte, negative Acceleration $(-p)$ besitzende Bewegung ist $v = c - p\,t$.

Beispiele. 1) Die Acceleration eines im luftleeren Raume frei fallenden Körpers ist $= 31\frac{1}{4} = 31{,}25$ Fuß; es erlangt daher ein solcher nach 3 Secunden die Geschwindigkeit $v = pt = 31{,}25 \times 3 = 93{,}75$ Fuß. 2) Eine von einer schiefen Ebene herabrollende Kugel hat im Anfang schon die Geschwindigkeit $c = 25$ Fuß, und erlangt beim Herabrollen in jeder Secunde noch 5 Fuß Zusatz an Geschwindigkeit; es ist daher ihre Geschwindigkeit nach $2\frac{1}{2}$ Secunde: $v = 25 + 5 \times 2{,}5 = 25 + 12{,}5 = 37{,}5$ Fuß, d. h., sie wird, von dem letzten Zeitpunkte an gleichförmig fortgehend, in jeder Secunde 37,5 Fuß Weg zurücklegen. 3) Ein mit 30 Fuß Geschwindigkeit fortgehender Dampfwagen wird so gebremst, daß er in jeder Secunde 3,5 Fuß an Geschwindigkeit verliert, seine Acceleration also $-$ 3,5 Fuß beträgt; es ist deshalb seine Geschwindigkeit nach 6 Secunden: $v = 30 - 3{,}5 \times 6 = 30 - 21 = 9$ Fuß.

§. 10. Innerhalb eines unendlich kleinen Zeittheilchens τ läßt sich die Geschwindigkeit einer jeden Bewegung als unveränderlich ansehen; man kann daher den in diesem Zeittheilchen durchlaufenen Raum $\sigma = v\,.\,\tau$ setzen, und erhält so den in einer endlichen Zeit t durchlaufenen Raum, wenn man die Summe dieser kleinen Räume ermittelt. Nun ist aber für alle diese Räumchen die Zeit τ eine und dieselbe, es läßt sich daher auch ihre Summe gleichsetzen dem Producte aus eben diesen Zeittheilchen und

aus der Summe der, gleichen Intervallen entsprechenden Geschwindigkeiten. Gleichförmig beschleunigte Bewegung.
Bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung ist aber die Summe $(o + v)$ der Geschwindigkeiten im ersten und letzten Augenblicke so groß als die Summe $p\tau + (v - p\tau)$ der Geschwindigkeiten im zweiten und vorletzten Augenblicke, auch gleich der Summe $2p\tau + (v - 2p\tau)$ der Geschwindigkeiten im dritten und vorvorletzten Augenblicke u. s. w., und diese Summe überhaupt gleich der Endgeschwindigkeit v; es ist daher hier die Summe aller Geschwindigkeiten gleich dem Produkte $\left(v \,.\, \frac{n}{2}\right)$ aus der Endgeschwindigkeit v und aus der halben Anzahl aller Zeittheilchen, der durchlaufene Raum aber das Produkt $\left(v \,.\, \frac{n}{2} \,.\, \tau\right)$ aus der Endgeschwindigkeit v, der halben Anzahl der Zeittheile und der Größe eines solchen. Nun giebt endlich die Größe (τ) eines Zeittheilchens, mit der Anzahl derselben multiplicirt, die ganze Zeit t, deshalb ist denn der innerhalb der Zeit t gleichförmig beschleunigt zurückgelegte Raum $s = \frac{vt}{2}$.

Bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung fällt hiernach der Raum ebenso groß aus, wie bei der gleichförmigen Bewegung, wenn deren Geschwindigkeit halb so groß ist, als die Endgeschwindigkeit der erstern Bewegung.

Beispiele: 1) Wenn ein Körper innerhalb 10 Sekunden durch gleichförmig beschleunigte Bewegung eine Geschwindigkeit v von 26 Fuß erlangt hat, so ist der zu gleicher Zeit zurückgelegte Weg $s = \frac{26 \,.\, 10}{2} = 130$ Fuß. 2) Ein Wagen, welcher bei seiner gleichförmig beschleunigten Bewegung im Laufe von $2\frac{1}{4}$ Sekunde 25 Fuß zurückgelegt hat, geht am Ende mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{2 \,.\, 25}{2{,}25} = \frac{50 \,.\, 4}{9} = 22{,}22 \ldots \text{ Fuß fort.}$$

§. 11. Die beiden Grundformeln der gleichförmig beschleunigten Bewegung:

$$\text{I.} \quad v = pt \quad \text{und} \quad \text{II.} \quad s = \frac{vt}{2},$$

welche ausdrücken, daß hier die Geschwindigkeit ein Product aus Acceleration und Zeit, und der Raum ein solches aus der halben Geschwindigkeit und Zeit ist, schließen noch zwei andere Hauptformeln in sich, die man erhält, wenn man aus beiden Gleichungen ein Mal v und ein zweites Mal t eliminirt. Es folgt nämlich:

$$\text{III.} \quad s = \frac{pt^2}{2} \quad \text{und} \quad \text{IV.} \quad s = \frac{v^2}{2p}.$$

Hiernach ist also der gleichförmig beschleunigt zurückgelegte Weg ein Product aus der halben Acceleration und dem Quadrate der Zeit, und auch der Quotient aus dem Quadrate der Endgeschwindigkeit und der doppelten Beschleunigung.

Gleichförmig beschleunigte Bewegung.

Diese vier Hauptformeln geben durch Umkehrung, je nachdem man die eine oder die andere der in ihnen enthaltenen Größen absondert, noch acht andere Formeln, und man findet dieselben im »Ingenieur Seite 372 und 373« in einer Tabelle zusammengestellt.

Beispiele: 1) Ein mit der Acceleration 15,625 Fuß bewegter Körper legt in 1,5 Sekunde den Weg $\frac{15,625 \times (1,5)^2}{2} = 15,625 \times \frac{9}{8} = 17,578$ Fuß zurück. 2) Ein durch die Acceleration $p = 4,5$ Fuß in die Geschwindigkeit $v = 16,5$ Fuß versetzter Körper hat den Raum $s = \frac{(16,5)^2}{2 \cdot 4,5} = 30,25$ Fuß zurückgelegt.

§. 12. Bei der Vergleichung von zwei verschiedenen gleichförmig beschleunigten Bewegungen mit einander stößt man auf Folgendes:

Die Geschwindigkeiten sind $v = pt$ und $v_1 = p_1 t_1$, die Räume hingegen $s = \frac{pt^2}{2}$ und $s_1 = \frac{p_1 t_1^2}{2}$, es folgt hieraus:

$$\frac{v}{v_1} = \frac{pt}{p_1 t_1} \text{ und } \frac{s}{s_1} = \frac{pt^2}{p_1 t_1^2} = \frac{vt}{v_1 t_1} = \frac{v^2 p_1}{v_1^2 p}.$$

Setzt man nun $t_1 = t$, so erhält man $\frac{s}{s_1} = \frac{v}{v_1} = \frac{p}{p_1}$; es verhalten sich also bei gleichen Zeiten die durchlaufenen Wege wie die Endgeschwindigkeiten, oder auch wie die Beschleunigungen.

Nimmt man ferner $p_1 = p$, so ergiebt sich

$$\frac{v}{v_1} = \frac{t}{t_1} \text{ und } \frac{s}{s_1} = \frac{t^2}{t_1^2} = \frac{v^2}{v_1^2};$$

bei gleichen Beschleunigungen und also auch bei einer und derselben gleichförmig beschleunigten Bewegung sind also die Endgeschwindigkeiten den Zeiten und die durchlaufenen Räume den Quadraten der Zeiten, oder auch den Quadraten der Endgeschwindigkeiten proportional.

Ferner $v_1 = v$ angenommen, giebt $\frac{p}{p_1} = \frac{t_1}{t}$ und $\frac{s}{s_1} = \frac{t}{t_1}$; bei gleichen Endgeschwindigkeiten sind die Accelerationen den Zeiten umgekehrt, die Räume aber den Zeiten direct proportional.

Endlich $s_1 = s$ gesetzt, giebt $\frac{p}{p_1} = \frac{t_1^2}{t^2} = \frac{v^2}{v_1^2}$; es verhalten sich also bei gleichen Räumen die Accelerationen umgekehrt wie die Quadrate der Zeiten und direct wie die Quadrate der Endgeschwindigkeiten.

§. 13. Für die mit der Geschwindigkeit c anfangende gleichförmig beschleunigte Bewegung hat man nach §. 9:

$$\text{I.}\quad v = c + pt$$

und da der unveränderlichen Geschwindigkeit c der Raum ct, der Acceleration p aber der Weg $\frac{pt^2}{2}$ zukommt, Gleichförmig beschleunigte Bewegung.

$$\text{II.}\quad s = ct + \frac{pt^2}{2}.$$

Entfernt man p aus beiden Gleichungen, so erhält man:

$$\text{III.}\quad s = \frac{c + v}{2}\,t,$$

und beseitigt man t, so stellt sich

$$\text{IV.}\quad s = \frac{v^2 - c^2}{2p}$$ heraus.

Beispiele: 1) Ein mit der Anfangsgeschwindigkeit $c = 3$ Fuß und mit der Acceleration $p = 5$ Fuß bewegter Körper legt in 7 Secunden den Weg $s = 3 \cdot 7 + 5 \cdot \frac{7^2}{2} = 21 + 122{,}5 = 143{,}5$ Fuß zurück.

2) Ein anderer Körper, welcher innerhalb 3 Minuten, = 180 Secunden, seine Geschwindigkeit $2^1/_2$ Fuß in die von $7^1/_2$ Fuß umändert, macht in dieser Zeit den Weg von $\frac{2{,}5 + 7{,}5}{2} \cdot 180 = 900$ Fuß.

§. 14. Für die mit der Geschwindigkeit c anfangende gleichförmig verzögerte Bewegung gelten die Formeln:

$$\text{I.}\quad v = c - pt,$$

$$\text{II.}\quad s = ct - \frac{pt^2}{2},$$

$$\text{III.}\quad s = \frac{c + v}{2} \cdot t,$$

$$\text{VI.}\quad s = \frac{c^2 - v^2}{2p},$$

welche aus den Gleichungen des vorigen §. sogleich hervorgehen, wenn man darin p negativ setzt. Während bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung die Geschwindigkeit ohne Ende wächst, nimmt bei der gleichförmig verzögerten Bewegung die Geschwindigkeit bis zu einem gewissen Zeitpunkte ab, wird in demselben = Null, und fällt später negativ aus, d. h. es geht später die Bewegung in umgekehrter Richtung vor sich.

Setzen wir in der ersten Formel $v = o$, so erhalten wir $pt = c$, also die Zeit, zu welcher die Geschwindigkeit Null geworden ist, $t = \frac{c}{p}$; setzen wir endlich diesen Werth von t in die zweite Gleichung, so erhalten wir den Raum, welchen der Körper zu diesem Zeitpunkte zurückgelegt hat:

$$s = \frac{c^2}{2p}.$$

Gleichförmig beschleunigte Bewegung.

Ist die Zeit größer als $\frac{c}{p}$, so fällt der Raum kleiner als $\frac{c^2}{2p}$ aus; ist die Zeit $= \frac{2c}{p}$, so ist der Raum Null, es ist also der Körper nach seinem Ausgangspunkt zurückgekehrt; ist endlich die Zeit noch größer als $\frac{2c}{p}$, so ist s negativ, d. h. es befindet sich der Körper vom Anfangspunkte aus auf der entgegengesetzten Seite.

Beispiel. Ein Körper, welcher mit 40 Fuß Anfangsgeschwindigkeit auf einer schiefen Ebene hinaufrollt, durch welche er eine Verzögerung von 8 Fuß pro Secunde erleidet, steigt nur $\frac{40}{8} = 5$ Sekunden lang und $\frac{40^2}{2.8} = 100$ Fuß hoch, rollt dann zurück, kommt nach 10 Secunden mit 40 Fuß Geschwindigkeit in den Anfangspunkt zurück und gelangt nach 12 Secunden schon um $40 \times 12 - 4 \times 12^2$ oder $-(40 \times 2 + 4 \times 2^2) = 96$ Fuß unter den Anfangspunkt, wenn sich die Ebene auch abwärts erstreckt.

Freier Fall der Körper.

§. 15. Der freie oder senkrechte Fall der Körper im luftleeren Raume (franz. mouvement vertical des corps pesants, engl. vertical motion of bodies) gibt das wichtigste Beispiel der gleichförmig beschleunigten Bewegung. Die durch die Schwerkraft (franz. gravité, engl. gravity) erzeugte Acceleration dieser Bewegung bezeichnet man durch den Buchstaben g, und hat den mittleren Werth von

9,81 Metern
30,20 pariser Fuß,
32,20 englischen Fuß,
31,03 wiener Fuß,
$31\frac{1}{4} = 31{,}25$ preußischen Fuß.

Wenn man einen dieser Werthe statt g in die gefundenen Formeln

$$v = gt, \quad s = \frac{gt^2}{2} \text{ und } s = \frac{v^2}{2g}, \quad v = \sqrt{2gs}$$

einführt, so kann man alle Fragen, welche sich in Ansehung des freien Falles der Körper vorlegen lassen, beantworten. Für das preußische Maaß läßt sich gleich setzen:

$$v = 31{,}25 \,.\, t = 7{,}906 \sqrt{s}; \quad s = 15{,}625 \,.\, t^2 = 0{,}016\, v^2$$
$$\text{und } t = 0{,}032\, v = 0{,}253 \sqrt{s}.$$

Beispiele: 1) Ein Körper erlangt beim ungehinderten Fallen in 4 Secunden die Geschwindigkeit $v = 31{,}25 \times 4 = 125$ Fuß und durchläuft in dieser Zeit den Weg $s = 15{,}625 \times 4^2 = 250$ Fuß. 2) Ein von der Höhe $s = 9$ Fuß herabgefallener Körper hat die Geschwindigkeit $v = 7{,}906 \,.\, \sqrt{9} = 23{,}72$ Fuß. 3) Ein mit 10 Fuß Geschwindigkeit vertikal aufgeworfener Körper steigt auf die Höhe $s = 0{,}016 \,.\, 10^2 = 1{,}6$ Fuß und braucht dazu die Zeit $t = 0{,}032 \,.\, 10 = 0{,}32$ oder ungefähr $\frac{1}{3}$ Secunde.

§. 16. Wie sich beim freien Fall der Körper die Bewegungsverhältnisse im Laufe der Zeit gestalten, wird durch folgende Tabelle vor Augen geführt. Freier Fall der Körper.

Zeit in Sekunden.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Geschwindigkeit.	0	$1g$	$2g$	$3g$	$4g$	$5g$	$6g$	$7g$	$8g$	$9g$	$10g$
Weg.	0	$1\frac{g}{2}$	$4\frac{g}{2}$	$9\frac{g}{2}$	$16\frac{g}{2}$	$25\frac{g}{2}$	$36\frac{g}{2}$	$49\frac{g}{2}$	$64\frac{g}{2}$	$81\frac{g}{2}$	$100\frac{g}{2}$
Differenzen.	0	$1\frac{g}{2}$	$3\frac{g}{2}$	$5\frac{g}{2}$	$7\frac{g}{2}$	$9\frac{g}{2}$	$11\frac{g}{2}$	$13\frac{g}{2}$	$15\frac{g}{2}$	$17\frac{g}{2}$	$19\frac{g}{2}$

Die letzte Horizontalcolumne dieser Tafel gibt die Wege an, welche der frei fallende Körper in den einzelnen Secunden durchläuft. Man sieht, daß sich diese Wege wie die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7 u. s. w. zu einander verhalten, während die Zeiten und Geschwindigkeiten wie die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4 u. s. w. und die Fallräume wie deren Quadrate 1, 4, 9, 16 u. s. w. wachsen. Hiernach ist z. B. die Geschwindigkeit nach 6 Secunden $6\,g = 187{,}5$ Fuß, d. h. der Körper würde, wenn er von dieser Zeit an gleichförmig fortginge, etwa auf einer ihm keine Hindernisse darbietenden Horizontalebene seine Bewegung fortsetzte, in jeder Secunde den Weg $6\,g = 187{,}5$ Fuß durchlaufen. Diesen Raum durchläuft er im Laufe der folgenden oder siebenten Secunde aber nicht wirklich, sondern derselbe beträgt genau nach der letzten Columne $13 . \frac{g}{2} = 13 . 15{,}625 = 203{,}125$ Fuß; in der achten Secunde ist er sogar $15 . \frac{g}{2} = 15 . 15{,}625 = 234{,}375$ Fuß, u. s. w.

Anmerkung: Viele deutsche Schriftsteller bezeichnen den Raum von 15,625 Fuß, welcher vom frei fallenden Körper in der ersten Secunde durchlaufen wird, durch g und nennen ihn wohl auch Beschleunigung der Schwere. Sie haben dann für den freien Fall der Körper die Formeln:

$$v = 2gt = 2\sqrt{gs},$$
$$s = gt^2 = \frac{v^2}{4g},$$
$$t = \frac{v}{2g} = \sqrt{\frac{s}{g}}.$$

Dieser nur in Deutschland vorkommende Gebrauch fängt nun auch an, allmälig

Freier Fall der Körper.

zu verschwinden, und wegen der oft vorkommenden Mißverständnisse und dadurch herbeigeführten Fehler ist dies auch sehr zu wünschen.

§. 17. Geht der freie Fall der Körper mit einer gewissen Anfangsgeschwindigkeit (franz. vitesse initial, engl. initial-velocity) c vor sich, so nehmen die Formeln folgende Formen an:

$$v = c + gt = c + 31{,}25t, \text{ auch } v = \sqrt{c^2 + 2gs} = \sqrt{c^2 + 62{,}5.s},$$

$$s = ct + g\frac{t^2}{2} = ct + 15{,}625t^2, \text{ auch } s = \frac{v^2 - c^2}{2g} = 0{,}016\,(v^2 - c^2).$$

Wird hingegen der Körper mit der Geschwindigkeit c senkrecht in die Höhe geworfen, so hat man:

$$v = c - gt = c - 31{,}25\,t, \text{ auch } v = \sqrt{c^2 - 2gs} = \sqrt{c^2 - 62{,}5\,s},$$

$$s = ct - g\frac{t^2}{2} = ct - 15{,}625t^2, \text{ auch } s = \frac{c^2 - v^2}{2g} = 0{,}016\,(c^2 - v^2).$$

Betrachtet man eine gegebene Geschwindigkeit c als eine durch den freien Fall erlangte Endgeschwindigkeit, so nennt man den entsprechenden Fallraum $\frac{c^2}{2g} = 0{,}016 \,.\, c^2$ die Geschwindigkeitshöhe (franz. hauteur de la vitesse, engl. height of velocity). Durch Einführung derselben lassen sich einige der obigen Formeln einfacher ausdrücken. Bezeichnet man die Geschwindigkeitshöhe $\left(\frac{c^2}{2g}\right)$ von der Anfangsgeschwindigkeit c durch h und die der Endgeschwindigkeit, also $\frac{v^2}{2g}$ durch h_1, so hat man für fallende Körper:

$$h_1 = h + s \text{ und } s = h_1 - h$$

und für steigende

$$h_1 = h - s \text{ und } s = h - h_1$$

Es ist also der Fall- oder Steigraum stets gleich der Differenz der Geschwindigkeitshöhen.

Beispiel: Sind die Geschwindigkeiten 5 Fuß und 11 Fuß, also die Geschwindigkeitshöhen $= 0{,}016.5^2 = 0{,}4$ Fuß und $0{,}016.11^2 = 1{,}936$ Fuß, so ist der Raum, welcher während des Ueberganges aus der einen Geschwindigkeit in die andere zurückgelegt wird: $s = 1{,}936 - 0{,}400 = 1{,}536$ Fuß.

§. 18. Aus der Formel $s = h - h_1$ folgt auch noch, daß der senkrecht in die Höhe geworfene Körper an jeder Stelle diejenige Geschwindigkeit hat, die er, jedoch in umgekehrter Richtung, haben würde, wenn er von der noch übrigen Steighöhe bis zu dieser Stelle frei herabgefallen wäre, die er also auch beim darauf folgenden Niederfallen dort wirklich besitzt.

Beispiel: Ein Körper wird mit 15 Fuß Geschwindigkeit senkrecht emporgeworfen und trifft bei 2 Fuß Steighöhe auf ein elastisches Hinderniß, welches

ihn momentan mit derselben Geschwindigkeit zurückwirft, mit welcher er angetroffen hat. Wie groß ist nun diese Geschwindigkeit und wie groß ist die Zeit zum Steigen und Zurückfallen? Der Geschwindigkeit $c = 15$ Fuß entspricht die Steighöhe $h = 3{,}60$ Fuß, die Geschwindigkeitshöhe für den Augenblick des Anstoßes ist nun $h_1 = 3{,}60 - 2{,}00 = 1{,}60$, und folglich diese Geschwindigkeit selbst $= 7{,}906 \sqrt{1{,}6} = 10$ Fuß. Die Zeit zum Steigen auf die ganze Höhe (3,6 Fuß) wäre: $t = 0{,}032 . v = 0{,}032 . 15 = 0{,}480$ Sec., die Zeit zum Steigen auf die Höhe 1,6 Fuß aber: $t_1 = 0{,}032 . 10 = 0{,}320$ Sec., es bleibt diesem nach die Zeit zum Steigen auf die Höhe von 2 Fuß oder die Zeit vom Anfang bis zum Anstoß: $t - t_1 = 0{,}480 - 0{,}320 = 0{,}160$ Sec., also endlich die ganze Zeit zum Steigen und Fallen $= 2 . 0{,}160 = 0{,}320$ Sec. Diese ist also nur der $\frac{0{,}320}{0{,}960}$ste = 3te Theil von der Zeit, welche zum Aufsteigen und Zurückfallen nöthig wäre, wenn der Körper unaufgehalten stiege und fiele. Dieser Fall findet beim Schmieden des glühenden Eisens seine Anwendung, weil es hier wegen des allmäligen Abkühlens darauf ankommt, in einer kurzen Zeit so viel Hammerschläge wie möglich erfolgen zu lassen. Wenn der Hammer durch eine elastische Prallvorrichtung zurückgeworfen wird, so kann er unter den im Beispiele zum Grunde liegenden Verhältnissen in derselben Zeit ziemlich dreimal so viel Schläge thun als beim ungehinderten Aufsteigen. Freier Fall der Körper.

Anmerkung 1. Das Umsetzen der Geschwindigkeit in Geschwindigkeitshöhe, so wie auch das Umsetzen der letzteren in die erstere, ist ein in der praktischen Mechanik und namentlich in der Hydraulik sehr oft vorkommendes Geschäft. Eine Tafel, wodurch dasselbe in ein bloßes Nachschlagen verwandelt wird, leistet deshalb dem Praktiker sehr nützliche Dienste. Eine sich auf das preußische Fußmaaß beziehende Tabelle dieser Art enthält der »Ingenieur, Seite 374 und 375«.

Anmerkung 2. Die im Vorhergehenden entwickelten Formeln sind allerdings nur für den freien Fall im luftleeren Raume streng richtig; sie lassen sich jedoch auch beim freien Fall in der Luft mit einer noch erträglichen Genauigkeit gebrauchen, wenn die fallenden Körper in Beziehung auf ihr Volumen ein großes Gewicht haben, und wenn die Geschwindigkeiten nicht sehr groß ausfallen. Uebrigens werden sie auch noch unter anderen Umständen und Verhältnissen in vielen anderen Fällen gebraucht, wie in der Folge gezeigt werden wird.

§. 19.*) Die Formel $s = ct$ (§. 5.) für die gleichförmige Bewegung gilt auch für jede **ungleichförmige Bewegung**, wenn man statt t ein Zeitelement oder unendlich kleines Zeittheilchen dt, und statt s das innerhalb dieses Zeittheilchens zurückgelegte Raumelement ds setzt, da anzunehmen ist, daß innerhalb eines Augenblickes die Geschwindigkeit c, welche hier durch v bezeichnet werden soll, sich nicht ändert, also die Bewegung gleichförmig bleibt. Ungleichförmige Bewegung überhaupt.

Man hat also für jede ungleichförmige Bewegung:

$$\text{I.} \quad ds = v dt, \text{ so wie } v = \frac{ds}{dt}.$$

Es ist also die **Geschwindigkeit** (v) **für jeden Augenblick durch den Quotienten aus dem Raum- und aus dem Zeitelemente bestimmt.**

Ungleichförmige Bewegung überhaupt.

Ebenso ist die Formel $v = pt$ (§. 11) für die gleichförmig beschleunigte Bewegung auch für jede ungleichförmige Bewegung überhaupt giltig, wenn man statt t und v das Zeitelement dt und den innerhalb desselben erlangten unendlich kleinen Geschwindigkeitszuwachs dv substituirt, da sich die Beschleunigung p innerhalb eines Augenblickes (dt) nicht angebbar verändert, also die Bewegung während desselben als gleichförmig beschleunigt angesehen werden kann.

Hiernach hat man für alle Bewegungen:

$$\text{II.} \quad dv = pdt, \text{ so wie } p = \frac{dv}{dt}.$$

Es ist also die Acceleration (p) für jeden Augenblick der Bewegung gleich dem Quotienten aus dem Geschwindigkeits- und dem entsprechenden Zeitelemente.

Durch Verbindung der Formeln I. und II. erhält man noch die in der Folge sehr wichtige Gleichung:

III. $vdv = pds$, oder, da $\int vdv = \frac{v^2 - c^2}{2}$ ist, wenn c diejenige Geschwindigkeit bezeichnet, welche dem Anfangspunkte des Raumes s entspricht,

$$v^2 - c^2 = 2 \int pds.$$

Es ist also hiernach die Differenz der Geschwindigkeitsquadrate gleich dem doppelten Integrale von dem Producte aus der Acceleration und dem Elemente ds, oder gleich dem doppelten Producte aus der mittleren Acceleration und dem Raume, welcher während des Ueberganges der Geschwindigkeit aus c in v zurückgelegt wird.

Der Lehre vom Größten und Kleinsten zu Folge ist der Raum ein Maximum, hat also die Bewegung ihre größte Extension erlangt, wenn $\frac{ds}{dt} = v =$ Null ist, und die Geschwindigkeit am größten oder kleinsten

$$\text{für } \frac{dv}{dt} = p = \text{Null}.$$

Beispiele. Mit Hülfe der vorstehenden Formeln lassen sich die mannigfaltigsten Fragen der Phoronomie beantworten. Hier nur zwei Beispiele:

1) Aus der gegebenen Gleichung $s = 2 + 3t + t^2$ für den Raum, folgt durch Differenziiren für die Geschwindigkeit die Gleichung $v = 3 + 2t$, und für die Acceleration $p = 2$; es ist also die letztere constant, und die Bewegung gleichförmig beschleunigt. Für $t = 0, 1, 2, 3 \ldots$ Secunden, hat man aber

$v = 3, 5, 7, 9 \ldots$ (Fuß), und
$s = 2, 6, 12, 20 \ldots$ (Fuß).

2) Aus der Formel $v = 10 + 3t - t^2$ für die Geschwindigkeit folgt durch Integriren die Gleichung $s = \int 10\,dt + \int 3\,t\,dt - \int t^2 dt = 10t + {}^3\!/_2\, t^2 - \frac{t^3}{3}$, dagegen durch Differenziiren die Formel $p = 3 - 2t$.

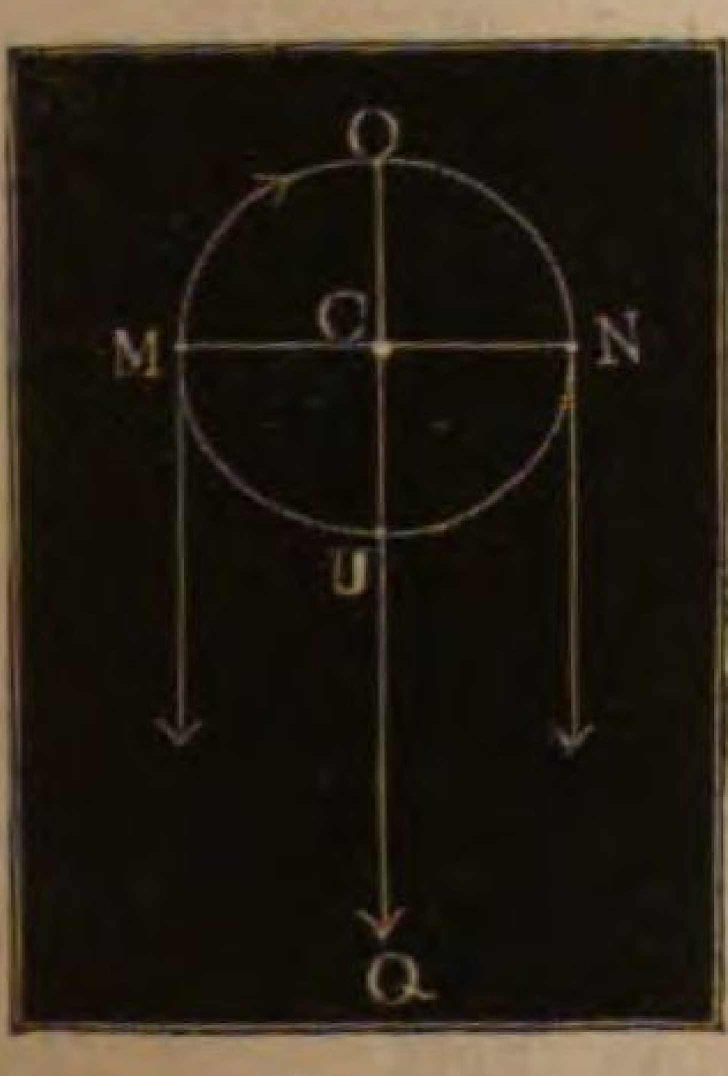
Hiernach ist für $3 - 2t = 0$, d. i. $t = \frac{3}{2}$ Secunden, die Acceleration Null und die Geschwindigkeit ein Maximum ($v = 12\frac{1}{4}$), und für $10 + 3t - t^2 = 0$, d. i. $t = \frac{3}{2} + \sqrt{10 + \frac{9}{4}} = \frac{3 + 7}{2} = 5$ Secunden die Geschwindigkeit Null und der Raum ein Maximum. Ungleichförmige Bewegung überhaupt.

Für $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ Secunden hat man
$p = 3, 1, -1, -3, -5, -7, -9$ Fuß,
$v = 10, 12, 12, 10, 6, 0, -8$ Fuß,
$s = 0, 11\frac{1}{6}, 23\frac{1}{3}, 34\frac{1}{2}, 42\frac{2}{3}, 45\frac{5}{6}, 42$ Fuß.

§. 20. Von der Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt}\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)$ für einen Augenblick oder während eines Zeitelementes ist $dt(\tau)$ diejenige Geschwindigkeit $c = \frac{s}{t}$ verschieden, welche sich ergibt, wenn man den Raum, welcher während einer gewissen Zeit, z. B. während einer Periode einer periodischen Bewegung durchlaufen wird, durch die Zeit selbst dividirt. Man nennt dieselbe die **mittlere Geschwindigkeit** (franz. vilesse moyenne, engl mean-velocity) und kann sie auch als diejenige Geschwindigkeit ansehen, die ein Körper haben müßte, um in einer gegebenen Zeit (t) einen gewissen Raum (s) gleichförmig zurückzulegen, der in Wirklichkeit in eben dieser Zeit ungleichförmig durchlaufen wird. So ist z. B. bei der gleichförmig veränderten Bewegung die mittlere Geschwindigkeit gleich der halben Summe $\left(\frac{c+v}{2}\right)$ aus der Anfangs- und Endgeschwindigkeit, denn es ist nach §. 13 der Raum gleich dieser Summe $\left(\frac{c+v}{2}\right)$ multiplicirt durch die Zeit (t). Mittlere Geschwindigkeit.

Beispiel. Während eine Kurbel gleichförmig im Kreise $UMON$, Fig. 39, herumgedreht wird, geht die daran hängende Last Q, z. B. der Kolben einer Luft- oder Wasserpumpe u. s. w. ganz ungleichförmig auf und nieder; die Geschwindigkeit dieser ist im tiefsten und höchsten Punkte U und O am kleinsten, nämlich Null, auf der halben Höhe, in M und N, aber am größten, nämlich der Kurbelgeschwindigkeit gleich. Innerhalb einer halben Umdrehung ist die mittlere Geschwindigkeit gleich der ganzen Steighöhe, d. i. dem Durchmesser UO des Kreises, in welchem die Kurbel herumgeht, dividirt durch die Zeit einer halben Umdrehung. Setzen wir den Halbmesser $CU = CO$ des Warzenkreises $= r$, also jenen Durchmesser $= 2r$ und diese Zeit $= t$, so folgt demnach die mittlere Geschwindigkeit der Last $c_1 = \frac{2r}{t}$. Die Kurbel selbst macht in dieser Zeit den Halbkreis πr; es ist daher ihre Geschwindigkeit $c = \frac{\pi r}{t}$, und folglich die mittlere

Fig. 39.



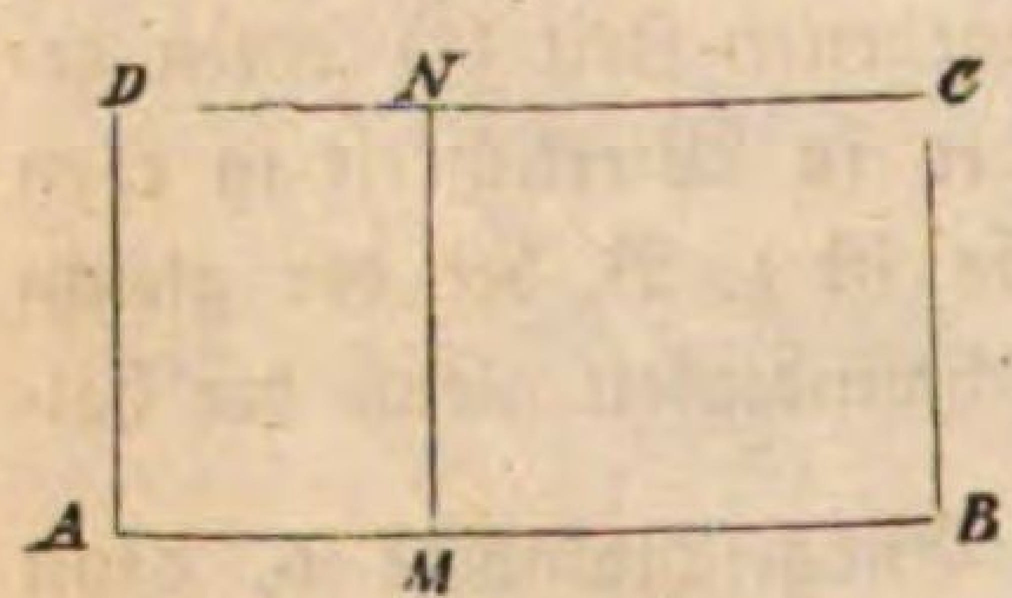
Geschwindigkeit der Last $c_1 = \frac{2}{\pi} = \frac{2}{3,141} = 0,6366$mal so groß als die unveränderliche Geschwindigkeit c der Kurbel.

Graphische Darstellung

§. 21. Die im Vorigen gefundenen Bewegungsgesetze lassen sich auch in geometrischen Figuren ausdrücken oder, wie man sagt, graphisch darstellen. Graphische Darstellungen überhaupt erleichtern die Auffassung, unterstützen das Gedächtniß, schützen wohl auch gegen Fehler und dienen sogar zuweilen zur unmittelbaren Ausmittelung der gesuchten Größe; sie sind deshalb der Mechanik von großem Nutzen.

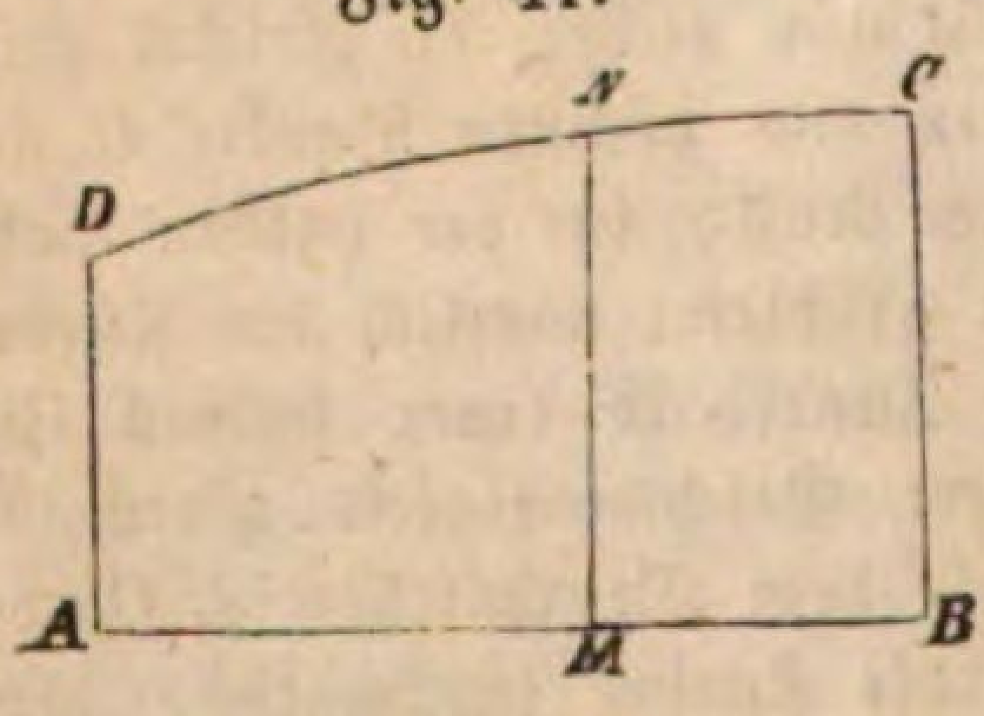
Bei der gleichförmigen Bewegung ist der Raum (s) das Product (ct) aus Geschwindigkeit und Zeit, und bei einem Rechtecke (Rectangel) der Geometrie ist der Flächenraum ein Product aus Höhe und Grundlinie; man kann daher auch den gleichförmig durchlaufenen Raum s durch ein Rechteck $ABCD$ Fig. 40 darstellen, dessen Grundlinie AB die Zeit (t) und dessen Höhe $AD = BC$ die Geschwindigkeit (c) ist, vorausgesetzt, daß die Zeit mit der Geschwindigkeit in einerlei Längeneinheiten ausgedrückt, daß also durch eine und dieselbe Linie die Zeitsecunde und der Fuß zugleich repräsentirt werden.

Fig. 40.



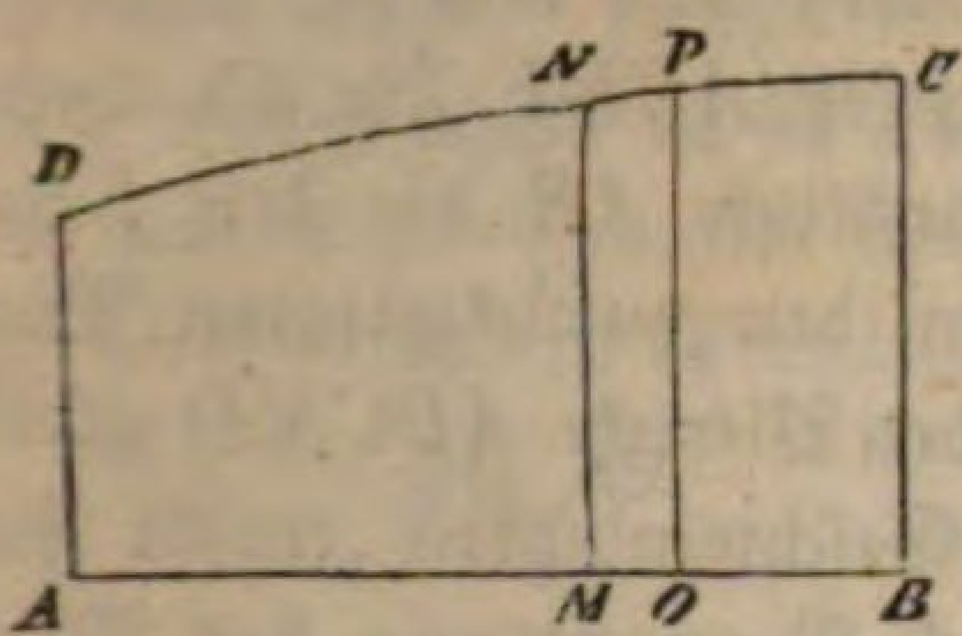
§. 22. Während bei der gleichförmigen Bewegung die Geschwindigkeit (MN) zu jeder andern Zeit (AM) der Bewegung eine und dieselbe ist, fällt dieselbe bei der ungleichförmigen Bewegung in jedem Augenblicke anders aus; es läßt sich deshalb diese Bewegung nur durch ein Viereck $ABCD$ Fig. 41 darstellen, welches zur Grundlinie AB die Zeit (t) und zur übrigen Begrenzung drei andere Linien AD, BC und CD hat, von denen die ersten beiden der Anfangs- und Endgeschwindigkeit gleich sind, die letzte aber durch die Endpunkte (N) der verschiedenen Geschwindigkeiten in den Zwischenpunkten (M) bestimmt wird. Nach den verschiedenen Arten von ungleichförmigen Bewegungen ist die vierte Linie CD entweder gerade oder krumm; ferner von Anfang aus aufsteigend oder niedersteigend, endlich entweder gegen die Grundlinie concav (hohl) oder convex (erhaben.) In jedem Falle aber ist der Flächeninhalt dieser Figur dem ungleichförmig durchlaufenen Raume (s) gleichzusetzen, denn jener Flächenraum $ABCD$ Fig. 42 läßt sich durch Höhenlinien in lauter schmale, als

Fig. 41.



Graphisch-Darstellung.

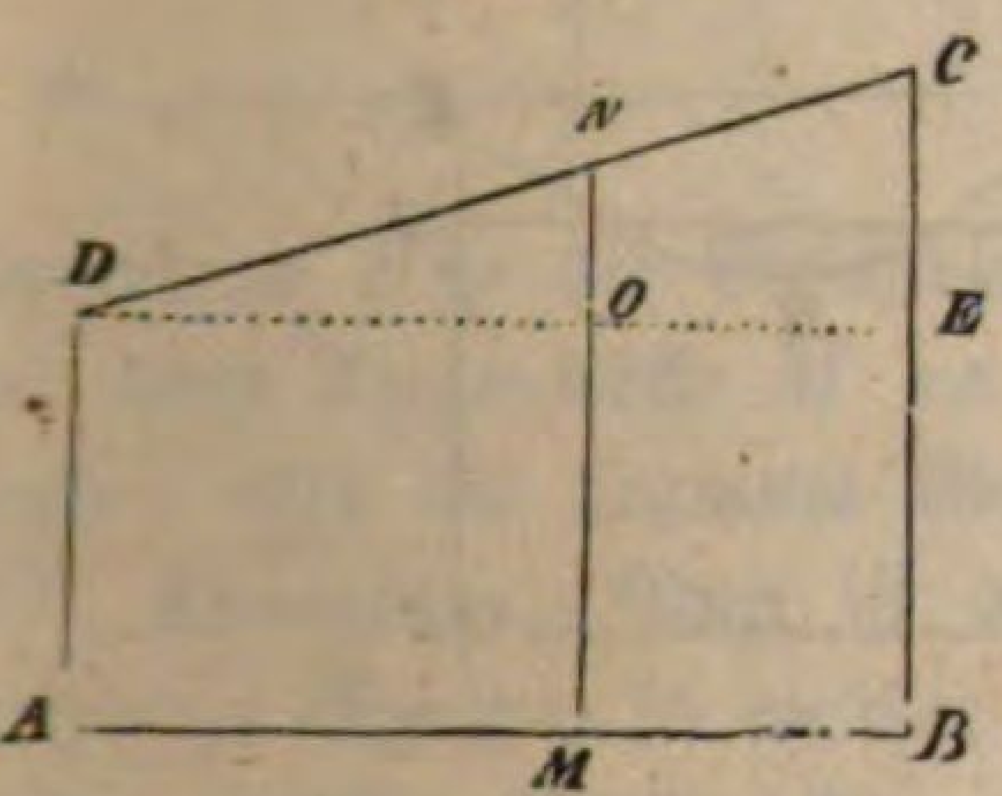
Fig. 42.



Rechtecke anzusehende Streifen wie $MOPN$ zerlegen, wovon jeder ein Product aus einem Theile (MO) der Grundlinie und der diesem entsprechenden Höhe (MN oder OP) ist, und ebenso läßt sich der in einer gewissen Zeit durchlaufene Raum aus Theilchen zusammensetzen, wovon jedes ein Product aus einem Zeittheilchen und der während desselben stattfindenden Geschwindigkeit ist.

§. 23. Bei der gleichförmig veränderten Bewegung ist die Zu- oder Abnahme $v - c$ der Geschwindigkeit ($= pt$, §. 13.) proportional der Zeit (t). Ziehen wir nun in Fig. 43 und Fig. 44 die Linie DE der Grundlinie AB parallel, und schneiden wir dadurch von den die Geschwindigkeiten vorstellenden Linien BC und MN die der Anfangsgeschwindigkeit AD gleichen Stücke BE und MO ab, so bleiben uns die Linien CE und NO als Geschwindigkeitszu- oder abnahmen übrig, für welche nach dem Obigen die Proportion

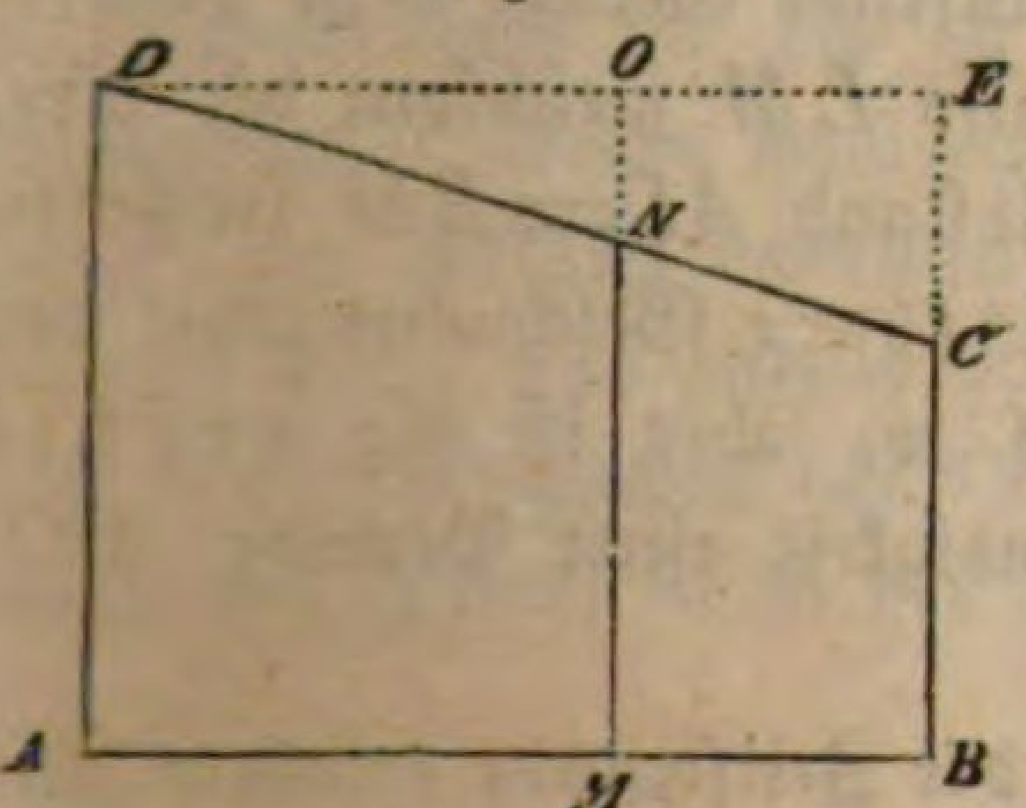
Fig. 43.



$$NO : CE = DO : DE \text{ gilt.}$$

Eine solche Proportion bedingt, daß N und so auch jeder Punkt der Linie CD in der geraden Verbindungslinie zwischen C und D liegen, daß also jene, die verschiedenen Geschwindigkeiten (MN) begrenzende Linie CD selbst gerade sein muß.

Fig. 44.



Diesem zufolge läßt sich also der gleichförmig beschleunigt und gleichförmig verzögert durchlaufene Raum durch den Inhalt eines Trapezes $ABCD$ darstellen, das zur Höhe AB die Zeit (t) und zu den (parallelen) Grundlinien AD und BC die Anfangs- und Endgeschwindigkeit hat. Auch ist damit die §. 13. gefundene Formel $s = \frac{c+v}{2} . t$ in vollkommener Uebereinstimmung. Bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung steigt die vierte Seite DC vom Anfangspunkte an aufwärts, und bei der gleichförmig verzögerten Bewegung läuft diese Linie abwärts. Bei der mit Null Geschwindigkeit anfangenden gleichförmig beschleunigten Bewegung geht das Trapez in ein Dreieck vom Inhalte $\frac{1}{2} BC \times AB = \frac{1}{2} ct$ über.

§. 24. Die mittlere Geschwindigkeit einer ungleichförmigen

Graphische Darstellung.

Bewegung ist der Quotient: **Raum dividirt durch Zeit**; sie giebt also mittels Multiplication durch die Zeit den Weg und läßt sich deshalb auch als die Höhe $AF = BE$ desjenigen Rechteckes $ABEF$ Fig. 45 ansehen, das zur Grundlinie AB die Zeit t hat und an Inhalt dem den zurückgelegten Weg oder Raum messenden Vierecke $ABCND$ gleich ist. Die mittlere Geschwindigkeit ergibt sich demnach auch durch Verwandlung des Viereckes $ABCND$ in ein gleich langes Rechteck $ABEF$. Ihre Bestimmung ist besonders bei **periodischen Bewegungen**, welche fast bei allen Maschinen vorkommen, von Wichtigkeit. Das Gesetz dieser Bewegungen wird durch eine Schlangenlinie $CDEFGHK$ Fig. 46 re-

Fig. 45.

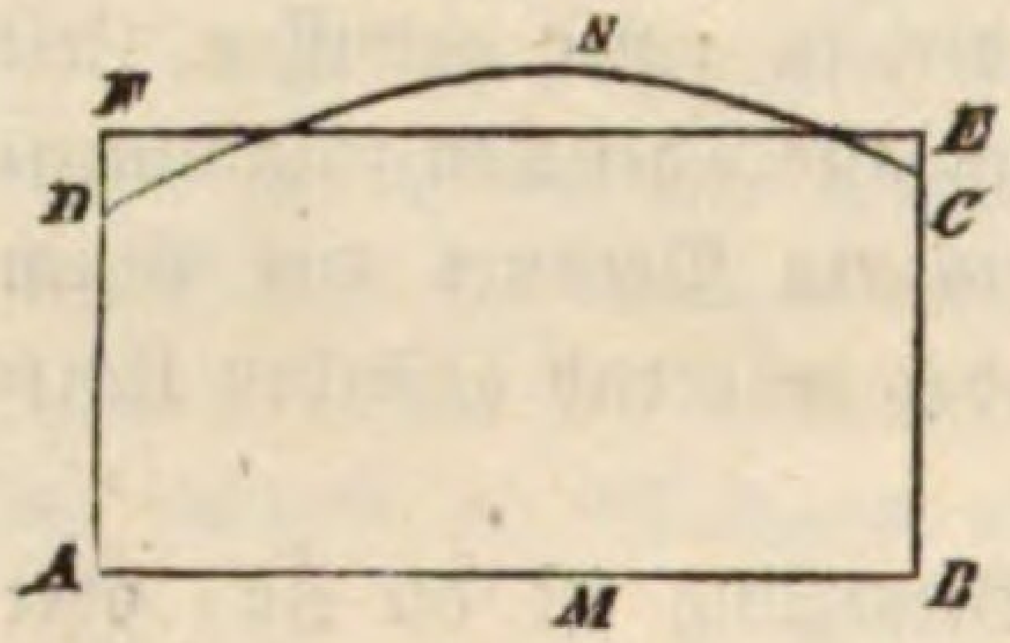
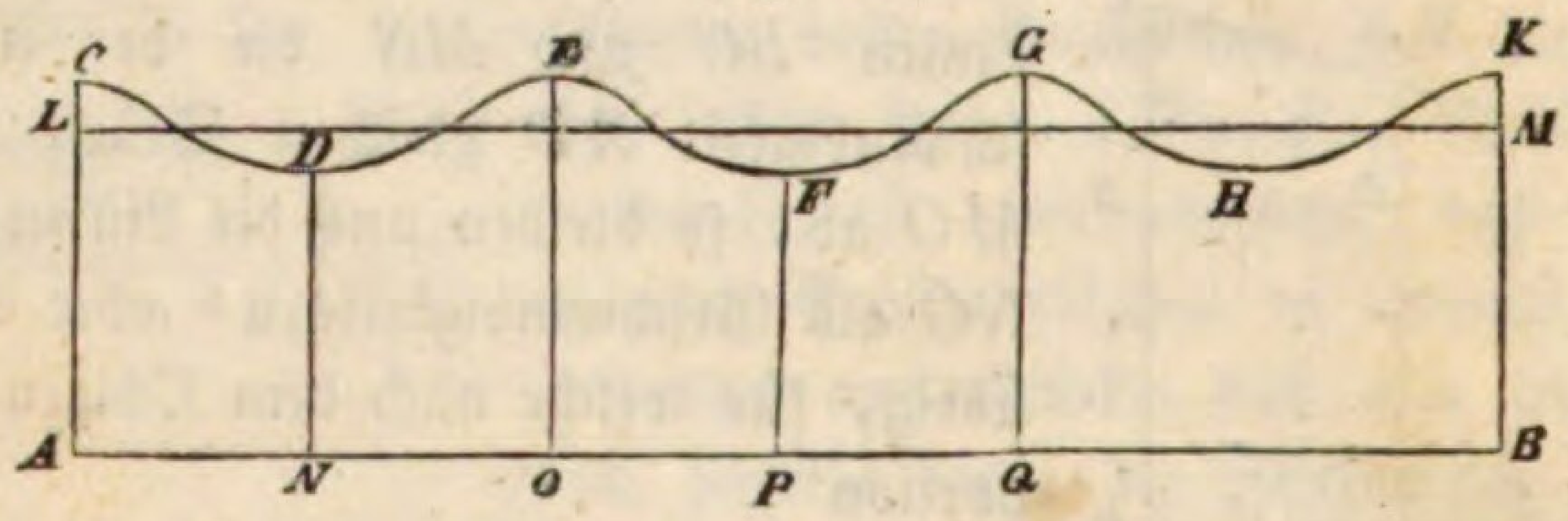


Fig. 46.



präsentirt. Schneidet die mit AB parallel laufende Gerade LM denselben Raum wie die Schlangenlinie ab, ist also LM gleichsam die Axe, um welche sich $CDEF$.... windet, so ist der Abstand $AL = BM$ zwischen beiden parallelen Linien AB und LM die **mittlere** Geschwindigkeit der periodischen Bewegung, AC, OE, BK u. s. w. aber ist die **größte** und ND, PF u. s. w. die kleinste Geschwindigkeit einer Periode AO, OQ, QB u. s. w.

§. 25. Auch die Acceleration oder der in der Zeitsecunde erfolgte Zusatz an Geschwindigkeit läßt sich in der Figur leicht nachweisen. Bei der gleichförmig veränderten Bewegung ist sie unveränderlich; sie ist deshalb die Differenz PQ Fig. 47 und 48 zwischen zwei Geschwindigkeiten OP und MN, wovon die eine einer um eine Secunde (MO) größeren Zeit angehört als die andere.

Fig. 47.

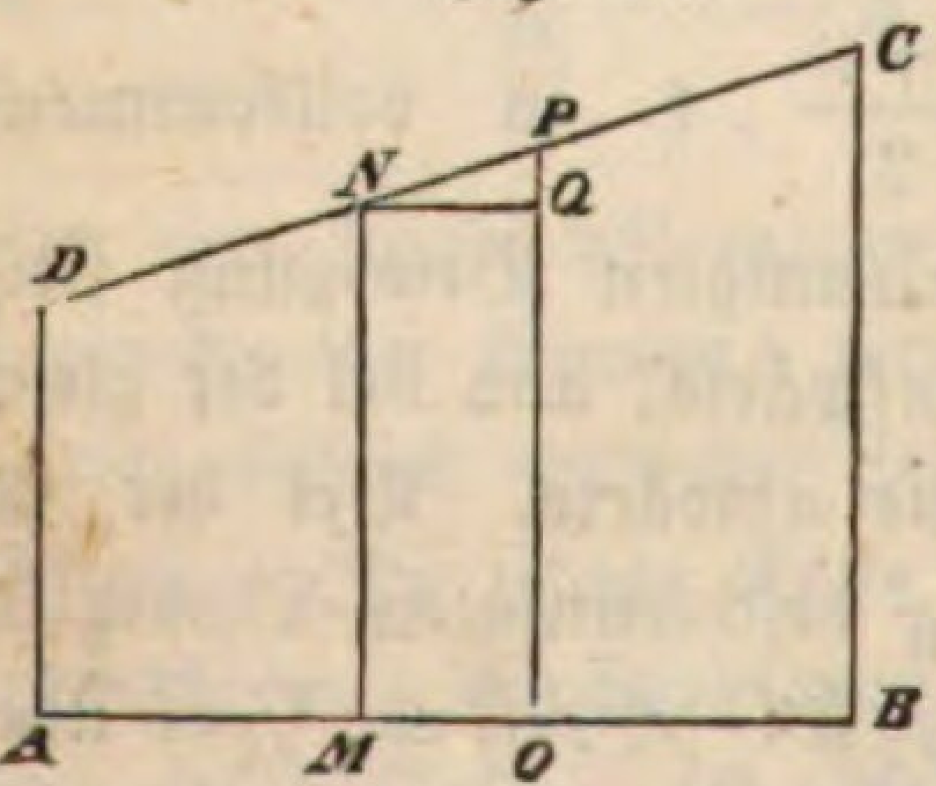
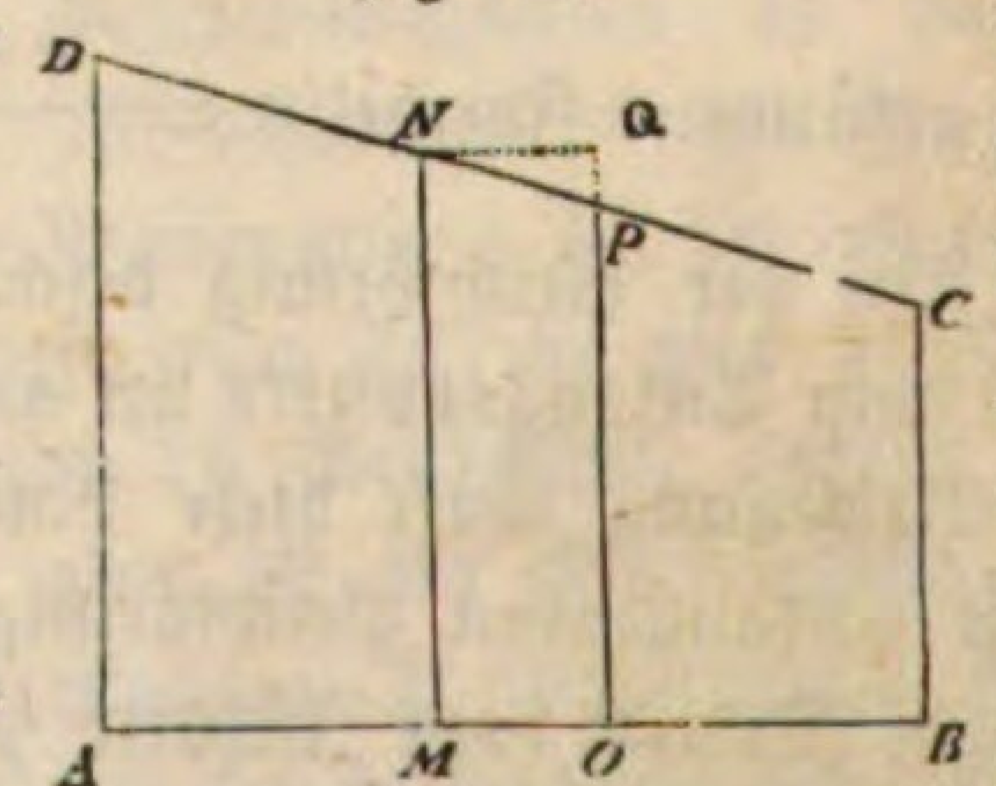


Fig. 48.



Ist die Bewegung ungleichförmig verändert, also die Geschwindigkeitslinie CD eine Curve, so ist für jeden Zeitpunkt (M) die Acceleration eine andere, und deshalb ist sie auch nicht die wirkliche Differenz PQ zwischen den um eine Secunde MO von einander abstehenden Geschwindigkeiten OP und $MN = OQ$ Fig. 49 und 50, sondern sie ist die Graphische Darstellung

Fig. 49.

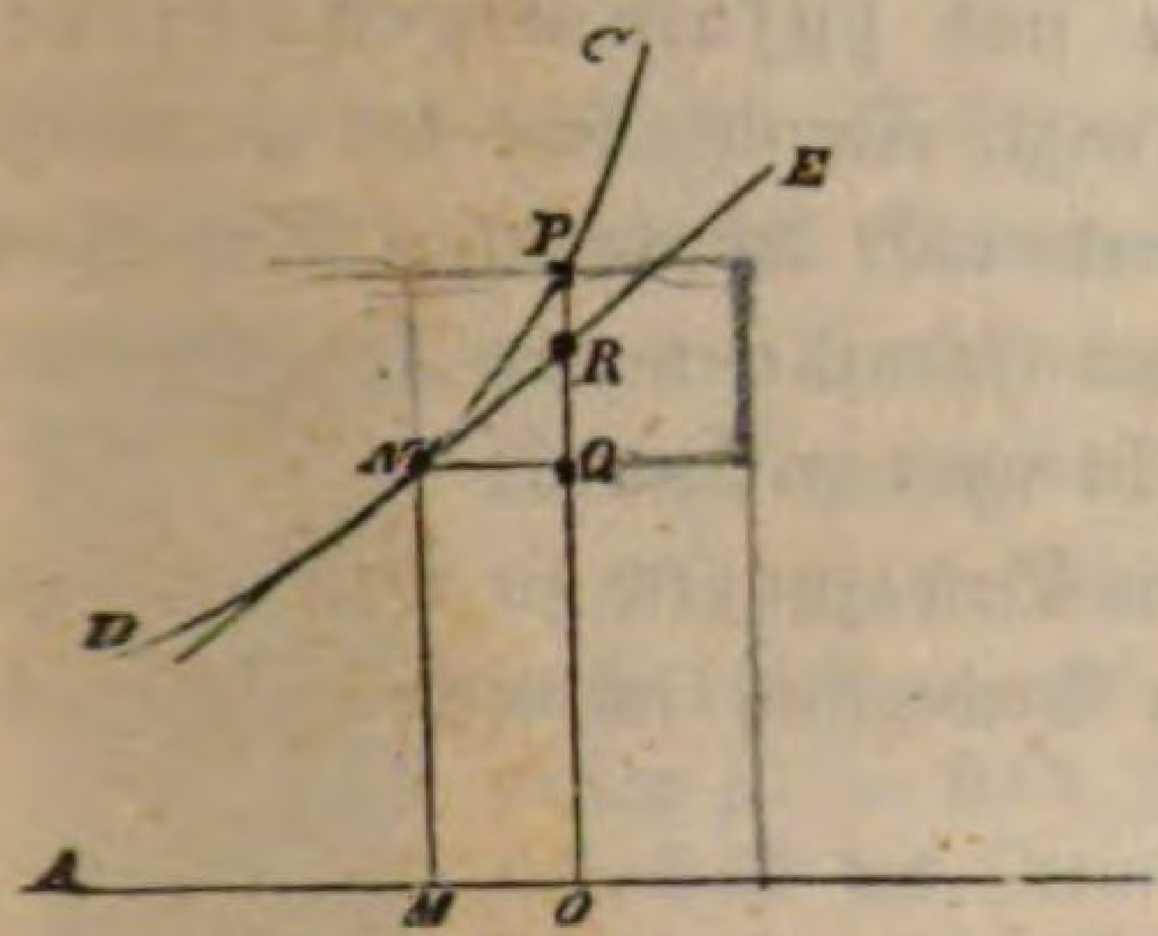
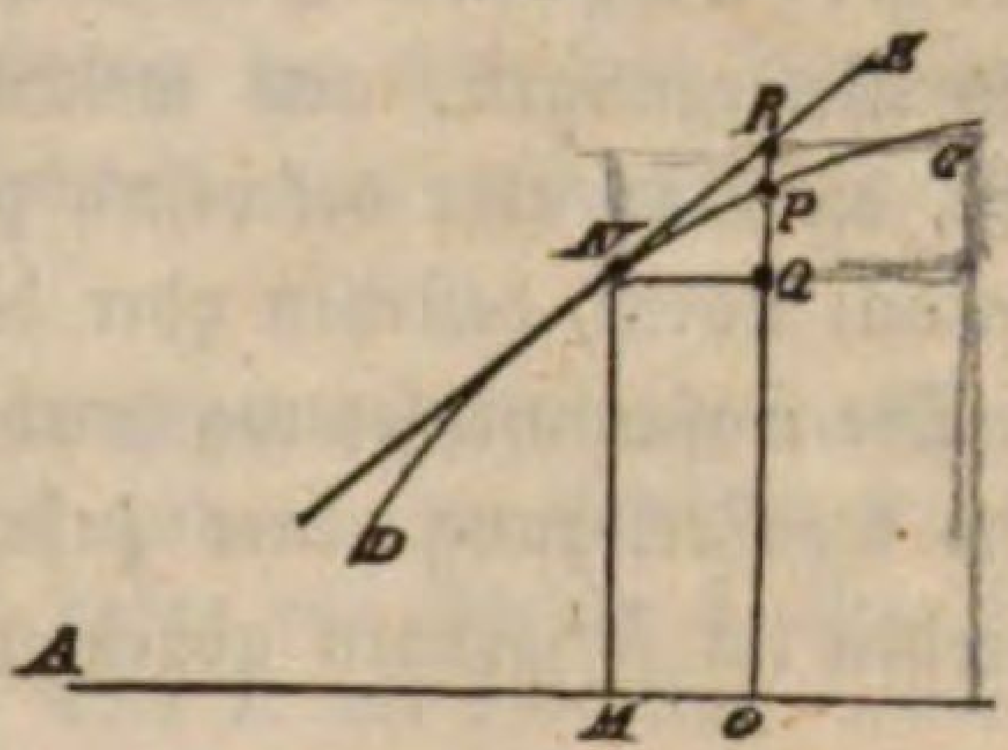


Fig. 50.



Zunahme RQ der Geschwindigkeit MN, welche eintreten würde, wenn von dem Augenblicke M an die Bewegung in eine gleichförmig beschleunigte, also die krumme Geschwindigkeitslinie NC in eine gerade Linie NE überginge. Nun ist aber die Tangente oder Berührungslinie NE diejenige Gerade, in welcher eine Curve DN weiter fortgeht, wenn sie von einer gewissen Stelle (N) an ihre Richtung unverändert beibehält; es fällt demnach die neue Geschwindigkeitslinie mit der Tangente zusammen, es ist solchem nach die bis zu dieser Linie gehende Höhenlinie OR die Geschwindigkeit, welche nach einer Secunde eintreten würde, wenn die Bewegung vom Anfang derselben an in eine gleichförmig beschleunigte übergegangen wäre, und endlich die Differenz RQ zwischen dieser Geschwindigkeit und der anfänglichen (MN) die Acceleration für den Augenblick, welcher durch den Punkt M in der Zeitlinie AB gegeben ist.

Zweites Kapitel.

Zusammengesetzte Bewegung.

§. 26. Ein und derselbe Körper kann gleichzeitig zwei oder mehrere Bewegungen besitzen; jede (relative) Bewegung besteht ja aus der Bewegung innerhalb eines Raumes und aus der Bewegung dieses Raumes innerhalb oder in Beziehung auf einen zweiten Raum. So besitzt schon jeder Punkt auf der Erde zwei Bewegungen, denn er läuft täglich einmal um die Erd- Zusammensetzung der Bewegungen.

Zusammensetzung der Bewegungen.

axe und mit dieser zugleich jährlich einmal um die Sonne. Eine auf dem Schiffe gehende Person hat in Beziehung auf die Ufer zwei Bewegungen, ihre eigene und die des Schiffes; das Wasser, welches durch eine Boden- oder Seitenöffnung eines Gefäßes ausfließt, das auf einem Wagen fortgefahren wird, hat zwei Bewegungen, die Bewegung aus dem Gefäße und die Bewegung mit dem Gefäße u. s. w.

Man unterscheidet hiernach einfache und zusammmengesetzte Bewegungen. Einfach (franz. und engl. simple) sind die geradlinigen Bewegungen, aus welchen andere gerad- oder krummlinige Bewegungen, die man aber deswegen zusammengesetzte (franz. composé, engl. composed) nennt, bestehen oder bestehend gedacht werden können.

Die Zusammensetzung mehrerer einfachen Bewegungen zu einer einzigen und die Zerlegung einer zusammengesetzten Bewegung in mehrere einfache werden im Folgenden abgehandelt.

§. 27. Erfolgen die einfachen Bewegungen in einer und derselben geraden Linie, so giebt die Summe oder Differenz derselben die resultirende zusammengesetzte Bewegung, ersteres, wenn die Bewegungen nach gleichen Richtungen vor sich gehen, letzteres, wenn ihre Bewegungsrichtungen entgegengesetzt sind. Die Richtigkeit dieses Satzes leuchtet sogleich ein, wenn man die gleichzeitigen Räume der einfachen Bewegungen zu einem einzigen vereinigt. Den gleichförmigen Bewegungen mit den Geschwindigkeiten c_1 und c_2 entsprechen die gleichzeitigen Räume $c_1 t$ und $c_2 t$; gehen diese Bewegungen in einerlei Richtung vor sich, so ist demnach der Raum nach t Secunden: $s = c_1 t + c_2 t = (c_1 + c_2) t$, und folglich ist die resultirende Geschwindigkeit, mit welcher die zusammengesetzte Bewegung vor sich geht, die Summe der Geschwindigkeiten von den einfachen Bewegungen. Bei entgegengesetzten Richtungen beider Bewegungen ist $s = c_1 t - c_2 t = (c_1 - c_2) t$, hier ist also die resultirende Geschwindigkeit der Differenz der einfachen Geschwindigkeiten gleich.

Beispiele: 1) An einer Person, welche sich mit 4 Fuß Geschwindigkeit auf dem Verdecke eines Schiffes in der Bewegungsrichtung desselben fortbewegt, während das Schiff selbst 6 Fuß Geschwindigkeit hat, scheinen die Gegenstände an den Ufern mit $4 + 6 = 10$ Fuß Geschwindigkeit vorbei zu gehen. 2) Das Wasser, welches aus der Seitenöffnung eines Gefäßes mit 25 Fuß Geschwindigkeit ausfließt, während es mit dem Gefäße zugleich in der entgegengesetzten Richtung mit 10 Fuß Geschwindigkeit fortgeht, hat in Beziehung auf die übrigen in Ruhe befindlichen Gegenstände nur $25 - 10 = 15$ Fuß Geschwindigkeit.

§. 28. Dieselben Verhältnisse finden auch bei den ungleichförmigen Bewegungen Statt. Hat ein und derselbe Körper außer den Anfangsgeschwindigkeiten c_1 und c_2 noch die constanten Accelerationen p_1 und p_2, so sind die entsprechenden Räume $c_1 t_1$, $c_2 t_2$, $\frac{1}{2} p_1 t^2$, $\frac{1}{2} p_2 t^2$, und sind nun Ge-

schwindigkeiten und Acceleration in gleicher Richtung, so ist der ganze Raum, welcher diesen einfachen Bewegungen entspricht: Zusammensetzung der Bewegungen.

$$s = (c_1 + c_2)\, t + (p_1 + p_2)\, \frac{t^2}{2}.$$

Setzt man nun $c_1 + c_2 = c$ und $p_1 + p_2 = p$, so erhält man $s = ct + p\,\frac{t^2}{2}$, und es folgt hiernach, daß nicht allein durch die Summe der einfachen Geschwindigkeiten die Geschwindigkeit, sondern auch durch die Summe der Accelerationen der einfachen Bewegungen die Acceleration der resultirenden oder zusammengesetzten Bewegung gegeben wird.

Fig. 51.

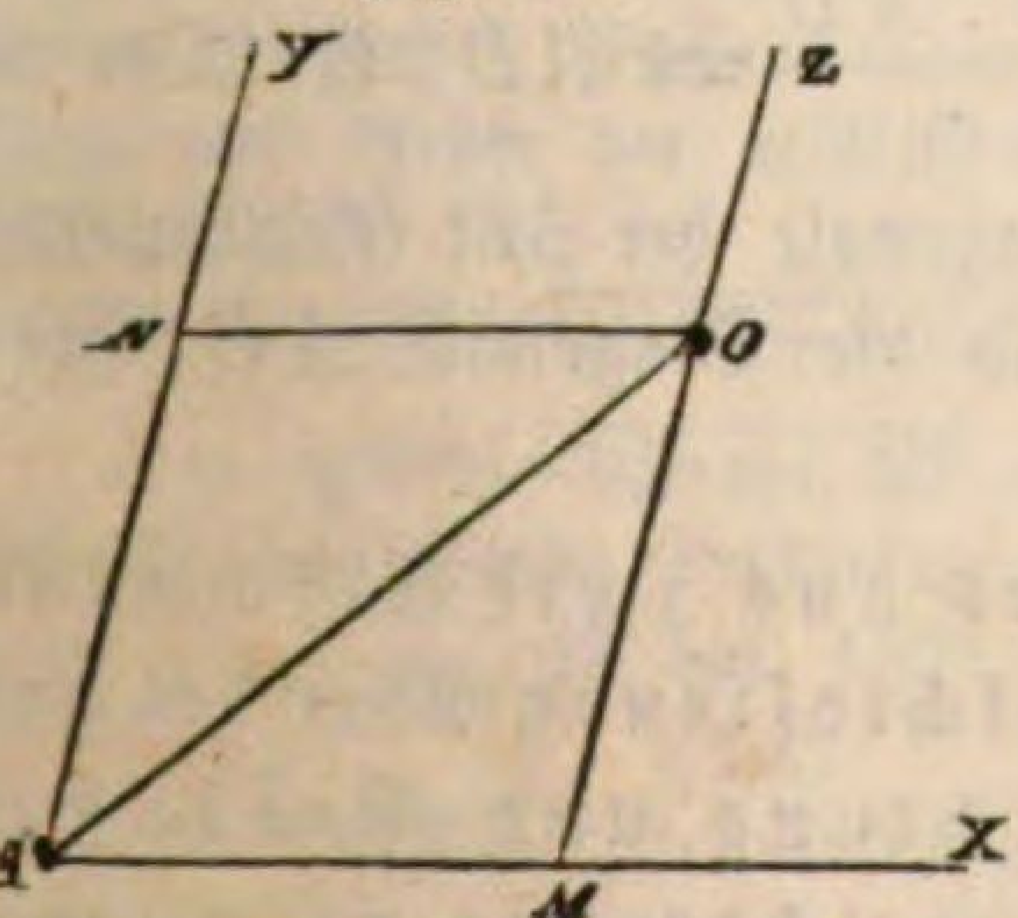


Beispiel. Ein Körper auf dem Monde erhält von der Mondmasse die Acceleration $p_1 = 5$ Fuß und von der Erde die Acceleration $p_2 = 0{,}01$ Fuß. Es fällt daher ein Körper A, Fig. 51, außerhalb des Mondes M und der Erde E mit 5,01 Fuß und ein Körper B innerhalb M und E mit 4,99 Fuß Beschleunigung dem Mittelpunkte des Mondes zu.

§. 29. Hat ein Körper zwei in den Richtungen von einander abweichende Bewegungen zugleich, so nimmt er eine zwischen beiden inneliegende Bewegungsrichtung an, und sind diese Bewegungen ungleichartig, ist z. B. die eine gleichförmig und die andere gleichförmig beschleunigt, so ist die Richtung an jeder Stelle der Bewegung eine andere, die Bewegung selbst also eine krummlinige. Parallelogramm der Geschwindigkeiten.

Man findet den Ort O Fig. 52, welchen ein nach den Richtungen AX und AY zugleich bewegter Körper nach einer gewissen Zeit (t) einnimmt, wenn man den vierten Eckpunkt (O) des Parallelogrammes $AMON$ aufsucht, das durch die gleichzeitigen Wege $AM = x$ und $AN = y$, sowie durch den Winkel XAY gegeben ist, um welchen die Bewegungsrichtungen von einander abweichen. Von der Richtigkeit dieses Verfahrens wird man überzeugt, wenn man die Wege x und y als nicht auf einmal, sondern nach einander zurückgelegt annimmt. Vermöge der einen Bewegung durchläuft der Körper den Weg $AM = x$, und vermöge der andern von M aus in der Richtung AY, also in einer mit AY parallelen Linie MZ, den Weg $AN = y$. Macht man nun $MO = AN$, so bekommt man in O den Ort des Körpers, welcher beiden Bewegungen x und y zugleich entspricht und der, der Construction zu Folge, der vierte Eckpunkt eines Paralelogrammes $AMON$

Fig. 52.

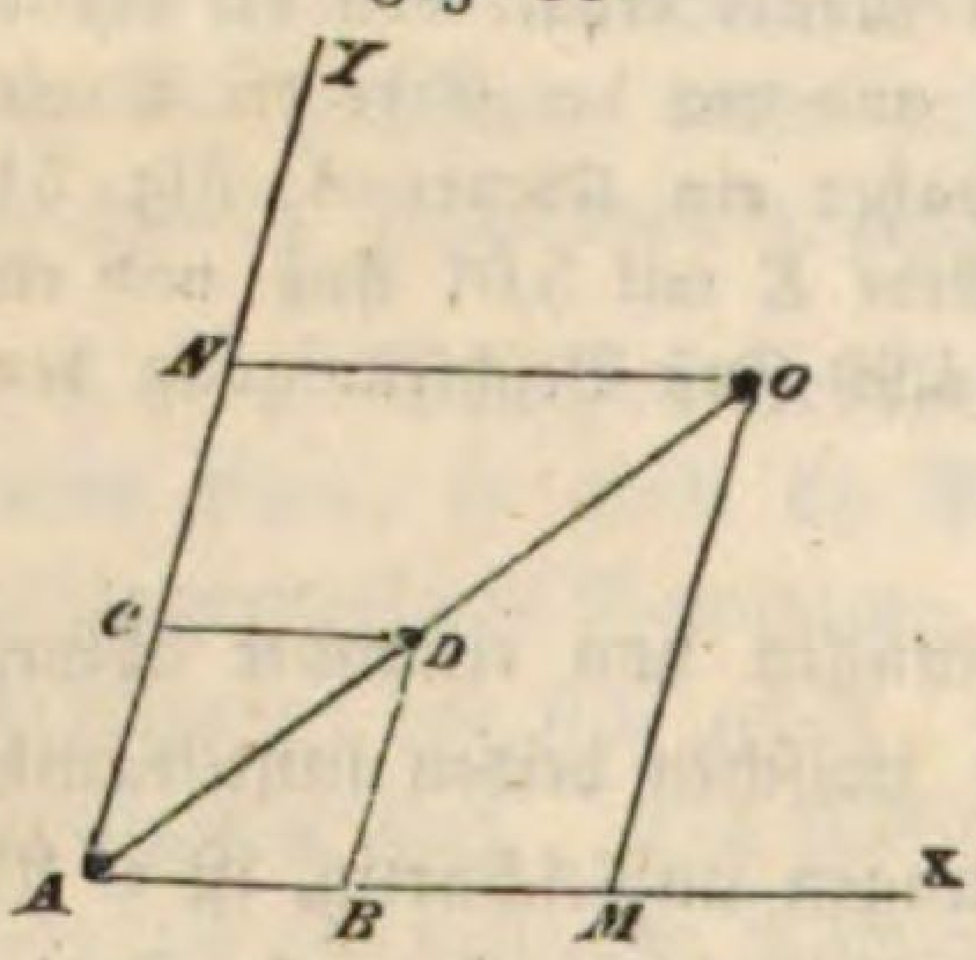


Parallelogramm der Geschwindigkeiten.

ist. Auch kann man sich vorstellen, daß der Raum $AM = x$ in einer Linie AX zurückgelegt werde, die mit allen ihren Punkten zugleich in der Richtung AY fortgeht, also auch M mit AY parallel fortführt und diesen Punkt den Weg $MO = AN = y$ beschreiben läßt.

§. 30. Erfolgen die beiden Bewegungen in den Richtungen AX und AY gleichförmig und mit den Geschwindigkeiten c_1 und c_2, so sind die Räume nach einer gewissen Zeit (t): $x = c_1 t$ und $y = c_2 t$; es ist also ihr Verhältniß $\frac{y}{x} = \frac{c_2}{c_1}$ zu allen Zeiten dasselbe, eine Eigenthümlichkeit, die nur der geraden Linie AO, Fig. 53, zukommt. Es folgt also hieraus,

Fig. 53.

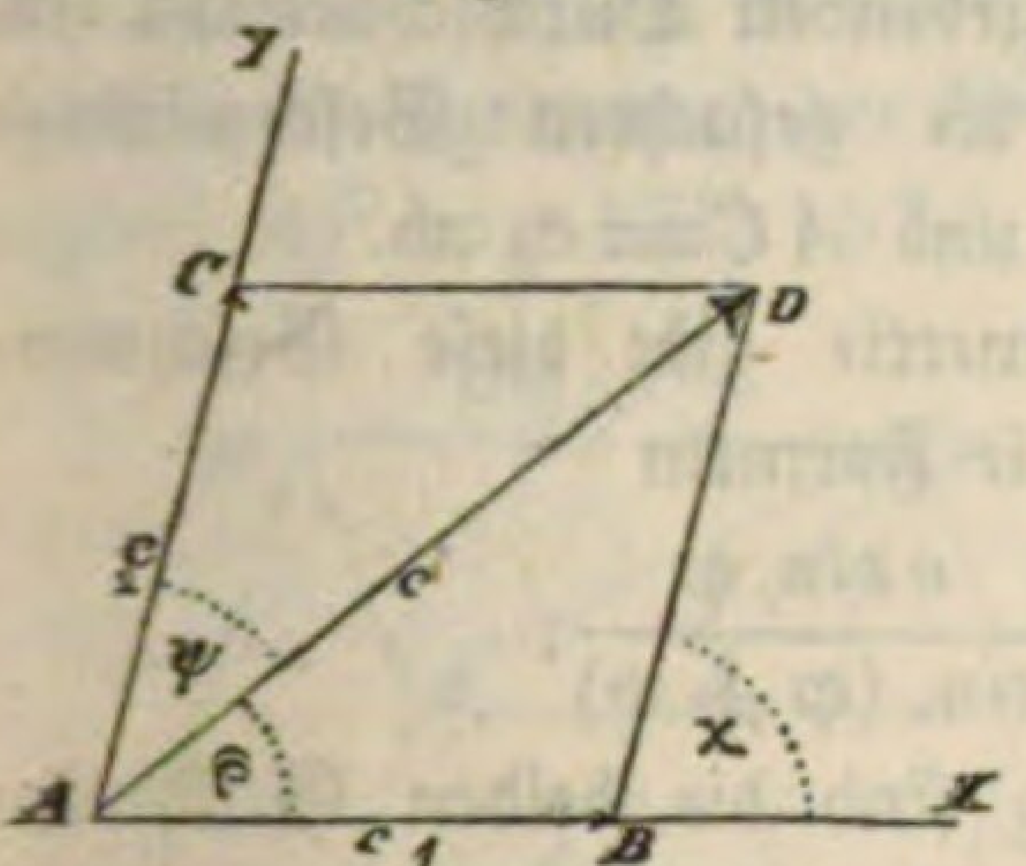


daß die zusammengesetzte Bewegung in einer geraden Linie vor sich geht. Construirt man ferner aus den Geschwindigkeiten $AB = c_1$ und $AC = c_2$ das Parallelogramm $ABCD$, so gibt dessen vierter Eckpunkt den Ort D an, wo sich der Körper am Ende einer Secunde befindet. Da aber die resultirende Bewegung eine geradlinige ist, so folgt, daß diese überhaupt in der Richtung der Diagonale des aus den Geschwindigkeiten construirten Parallelogrammes vor sich geht. Bezeichnet man nun den Weg AO, welcher in der Zeit t wirklich zurückgelegt wird, durch s, so hat man wegen Aehnlichkeit der Dreiecke AMO und ABD: $\frac{s}{x} = \frac{AD}{AB}$, es folgt demnach dieser Weg $s = \frac{x \, . \, AD}{AB} = \frac{c_1 t \, . \, AD}{c_1} = AD \, . \, t$. Der letzten Gleichung zufolge ist der Weg in der Diagonale der Zeit (t) proportional, also die Bewegung selbst gleichförmig und die Diagonale AD ihre Geschwindigkeit.

Es gibt also die Diagonale eines aus zwei Geschwindigkeiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel gebildeten Parallelogrammes die Richtung und Größe derjenigen Geschwindigkeit an, mit welcher die resultirende Bewegung wirklich vor sich geht. Man nennt dieses Parallelogramm Parallelogramm der Geschwindigkeiten (franz. parallélogramme des vitesses, engl. parallelogram of velocities), die einfachen Geschwindigkeiten heißen auch wohl Componenten oder Seitengeschwindigkeiten (franz. composantes, engl. components) und die zusammengesetzte Geschwindigkeit die resultirende oder mittlere (franz. resultante, engl. resultant).

§. 31. Durch die Anwendung trigonometrischer Formeln läßt sich die Richtung und Größe der mittleren Geschwindigkeit auch rechnend finden. Die Auflösung von einem der gleichen Dreiecke z. B. von ABD, aus denen das Parallelogramm $ABDC$ (Fig. 54) der Geschwindigkeiten besteht, Parallelogramm der Geschwindigkeiten.

Fig. 54.



gibt die mittlere Geschwindigkeit $AD = c$ aus der Seitengeschwindigkeiten $AB = c_1$ und $AC = c_2$ und dem von ihren Richtungen gebildeten Winkel $BAC = \alpha$ durch die Formel: $c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + 2\, c_1 c_2 \cos.\alpha}$, und den Winkel $BAD = \varphi$, den die mittlere Geschwindigkeit mit der Geschwindigkeit c_1 einschließt, durch die Formel

$$\sin.\varphi = \frac{c_2 \sin.\alpha}{c} \text{ oder } \tang.\varphi = \frac{c_2 \sin.\alpha}{c_1 + c_2 \cos.\alpha}.$$

Sind die Geschwindigkeiten c_1 und c_2 einander gleich, ist also das Parallelogramm derselben ein Rhombus, so ergibt sich einfacher, wegen der Rechtwinkeligkeit zwischen den Diagonalen:

$$c = 2 c_1 \cos.\, {}^1\!/_2\, \alpha \text{ und } \varphi = {}^1\!/_2\, \alpha.$$

Schließen endlich die Geschwindigkeiten einen Rechtwinkel ein, so erhält man ebenfalls einfacher:

$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \text{ und } \tang.\ \varphi = \frac{c_2}{c_1}.$$

Beispiele: 1) Das aus einem Gefäße oder aus einer Maschine ausfließende Wasser hat eine Geschwindigkeit $c_1 = 25$ Fuß, während sich das Gefäß selbst mit einer Geschwindigkeit $c_2 = 19$ Fuß in einer Richtung bewegt, die mit der des ausfließenden Wassers einen Winkel $\alpha^0 = 130^0$ bildet. Welches ist die Richtung und Größe der resultirenden, oder wie man wohl sagt, der absoluten Geschwindigkeit?

Es ist $c = \sqrt{25^2 + 19^2 + 2.25.19 \cos.130^0} = \sqrt{625 + 361 - 50.19.\cos 50^0}$ $= \sqrt{986 - 950 \cos.50^0} = \sqrt{986 - 610{,}7} = \sqrt{375{,}3} = 19{,}37$ Fuß, die gesuchte resultirende Geschwindigkeit.

Ferner $\sin.\ \varphi = \frac{19 \sin.130^0}{19{,}37} = 0{,}9808 \sin.50^0 = 0{,}7513$, und sonach der Winkel, um welchen die Resultirende von der Geschwindigkeit c_1 abweicht, $\varphi = 48^0, 42'$, also der Winkel, welchen sie mit der Bewegungsrichtung des Gefäßes einschließt: $\alpha - \varphi = 81^0, 18'$.

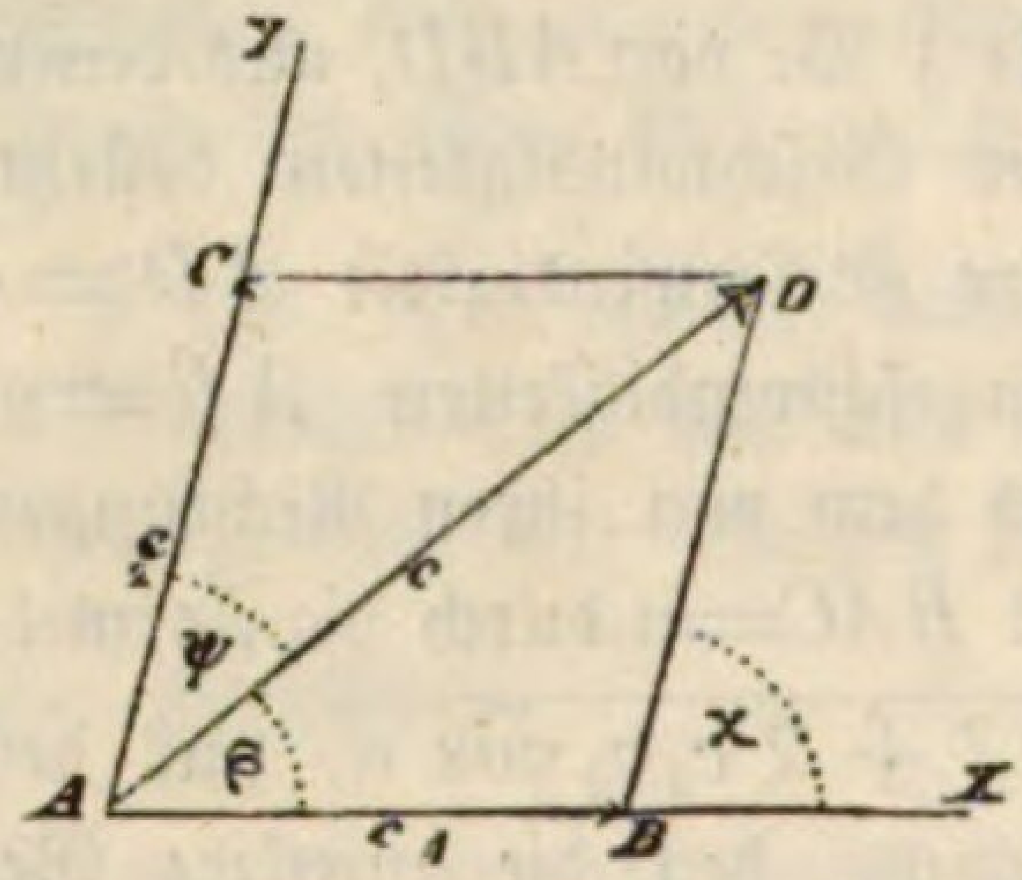
2) Wären die vorigen Geschwindigkeiten winkelrecht gegen einander gerichtet, so würde $\cos.\alpha = \cos.90^0 = 0$ und deshalb die mittlere Geschwindigkeit $c = \sqrt{986} = 31{,}40$ Fuß sein; für ihre Richtung wäre $\tang.\ \varphi = {}^{19}\!/_{25} = 0{,}76$, daher die Abweichung derselben von der ersten Geschwindigkeit: $\varphi = 37^0, 14'$.

§. 32. Man kann auch jede gegebene Geschwindigkeit aus zwei Seitengeschwindigkeiten bestehend ansehen, und deshalb, gewissen Bedingungen entsprechend, in solche zerlegen. Sind z. B. die Winkel $DAB = \varphi$, und

Parallelogramm der Geschwindigkeiten.

$DAC = \psi$ Fig. 55. gegeben, welche die zu suchenden Geschwindigkeiten mit der mittleren $AD = c$ einschließen sollen, so ziehe man durch den Endpunkt D der die c vorstellenden Graden andere Linien parallel zu den Richtungen AX und AY: die sich ergebenden Durchschnittspunkte schneiden nun die gesuchten Geschwindigkeiten $AB = c_1$ und $AC = c_2$ ab.

Fig. 55.



Die Trigonometrie gibt diese Geschwindigkeiten durch die Formeln

$$c_1 = \frac{c \sin. \psi}{\sin. (\varphi + \psi)}. \quad c_2 = \frac{c \sin. \varphi}{\sin. (\varphi + \psi)}.$$

In den gewöhnlichen Fällen der Anwendung sind die beiden Geschwindigkeiten winkelrecht gegen einander, dann ist also $\varphi + \psi = 90^0$, $\sin. (\varphi + \psi) = 1$, und es folgt:

$$c_1 = c \cos. \varphi \text{ und } c_2 = c \sin. \psi.$$

Uebrigens kann auch aus einer Seitengeschwindigkeit (c_1) und ihrem Richtungswinkel (φ) die Richtung und Größe der andern Seitengeschwindigkeit gefunden werden. Endlich lassen sich auch aus den Geschwindigkeiten c, c_1 und c_2 ihre Richtungswinkel bestimmen, wie man aus den drei Seiten eines Dreiecks die Winkel desselben findet.

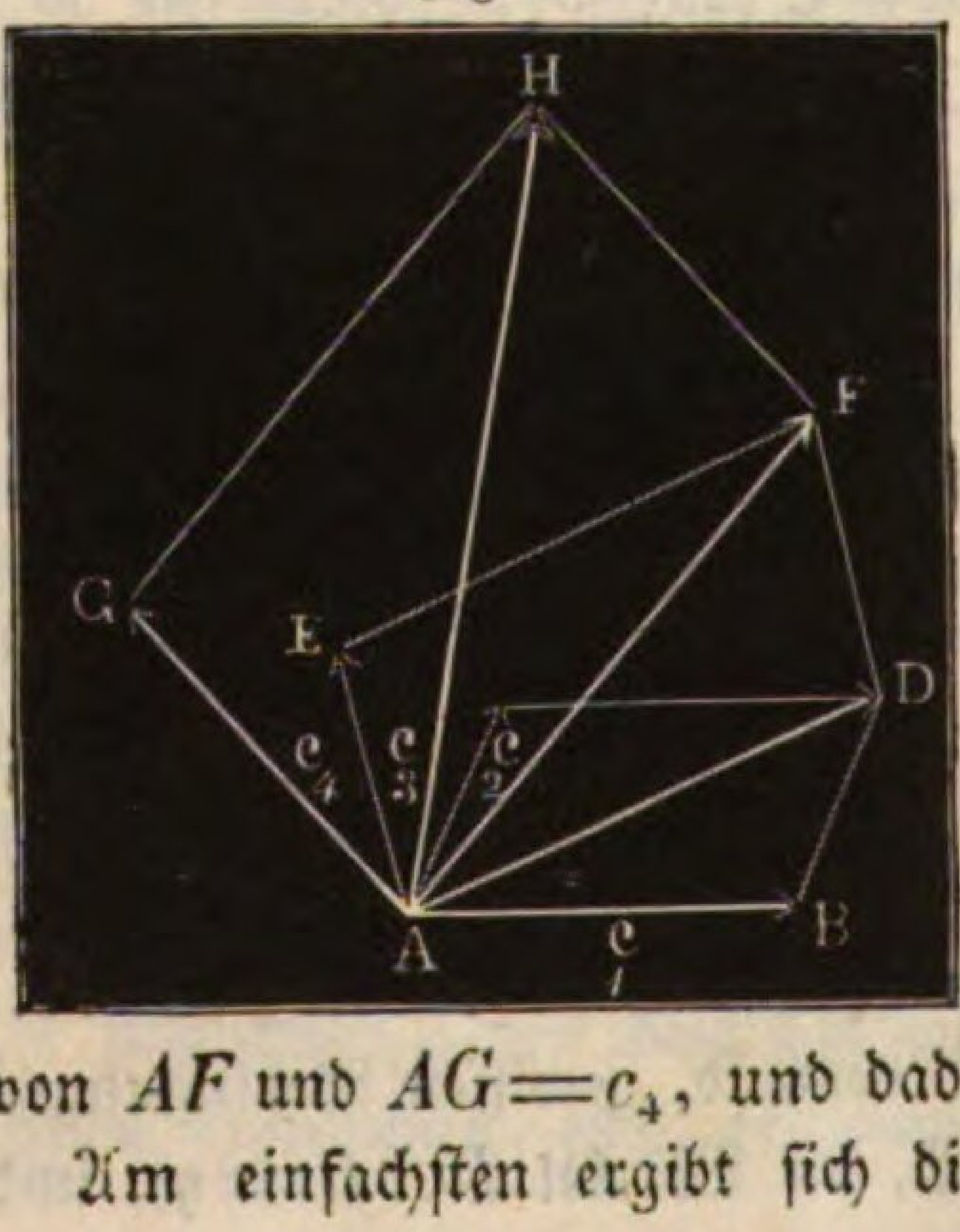
Beispiel: Es sei die Geschwindigkeit $c = 10$ Fuß in zwei Seitengeschwindigkeiten zu zerlegen, welche um die Winkel $\varphi = 65^0$ und $\psi = 70^0$ von ihrer Richtung abweichen. Diese Geschwindigkeiten sind

$$c_1 = \frac{10 \sin. 70^0}{\sin. 135^0} = \frac{9,397}{\sin. 45^0} = 13,29 \text{ Fuß und } c_2 = \frac{10 \sin. 65^0}{\sin. 135^0} = \frac{9,063}{0,7071} = 12,81 \text{ Fuß.}$$

Zusammensetzung und Zerlegung der Geschwindigkeiten.

§. 33. Durch wiederholte Anwendung des Parallelogrammes der Geschwindigkeiten läßt sich jede beliebige Anzahl von Geschwindigkeiten in eine einzige verwandeln. Durch Construction des Parallelogrammes $ABDC$ (Fig. 56) ergibt sich die mittlere Geschwindigkeit AD zu c_1 und c_2; durch Construction des Parallelogrammes $ADFE$ erhält man in AF die mittlere Geschwindigkeit zu AD und $AE = c_3$, und ebenso stellt sich durch Construction des Parallelogrammes $AFHG$ die mittlere Geschwindigkeit $AH = c$ von AF und $AG = c_4$, und dadurch auch die von c_1, c_2, c_3 und c_4 heraus.

Fig. 56.

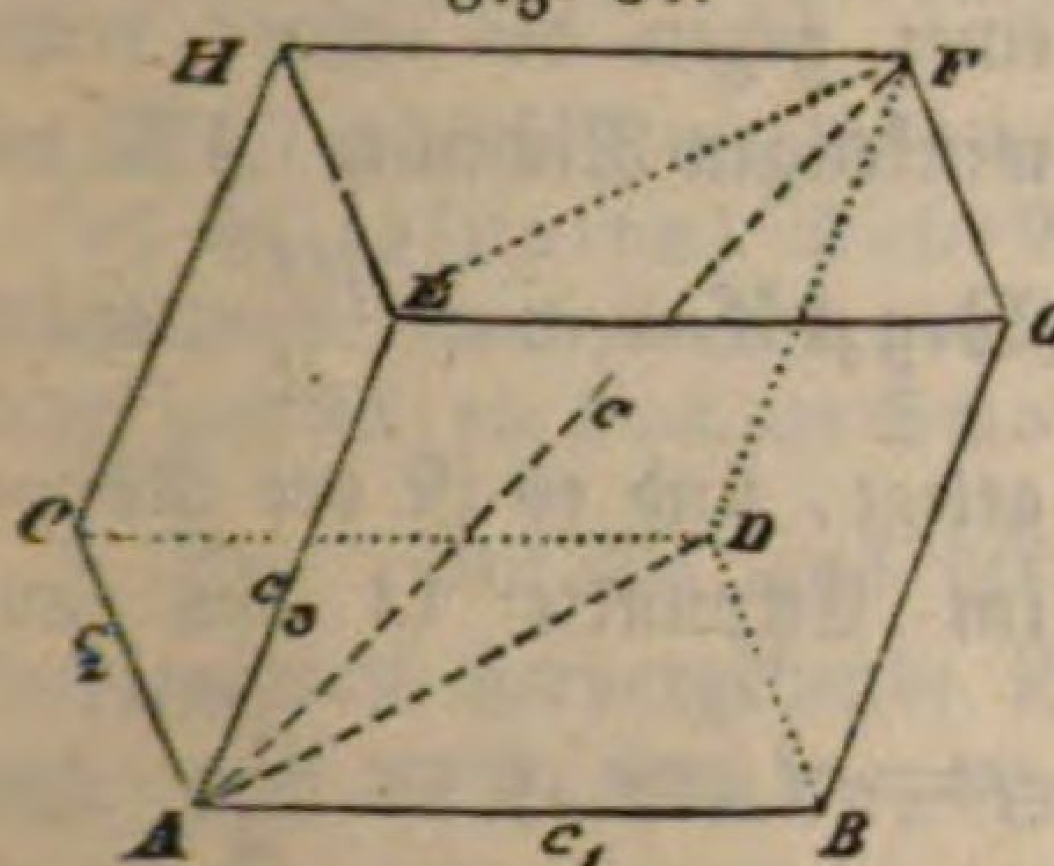


Am einfachsten ergibt sich die in Frage stehende mittlere Geschwindig=

keit durch Construction eines Polygones $ABDFH$, dessen Seiten AB, BD, DF und FH den gegebenen Geschwindigkeiten c_1, c_2, c_3 und c_4 parallel und gleich gemacht werden, und dessen letzte Seite AH allemal die resultirende Geschwindigkeit ist. Zusammensetzung und Zerlegung der Geschwindigkeiten.

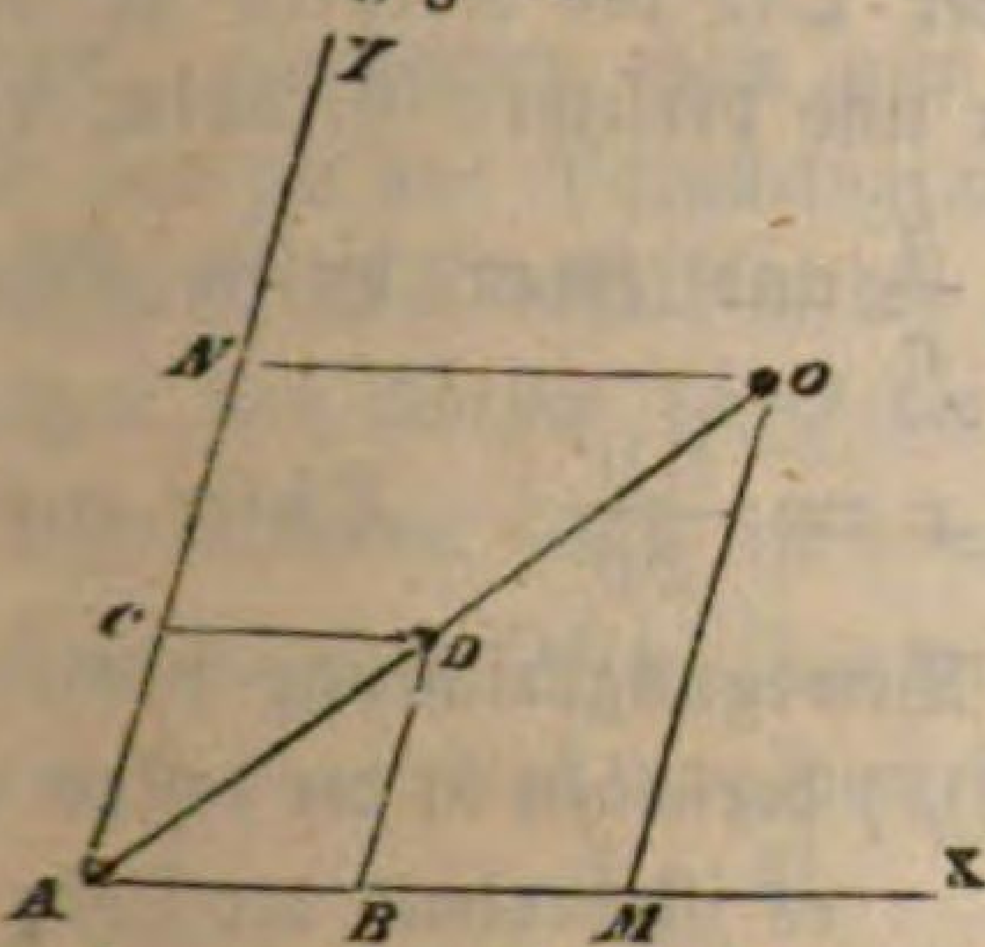
Auch in dem Falle, wenn die Geschwindigkeiten nicht in einerlei Ebene liegen, läßt sich die mittlere Geschwindigkeit durch mehrfache Anwendung des Parallelogrammes der Geschwindigkeiten finden. Die mittlere Geschwindigkeit $AF = c$ (Fig. 57.) von drei nicht in einer Ebene befindlichen Geschwindigkeiten $AB = c_1$, $AC = c_2$ und $AE = c_3$ ist die Diagonale eines Parallelepipeds $BCHG$, dessen Seiten diesen Geschwindigkeiten gleich sind. Man spricht daher wohl auch von einem **Parallelepiped der Geschwindigkeiten.**

Fig. 57.



§. 34. Zwei gleichförmig beschleunigte und mit Null Geschwindigkeit anfangende Bewegungen geben in ihrer Zusammensetzung wieder eine gleichförmig beschleunigte Bewegung in der geraden Linie. Sind die Accelerationen dieser nach den Richtungen AX und AY (Fig. 58) vor sich gehenden Bewegungen p_1 und p_2, so sind am Ende der Zeit t die Räume Zusammensetzung der Accelerationen.

Fig. 58.



$$AM = x = \frac{p_1 t^2}{2} \text{ und } AN = y = \frac{p_2 t^2}{2},$$

und es ist ihr Verhältniß $\frac{y}{x} = \frac{p_1 t^2}{p_2 t^2} = \frac{p_1}{p_2}$ von der Zeit gar nicht abhängig, deshalb also der Weg AO der zusammengesetzten Bewegung ein geradliniger. Macht man $AB = p_1$, und $BD = AC = p_2$, so bekommt man ein Parallelogramm $ABDC$, welches dem Parallelogramm $AMON$ ähnlich und für welches

$$\frac{AO}{AD} = \frac{AM}{AB} = \frac{\frac{1}{2} p_1 t^2}{p_1} = \tfrac{1}{2} t^2, \text{ also } AO = \tfrac{1}{2} AD \,.\, t^2 \text{ ist.}$$

Dieser Gleichung zufolge ist der Weg AO der zusammengesetzten Bewegung dem Quadrate der Zeit proportional, die Bewegung selbst also gleichförmig beschleunigt, und die Acceleration derselben die Diagonale AD des aus den einfachen Accelerationen p_1 und p_2 construirten Parallelogrammes.

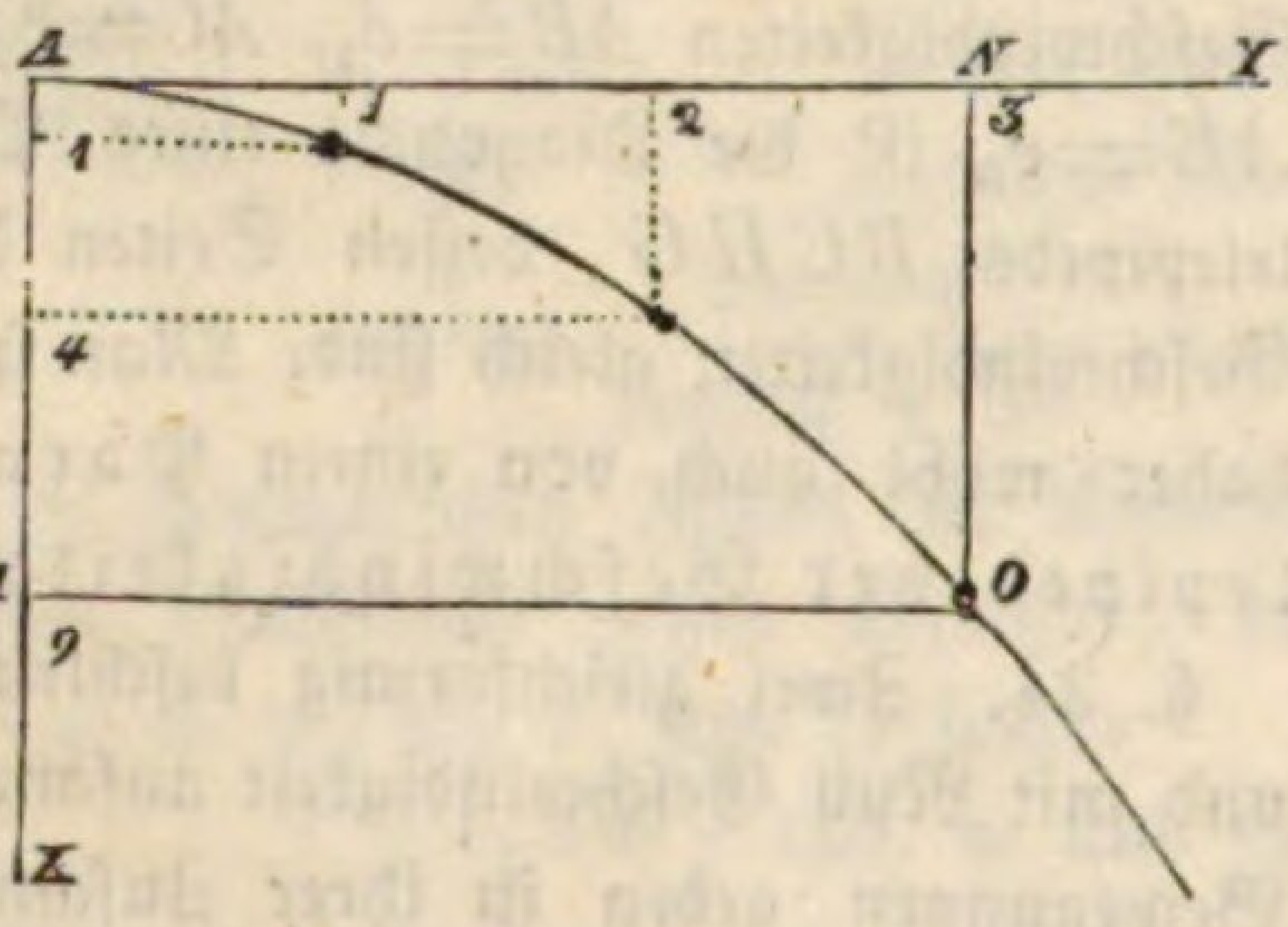
So wie man also durch das Parallelogramm der Geschwindigkeiten Geschwindigkeiten zusammensetzt und zerlegt, ebenso lassen sich nach genau denselben Regeln durch ein Parallelogramm, welches man das **Parallelogramm der Accelerationen** (franz. parallélogramme des accélé-

rations, engl. parallelogram of accelerations) nennt, Acceleration zu einer einzigen vereinigen, und in mehrere andere zerlegen.

Zusammensetzung von Geschwindigkeiten und Accelerationen.

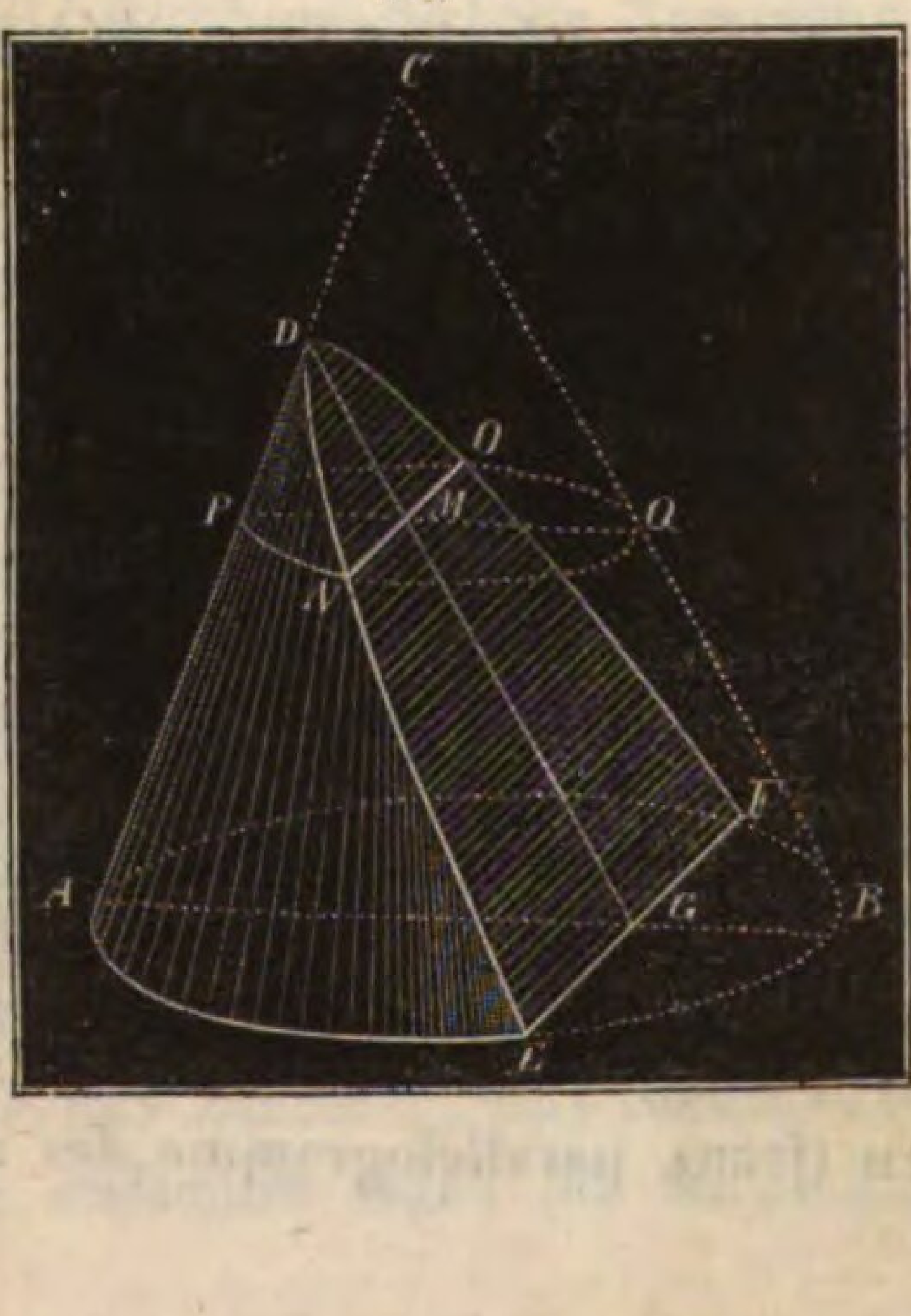
§. 35. Aus der Vereinigung von einer gleichförmigen Bewegung mit einer gleichförmig beschleunigten geht eine gänzlich ungleichförmige Bewegung hervor, wenn die Bewegungsrichtungen nicht zusammenfallen. In einer gewissen Zeit t wird bei der Geschwindigkeit c in der einen Richtung AY, Fig. 59, der Weg $AN = y = ct$ und in derselben Zeit bei einer unveränderlichen Acceleration in einer gegen die erstere rechtwinkeligen Richtung AX der Weg $AM = x = \frac{pt^2}{2}$ zurückgelegt, und es ist der Körper im Eckpunkte O des aus $y = ct$ und $x = \frac{pt^2}{2}$ construirten Parallelogrammes.

Fig. 59.



Mit Hülfe dieser Formeln läßt sich zwar der Ort des Körpers zu jeder Zeit finden, allein derselbe liegt nicht in einer und derselben Geraden, denn nehmen wir aus der ersten Gleichung $t = \frac{y}{c}$ und setzen diesen Werth in die zweite, so erhalten wir die Gleichung $x = \frac{py^2}{2c^2}$. Dieser zufolge verhalten sich die Wege (x) in der zweiten Bewegungsrichtung nicht wie die in der ersten, sondern wie die Quadrate (y^2) derselben in der ersten und es ist deshalb der Weg des Körpers auch keine gerade, sondern eine gewisse krumme Linie, die man in der Geometrie unter dem Namen die Parabel (franz. parabole, englisch parabola) kennen lernt.

Fig. 60.



Anmerkung. Es sei ABC, Fig. 60, ein Kegel mit kreisförmiger Basis $AEBF$, DEF ein Schnitt desselben parallel zur Seitenlinie BC und winkelrecht zum Durchschnitt ABC geführt, und $OPNQ$ ein zweiter, mit der Basis paralleler

und deswegen ebenfalls kreisförmiger Durchschnitt. Es sei ferner EF die Durchschnittslinie zwischen der Basis und dem zweiten Schnitte, und ON die zwischen beiden Schnitten; denken wir uns endlich im triangulären Durchschnitte ABC die parallelen Durchmesser AB und PQ und im Schnitte DEF die Axe DG geführt. Alsdann gilt für die halbe Kreissehne $MN = MO$ die Gleichung $MN^2 = PM \times MQ$; aber MQ ist $= BG$ und für PM gilt die Proportion $PM : MD = AG : DG$, es folgt daher $MN^2 = BG \times \frac{DM \times AG}{DG}$. Ebenso ist aber auch $GE^2 = BG \times AG$; dividirt man daher beide Gleichungen durch einander, so folgt

Zusammensetzung von Geschwindigkeiten und Accelerationen.

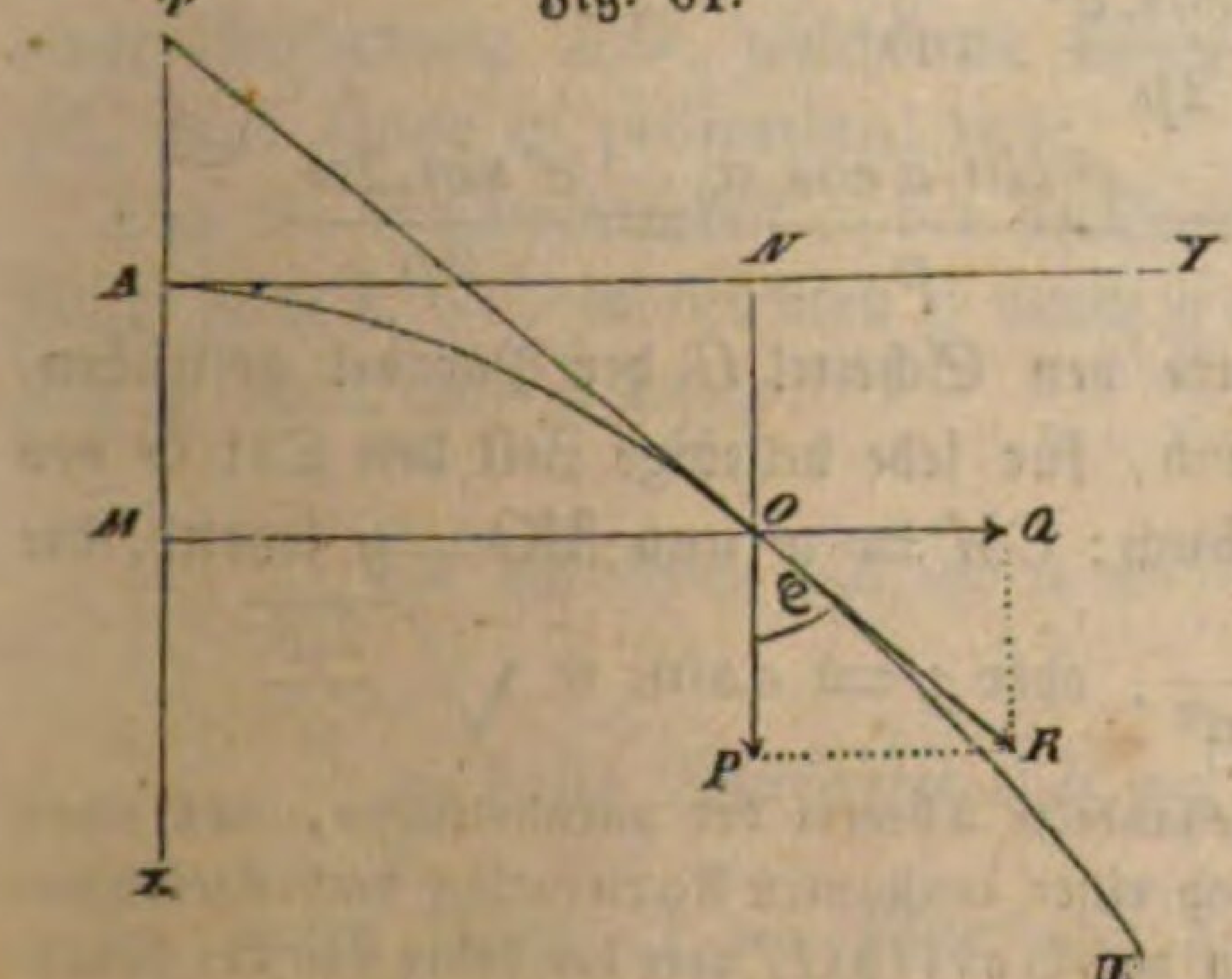
$\frac{DM}{DG} = \frac{MN^2}{GE^2}$; es verhalten sich also die auf der Axe abgeschnittenen Stücke (Abscissen), wie die Quadrate der entsprechenden Perpendikel (Ordinaten). Dieses Gesetz stimmt mit dem oben gefundenen Bewegungsgesetze vollkommen überein; es geht also diese Bewegung in einer krummen Linie DNE vor sich, die man als Schnitt am Kegel (Kegelschnitt) nachweisen kann.

§. 36. Um die aus der Zusammensetzung von Geschwindigkeit und Acceleration hervorgehende Bewegung vollständig zu kennen, muß man auch noch die Richtung, Geschwindigkeit und den durchlaufenen Weg für jede Zeit (t) angeben können. Die Geschwindigkeit parallel zu AY ist unveränderlich $= c$, die parallel zu AX aber veränderlich und $= pt$, construirt man nun aus dieser Geschwindigkeit $OQ = c$ und $OP = pt$ das Parallelogramm $OPRQ$, Fig. 61, so erhält man in der Diagonale OR desselben die mittlere oder diejenige Geschwindigkeit, mit welcher der Körper in O die parabolische Bahn AOU verfolgt. Diese Geschwindigkeit selbst ist $v = \sqrt{c^2 + p^2t^2}$.

Parabelbewegung.

Ebenso giebt OR die Tangente oder Richtung, in welcher der Körper in O einen Augenblick lang fortgeht, und es ist für den Winkel $POR = XTO = \varphi$, welchen dieselbe mit der zweiten Richtung (Axe) AX einschließt, durch die Formel

Fig. 61.



$$tang.\ \varphi = \frac{OQ}{OP} = \frac{c}{pt}$$

gegeben.

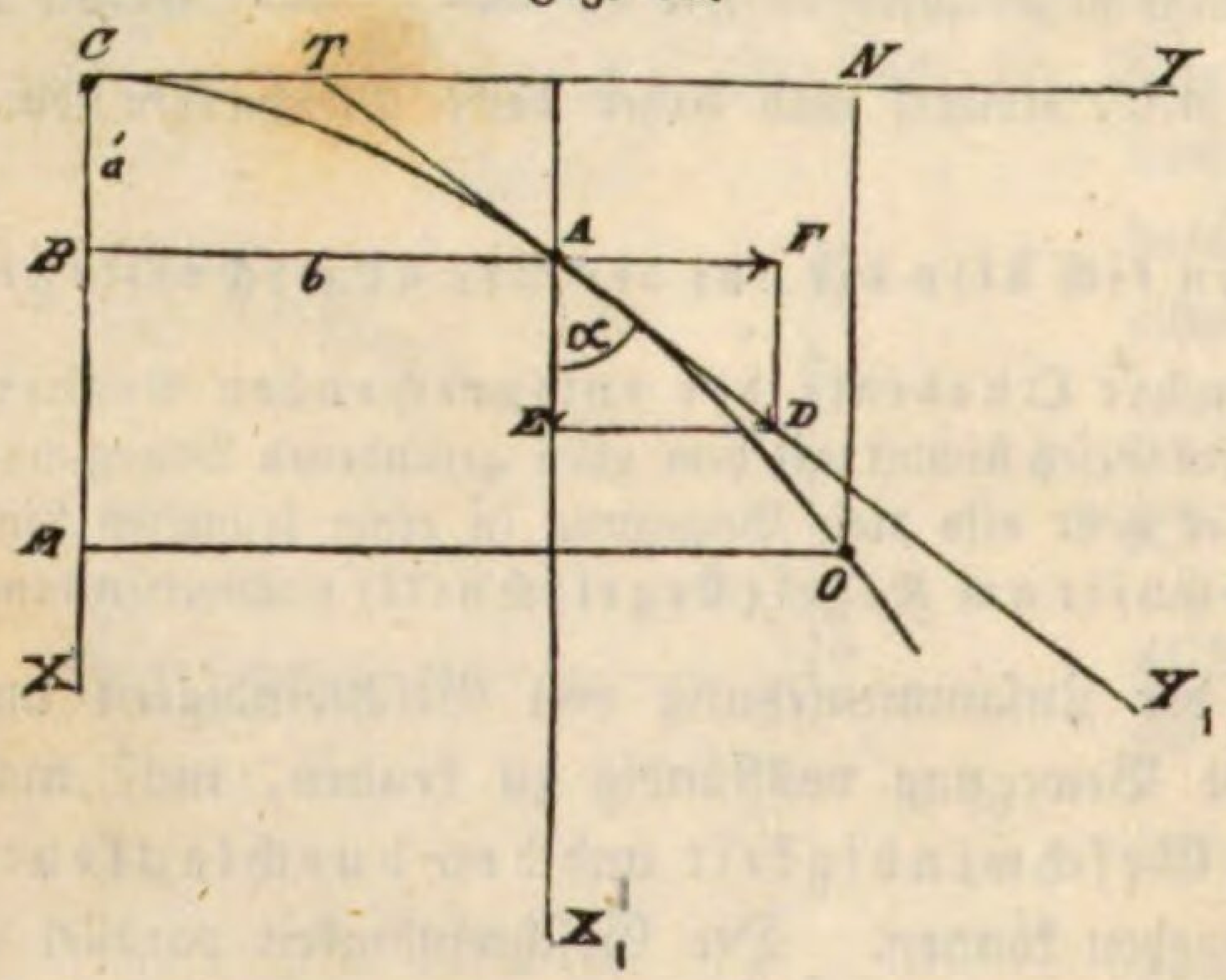
Um endlich noch den durchlaufenen Raum oder Curvenbogen $AO = s$ zu finden, kann man sich der Gleichung $\sigma = v\tau$ (§. 19), wonach sich, als Elemente anzusehende kleine Theile desselben berechnen lassen, bedienen. Uebrigens giebt auch die höhere Geometrie eine complicirte Formel zur Berechnung eines Parabelbogens.

§. 37. Wir haben seither angenommen, daß die ursprünglichen Beweg-

Parabelbewegung.

ungsrichtungen einen Rechtwinkel einschließen, und müssen nun noch denjenigen Fall näher kennen lernen, bei welchem die Richtung der Acceleration mit der Geschwindigkeit einen gewissen Winkel einschließt. Hat der Körper in der Richtung AY_1 (Fig. 62) die Geschwindigkeit c und in der Richtung AX_1, welche mit der ersten den Winkel $X_1AY_1 = \alpha$ einschließt, die Acceleration p, so ist A nicht mehr Scheitel und AX_1 nicht mehr Axe, sondern nur die Axenrichtung der Parabel. Der Scheitel C steht vielmehr um die Coordinaten $CB = a$ und $BA = b$, wovon die erstere in die Axe selbst fällt und die letztere winkelrecht darauf steht, von dem Anfangspunkte A der Bewegung ab.

Fig. 62.



Die Geschwindigkeit $AD = c$ besteht aus den Seitengeschwindigkeiten $AF = c \sin. \alpha$ und $AE = c \cos. \alpha$. Von ihnen ist die erstere immer dieselbe, die letztere aber der veränderlichen Geschwindigkeit pt gleich zusetzen, vorausgesetzt, daß der Körper die Zeit t nöthig gehabt hat, um vom Scheitel C nach dem eigentlichen Anfangspunkte A zu gelangen. Es ergiebt sich also $c \cos. \alpha = pt$, folglich $t = \frac{c . \cos. \alpha}{p}$, und

$$1)\ CB = a = \frac{pt^2}{2} = \frac{c^2 \cos. \alpha^2}{2p}, \text{ und}$$

$$2)\ BA = b = c \sin. \alpha . t = \frac{c^2 \sin. \alpha \cos. \alpha}{p} = \frac{c^2 \sin. 2\alpha}{2p}.$$

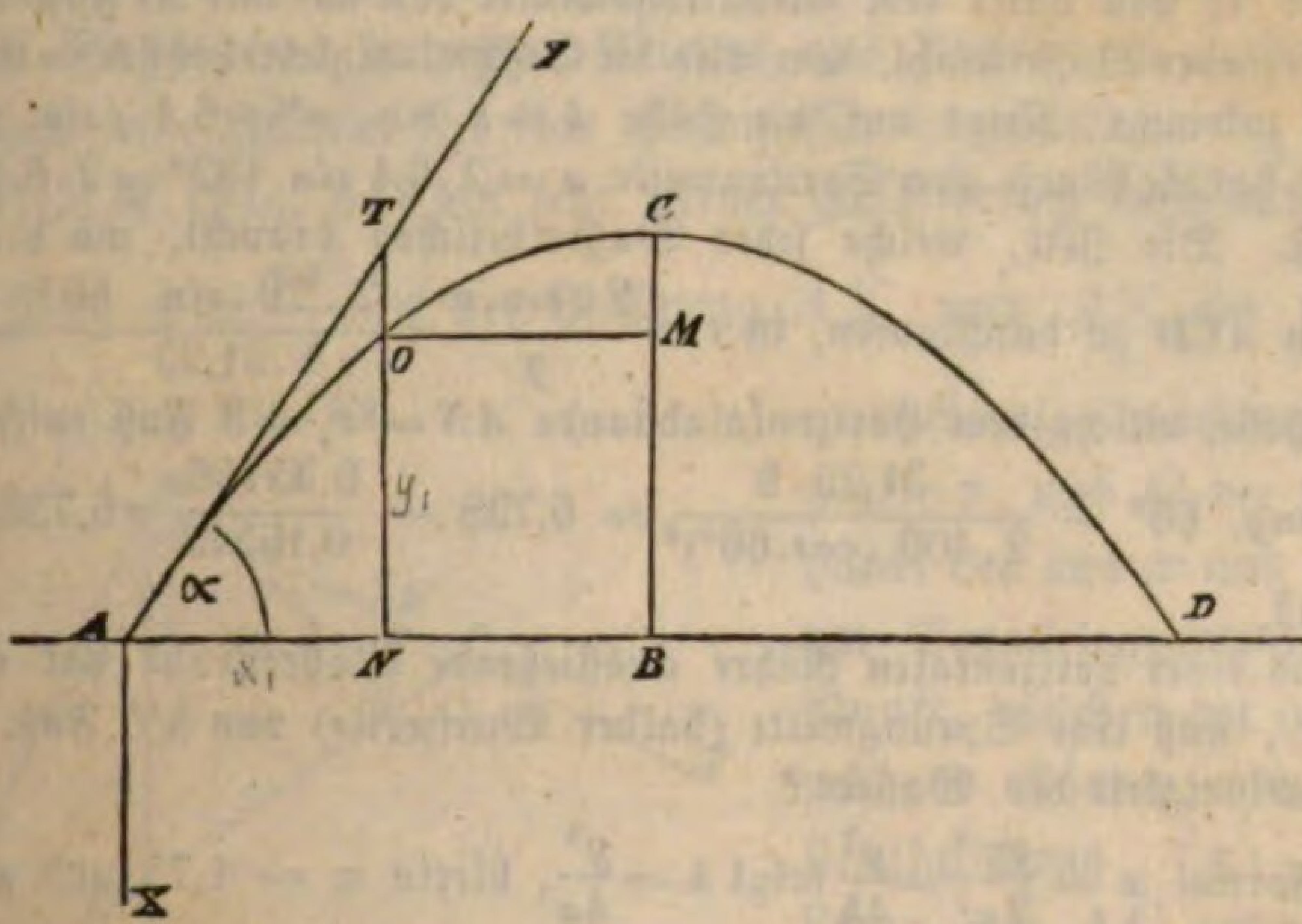
Hat man durch diese Abstände den Scheitel C der Parabel gefunden, so kann man, von da ausgehend, für jede beliebige Zeit den Ort O des Körpers finden. Uebrigens gilt auch: $CM = x$ und $MO = y$ setzend, die allgemeine Formel $x = \frac{p y^2}{2 c^2 \sin. \alpha^2}$, oder $y = c \sin. \alpha \sqrt{\frac{2x}{p}}$.

Anmerkung. Die seither abgehandelte Theorie der parabolischen, aus einer unveränderlichen Geschwindigkeit und einer constanten Acceleration hervorgehenden Bewegung findet ihre Anwendung in der Ballistik, oder der Lehre von der Wurfbewegung. Die schief auf- oder abwärts geworfenen Körper würden in Folge ihrer Anfangsgeschwindigkeit (c) und der Acceleration der Schwere ($g = 31\frac{1}{4}$ Fuß) einen Parabelbogen durchlaufen, wenn der Widerstand der Luft beseitigt wäre, oder die Bewegung im luftleeren Raume vor sich ginge. Ist die

Wurfgeschwindigkeit nicht groß und der geworfene Körper sehr schwer in Hinsicht auf sein Volumen, so fällt die Abweichung von der Parabel klein genug aus, um dieselbe ganz vernachlässigen zu können. Am vollkommensten wird aber die parabolische Bahn durch Wasserstrahlen, wie sie sich beim Ausflusse aus Gefäßen, bei Spritzen u. s. w. bilden, vorgefunden. Abgeschossene Körper, wie z. B. Geschützkugeln, beschreiben in Folge des großen Luftwiderstandes von der Parabel bedeutend abweichende Bahnen. Parabelbewegung.

§. 38. Ein unter dem Elevationswinkel $YAD = \alpha$ (Fig. 63) abge-

Fig. 63.



schossener Körper steigt auf eine gewisse Höhe BC, welche die **Wurfhöhe** (franz. hauteur du jet, engl. height of projection) genannt wird, und er erreicht die Horizontalebene, von der er in A ausgegangen ist, in einer Entfernung AD, welche die **Wurfweite** (franz. amplitude du jet, engl. range of projection) heißt.

Aus der Geschwindigkeit c, der Acceleration g und dem Elevationswinkel folgt, nach §. 37, indem man p durch g und α^0 durch $90^0 + \alpha^0$, also $cos.\, \alpha$ durch $sin.\, \alpha$ ersetzt:

$$\text{die Wurfhöhe } CB = a = \frac{c^2 sin.\, \alpha^2}{2g} \text{ und}$$

$$\text{die halbe Wurfweite } AB = b = \frac{c^2 sin.\, 2\alpha}{2g}.$$

Für einen Punkt O der Wurfbahn hat man, wenn $CM = x$ und $MO = y$ dessen Coordinaten sind, $x = \frac{g y^2}{2 c^2 cos.\, \alpha^2}$, oder, wenn er durch die Coordinaten $AN = x_1$ und $NO = y_1$ angegeben werden soll,

Parabelbewegung.

$$y_1 = CB - CM = a - x = a - \frac{g(b-x_1)^2}{2c^2 cos.\ \alpha^2}, \text{ d. i.}$$

$$y_1 = x_1 \ tang.\ \alpha - \frac{g x_1^2}{2c^2 cos.\alpha^2}.$$

Aus der Formel für die Wurfweite ersieht man, daß diese am größten ausfällt, wenn $sin.\ 2\ \alpha = 1$, also $2\ \alpha = 90^0$, d.i. $\alpha = 45^0$ ist. Ein unter dem Elevationswinkel von 45 Grad aufsteigender Körper erreicht also die größte Wurfweite.

Beispiel: 1) Ein unter dem Elevationswinkel von 66° mit 20 Fuß Geschwindigkeit aufsteigender Wasserstrahl, dem also die Geschwindigkeitshöhe $h = 0,016 . 20^2 = 6,4$ Fuß zukommt, steigt auf die Höhe $b = h\ sin. \alpha^2 = 6,4\ (sin.\ 66°)^2 = 5,34$ Fuß und hat die Wurf- oder Sprungweite $a = 2 . 6,4\ sin.\ 132° = 2 . 6,4 sin.\ 48° = 9,51$ Fuß. Die Zeit, welche jedes Waffertheilchen braucht, um den ganzen Parabelbogen ACD zu durchlaufen, ist $t = \frac{2c\ sin.\ \alpha}{g} = \frac{2 . 20 . sin.\ 66°}{31,25} = 1,17$ Secunde. Die Höhe, welche dem Horizontalabstande $AN = x_1 = 3$ Fuß entspricht, ist $y_1 = 3 . tang.\ 66° - \frac{31,25 . 9}{2 . 400 . (cos. 66°)^2} = 6,738 - \frac{0.35156}{0,16543} = 6,738 - 2,125 = 4,613$ Fuß.

2) Der aus einer horizontalen Röhre ausfließende Wasserstrahl hat auf einer Höhe von $1^3/_4$ Fuß eine Sprungweite (halber Wurfweite) von $5^1/_4$ Fuß, wie groß ist die Geschwindigkeit des Wassers?

Aus der Formel $x = \frac{gy^2}{2c^2} = \frac{y^2}{4h}$ folgt $h = \frac{y^2}{4x}$, hierin $x = 1,75$ und $y = 5,25$ gesetzt, $h = \frac{5,25^2}{4 . 1,75} = 3,937$ Fuß, und die dieser Höhe entsprechende Geschwindigkeit $c = 15,68$ Fuß.

Anmerkung. Ueber die Construction, Tangentenlage und andere Eigenschaften der Parabel findet man das Nähere im »Ingenieur, Seite 242,«.

Krummlinige Bewegungen überhaupt.

§. 39. Aus der Vereinigung von mehreren Geschwindigkeiten und mehreren unveränderlichen Accelerationen entspringt ebenfalls eine parabolische Bewegung, denn es lassen sich nicht nur die Geschwindigkeiten, sondern auch die Accelerationen zu einer einzigen vereinigen; es ist also das Ergebniß dasselbe, als wenn nur eine Geschwindigkeit und nur eine Acceleration, d. i. nur eine gleichförmige, und nur eine gleichförmig beschleunigte Bewegung vorhanden wäre

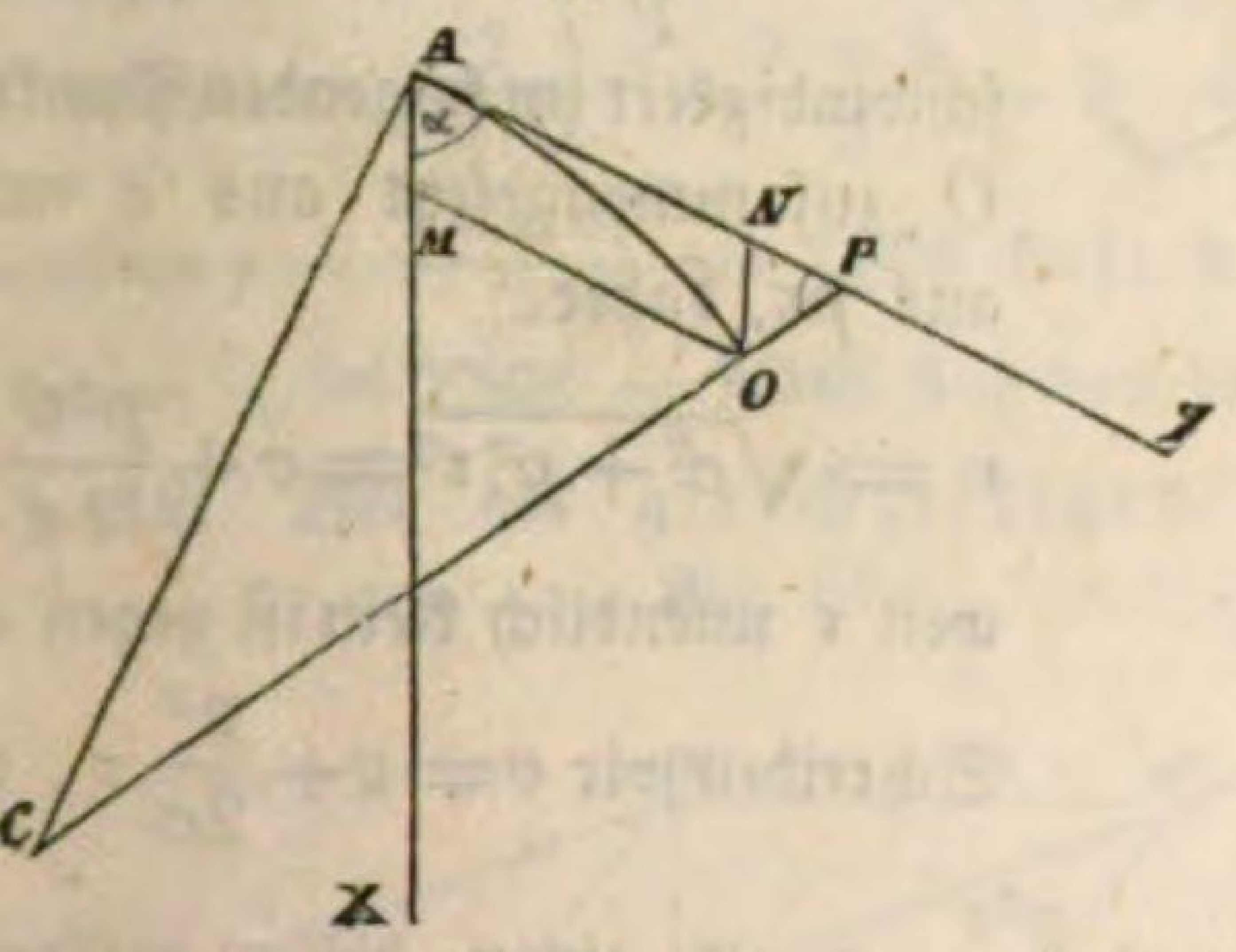
Sind die Accelerationen veränderlich, so kann man sie ebenso gut zu einer mittleren vereinigen, als wenn sie constant wären, denn es ist erlaubt, dieselben in einem unendlich kleinen Zeittheilchen (τ) als unveränderlich, die entsprechenden Bewegungen also innerhalb dieses Theilchens als gleichförmig beschleunigt anzusehen. Allerdings ist die resultirende Acceleration veränderlich, wie ihre Componenten selbst. Vereinigt man nun diese resultirende Acceleration mit der gegebenen Geschwindigkeit, so läßt sich ein kleiner Parabelbogen angeben, in welchem die Bewegung während

eines kleinen Zeittheilchens statthat. Bestimmt man so für das folgende Zeittheilchen wieder die Geschwindigkeit und die mittlere Acceleration, so läßt sich ein neues, einer andern Parabel angehöriges Bogenstück finden, und fährt man so fort, so erhält man nach und nach die vollständige Bahn. Krummlinige Bewegungen überhaupt.

§. 40. Man kann jeden kleinen Bogentheil irgend einer Curve als einen Kreisbogen ansehen. Der Kreis, welchem dieser Bogen zugehört, heißt **Krümmungskreis** (franz. cercle osculateur, engl. circle of curvature), sein ihm zugehöriger Halbmesser aber **Krümmungshalbmesser** (franz. rayon de courbure, engl. radius of curvature). Es läßt sich ebenso die Bahn eines bewegten Körpers aus Kreisbogen zusammensetzen, und deshalb eine Formel für ihre Halbmesser entwickeln.

Es sei AM (Fig. 64) ein sehr kleiner gleichförmig beschleunigt zurückgelegter Weg $x = \frac{p\tau^2}{2}$ in der Richtung AX, und AN ein sehr kleiner, gleichförmig durchlaufener Weg $y = c\tau$, und O der vierte Endpunkt des aus x und y construirten Parallelogramms, d. i. der Punkt, welchen der von A ausgehende Körper am Ende des Zeittheilchens (τ) einnimmt. Legen wir AC rechtwinkelig gegen AY und sehen wir nun zu, aus welchem Punkte C in dieser Linie sich ein kleiner Kreisbogen durch A und O beschreiben läßt.

Fig. 64.



Wegen der Kleinheit des Bogens AO können wir annehmen, daß nicht allein CA, sondern auch COP rechtwinkelig gegen AY stehe, daß also im kleinen Dreiecke NOP der Winkel NPO ein rechter sei. Die Auflösung dieses Dreiecks giebt $OP = ON\ sin.\ ONP = AM sin.\ XAY = \frac{p\tau^2}{2} sin.\ \alpha$, und die Tangente $AP = AN + NP = c\tau + \frac{p\tau^2}{2} cos.\ \alpha = (c + \frac{p\tau}{2} cos.\ \alpha)$. τ läßt sich $= c\,\tau$ setzen, weil $\frac{p\tau}{2} cos.\ \alpha$ wegen des unendlich kleinen Factors τ gegen c verschwindet. Nun ist aber nach der Lehre vom Kreise $\overline{AP}^2 = PO \times (PO + 2\ CO)$, oder, da PO gegen $2CO$ verschwindet, $\overline{AP}^2 = PO \times 2CO$; es folgt daher der gesuchte **Krümmungshalbmesser**

$$CA = CO = r = \frac{\overline{AP}^2}{2PO} = \frac{c^2\tau^2}{p\tau^2 sin.\ \alpha} = \frac{c^2}{p\ sin.\ \alpha}.$$

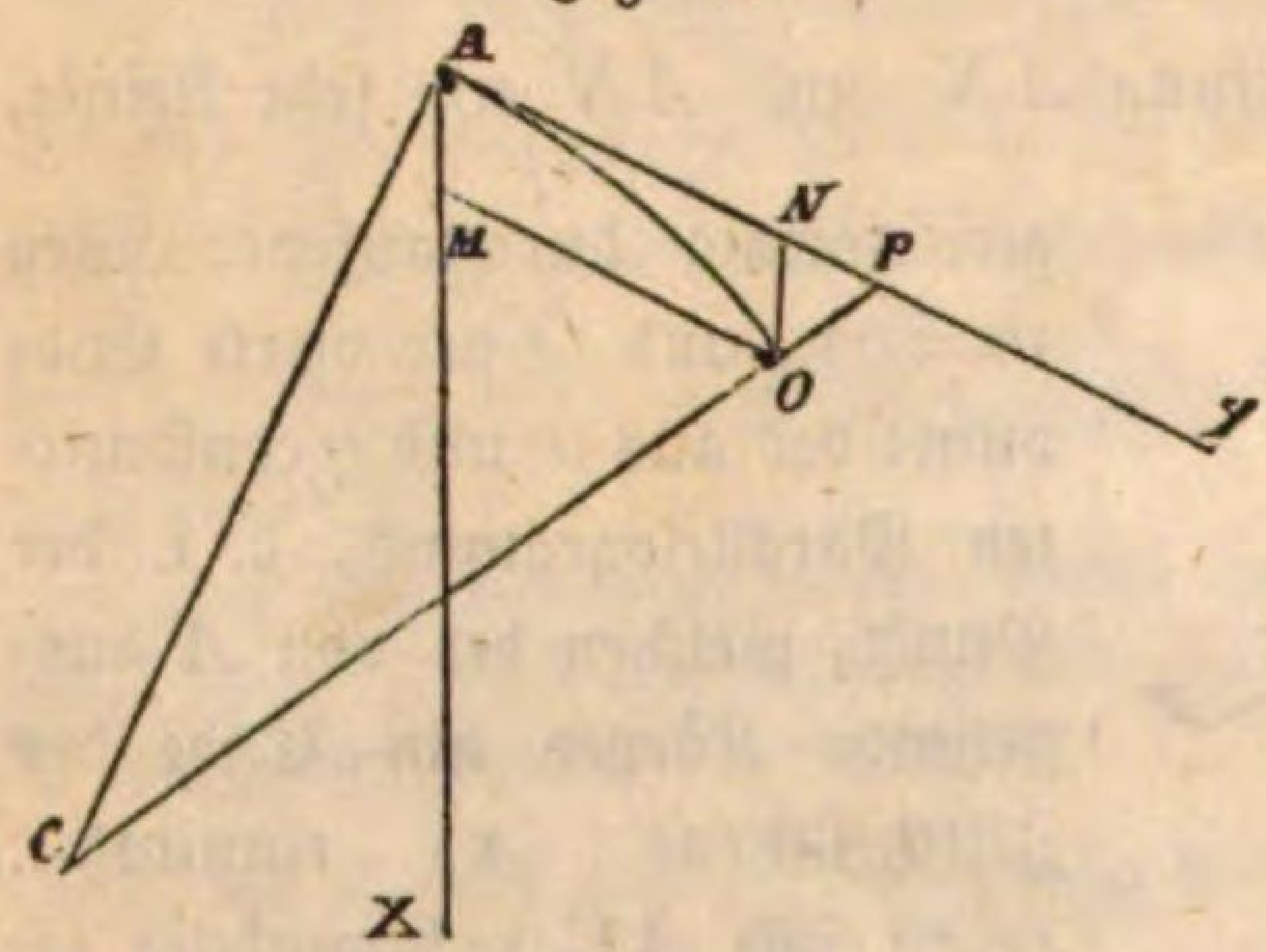
Durch dieselbe Formel lassen sich die Krümmungshalbmesser aller Bo-

Krummlinige Bewegungen überhaupt. genelemente finden, wenn man nur die jedesmalige Geschwindigkeit (c), Acceleration (p) und den Winkel (α) einführt, welchen die letztere mit der Geschwindigkeit oder mit der durch eine Berührungslinie angegebenen Bewegungsrichtung einschließt.

Beispiel: Für die durch die Acceleration der Schwere bewirkte parabolische Bahn ist $r = 0{,}032 \frac{c^2}{sin.\alpha}$, und im Scheitel dieser Curven, wo $\alpha = 90^0$, also $sin.\ \alpha = 1$, fällt $r = 0{,}032 c^2$ aus. Bei einer Geschwindigkeit von 20 Fuß ergäbe sich also $r = 12{,}8$ Fuß; jemehr sich aber der Körper vom Scheitel entfernt, desto kleiner wird α und desto größer wird also auch der Krümmungshalbmesser.

§. 41. Geht man von einer Stelle A (Fig. 65.) aus, wo die Acceleration in einer Richtung AC winkelrecht zur Bewegungsrichtung AY statthat, ist also $\alpha = 90^0$, so hat man den Krümmungshalbmesser $CA = r = \frac{c^2}{p}$, und es ist die Geschwindigkeit im folgenden Punkte O zusammengesetzt aus c und aus $p\tau$, daher

Fig. 65.



$$v = \sqrt{c^2 + p^2\tau^2} = c + \frac{p^2\tau^2}{2c},$$

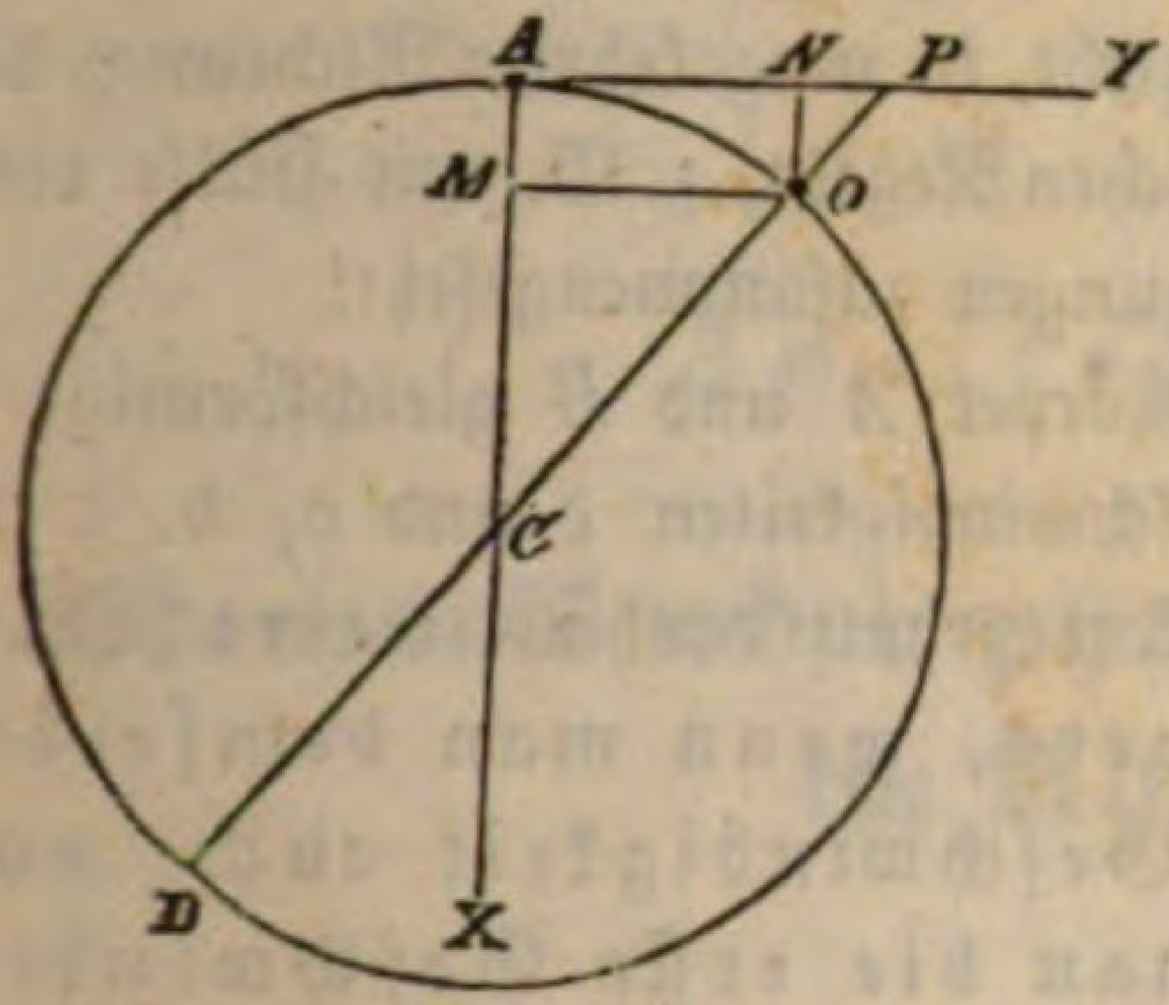
weil τ unendlich klein ist gegen c. Schreiben wir $v = c + \frac{p^2}{2c}\tau \cdot \tau$, so können wir $\frac{p^2\tau}{2c}$ als Acceleration, und $\frac{p^2\tau}{2c} \cdot \tau$ als einen dieser entsprechenden Zusatz an Geschwindigkeit ansehen. Weil aber τ unendlich klein ist, so fällt auch die Acceleration $\frac{p^2\tau}{2c}$ unendlich klein aus, man hat also in einer Secunde nur einen unendlich kleinen Zuwachs an Geschwindigkeit, und kann folglich die Bewegung als gleichförmig ansehen, d. i. $v = c$ setzen.

Aendert sich mit der Bewegungsrichtung auch die Richtung der Acceleration, und bleibt dieselbe immer winkelrecht auf jener, so ist sonach auch immer $v = c$; es bleibt also die Geschwindigkeit der Bewegung unverändert, wie sie anfangs war, nämlich $= c$. Man nennt eine solche immer winkelrecht gegen die Bewegung stehende, oder den Körper immer winkelrecht von der Bewegung ablenkende Acceleration (Normalacceleration (franz. accélération normale, engl. normal-acceleration), und weiß also hiernach, daß diese allein eine Geschwindigkeitsveränderung nicht, sondern nur eine Ablenkung von der Geraden bewirkt. Nach der obigen Formel $r = \frac{c^2}{p}$ haben wir die Normalacceleration $p = \frac{c^2}{r}$

= **Quadrat der Geschwindigkeit dividirt durch den jedesmaligen Krümmungshalbmesser zu setzen.** Krummlinige Bewegungen überhaupt.

Beim Kreis AOD (Fig. 66) ist der Krümmungshalbmesser (r) der

Fig. 66.

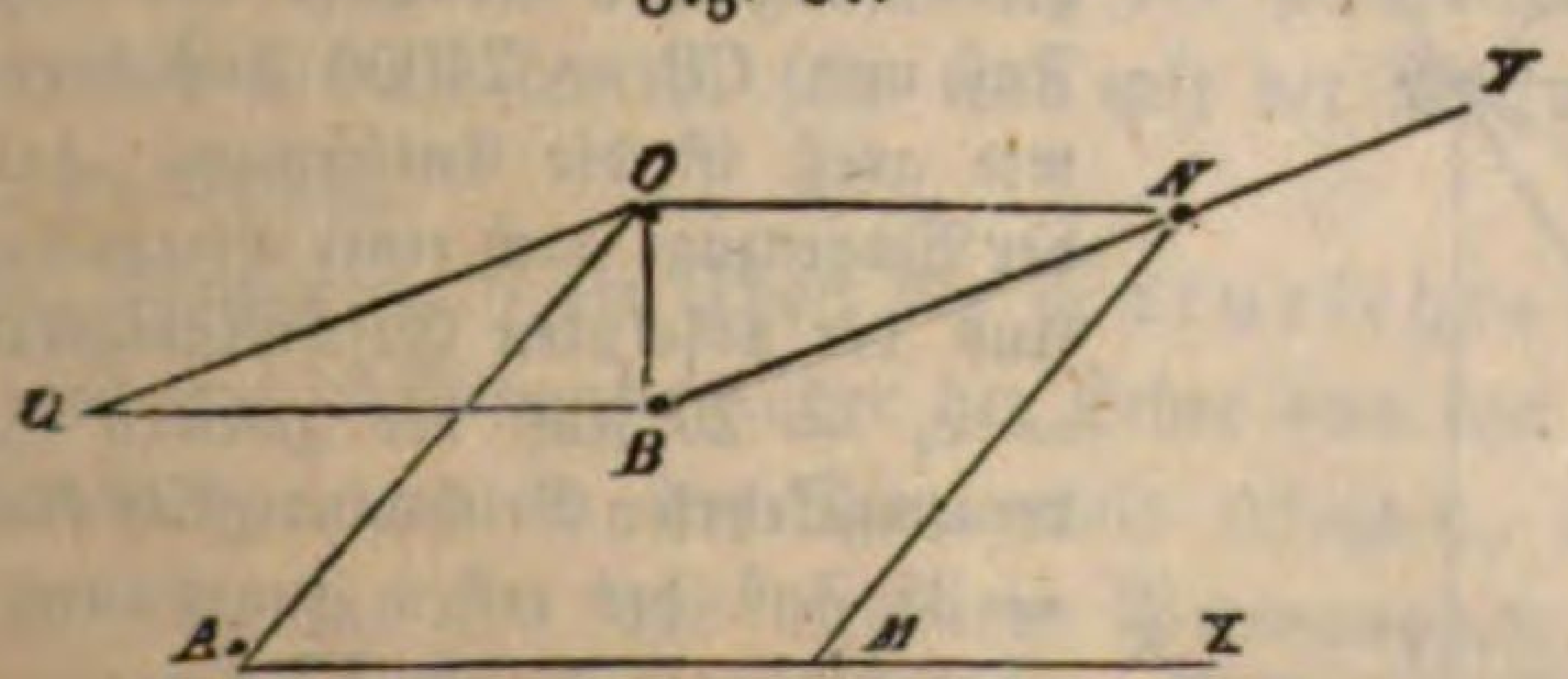


Kreishalbmesser $CA = CO$ selbst; daher ist bei der Bewegung in demselben die Acceleration $p = \frac{c^2}{r}$ unveränderlich. Eine unveränderliche Acceleration, welche den Körper unaufhörlich rechtwinkelig von seiner Bewegung ablenkt, bewirkt also eine Umdrehung im Kreise.

Beispiel: Ein Körper, welcher in einem Kreise von 5 Fuß Halbmesser so herumgeht, daß er zu jeder Umdrehung 5 Secunden Zeit braucht, hat die Geschwindigkeit $c = \frac{2\pi r}{t} = \frac{2\pi . 5}{5} = 2 . \pi = 6{,}283$ Fuß, und die Normalacceleration $p = \frac{(6{,}283)^2}{5} = 7{,}896$ Fuß; d. h. er wird in jeder Secunde um $\frac{1}{2} p = \frac{1}{2} \times 7{,}896 = 3{,}948$ Fuß von der geraden Linie abgelenkt.

§. 42. Bei der **gleichzeitigen Bewegung zweier Körper** findet eine immerwährende Veränderung in der gegenseitigen Lage, Entfernung u. s. w. derselben Statt, es läßt sich aber dieselbe mit Hülfe des Obigen für jeden Zeitpunkt finden. Relative Bewegungen.

Fig. 67.



Es sei in Fig. 67 A der Anfangspunkt des einen Körpers, B der des andern; jener rücke in der Richtung AX in einer gewissen Zeit (t) nach M, dieser in der Richtung BY in eben dieser Zeit nach N; ziehen wir nun MN, so erhalten wir in dieser Linie die relative Lage und Entfernung der Körper A und B am Ende dieser Zeit. Legen wir AO parallel mit MN und machen auch $AO = MN$, so wird die Linie AO die gegenseitige Lage der Körper A und B ebenfalls angeben. Ziehen wir noch ON, so erhalten wir ein Parallelogramm, in welchem auch $ON = AM$ ist. Machen wir endlich noch BQ parallel und gleich der NO und ziehen OQ, so erhalten wir ein neues Parallelogramm $BNOQ$, in welchem die eine Seite BN der absolute Weg (y) des zweiten Körpers und die andere Seite BQ der nach entgegengesetzter Richtung gelegte Weg (x) des ersten Körpers, der vierte Eckpunkt O aber der relative Ort des zweiten Körpers

Relative Bewegungen.

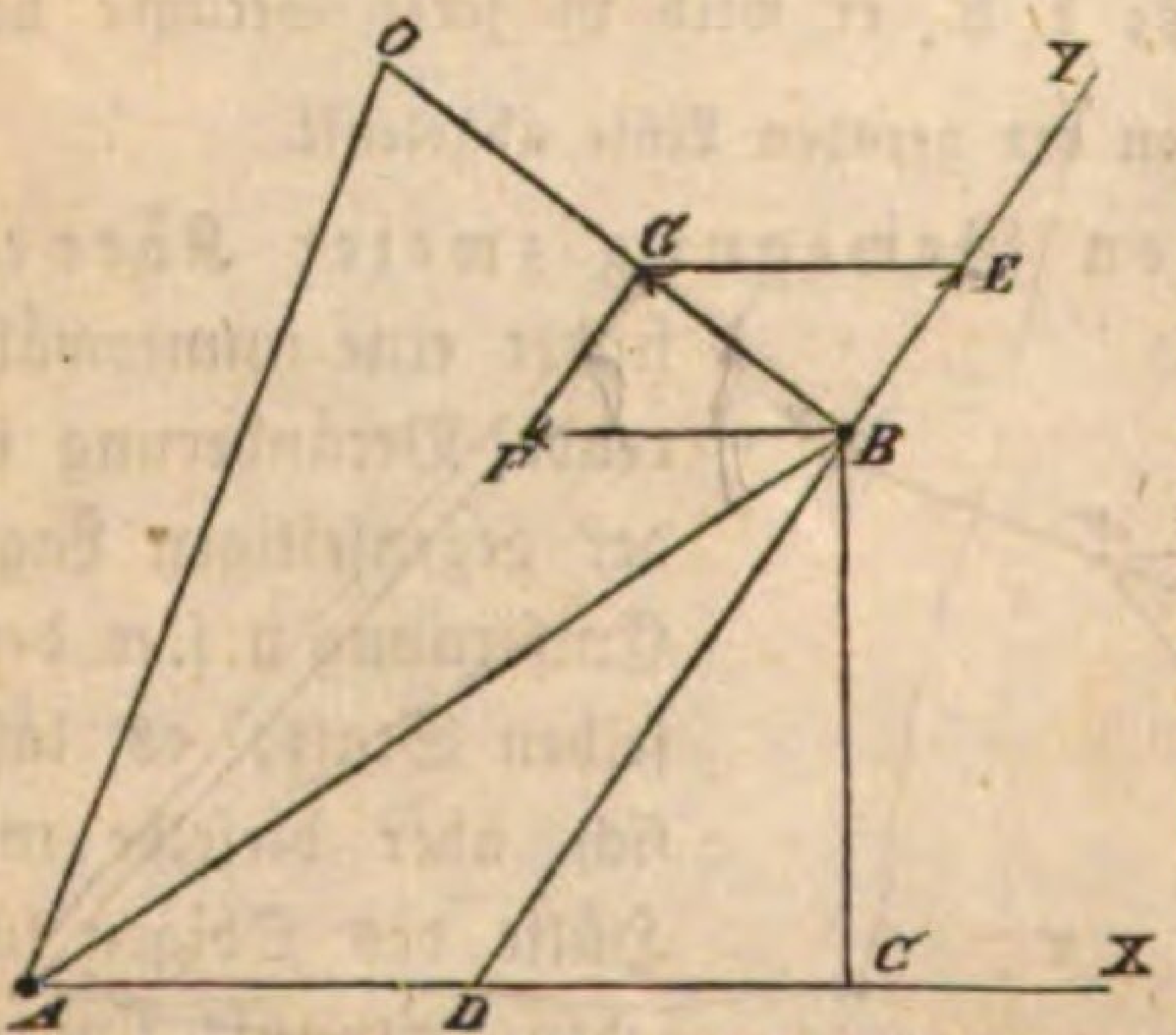
ist, wofern er nämlich auf den als unveränderlich anzusehenden Ort des ersten Körpers bezogen wird.

Man findet also den relativen Ort O eines bewegten Körpers (B), wenn man diesem außer seiner eigenen Bewegung (BN) noch diejenige AM des Körpers (A), worauf man den Ort bezieht, in umgekehrter Richtung, also BQ, beilegt, und nun nach den gewöhnlichen Regeln, z. B. mit Hülfe eines Parallelogrammes $BNOQ$, diese Bewegungen zusammengesetzt.

§. 43. Sind die Bewegungen der Körper A und B gleichförmig, so kann man für AM und BN die Geschwindigkeiten c und c_1 d. i. die Wege in einer Secunde, einsetzen. Man erhält deshalb die relative Geschwindigkeit des einen Körpers, wenn man demselben außer seiner eigenen absoluten Geschwindigkeit auch noch die des Körpers, auf welchen man die erste Geschwindigkeit bezieht, in entgegengesetzter Richtung beilegt. Auch findet dasselbe Verhältniß mit den Accelerationen Statt.

Beispiel. Ein Dampfwagenzug fährt auf der Schienenbahn AX Fig. 68 von A aus mit 35 Fuß Geschwindigkeit; ein anderer gleichzeitig von B aus auf einer Bahn BY, welche mit der ersteren den Winkel $BDX = 56^{\circ}$ einschließt, mit 20 Fuß Geschwindigkeit. Wenn nun die anfänglichen Abstände $AC = 30000$ Fuß und $CB = 24000$ Fuß betragen, wie groß ist die Entfernung AO beider Wagenzüge nach einer Viertelstunde? Aus der absoluten Geschwindigkeit $BE = c_1 = 20$ Fuß des zweiten Zuges, der umgekehrten Geschwindigkeit $BF = c = 35$ Fuß des ersten Zuges und dem eingeschlossenen Winkel $EBF = \alpha = 180^{\circ} - BDC = 180^{\circ} - 56^{\circ} = 124^{\circ}$ folgt die relative Geschwindigkeit des zweiten Zuges:

Fig. 68.



$$BG = \sqrt{c^2 + c_1^2 + 2\,c\,c_1\,\cos.\alpha} = \sqrt{35^2 + 20^2 - 2\,.\,35\,.\,20\,.\cos.56^{\circ}}$$
$$= \sqrt{1225 + 400 - 1400\cos.56^{\circ}} = \sqrt{1625 - 782{,}9} = \sqrt{842{,}1} = 29{,}02 \text{ Fuß.}$$

Für den Winkel $GBF = \varphi$, den dieselbe mit der ersten Bewegungsrichtung einschließt, ist

$$\sin.\varphi = \frac{c_1 \sin.56^{\circ}}{29{,}02} = \frac{20\,.\,0{,}8290}{29{,}02};\ Log.\sin.\varphi = 0{,}75690 - 1, \text{ daher } \varphi = 34^{\circ}, 50'.$$

Der in 15 Minuten = 900 Sec. relativ durchlaufene Weg ist $BO = 29{,}02\,.\,900 = 26118$ Fuß, die Entfernung $AB = \sqrt{(30000)^2 + (24000)^2} = 38419$ Fuß, der Winkel $BAC = ABF$, da dessen Tangente $\frac{24000}{30000} = 0{,}8$ ist, $= 38^{\circ}, 40'$, daher der Winkel $ABO = 38^{\circ}, 40' + \varphi = 38^{\circ}, 40' + 34^{\circ}, 50' = 73^{\circ}\ 30'$, und die Entfernung der beiden Wagenzüge nach 15 Minuten:

$$AO = \sqrt{AB^2 + BO^2 - 2AB\,.\,BO\cos.ABO}$$
$$= \sqrt{38419^2 + 26118^2 - 2\,.\,38419\,.\,26118\cos.73^{\circ},30'}$$
$$= \sqrt{1588190000} = 39850 \text{ Fuß.}$$

Zweiter Abschnitt.

Mechanik oder physische Bewegungslehre im Allgemeinen.

Erstes Kapitel.

Grundbegriffe und Grundgesetze der Mechanik.

§. 44. Die Mechanik (fr. mécanique, engl. mechanics) ist die Wissenschaft, welche von den Bewegungsgesetzen materieller Körper handelt. Sie ist in sofern eine Anwendung der Phoronomie auf die Körper der Außenwelt, als die letztere sich nur mit der Bewegung geometrischer Körper befaßt. Mechanik.

Die Mechanik ist ein Theil der Naturlehre (fr. physique générale, engl. natural-philosophy) oder der Lehre von den Gesetzen, nach welchen die Veränderungen in der Körperwelt erfolgen, nämlich derjenige Theil, welcher sich mit den aus meßbaren Bewegungen hervorgegangenen Veränderungen in der materiellen Welt beschäftigt.

§. 45. Kraft (fr. force, engl. force) ist die Ursache der Bewegung oder der Bewegungsveränderung materieller Körper. Jede Bewegungsveränderung, z. B. jede Veränderung in der Geschwindigkeit eines Körpers ist als die Wirkung einer Kraft anzusehen. Aus diesem Grunde messen wir denn auch jedem frei fallenden Körper eine Kraft, die sogenannte Schwerkraft, bei, weil derselbe seine Geschwindigkeit unaufhörlich ändert. Auf der andern Seite ist aus der Ruhe oder aus der Unveränderlichkeit im Bewegungszustande eines Körpers noch nicht auf die Abwesenheit von Kräften zu schließen, denn es können sich die Kräfte eines Körpers gegenseitig aufheben, ohne eine Wirkung übrig zu lassen. Die Schwerkraft, mit welcher ein Körper zur Erde niederfällt, besitzt derselbe auch noch, wenn er auf einem Tische ruht, es wird aber hier ihre Wirkung durch die Festigkeit des Tisches oder einer andern Unterlage aufgehoben. Kraft.

Gleichgewicht. §. 46. Ein Körper ist im Gleichgewicht (fr. équilibre, engl. equilibrium), oder die Kräfte eines Körpers halten einander das Gleichgewicht, wenn dieselben ohne eine Wirkung übrig zu lassen, oder ohne Bewegung zu erzeugen oder zu verändern, einander aufheben oder vernichten.

Bei einem an einem Faden aufgehängten Körper ist z. B die Schwerkraft in demselben mit der Cohäsion des Fadens im Gleichgewicht. Das Gleichgewicht unter Kräften wird aufgehoben, und es entsteht Bewegung, wenn man eine von den Kräften entfernt oder auf andere Weise aufhebt. So geht z. B. die durch ein Gewicht gebogene Stahlfeder in Bewegung über, wenn das Gewicht weggenommen wird, weil nun diejenige Kraft der Feder, welche man ihre Elasticität nennt, allein noch wirkt.

Statik (fr. statique, engl. statics) ist derjenige Theil der Mechanik, welcher von den Gesetzen des Gleichgewichts handelt; die Dynamik (fr. dynamique, engl. dynamics) hingegen handelt von den Kräften, inwiefern sie Bewegungen hervorbringen.

Eintheilung der Kräfte. §. 47. Nach ihren Wirkungen sind die Kräfte entweder bewegende (fr. forces motrices, puissances, engl. moving forces) oder widerstehende (Widerstände, fr. résistances, engl. resistances). Jene bringen Bewegungen hervor, oder vermögen dieselben zu erzeugen, diese hingegen können dieselben nur verhindern und mäßigen. Die Schwerkraft, die Elasticität einer Stahlfeder u. s. w. gehören zu den bewegenden Kräften, die Reibung, Festigkeit der Körper u. s. w. sind widerstehende Kräfte oder Widerstände, weil durch sie nur Bewegungen verhindert oder vermindert oder bewegende Kräfte aufgehoben, aber keinesweges Bewegungen hervorgerufen werden können. Die bewegenden Kräfte theilt man wieder ein in beschleunigende (fr. accélératrices, engl. accelerating) und in verzögernde (fr. retardatrices, engl. retarding). Jene erzeugen eine positive, diese eine negative Acceleration, durch jene wird also eine beschleunigte, durch diese eine verzögerte Bewegung hervorgebracht. Die Widerstände sind stets verzögernde Kräfte, aber nicht alle verzögernde Kräfte sind widerstehende. Bei einem senkrecht in die Höhe geworfenen Körper wirkt z. B. die Schwerkraft verzögernd, deswegen ist aber die Schwerkraft noch keine widerstehende Kraft, denn beim darauf folgenden Herabfallen des Körpers nimmt sie wieder die Stelle einer bewegenden Kraft ein.

Noch unterscheidet man beständige (constante, fr. constantes, engl. uniform) und veränderliche Kräfte (fr. variables, engl. variable) von einander. Während constante Kräfte immer auf gleiche Weise wirken und eben deshalb in gleichen Zeittheilchen gleiche Wirkungen, d. i. gleiche Zusätze oder Abnahmen in der Geschwindigkeit hervorbringen, sind bei den veränderlichen Kräften diese Wirkungen zu verschiedenen Zeiten verschieden; während also aus jenen Kräften gleichförmig veränderte Be-

wegungen hervorgehen, entsprechen diesen Kräften ungleichförmig beschleunigte oder ungleichförmig verzögerte Bewegungen.

§. 48. Druck (fr. pression, engl. pressure) und Zug (fr. traction, engl. traction) sind die ersten Wirkungen der Kräfte auf materielle Körper. Vermöge derselben werden Körper zusammengedrückt und ausgedehnt, oder überhaupt in ihrer Form verändert. Druck.

Der durch die lothrecht abwärts wirkende Schwerkraft hervorgebrachte Druck oder Zug, welchen die Unterlage eines schweren Körpers oder der Faden, woran ein Körper aufgehängt ist, auszuhalten hat, heißt das Gewicht (fr. poids, engl. weight) des Körpers.

Druck und Zug, und also auch Gewicht sind Größen eigenthümlicher Art, die zwar nur unter einander verglichen werden, aber als Wirkungen der Kräfte zum Maaße dieser dienen können.

Die einfachsten, und deshalb gewöhnlichsten Mittel zum Messen der Kräfte sind Gewichte.

§. 49. Zwei Gewichte oder auch zwei Drücke oder Züge, und also auch die Kräfte, welche letzteren entsprechen, sind gleich, wenn man eine durch die andere ersetzen kann, ohne verschiedene Wirkungen hervorzubringen. Wenn z. B. eine Stahlfeder durch ein angehängtes Gewicht G genau so gebogen wird wie durch ein anderes, genau ebenso angehängtes Gewicht G_1, so sind diese Gewichte, und deshalb auch die Schwerkräfte in beiden Körpern, gleich. Wenn ebenso eine belastete Waage (fr. und engl. balance) sowohl durch das Gewicht G als auch durch ein anderes Gewicht G_1, welches man an die Stelle von G setzt, zum Einspielen gebracht wird, so sind diese Gewichte G und G_1 gleich, die Waage mag übrigens gleich- oder ungleicharmig, und die übrige Belastung derselben mag groß oder klein sein. Gleichheit der Kräfte.

Ein Druck oder Gewicht (Kraft) ist 2, 3, 4 u. s. w. und überhaupt n mal so groß als ein anderer Druck u. s. w., wenn er dieselbe Wirkung hervorbringt als 2, 3, 4...n Drücke der zweiten Art zusammen. Wenn eine übrigens beliebig belastete Waage durch ein Gewicht (G) ebenso zum Einspielen gebracht wird, als durch Auflegen von 2, 3, 4 u. s. w. gleichen Gewichten (G_1), so ist jenes Gewicht (G) 2, 3, 4 u. s. w. mal so groß als dieses Gewicht (G_1).

§. 50. Materie (fr. matière, engl. matter) ist Dasjenige, wodurch die Körper der Außenwelt, die wir, im Gegensatz zu den Körpern der Geometrie, auch materielle oder physische Körper nennen, auf unsere Sinne wirken. Masse (fr. und engl. masse) ist das Quantum der einen Körper bildenden Materie. Materie.

Körper von gleichem Volumen (fr. und engl. volume) oder gleichem geometrischen Inhalte haben meist verschiedene Gewichte, wenn sie aus

Materie. verschiedenartigen Materien bestehen. Man kann daher aus dem Volumen eines Körpers auf dessen Gewicht noch nicht schließen; es ist dazu vielmehr nöthig, daß man das Gewicht von einer Volumeneinheit, z. B. von einem Cubikfuß, Cubikmeter u. s. w. der Materie des Körpers kenne.

Gewichtseinheit. §. 51. Das Messen von Gewichten oder Kräften besteht in einer Vergleichung derselben mit einem gegebenen und unveränderlichen, zur Einheit angenommenen Gewichte. Die Auswahl dieser Gewichts- oder Krafteinheit ist zwar an sich willkürlich, es ist jedoch praktisch vortheilhaft, hierzu das Gewicht von einem allgemein verbreiteten Körper bei einem der gebräuchlichen Raumeinheit gleichen Volumen hierzu auszuwählen.

Eine derartige Gewichtseinheit ist das Gramm, welches durch das Gewicht von einem Cubikcentimeter reinen Wassers im Zustande der größten Dichtigkeit (bei ungefähr 4° C. Temperatur) gegeben wird. Aber auch das preußische Pfund ist eine auf das Gewicht des Wassers zurückgeführte Einheit, es wiegt nämlich ein preußischer Cubikfuß destillirten Wassers im luftleeren Raume und bei 15° R. Temperatur 66 preußische Pfund. Nun ist aber ein preußischer Fuß = 139,13 Pariser Linien = 0,3137946 Meter, es folgt daher ein preußisches Pfund = 467,711 Gramm.

Trägheit. §. 52. Trägheit oder Beharrungsvermögen (fr. inertie, engl. inertia) ist diejenige Eigenschaft der Materie, vermöge welcher dieselbe durch sich allein weder Bewegung annehmen, noch erhaltene Bewegung abändern kann. Jeder materielle Körper bleibt so lange in Ruhe, so lange keine Kraft auf ihn einwirkt, und jeder einmal in Bewegung gesetzte materielle Körper bleibt in einer geradlinigen gleichförmigen Bewegung, so lange als er ohne Einwirkung einer Kraft ist. Wenn also in dem Bewegungszustande eines materiellen Körpers Veränderungen vor sich gehen, wenn ein Körper seine Bewegungsrichtung verändert, oder wenn er eine größere oder kleinere Geschwindigkeit annimmt, so ist dieselbe nicht dem Körper, als einem gewissen Quantum von Materie, an sich beizumessen, sondern es muß eine fremde Ursache, d. i. eine Kraft, dieselbe herbeigeführt haben.

Insofern bei jeder Aenderung im Bewegungszustande eines materiellen Körpers eine Kraftentwickelung vor sich geht, insofern läßt sich die Trägheit auch den Kräften beizählen.

Könnten wir die auf eine bewegte Masse wirkenden Kräfte gänzlich entfernen, so würde dieselbe sich ohne Ende gleichförmig fortbewegen; wir finden aber eine solche gleichförmige Bewegung nirgends, weil es uns nicht möglich ist, eine Masse der Einwirkung aller Kräfte zu entziehen. Bewegt sich eine Masse auf einem horizontalen Tische, so übt zwar die nun

vom Tische aufgenommene Schwerkraft eine unmittelbare Wirkung auf den Körper nicht aus, allein aus dem Drucke des Körpers gegen den Tisch entsteht ein Widerstand, den wir in der Folge unter dem Namen Reibung näher kennen lernen werden, welcher dem bewegten Körper unaufhörlich Geschwindigkeit entzieht, weshalb er aus diesem Grunde eine verzögerte Bewegung annimmt und endlich zur Ruhe übergeht. Indessen auch die Luft setzt dem bewegten Körper einen Widerstand entgegen, und wenn auch die Reibung des Körpers ganz beseitigt werden könnte, so würde schon wegen dieses Hindernisses eine allmälige Abnahme an Geschwindigkeit eintreten. Wir finden aber, daß der Verlust an Geschwindigkeit um so kleiner wird, die Bewegung sich also um so mehr und mehr einer gleichförmigen nähert, je mehr wir diese Widerstände der Zahl und Stärke nach vermindern, und können daraus schließen, daß bei Beseitigung aller bewegenden Kräfte und Widerstände eine gänzlich gleichförmige Bewegung eintreten muß. Trägheit.

§. 53. Die Kraft (P), welche eine träge Masse (M) accelerirt, ist proportional der Acceleration (p) und proportional der Masse (M) selbst; sie wächst bei einerlei Massen wie die in unendlich kleinen Zeiten erlangten Zunahmen an Geschwindigkeit und nimmt bei gleichen Geschwindigkeitszunahmen in demselben Maaße zu, als die Massen größer werden. Die $m$fache Acceleration einer und derselben Masse oder gleicher Massen erfordert eine $m$fache Kraft und die $n$fache Masse macht bei einerlei Acceleration auch die $n$fache Kraft nöthig. Kräftemaaß.

Da wir bis jetzt ein Maaß der Massen noch nicht ausgewählt haben, so können wir deshalb sogleich

$P = Mp$, die Kraft gleich dem Producte aus Masse und Acceleration annehmen, und zugleich statt Kraft ihre Wirkung, d. i. den von ihr hervorgebrachten Druck einsetzen.

Die Richtigkeit dieses allgemeinen Bewegungsgesetzes läßt sich allerdings wohl durch directe Versuche darthun, indem man z. B. gleiche und verschiedene, auf einem horizontalen Tische bewegliche Massen durch gebogene Stahlfedern fortschnellen läßt, indessen liegt dieselbe auch schon darin, daß alle aus ihnen gemachte Folgerungen und entwickelte Regeln für zusammengesetzte Bewegungen den Beobachtungen und Erscheinungen in der Natur vollkommen entsprechen.

§. 54. Alle Körper fallen an einem und demselben Orte der Erde und im luftleeren Raume gleich schnell nieder, nämlich mit der unveränderlichen Acceleration $g = 9{,}81$ Meter $= 31^1/_4$ Fuß (§. 15); ist daher die Masse eines Körpers $= M$ und das die Schwerkraft desselben messende Gewicht $= G$, so hat man nach der letzten Formel auch Masse.

$$G = Mg, \text{ d. i.}$$

Masse. das Gewicht eines Körpers ist ein Product aus dessen Masse und der Acceleration der Schwere, und umgekehrt:

$$M = \frac{G}{g}, \text{ d. i.}$$

Masse eines Körpers ist Gewicht desselben dividirt durch die Beschleunigung der Schwere, oder Masse ist dasjenige Gewicht eines Körpers, welches derselbe haben würde, wenn die Acceleration der Schwere = Eins, z. B. ein Meter, ein Fuß u. s. w. wäre. An dem Punkte auf oder in der Nähe der Erde oder eines andern Weltkörpers, wo die Körper nicht mit 9,81 Meter, sondern mit 1 Meter Geschwindigkeit (nach der ersten Secunde) niederfallen, wird hiernach die Masse, oder vielmehr nur das Maaß derselben, durch das Gewicht des Körpers unmittelbar angegeben.

Je nachdem wir die Beschleunigung der Schwere in Metern oder Fußen ausdrücken, haben wir nun die Masse

$$M = \frac{G}{9,81} = 0,1019\ G \text{ oder}$$

$$M = \frac{G}{31,25} = 0,032\ G.$$

Hiernach ist z. B. die Masse von einem 20 Pfund schweren Körper, $M = 0,032 \times 20 = 0,64$ Pfund, und umgekehrt das Gewicht einer Masse von 20 Pfund, $G = 31,25 \times 20 = 625$ Pfund.

§. 55. Insofern wir die Beschleunigung (g) der Schwere als unveränderlich annehmen, so folgt nun, daß die Masse eines Körpers dem Gewichte desselben vollkommen proportional ist, daß also für die Massen M und M_1 mit den Gewichten G und G_1 ist:

$$\frac{M}{M_1} = \frac{G}{G_1}.$$

Wir erhalten hiernach das Gewicht als Maaß der Masse eines Körpers, messen also einem Körper in demselben Maaße mehr Masse bei, als derselbe mehr Gewicht hat.

Allerdings ist die Beschleunigung der Schwere etwas veränderlich, sie wird größer, je näher man den Erdpolen kommt, und nimmt um so mehr ab, je mehr man sich dem Erdäquator nähert, ist also an den Polen am größten und am Aequator am kleinsten. Auch nimmt sie ab, je mehr ein Körper über oder unter dem Niveau des Meeres befindlich ist, hat also im Niveau des Meeres ihren größten Werth. Da nun aber eine Masse, so lange man zu ihr Nichts hinzunimmt und von ihr Nichts wegnimmt, etwas Unveränderliches ist, also auf allen Punkten der Erde und selbst außerhalb derselben, z. B. auf dem Monde, noch dieselbe ist, so folgt daraus, daß auch das Gewicht eines Körpers veränderlich und von dem Orte

der Körper abhängig, überhaupt aber der dem Orte entsprechenden Acceleration der Schwere proportional, oder $\frac{G}{G_1} = \frac{g}{g_1}$ sein müsse. Masse.

Es wird also hiernach eine und dieselbe Stahlfeder durch ein und dasselbe Gewicht an verschiedenen Orten der Erde, verschieden gebogen, am Aequator, auf hohen Bergen und in tiefen Gruben am schwächsten, in der Nähe der Erdpole und im Niveau des Meeres am stärksten.

§. 56. **Dichtigkeit** (fr. densité, engl. density) ist die Stärke der Raumerfüllung der Materie. Ein Körper ist um so **dichter**, je mehr Materie derselbe in seinem Raume einschließt. Das natürliche Maaß der Dichtigkeit ist dasjenige Quantum an Materie (diejenige Masse), welches die Volumeneinheit ausfüllt; weil sich aber die Materie nur durch Gewichte messen läßt, so dient das Gewicht von einer Volumeneinheit, z. B. von einem Cubikmeter oder Cubikfuße einer gewissen Materie als Maaß der Dichtigkeit derselben. Dichtigkeit.

Hiernach ist z. B. die Dichtigkeit des Wassers = 66 Pfund und die des Gußeisens = 470 Pfund, weil ein Cubikfuß Wasser 66, und ein Cubikfuß Gußeisen 470 Pfund wiegt.

Aus dem Volumen V eines Körpers und der Dichtigkeit γ desselben folgt sein Gewicht: $G = V\gamma$.

Volumen mal Dichtigkeit giebt also das Gewicht eines Körpers.

Die Dichtigkeit der Körper ist entweder **gleichförmig** (fr. uniforme, homogène, engl. uniform) oder **ungleichförmig** (fr. variable, hétérogène, engl. variable), je nachdem gleiche Volumentheile desselben gleich oder verschieden schwer sind. Es ist z. B. die Dichtigkeit der Metalle gleichförmig oder es sind die Metalle homogen, weil gleiche, übrigens noch so kleine Theile derselben, gleichviel wiegen, hingegen ist Granit ein Körper von ungleichförmiger Dichtigkeit, weil er aus Theilen von verschiedener Dichtigkeit besteht.

Beispiele: 1) Wenn die Dichtigkeit des Bleies 746 Pfund beträgt, so wiegen 3,2 Cubikfuß Blei: $G = V\gamma = 746 \times 3{,}2 = 2387{,}2$ Pfund. 2) Ist die Dichtigkeit des Stabeisens = 502 Pfund, so hat eine Masse desselben von 205 Pfund das Volumen $V = \frac{G}{\gamma} = \frac{205}{502} = 0{,}4083$ Cubikfuß $= 0{,}4083 \times 1728 = 705{,}5$ Cubikzoll. 3) Wiegen 10,4 Cubikfuß vollkommen mit Wasser angeschwängertes Tannenholz 577 Pfund, so ist die Dichtigkeit dieses Holzes:

$$\gamma = \frac{G}{V} = \frac{577}{10{,}4} = 55{,}5 \text{ Pfund.}$$

§. 57. **Specifisches, auch eigenthümliches Gewicht** (fr. poids spécifique, engl. specific-weight, specific gravity) ist das Verhältniß der Dichtigkeit eines Körpers zu der als Einheit angenommenen Dichtigkeit Specifisches Gewicht.

Specifisches Gewicht.

eines andern, gewöhnlich des Wassers. Nun ist aber die Dichtigkeit gleich dem Gewichte der Volumeneinheit; daher ist auch specifisches Gewicht das Verhältniß zwischen dem Gewichte eines Körpers zu dem eines andern, z. B. des Wassers, bei einerlei Volumen.

Um das specifische Gewicht nicht mit dem Gewichte zu verwechseln, welches einem Körper von bestimmter Größe zukommt, pflegt man das letztere absolutes Gewicht (fr. poids absolu, engl. absolute-weight) zu nennen.

Ist γ die Dichtigkeit der Materie (des Wassers), auf welche wir die Dichtigkeiten anderer Materien beziehen, und γ_1 die Dichtigkeit irgend einer dieser Materien, deren specifisches Gewicht wir durch ε bezeichnen wollen, so gelten die Formeln

$$\varepsilon = \frac{\gamma_1}{\gamma} \text{ und } \gamma_1 = \varepsilon . \gamma.$$

es ist also die Dichtigkeit eines Stoffes gleich: specifisches Gewicht desselben mal Dichtigkeit des Wassers.

Das absolute Gewicht G einer Masse vom Volumen V und specifischem Gewichte ε ist: $G = V\gamma_1 = V\varepsilon\gamma$.

Beispiele: 1) Die Dichtigkeit des reinen Silbers ist 676,5 Pfund und die des Wassers = 66 Pfund, folglich das specifische Gewicht des ersteren (in Hinsicht auf Wasser) $= \frac{676,5}{66} = 10,25$, d. h. jede Silbermasse ist $10\frac{1}{4}$ mal so schwer als eine ebenso viel Raum einnehmende Wassermasse. 2) Das specifische Gewicht des Quecksilbers = 13,598 angenommen, folgt die Dichtigkeit desselben $\gamma = 13,598 \times 66 = 897,468$ Pfund; eine Masse von 35 Cubikzoll desselben wiegt, da 1728 Cubikzoll einen Cubikfuß geben:

$$G = 897,468 . V = \frac{897,468 \times 35}{1728} = 18,18 \text{ Pfund}.$$

Anmerkung. Der Gebrauch des französischen Maaßes und Gewichtes gewährt bei diesen Rechnungen den Vortheil, daß man die Multiplication von ε und γ durch bloßes Rücken des Decimalstriches vollziehen kann, weil ein Cubikcentimeter Wasser ein Gramm und ein Cubikmeter eine Million Gramm oder 1000 Kilogramm wiegt. Die Dichtigkeit des Quecksilbers ist hiernach für das französische Maaß und Gewicht $\gamma_1 = 13,598 \times 1000 = 13598$ Kilogramm, d. i. ein Cubikmeter Quecksilber wiegt 13598 Kilogramm.

§. 58. Folgende Tabelle enthält die specifischen Gewichte von einigen, vorzüglich in der praktischen Mechanik in Anwendung kommenden Körpern. Eine vollständige Zusammenstellung dieser Gewichte giebt der »Ingenieur«:

Mittleres specifisches Gewicht der getrockneten Laubhölzer .	= 0,659,
mit Wasser gesättigt	= 1,110.
Mittleres specifisches Gewicht der getrockneten Nadelhölzer .	= 0,453,
mit Wasser gesättigt	= 0,839 *).
Quecksilber	= 13,56.

*) S. das Wasseransaugen des Holzes, polytechnische Mittheilungen, Band II. 1845.

Specifisches Gewicht.

Blei	= 11,33.
Kupfer, gegossen und dicht	= 8,75.
» geschmiedet	= 8,97.
Messing	= 8,55.
Eisen, Gußeisen, weißes	= 7,50.
» » graues	= 7,10.
» » halbirtes	= 7,06.
» Stabeisen	= 7,60.
Zink, gegossen	= 7,05.
» gewalzt	= 7,54.
Granit	= 2,50 bis 3,05.
Gneiß	= 2,39 bis 2,71.
Kalkstein	= 2,40 bis 2,86.
Sandstein	= 1,90 bis 2,70.
Ziegelstein	= 1,40 bis 2,22.
Mauerwerk mit Kalkmörtel von Bruchsteinen: frisch	= 2,46.
trocken	= 2,40.
» » » » Sandsteinen: frisch	= 2,12.
trocken	= 2,05.
» » » » Ziegelsteinen: frisch	= 1,55 bis 1,70.
trocken	= 1,47 bis 1,59.
Erde, lehmige, festgestampft, frisch	= 2,06,
trocken	= 1,93.
Gartenerde: frisch	= 2,05,
trocken	= 1,63.
Trockene magere Erde	= 1,34.

Aggregatzustände.

§. 59. Die Körper erscheinen uns nach dem verschiedenen Zusammenhange ihrer Theile in drei Hauptzuständen, die wir auch wohl Aggregatzustände nennen. Sie sind entweder fest (fr. solides, engl. rigid) oder flüssig (fr. fluides, engl. fluid) und im letzteren Falle wieder entweder tropfbar flüssig (fr. liquides, engl. liquid) oder elastisch flüssig (fr. gazeux, aëriformes, engl. aëriform). Feste Körper sind diejenigen, deren Theilchen so stark unter sich zusammenhängen, daß eine gewisse Kraft nöthig ist, die Gestalt dieser Körper zu verändern oder eine Zertheilung derselben zu bewirken. Flüssige Körper hingegen sind solche, deren Theile durch die kleinste Kraft an einander verschoben werden können. Die elastisch flüssigen Körper, deren Repräsentant die athmosphärische Luft ist, unterscheiden sich dadurch von den tropfbar flüssigen, durch das Wasser repräsentirten Körpern, daß denselben ein Bestreben, sich immer weiter und weiter auszudehnen, inne wohnt welches Bestreben dem Wasser u. s. w. mangelt.

Während die festen Körper eine eigenthümliche Gestalt und ein bestimmtes

Volumen haben, besitzen die tropfbar flüssigen oder wasserförmigen Körper nur ein bestimmtes Volumen ohne eigenthümliche Form, die elastisch-, oder ausdehnsam flüssigen Körper endlich weder das eine noch das andere.

Eintheilung der Kräfte.

§. 60. Ihrer Natur nach sind die Kräfte sehr verschieden; wir führen hier nur die vorzüglichsten an:

1) Die Schwerkraft, vermöge welcher sich alle Körper dem Mittelpunkte der Erde zu nähern suchen.

2) Die Kraft der Trägheit, welche bei Geschwindigkeitsveränderungen träger Massen hervortritt.

3) Die Muskelkraft der beseelten Wesen, die mittelst der Muskel von Menschen und Thieren ausgeübte (animalische) Kraft.

4) Die Elasticität oder Federkraft, welche Körper bei ihrer Form- oder Volumenveränderung äußern.

5) Die Wärmekraft, vermöge welcher sich Körper beim Wechsel der Temperatur ausdehnen oder zusammenziehen.

6) Die Magnetkraft, oder die Anziehungs- und Abstoßungskraft der Magnete.

7) Die Cohäsionskraft, die Kraft, mit welcher die Theile eines Körpers zusammenhängen, mit welcher also auch dieselben einer Trennung widerstehen.

8) Die Adhäsionskraft, mit welcher zwei in nahe Berührung gebrachte Körper einander anziehen.

Die Widerstände der Reibung, Steifigkeit, Festigkeit u. s. w. entspringen vorzüglich aus der Cohäsionskraft.

Bestimmungsstücke einer Kraft.

§. 61. Bei einer jeden Kraft unterscheiden wir:

1) Den Angriffspunkt (fr. point d'application, engl. point of application), den Punkt des Körpers, auf welchen eine Kraft unmittelbar wirkt.

2) Die Kraftrichtung (fr. und engl. direction), die gerade Linie, in welcher eine Kraft den Angriffspunkt fortbewegt, oder fortzubewegen oder dessen Bewegung zu verhindern sucht. Die Kraftrichtung hat, wie jede Bewegungsrichtung, zwei Seiten; sie kann von links nach rechts oder von rechts nach links, von oben nach unten oder von unten nach oben vor sich gehen. Man nennt die eine die positive und die andere die negative. Da wir von links nach rechts und von oben nach unten schreiben, so wäre es am geeignetsten, diese Bewegungen positive und die entgegengesetzten Bewegungen negative zu nennen.

3) Die absolute Größe oder Intensität (fr. grandeur absolue, intensité, engl. intensity) der Kraft, die nach dem Obigen durch Gewichte, z. B. Pfunde, Kilogramme u. s. w. gemessen wird.

§. 62. Die erste Wirkung, welche eine Kraft in einem Körper hervorbringt, ist eine mit Ausdehnung oder Zusammendrückung verbundene Form- oder Volumenveränderung, welche im Angriffspunkt ihren Anfang nimmt und sich von da aus immer weiter und weiter ausbreitet. Durch diese innere Veränderung des Körpers wird aber die in ihm liegende Elasticität angeregt, die sich mit der Kraft ins Gleichgewicht setzt und deshalb der Kraft gleich ist und ihr entgegengesetzt wirkt. Man sagt hiernach: Wirkung und Gegenwirkung sind einander gleich und entgegengesetzt. Dieses Gesetz findet nicht nur bei den durch Berührung erzeugten Einwirkungen der Kräfte, sondern auch bei den sogenannten Anziehungs- und Abstoßungskräften, wohin die magnetische und selbst die Schwerkraft zu rechnen sind, Statt. So stark ein Magnet einen Eisenstab anzieht, ebenso stark wird der Magnet vom Eisenstabe selbst angezogen. Die Kraft, mit welcher der Mond von der Erde angezogen wird (durch die Schwerkraft) ist gleich der Kraft, mit welcher der Mond auf die Erde zurückwirkt. Wirkung und Gegenwirkung.

Die Kraft, mit welcher ein Gewicht auf eine Unterlage drückt, giebt diese in der entgegengesetzten Richtung zurück; die Kraft, womit ein Arbeiter an einer Maschine zieht, schiebt u. s. w., wirkt auf den Arbeiter zurück und sucht denselben in entgegengesetzter Richtung zu bewegen. Wenn ein Körper gegen einen andern stößt, so drückt der erste den andern genau so viel, wie der andere den ersten.

§. 63. Die gesammte Mechanik wird nach den zwei Aggregatzuständen der Körper in zwei Hauptabtheilungen gebracht, nämlich Eintheilung der Mechanik.

1) in die Mechanik der festen Körper, die man auch wohl Geomechanik (fr. mécanique des corps solides, engl. mechanics of rigid bodies) nennt, und
2) in die Mechanik der flüssigen Körper, Hydromechanik, auch Hydraulik (fr. mécanique des fluides, hydraulique, engl. mechanics of fluids). Die letztere theilt man wieder ein
   1) in die Mechanik des Wassers und der tropfbarflüssigen Körper überhaupt, Hydromechanik, auch Hydraulik (fr. hydraulique, engl. hydraulic) und
   2) in die Mechanik der Luft und anderer luftförmigen Körper überhaupt, Aëromechanik (fr. mécanique des fluides aëriformes, engl. mechanics of elastic fluids).

Nimmt man nun noch auf die Eintheilung der Mechanik in Statik und Dynamik (§. 46) Rücksicht, so erhält man folgende Theile:

1) Statik der festen Körper, oder Geostatik,
2) Dynamik der festen Körper, oder Geodynamik,
3) Statik des Wassers u. s. w. oder Hydrostatik,

Eintheilung der Mechanik.

4) **Dynamik des Wassers** u. s. w., oder **Hydrodynamik**,
5) **Statik des Luftförmigen**, oder **Aërostatik**,
6) **Dynamik des Luftförmigen**, oder **Aërodynamik**, auch **Pneumatik**.

Zweites Kapitel.

Mechanik des materiellen Punktes.

§. 64. **Materieller Punkt** (fr. point matériel, engl. material point) ist ein materieller Körper, dessen Dimensionen nach allen Seiten hin unendlich klein sind in Hinsicht auf die von ihm zurückgelegten Wege. Um den Vortrag zu vereinfachen, wird im Folgenden zunächst nur von der Bewegung und dem Gleichgewichte eines materiellen Punktes die Rede sein. Ein (endlicher) Körper ist eine stetige Verbindung von unendlich vielen materiellen Punkten. Wenn sich die einzelnen Punkte oder Elemente eines Körpers alle vollkommen gleich, d. i. in parallellen geraden Linien, gleich schnell bewegen, so kann man die Theorie der Bewegung eines materiellen Punktes auch auf die des ganzen Körpers anwenden, weil sich in diesem Falle annehmen läßt, daß gleiche Massentheile des Körpers durch gleiche Krafttheile getrieben werden.

Einfache constante Kraft.

§. 65. Ist p die Acceleration, mit welcher eine Masse M durch eine Kraft fortgetrieben wird, so hat man nach §. 53. für diese:

$$P = Mp, \text{ so wie umgekehrt, die Acceleration } p = \frac{P}{M}.$$

Setzen wir ferner die Masse $M = \frac{G}{g}$, wo G das Gewicht des Körpers und g die Beschleunigung der Schwere bezeichnet, so hat man die Kraft:

$$1) \quad P = \frac{p}{g} G, \text{ und die Acceleration:}$$

$$2) \quad p = \frac{P}{G} g.$$

Man findet also die **Kraft** (P), **welche einen Körper mit einer gewissen Acceleration** (p) **forttreibt, wenn man das Gewicht** (G) **des Körpers durch das Verhältniß** $\left(\frac{p}{g}\right)$ **seiner Acceleration zu der der Schwere multiplicirt.**

Es ergiebt sich umgekehrt die Acceleration (p), mit welcher ein Körper durch eine Kraft (P) fortbewegt wird, indem man die Acceleration (g) der Schwere durch das Verhältniß $\left(\frac{P}{G}\right)$ zwischen Kraft und Gewicht des Körpers multiplicirt. Einfache constante Kraft.

Beispiel. Man denke sich einen Körper auf einem horizontalen und sehr glatten Tische liegend, welcher dem Körper keine Hindernisse in den Weg setzt, wohl aber die Schwerkraft in demselben aufhebt. Wird dieser Körper von einer horizontal wirkenden Kraft gedrückt, so wird der Körper der Einwirkung derselben nachgeben und in der Richtung dieser Kraft fortgehen. Ist das Gewicht dieses Körpers: $G = 50$ Pfund und die auf ihn unausgesetzt drückende Kraft $P = 10$ Pfund, so wird er in eine gleichförmig beschleunigte Bewegung mit der Acceleration $p = \frac{P}{G} \cdot g = \frac{10}{50} \cdot 31{,}25 = 6{,}25$ Fuß übergehen. Ist hingegen die Acceleration, mit welcher ein 42 Pfund schwerer Körper durch eine Kraft (P) beschleunigt wird $= 9$ Fuß, so wird diese Kraft $P = \frac{p}{g} G = \frac{9}{31.25} \cdot 42 = 0{,}032.378 = 12{,}1$ Pfund betragen.

§. 66. Ist die Kraft, welche auf einen Körper wirkt, constant, so entsteht eine gleichförmig veränderte Bewegung, und zwar eine gleichförmig beschleunigte, wenn die Kraftrichtung in die anfängliche Bewegungsrichtung fällt, und dagegen eine gleichförmig verzögerte, wenn die Kraftrichtung der anfänglichen Bewegungsrichtung entgegengesetzt ist. Setzen wir nun in den phoronometrischen Formeln (§. 13 und §. 14) statt p den Werth $\frac{P}{M} = \frac{P}{G} g$ ein, so bekommen wir Folgendes:

I. Für gleichförmig beschleunigte Bewegungen:

1) $v = c + \frac{P}{G} gt$, oder $v = c + 31{,}25 \frac{P}{G} t$.

2) $s = ct + \frac{P}{G} \frac{gt^2}{2}$, oder $s = ct + 15{,}625 \frac{P}{G} t^2$.

II. Für gleichförmig verzögerte Bewegungen:

1) $v = c - \frac{P}{G} gt = c - 31{,}25 \frac{P}{G} t$,

2) $s = ct - \frac{P}{G} \frac{gt^2}{2} = ct - 15{,}625 \frac{P}{G} t^2$.

Mit Hülfe dieser Formeln lassen sich alle Fragen, welche sich in Ansehung der durch eine beständige Kraft veranlaßten geradlinigen Bewegungen von Körpern stellen lassen, beantworten.

Beispiele. 1) Ein 2000 Pfund schwerer Wagen geht mit 4 Fuß Geschwindigkeit auf einer horizontalen, ihm keine Hindernisse entgegen setzenden Bahn fort und wird 15 Secunden lang durch eine unveränderliche Kraft von 25 Pfund vorwärts geschoben, mit welcher Geschwindigkeit wird er nach Einwirkung dieser

Einfache constante Kraft.

Kraft fortgehen? Es ist diese Geschwindigkeit $v = c + 31{,}25 \frac{P}{G} t$, aber $c = 4$, $P = 25$, $G = 2000$ und $t = 15$; es folgt daher $v = 4 + 31{,}25 . \frac{25}{2000} . 15 = 4 + 5{,}859 = 9{,}859$ Fuß. 2) Unter gleichen Umständen wird ein 5500 Pfund schwerer Wagen, der vorher in 3 Minuten gleichförmig fortgehend 950 Fuß zurückgelegt hat, durch eine 30 Secunden lang anhaltend wirkende Kraft so fortgetrieben, daß er später in 3 Minuten 1650 Fuß gleichförmig durchläuft. Welches war diese Kraft? Hier ist Anfangsgeschwindigkeit $c = \frac{950}{3 . 60} = 5{,}277$ Fuß, und Endgeschwindigkeit $v = \frac{1650}{3 . 60} = 9{,}166$ Fuß, daher $\frac{P}{G} gt = v - c = 3{,}889$, und die Kraft $P = \frac{3{,}889 . G}{gt} = 0{,}032 . 3{,}889 . \frac{5500}{30} = 0{,}12445 . \frac{550}{3} = 22{,}81$ Pfund. 3) Ein mit 15 Fuß Geschwindigkeit fortgleitender 1500 Pfund schwerer Schlitten verliert in Folge der Reibung auf der horizontalen Unterlage innerhalb 25 Secunden seine ganze Bewegung; wie groß ist diese Reibung? Hier ist die Bewegung gleichförmig verzögert und die Endgeschwindigkeit $v = 0$, daher $c = 31{,}25 \frac{Pt}{G}$, und $P = 0{,}032 \frac{Gc}{t} = 0{,}032 . \frac{1500 . 15}{25} = 0{,}032 . 900 = 28{,}8$ Pfund die in Frage stehende Reibung. 4) Ein anderer Schlitten von 1200 Pfund Gewicht und 12 Fuß Anfangsgeschwindigkeit hat bei seiner Bewegung eine Reibung von 45 Pfund zu überwinden; welche Geschwindigkeit hat derselbe nach 8 Secunden, und wie groß ist sein zurückgelegter Weg? Die Endgeschwindigkeit ist $v = 12 - 31{,}25 . \frac{45 . 8}{1200} = 12 - 9{,}375 = 2{,}625$ Fuß, und der zurückgelegte Weg $s = \left(\frac{c + v}{2}\right) t = \left(\frac{12 + 2{,}625}{2}\right) . 8 = 58{,}5$ Fuß.

Mechanische Arbeit.

§. 67. **Leistung oder Arbeit einer Kraft** (fr. travail mécanique, engl. work done, labouring force) ist diejenige Wirkung einer Kraft, welche dieselbe bei Ueberwindung eines **Widerstandes**, z. B. der Schwerkraft, der Reibung, der Trägheit u. s. w. hervorbringt. Man verrich- also eine **mechanische Arbeit**, indem man Lasten emporhebt, Massen eine größere Geschwindigkeit ertheilt, Körper in ihrer Form verändert, zertheilt u. s. w. Die Leistung oder Arbeit hängt nicht allein von der Kraft, sondern auch von dem Wege ab, auf welchem diese thätig ist oder einen Widerstand überwindet; sie wächst überhaupt mit der Kraft und dem Wege gleichzeitig. Heben wir einen Körper langsam genug in die Höhe, um seine Trägheit vernachlässigen zu können, so ist die verrichtete Arbeit seinem Gewichte und der Höhe, auf welche der Körper gehoben wird, proportional; denn 1) die Wirkung ist dieselbe, ob ein Körper vom m (3) fachen Gewichte (mG) auf eine gewisse Höhe gehoben wird oder ob m (3) Körper vom einfachen Gewichte (G) auf dieselbe Höhe gehoben werden; sie ist nämlich $m$mal so groß als die nöthige Wirkung zum Aufheben des einfachen Gewichtes auf die nämliche Höhe; und ebenso ist 2) die

Leistung dieselbe, ob ein und dasselbe Gewicht auf die n (5) fache Höhe (nh) oder ob es n (5) mal auf die einfache Höhe gehoben wird, überhaupt aber n (5) mal so groß, als wenn dasselbe Gewicht um die einfache Höhe (h) empor steigt. Ebenso ist die von einem langsam sinkenden Gewichte verrichtete Arbeit der Größe dieses Gewichtes und der Höhe, von welcher es herabgesunken ist, proportional. Diese Proportionalität findet aber auch bei jeder anderen Art der Arbeitsverrichtung Statt; um bei einerlei Tiefe einen Sägeschnitt von doppelter Länge auszuführen, sind noch ein mal so viel Theilchen zu trennen, als beim Schnitt von der einfachen Länge, ist also auch die Arbeit doppelt so groß; die doppelte Länge erfordert aber auch den doppelten Weg der Kraft, es ist folglich die Arbeit dem Wege proportional. Ebenso wird die Arbeit eines Mahlganges offenbar mit der Menge der Körner einer gewissen Getreideart, welche derselbe bis zu einem gewissen Grade zerreibt, wachsen. Diese Menge ist aber unter übrigens gleichen Umständen der Zahl der Umdrehungen oder vielmehr dem Weg, welchen der obere Mühlstein (Läufer) während des Mahlens dieser Getreidemenge gemacht hat, proportional; es wächst folglich auch die mechanische Arbeit mit dem Wege gleichmäßig. Mechanische Arbeit.

§. 68. Die angegebene Abhängigkeit der Arbeit einer Kraft von der Größe und dem Wege der Kraft erlaubt uns diejenige Arbeit, welche bei Ueberwindung eines Widerstandes von der Größe der Gewichtseinheit (z. B. Kilogramm, Pfund u. s. w.) längs eines Weges von der Größe der Längeneinheit (z. B. Meter oder Fuß) aufgewendet wird, als **Einheit der mechanischen Arbeit oder Leistung** (fr. unité dynamique, engl. dynamical unit) anzunehmen und nun das Maaß dieser gleich zusetzen dem Producte aus Kraft oder Widerstand und aus dem während der Ueberwindung des Widerstandes in der Kraftrichtung zurückgelegten Wege.

Setzen wir die Größe des Widerstandes selbst $= P$, und den bei seiner Ueberwindung von der Kraft oder vielmehr von ihrem Angriffspunkte zurückgelegten Wege $= s$, so ist hiernach die bei Ueberwindung dieses Widerstandes aufgewendete Arbeit oder Leistung

$$L = Ps \text{ Arbeitseinheiten.}$$

Um die **Arbeitseinheit**, für welche man auch den einfachen Namen Dynamie gebrauchen kann, näher zu bezeichnen, giebt man gewöhnlich die Einheiten beider Factoren P und s an, und sagt deshalb statt Arbeitseinheiten Kilogrammmeter, Pfundfuß, auch umgekehrt, Meterkilogramm, Fußpfund u. s. w. je nachdem Gewicht und Weg in Kilogramm und Meter oder in Pfund und Fuß ausgedrückt werden. Der Einfachheit wegen schreibt man statt Meterkilogramm mk oder km, und ebenso statt Fußpfund, Fpf.

Mechanische Arbeit.

Beispiele. 1) Um einen Pochstempel von 210 Pfund 15 Zoll hoch zu heben, ist die mechanische Arbeit $L = 210 \times \frac{15}{12} = 262,5$ Fpf. nöthig. 2) Durch eine mechanische Leistung von 1500 Fußpfund kann ein Schlitten, welcher bei seiner Bewegung 75 Pfund Reibung zu überwinden hat, um $s = \frac{L}{P} = \frac{1500}{75} = 20$ Fuß fortgezogen werden.

§. 69. Nicht nur bei unveränderlicher Kraft oder constantem Widerstande ist die Arbeit ein Product aus Kraft und Weg, sondern auch dann, wenn der Widerstand während seiner Ueberwindung veränderlich ist, läßt sich die Arbeit als das Product aus Kraft und Weg ausdrücken, wenn man nur als Kraft einen mittleren Werth aus der stetigen Folge von Kräften annimmt. Das Verhältniß ist hier dasselbe wie das zwischen Zeit, Geschwindigkeit und Raum, denn auch der letztere läßt sich ja als ein Product aus Zeit und einem mittleren Werthe der Geschwindigkeiten ansehen. Auch hier sind dieselben graphischen Darstellungen anwendbar. Es läßt sich die mechanische Arbeit als Flächeninhalt eines Rechteckes *ABCD*, Fig. 69, ansehen, dessen Grundlinie *AB* der zurückgelegte Weg (s) und dessen Höhe entweder die unveränderliche Kraft (P) selbst oder das

Fig. 69.

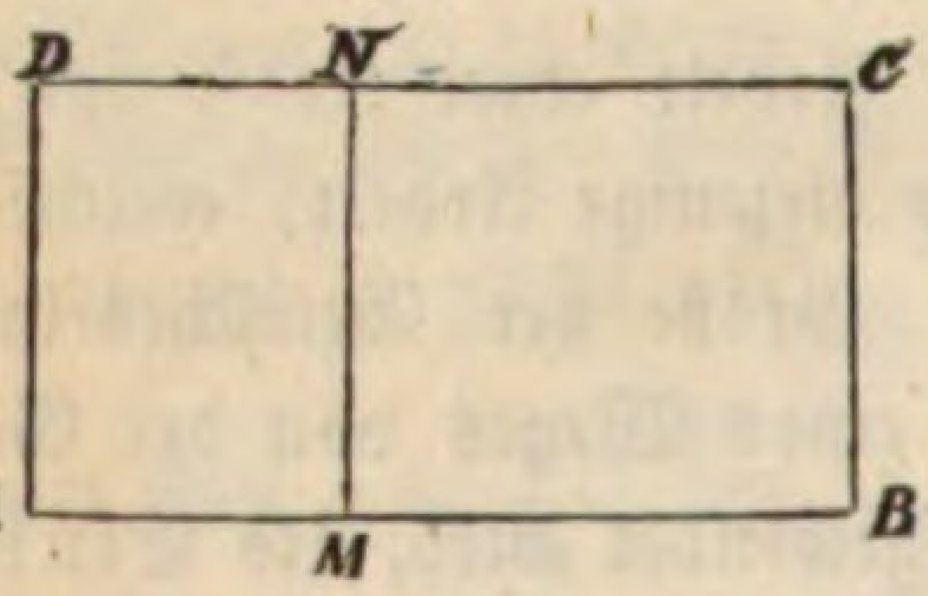
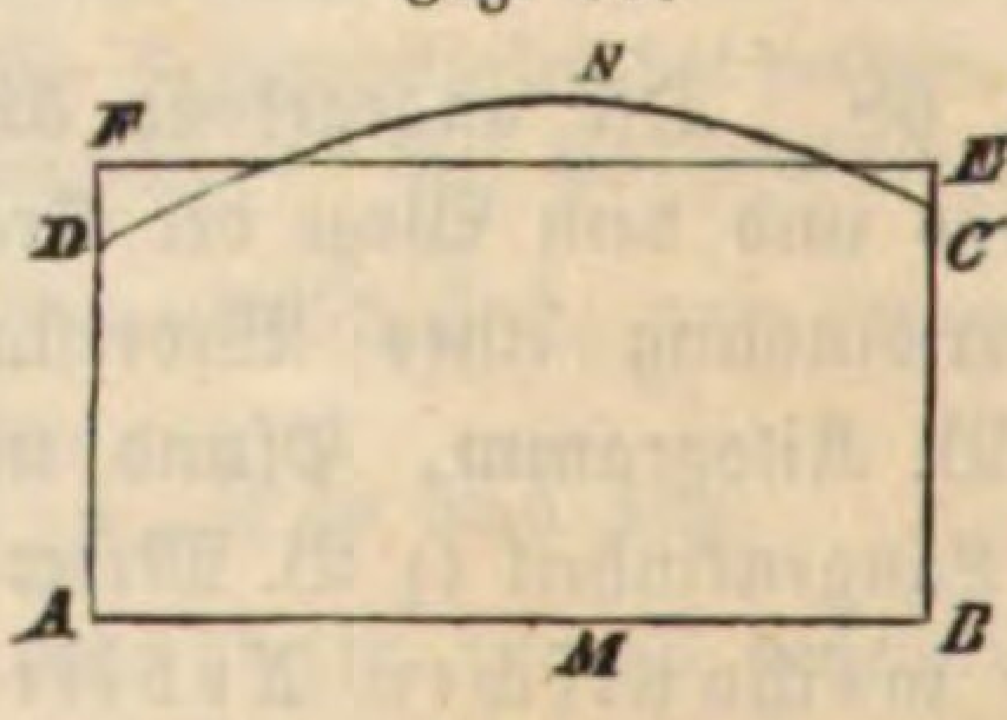


Fig. 70.

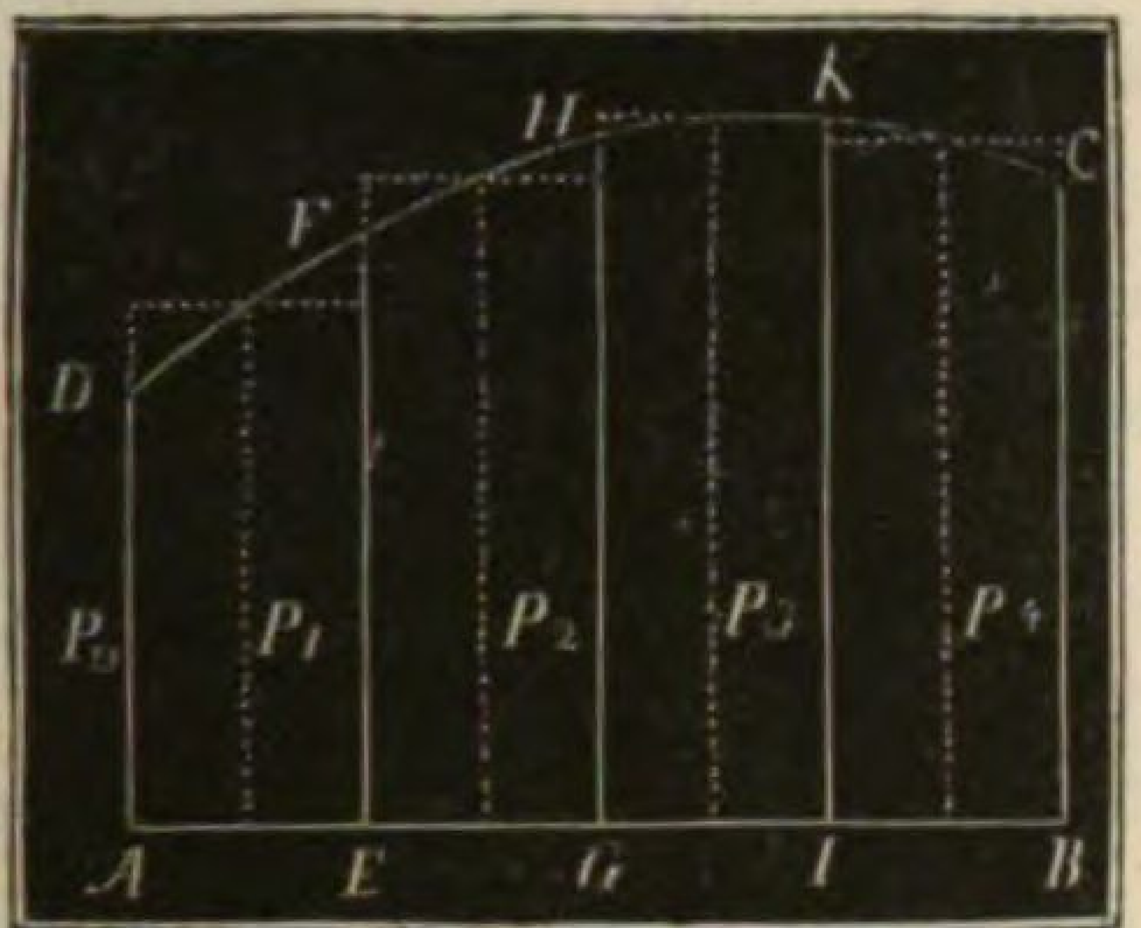


Mittel von den verschiedenen Kraftwerthen ist. Im Allgemeinen läßt sich aber die Arbeit durch den Flächenraum einer Figur *ABCD*, Fig. 70, darstellen, die zur Grundlinie den Weg s hat und deren Höhe über jeder Stelle der Grundlinie gleich ist der jeder Stelle des Weges entsprechenden Kraft. Verwandelt man die Figur *ABCD* in ein Rechteck *ABEF* von gleicher Grundlinie und gleichem Inhalte, so erhält man in der Höhe $AF = BE$ desselben die mittlere Kraft.

§. 70. Die Arithmetik und Geometrie geben verschiedene Mittel, um aus einer stetigen Folge von Größen einen mittleren Werth derselben ausfindig zu machen; man findet auch die vorzüglichsten im »Ingenieur« angegeben. Unter ihnen ist aber die sogenannte Simpson'sche Regel dasjenige, welches man in der Praxis am häufigsten anwendet, weil es große Einfachheit mit einem hohen Grade von Genauigkeit in sich vereinigt.

In jedem Falle ist es nöthig, den Weg $AB = s$ (Fig. 71) in n (je mehr, je besser) gleiche Theile wie $AE = EG = GI$ u. s. w. einzu-

Fig. 71.



theilen und die Kräfte $EF = P_1$, $GH = P_2$, $IK = P_3$ u. s. w. an den Enden dieser Wegtheile zu ermitteln. Setzen wir dann noch die anfängliche Kraft $AD = P_0$ und die Kraft BC am Ende $= P_n$, so erhalten wir die mittlere Kraft $P = (\frac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_{n-1} + \frac{1}{2} P_n) : n$, und daher die Arbeit derselben Mechanische Arbeit.

$$Ps = (\tfrac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2 + \ldots + P_{n-1} + \tfrac{1}{2} P_n) \frac{s}{n}.$$

Ist die Anzahl (n) der Theile eine gerade, nämlich 2, 4, 6, 8 u s. w., so giebt die Simpson'sche Regel noch genauer die mittlere Kraft $P = (P_0 + 4P_1 + 2P_2 + 4P_3 + \ldots + 4P_{n-1} + P_n) : 3n$, und daher die entsprechende Arbeit

$$Ps = (P_0 + 4P_1 + 2P_2 + 4P_3 + \ldots + 4P_{n-1} + P_n) \frac{s}{3n},$$

Beispiel. Um die mechanische Arbeit eines Zugpferdes zu finden, die dieses beim Fortziehen eines Wagens auf einer gewissen Straße verrichtet, bedient man sich eines Kraftmessers (Dynamometers), welcher auf der einen Seite mit dem Wagen und auf der andern Seite mit den Strängen der Pferde in Verbindung gesetzt wird, und beobachtet an demselben von Zeit zu Zeit die Kraft. Wenn die anfängliche Kraft $P_0 = 110$ Pf., die nach Zurücklegung von 25 Fuß Weg 122 Pf., nach Zurücklegung von 50 Fuß 127 Pf., bei einem Wege von 75 Fuß 120 Pf. und am Ende des ganzen Weges von 100 Fuß = 114 Pfund beträgt, so hat man die mittlere Kraft
nach der ersten Formel $P = (\frac{1}{2} \cdot 110 + 122 + 127 + 120 + \frac{1}{2} \cdot 114) : 4 = 120,25$ Pfund, und die mechanische Arbeit

$$Ps = 120,25 \cdot 100 = 12025 \text{ Fpf.};$$

nach der zweiten Formel aber

$$P = (110 + 4 \cdot 122 + 2 \cdot 127 + 4 \cdot 120 + 114) : (3 \cdot 4)$$

$$= \frac{1446}{12} = 120,5 \text{ Pf. und die mechanische Leistung}$$

$$Ps = 120,5 \cdot 100 = 12050 \text{ Fpf.}$$

§. 71. Setzen wir in der §. 13 entwickelten Formel der Phoronomie $s = \frac{v^2 - c^2}{2p}$ oder $ps = \frac{v^2 - c^2}{2}$ für die Acceleration p ihren Werth $\frac{P}{G} g$, so erhalten wir $Ps = \left(\frac{v^2 - c^2}{2g}\right) G$, oder, wenn wir die Geschwindigkeitshöhen $\frac{v^2}{2g}$ und $\frac{c^2}{2g}$ durch h und h_1 bezeichnen: Princip der lebendigen Kräfte.

$$Ps = (h - h_1)\, G.$$

Diese für die praktische Mechanik überaus fruchtbringende Gleichung sagt:

Princip der lebendigen Kräfte.

Die mechanische Arbeit (Ps), welche eine Masse entweder in sich aufnimmt, wenn sie aus einer kleineren Geschwindigkeit (c) in eine größere (v) übergeht, oder hervorbringt, wenn sie aus einer größeren Geschwindigkeit in eine kleinere überzugehen genöthigt wird, **ist stets gleich dem Producte aus dem Gewichte dieser Masse und der Differenz der, beiden Geschwindigkeiten entsprechenden Geschwindigkeitshöhen** $\left(\frac{v^2}{2g} - \frac{c^2}{2g}\right)$.

Beispiele. 1) Um einen 4000 Pfund schweren Wagen auf einer vollkommen glatten Schienenbahn in eine Geschwindigkeit von 30 Fuß zu versetzen, ist eine mechanische Arbeit $Ps = \frac{v^2}{2g} G = 0{,}016\, v^2\, G = 0{,}016 \,.\, 900 \,.\, 4000 = 57600$ Fußpfund nöthig; und ebenso viel Arbeit wird dieser Wagen verrichten, wenn man ihm einen Widerstand entgegensetzt und ihn dadurch allmälig in Ruhe überzugehen nöthigt. 2) Ein anderer Wagen von 6000 Pfund geht mit 15 Fuß Geschwindigkeit fort und wird durch eine auf ihn wirkende Kraft in eine Geschwindigkeit von 24 Fuß versetzt, wie groß ist die von diesem Wagen in sich aufgenommene oder von der Kraft verrichtete Arbeit? Den Geschwindigkeiten 15 Fuß und 24 Fuß entsprechen die Geschwindigkeitshöhen $h_1 = \frac{c^2}{2g} = 3{,}6$ Fuß und $h = \frac{v^2}{2g} = 9{,}216$ Fuß, demnach ist die gesuchte mechanische Arbeit $Ps = (h - h_1)\, G = (9{,}216 - 3{,}600) \,.\, 6000 = 5{,}616 \,.\, 6000 = 33696$ Fpf. Kennt man nun den Weg, auf welchem diese Geschwindigkeitsveränderung vor sich geht, so läßt sich die Kraft finden, und kennt man diese, so kann man den Weg bestimmen. Soll z. B. im letzten Falle der Weg des Wagens nur 100 Fuß betragen, während dessen Zurücklegung die Geschwindigkeit von 15 Fuß in die von 24 Fuß übergeht, so hat man die Kraft $P = (h - h_1)\, \frac{G}{s} = \frac{33696}{100} = 336{,}96$ Pfund. Wäre aber die Kraft selbst 2000 Pfund, so würde der Weg $s = (h - h_1)\, \frac{G}{P} = \frac{33696}{2000} = 16{,}848$ Fuß betragen. 3) Wenn ein 500 Pfund schwerer Schlitten in Folge der Reibung auf der Bahn seine Geschwindigkeit von 16 Fuß nach Zurücklegung von 100 Fuß Weg gänzlich verloren hat, so ist der Reibungswiderstand

$$P = \frac{hG}{s} = 0{,}016 \,.\, 16^2 \,.\, \frac{500}{100} = 0{,}016 \,.\, 256 \,.\, 5 = 20{,}48 \text{ Pf.}$$

§. 72. Die im vorigen Paragraphen gefundene Arbeitsformel

$$Ps = (h - h_1)\, G$$

gilt nicht allein für constante, sondern auch für veränderliche Kräfte, wenn man nur (nach §. 70) statt P den mittleren Kraftwerth einführt, denn denkt man sich den ganzen Weg (s) der Bewegung aus lauter gleichen, gleichförmig beschleunigt zurückgelegten Theilen $\left(\frac{s}{n}\right)$ bestehend, so erhält man die Arbeiten innerhalb dieser:

$$P_1\left(\frac{s}{n}\right)=\frac{v_1^2-c^2}{2g}\,G,$$
$$P_2\left(\frac{s}{n}\right)=\frac{v_2^2-v_1^2}{2g}\,G,$$
$$P_3\left(\frac{s}{n}\right)=\frac{v_3^2-v_2^2}{2g}\,G$$

Princip der lebendigen Kräfte.

u. s. w., insofern v_1, v_2, v_3 u. s. w. die an den Enden dieser Raumtheile erlangten Geschwindigkeiten bezeichnen, und es giebt nun die Addition aller dieser Arbeiten die gesammte, zum Umsetzen der Geschwindigkeit (c in v) nöthige Arbeit:

$Ps = (P_1 + P_2 + P_3 + \ldots)\,\frac{s}{n} = \frac{v^2-c^2}{2g}\,G$, weil sich für eine unendliche Anzahl (n) von Kräften, $(P_1 + P_2 + P_3 + \ldots):n$ in die mittlere Kraft verwandelt und sich auf der rechten Seite der Gleichung die Glieder $\frac{v_1^2}{2g}\,G$ und $-\frac{v_1^2}{2g}\,G$, so wie $\frac{v_2^2}{2g}\,G$ und $-\frac{v_2^2}{2g}\,G$ u. s. w. gegen einander heben, so daß nur das durch die Endgeschwindigkeit v und das durch die Anfangsgeschwindigkeit c bestimmte Glied $\frac{v^2}{2g}\,G$ und $\frac{c^2}{2g}\,G$ übrig bleiben.

Die Formel $Ps = \left(\frac{v^2-c^2}{2g}\right)G = (h-h_1)\,G$ wird nicht allein zur Bestimmung der Arbeit, sondern auch, und dies zumal sehr oft, zur Ermittlung der Endgeschwindigkeit gebraucht. Im letzteren Falle setzt man $h=h_1+\frac{Ps}{G}$ oder $v=\sqrt{c^2+2g\,\frac{Ps}{G}}$. Wenn bei der (stetigen) Bewegung eines Körpers die Endgeschwindigkeit v gleich ist der Anfangsgeschwindigkeit c, so ist die in Anspruch genommene Arbeit = Null, d. h. es nimmt der beschleunigte Theil der Bewegung gerade so viel Arbeit in Anspruch, als der verzögerte Theil derselben ausgiebt.

Beispiel. Wenn ein ohne Reibung auf einer Eisenbahn fortgehender Wagen von 2500 Pfund Gewicht zur Vermehrung seiner Geschwindigkeit, die anfangs nur 10 Fuß betrug, eine mechanische Arbeit von 8000 Fußpfund in sich aufgenommen hat, so wird seine Geschwindigkeit nach Aufnahme dieser Arbeit $v=\sqrt{10^2+62{,}5\,.\,\frac{8000}{2500}}=\sqrt{100+200}=17{,}32$ Fuß betragen.

Anmerkung. Man nennt, ohne einen besonderen Begriff damit zu verbinden, das Product aus Masse $M=\frac{G}{g}$ und Quadrat der Geschwindigkeit (v^2), also Mv^2, die lebendige Kraft (franz.: force vive, engl., eigentlich lat.: vis viva) der bewegten Masse, und kann hiernach die mechanische Arbeit, welche eine bewegte Masse in sich vereinigt, gleichsetzen der halben lebendigen Kraft derselben. Geht eine träge

Masse aus einer Geschwindigkeit c in eine andere v über, so ist die eingenommene oder ausgegebene Arbeit gleich der halben Differenz zwischen den lebendigen Kräften am Ende und am Anfange der Geschwindigkeitsveränderung. Dieses Gesetz von der mechanischen Leistung der Körper durch ihre Trägheit nennt man das Princip der lebendigen Kräfte (franz. principe des forces vives, engl. principle of vis viva).

Zusammensetzung der Kräfte. §. 73. Wirken zwei Kräfte P_1 und P_2 auf einen und denselben Körper in gleicher oder entgegengesetzter Richtung, so ist die Wirkung dieselbe, als wenn nur eine Kraft auf den Körper wirkte, welche der Summe oder Differenz dieser Kräfte gleich ist, denn diese Kräfte ertheilen der Masse M die Acceleration: $p_1 = \frac{P_1}{M}$ und $p_2 = \frac{P_2}{M}$, es ist folglich nach §. 28 die aus beiden resultirende Acceleration

$p = p_1 \pm p_2 = \frac{P_1 \pm P_2}{M}$, und demnach die derselben entsprechende Kraft $P = Mp = P_1 \pm P_2$.

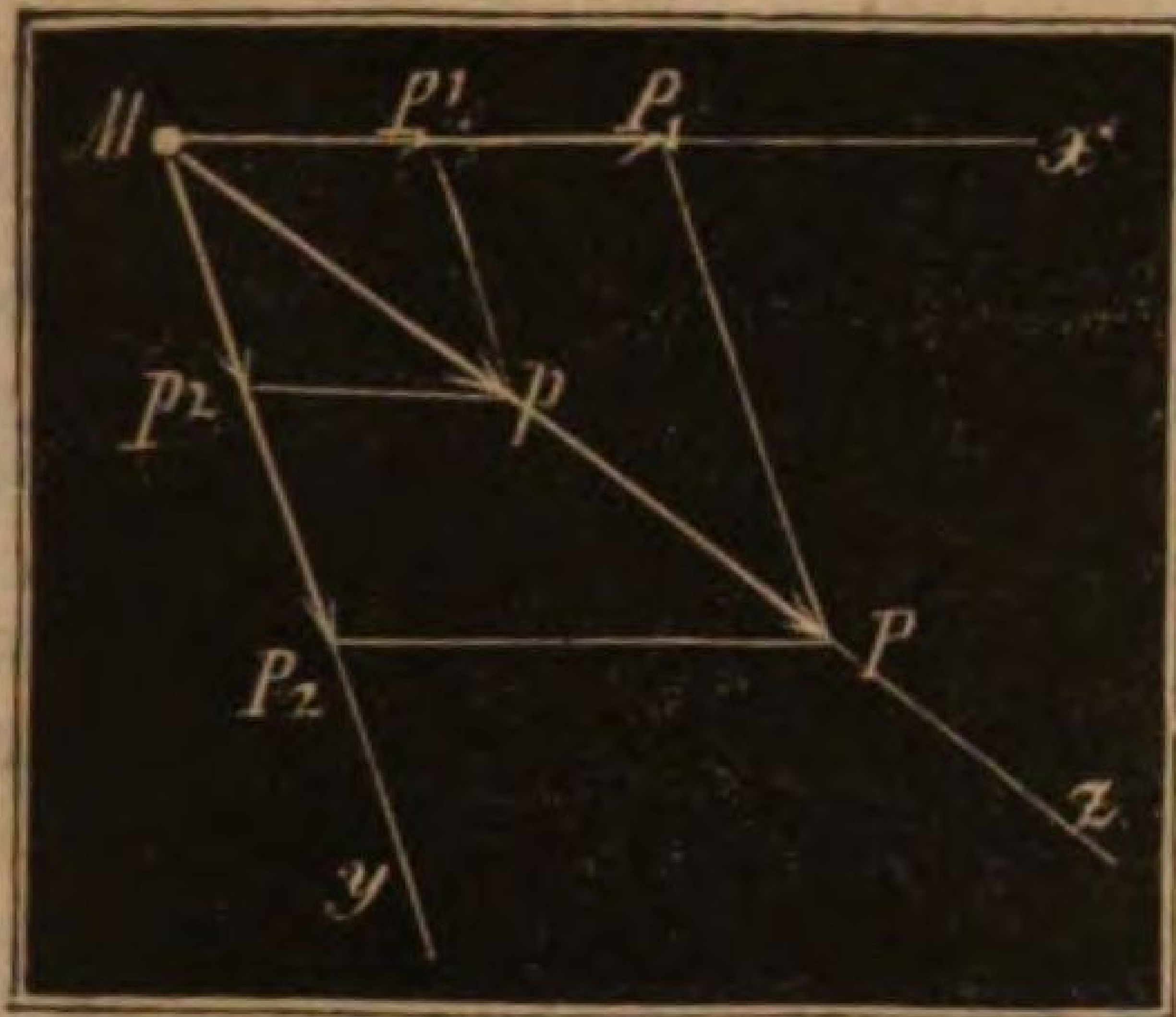
Man nennt die aus den beiden Kräften hervorgehende, gleich viel vermögende (äquipollente) Kraft P die Resultirende (franz. résultante, engl. resultant), ihre Bestandtheile P_1 und P_2 aber die Componenten (franz. composantes, engl. components).

Beispiele. 1) Ein auf der flachen Hand liegender Körper drückt nur so lange mit seinem absoluten Gewichte auf dieselbe, so lange die Hand in Ruhe ist oder mit dem Körper gleichförmig auf- oder abwärts bewegt wird; hebt man aber die Hand beschleunigt empor, so erleidet dieselbe einen stärkeren Druck, geht man dagegen beschleunigt mit der Hand senkrecht nieder, so wird der Druck kleiner als das Gewicht; er wird sogar Null, wenn man die Hand mit der Acceleration der Schwere herabführt. Ist der Druck auf die Hand $= P$, so fällt der Körper nur mit der Kraft $G - P$ nieder, während seine Masse $M = \frac{G}{g}$ ist; setzen wir daher die Acceleration, mit welcher die Hand mit dem darauf liegenden Körper niedergeht, $= p$, so folgt $G - P = \frac{G}{g} p$, und daher der Druck $P = G - \frac{p}{g} G = \left(1 - \frac{p}{g}\right) G$. Läßt man dagegen den Körper auf der Hand mit der Acceleration p aufsteigen, so ist p der Acceleration g entgegengesetzt, daher der Druck auf die Hand $P = \left(1 + \frac{p}{g}\right) G$. Je nachdem man einen Körper mit 20 Fuß Beschleunigung ab- oder aufwärts steigen läßt, ist der Druck auf die Hand $= \left(1 - \frac{20}{31,25}\right) G = (1 - 0,64)\, G = 0,36$ des Körpergewichtes oder $= 1 + 0,64 = 1,64$ desselben. 2) Wenn ich mit der flachen Hand einen Körper von 3 Pfund Gewicht 14 Fuß hoch senkrecht in die Höhe schleudere, indem ich ihn auf die ersten zwei Fuß Höhe mit der Hand unausgesetzt forttreibe, so ist die verrichtete mechanische Arbeit $Ps = Gh = 3 \times 14 = 42$ Fußpfund, und demnach der Druck des Körpers auf die Hand : $P = \frac{42}{2} = 21$ Pfund. Während also der

ruhende Körper mit 3 Pfund drückt, wirkt er während des Werfens mit 21 Pfund Kraft auf die Hand zurück.

§. 74. Wird eine Masse (ein materieller Punkt) M, Fig. 72, von zwei Kräften P_1 und P_2 ergriffen, deren Richtungen MX und MY einen Winkel $XMY = \alpha$ zwischen sich einschließen, so erzeugen diese nach eben diesen Richtungen die Accelerationen $p_1 = \frac{P_1}{M}$ und $p_2 = \frac{P_2}{M}$, aus deren Vereinigung eine mittlere Acceleration (§. 34) in einer Richtung MZ entsteht, die durch die Diagonale eines aus $p_1 . p_2$ und α construirten Parallelogramms gegeben ist; auch ist diese mittlere oder resultirende Acceleration $p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2\, p_1 p_2 \cos. \alpha}$ und für den Winkel φ, den die Richtung derselben mit der Richtung MX der einen Acceleration p_1 einschließt, hat man Parallelogramm der Kräfte.

Fig. 72.



$$\sin. \varphi = \frac{p_2 \sin \alpha}{p}.$$

Setzen wir in diesen beiden Formeln die angegebenen Werthe von p_1 und p_2, so folgt

$$p = \sqrt{\left(\frac{P_1}{M}\right)^2 + \left(\frac{P_2}{M}\right)^2 + 2\left(\frac{P_1}{M}\right)\left(\frac{P_2}{M}\right) \cos. \alpha} \text{ und}$$

$$\sin. \varphi = \left(\frac{P_2}{M}\right)\frac{\sin. \alpha}{p}.$$

Multiplicirt man die erste Gleichung durch M, so folgt

$$Mp = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2 P_1 P_2 \cos. \alpha}, \text{ oder,}$$

da Mp die der Acceleration entsprechende Kraft P ist,

$$1)\ P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2 P_1 P_2 \cos. \alpha} \text{ und}$$

$$2)\ \sin. \varphi = \frac{P_2 \sin \alpha}{P}.$$

Es wird also die Resultirende oder Mittelkraft sowohl ihrer Größe als auch ihrer Richtung nach aus den Componenten oder Seitenkräften genau so bestimmt, wie die mittlere Acceleration aus den Seitenaccelerationen.

Repräsentiren wir die Kräfte durch gerade Linien, indem wir diese in denselben Verhältnissen zu einander stehen lassen, wie sie in Gewichten, z. B. Pfunden, in Wirklichkeit zu einander stehen, so läßt sich demnach

Parallelogramm der Kräfte.

die Resultirende durch die Diagonale desjenigen Parallelogrammes darstellen, dessen Seiten durch die Seitenkräfte gebildet werden und wovon ein Winkel dem von den Richtungen der Seitenkräfte gebildeten Winkel gleich ist. Das so aus den Seitenkräften construirte und durch seine Diagonale die Mittelkraft ausdrückende Parallelogramm wird das **Parallelogramm der Kräfte** genannt.

Beispiel. Wenn ein auf einem vollkommen glatten Tische ruhender Körper,

Fig. 73.

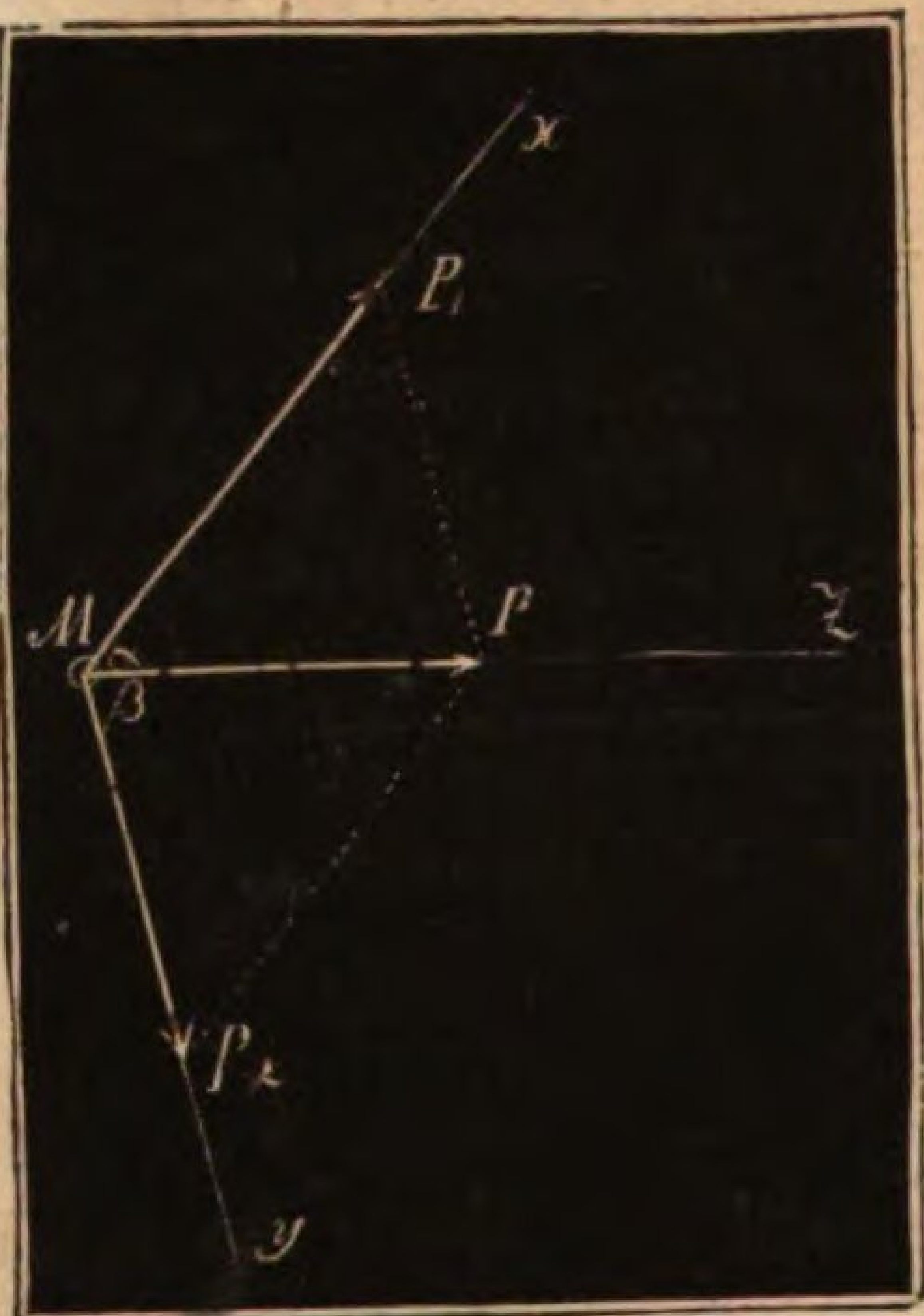


Fig. 73, von 150 Pfund Gewicht von zwei Kräften $P_1 = 30$ Pf. und $P_2 = 24$ Pf. ergriffen wird, die einen Winkel $P_1 M P_2 = \alpha + \beta = 105$ Grad zwischen sich einschließen, so ist die Frage, nach welcher Richtung und mit welcher Acceleration die Bewegung vor sich gehen werde? Da $\cos. (\alpha + \beta) = \cos. 105^0 = - \cos. 75^0$, so folgt die Mittelkraft

$$P = \sqrt{30^2 + 24^2 - 2 \,.\, 30 \,.\, 24 \cos. 75^0}$$
$$= \sqrt{900 + 576 - 1440 \cos. 75^0}$$
$$= \sqrt{1476 - 372{,}4} = 33{,}22 \text{ Pf.};$$ und die ihr entsprechende Acceleration

$$p = \frac{P}{M} = \frac{Pg}{G} = \frac{33{,}22 \,.\, 31{,}25}{150} = 6{,}92 \text{ Fuß}.$$

Die Bewegungsrichtung schließt mit der Richtung der ersten Kraft einen Winkel α ein, der bestimmt ist durch

$$\sin. \alpha = \frac{24}{33{,}22} \sin. 105 = 0{,}7224 \sin. 75^0 = 0{,}6978;$$ es ist also $\alpha = 44^0, 15'$.

Anmerkung. Die Mittelkraft (P) hängt, den gefundenen Formeln zufolge, nur von den Seitenkräften, nie aber von der Masse (M) des Körpers, auf welche die Kräfte wirken, ab. Deshalb findet man in vielen Werken über Mechanik die Richtigkeit des Parallelogramms der Kräfte ohne Rücksicht auf die Masse, wohl aber mit Zugrundlegung irgend eines Grundgesetzes bewiesen. Solcher rein statischen Beweise giebt es viele. In jedem der folgenden Werke findet man einen andern Beweis. Eytelwein's Handbuch der Statik fester Körper, Gerstner's Handbuch der Mechanik, Kayser's Handbuch der Statik, Möbius' Lehrbuch der Statik, Rühlmann's technische Mechanik. Der Beweis in Gerstner's Mechanik setzt die Theorie des Hebels voraus; er ist übrigens sehr einfach und findet sich in sehr vielen alten und auch in neuen Schriften, z. B. in denen von Kästner, Monge, Whewell u. s. w. Kayser's Beweis ist der Poisson'sche in elementarem Gewande. Möbius' Entwickelung ist auf eine besondere, von Poinsot (Elémens de Statique) eingeführte Theorie, auf die der Kräftepaare (des couples), gegründet. Den Beweis in Rühlmann's Mechanik hat Duchayla zuerst geliefert; er wird aber auch noch in vielen anderen Werken angewendet, z. B. in Moseley's Mechanical Principles u. s. w. Eine auf die Bewegungsgesetze gegründete Theorie dieses Parallelogramms findet man schon in Newton's Principien; sie wird aber auch von vielen Neueren gebraucht, z. B. von Venturoli, Poncelet, Burg u. s. w. S. Elementi di Mecanica e d'Idraulica di

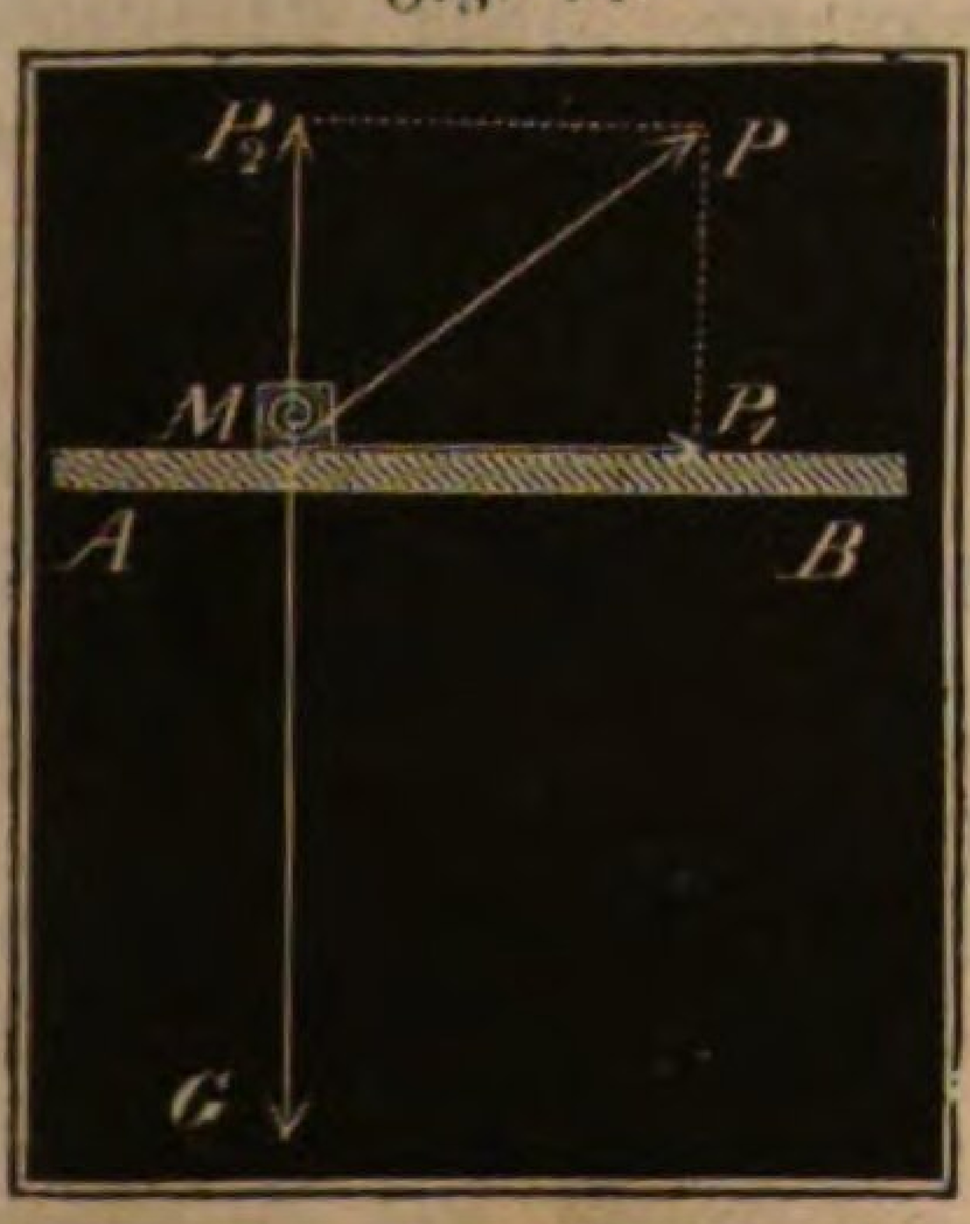
Venturoli; Mécanique industrielle par Poncelet; Compendium der populären Mechanik und Maschinenlehre von Burg.

§. 75. Mit Hülfe des Kräfteparallelogramms lassen sich nicht nur zwei oder mehrere Kräfte zu einer einzigen zusammensetzen, sondern auch gegebene Kräfte unter gegebenen Verhältnissen in zwei oder mehrere Kräfte zerlegen. Sind die Winkel α und β gegeben, welche die Seitenkräfte $MP_1 = P_1$ und $MP_2 = P_2$, Fig. 73, mit der gegebenen Kraft $MP = P$ einschließen, so ergeben sich die Seitenkräfte oder Componenten durch die Formeln $P_1 = \frac{P\, sin.\, \beta}{sin.(\alpha+\beta)}$, $P_2 = \frac{P\, sin.\, \alpha}{sin.(\alpha+\beta)}$. Stehen die Seitenkräfte winkelrecht auf einander, ist also $\alpha + \beta = 90^0$ und $sin.\, (\alpha+\beta) = 1$, so hat man $P_1 = P\, cos.\, \alpha$ und $P_2 = P\, sin.\, \alpha$. Sind endlich β und α einander gleich, so ist auch Zerlegung der Kräfte.

$$P_2 = P_1, \text{ nämlich } = \frac{P sin.\, \alpha}{sin.\, 2\alpha} = \frac{P}{2\, cos.\, \alpha}.$$

Beispiele. 1) Wie stark wird der Tisch AB, Fig. 74, von einem Körper M gedrückt, dessen Gewicht $G = 70$ Pf. ist, und auf den eine Kraft $P = 50$ Pf. wirkt, deren Richtung unter dem Winkel $PMP_1 = \alpha = 40^0$ gegen den Horizont geneigt ist? Der horizontale Component von P ist

Fig. 74.



$P_1 = P\, cos.\, \alpha = 50\, cos.\, 40^0 = 38{,}30$ Pf.
und der vertikale Component
$P_2 = P\, sin.\, \alpha = 50\, sin.\, 40^0 = 32{,}14$ Pf.;
der letztere sucht den Körper vom Tische abzuziehen, es bleibt folglich der Druck auf den Tisch: $G - P_2 = 70 - 32{,}14 = 37{,}86$ Pf. 2) Wenn ein Körper M, Fig. 73, von 110 Pf. Gewicht, auf einer horizontalen Unterlage durch zwei Kräfte so bewegt wird, daß er in der ersten Secunde einen Weg von 6,5 Fuß in einer Richtung durchläuft, welche von den beiden Kräfterichtungen um die Winkel $\alpha = 52^0$ und $\beta = 77^0$ abweicht, so ergeben sich die Kräfte selbst durch Folgendes. Die Acceleration ist der doppelte Weg in der ersten Secunde, also hier $p = 2 \times 6{,}5 = 13$ Fuß. Die Mittelkraft ist nun

$P = \frac{pG}{g} = 0{,}032 \times 13 \times 110 = 45{,}76$ Pf.; daher die eine Seitenkraft

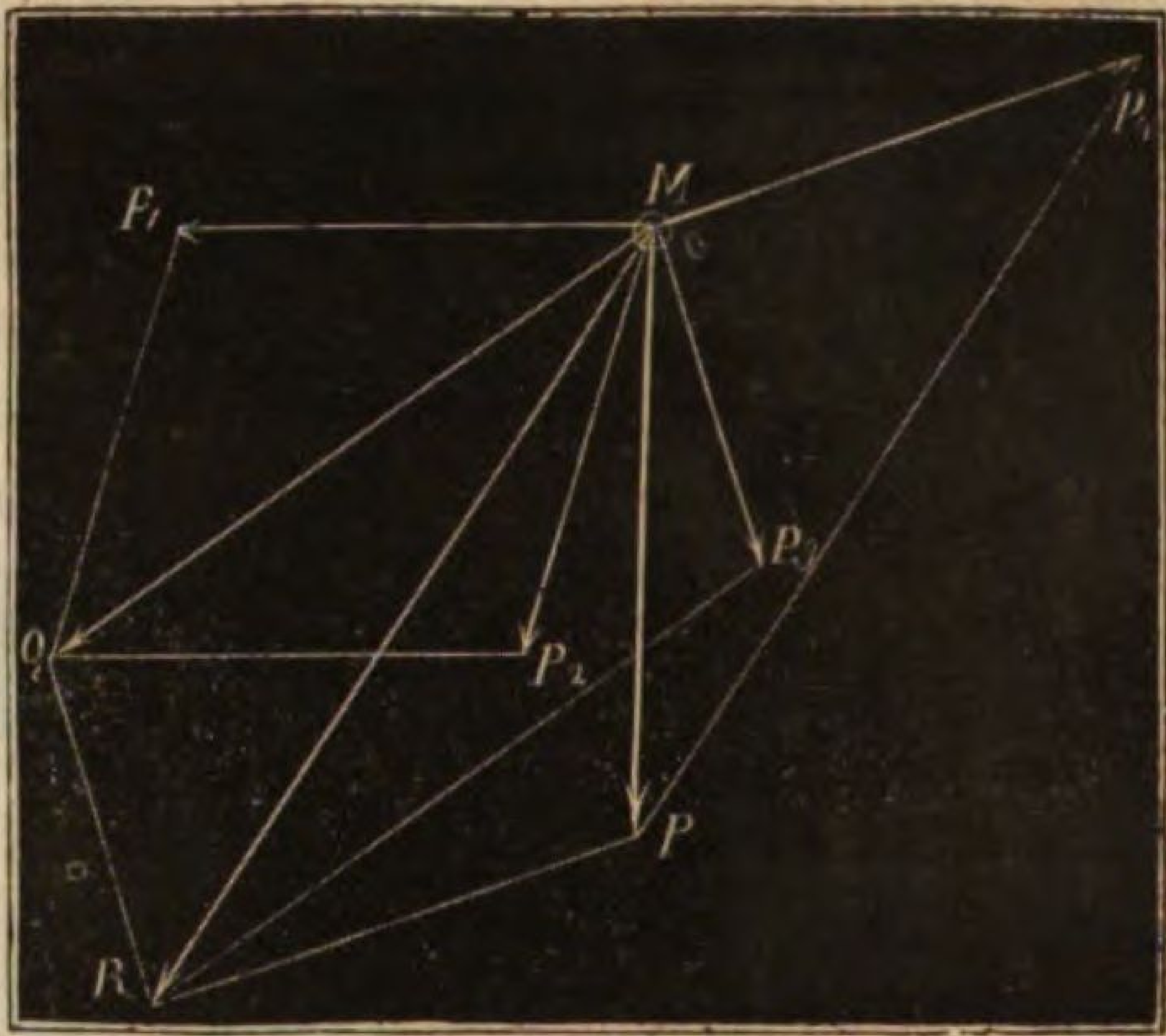
$P_1 = \frac{P\, sin\, 77^0}{sin\, (52+77^0)} = \frac{45{,}76\, sin.\, 77^0}{sin.\, 51^0} = 57{,}37$ Pf., und die andere Seitenkraft

$P_2 = \frac{45{,}76\, sin\, 52^0}{sin.\, 51^0} = 46{,}40$ Pf.

§. 76. Um die Mittelkraft P zu einem Systeme von Seitenkräften P_1, P_2, P_3 u. s. w. (Fig. 75 a. f. S.) zu finden, kann man genau denselben Weg (§. 33) einschlagen, welcher bei der Zusammensetzung von Geschwindigkeiten befolgt wurde, man kann nämlich durch wiederholte Anwendung Kräfte in einer Ebene.

Kräfte in einer Ebene.

Fig. 75.



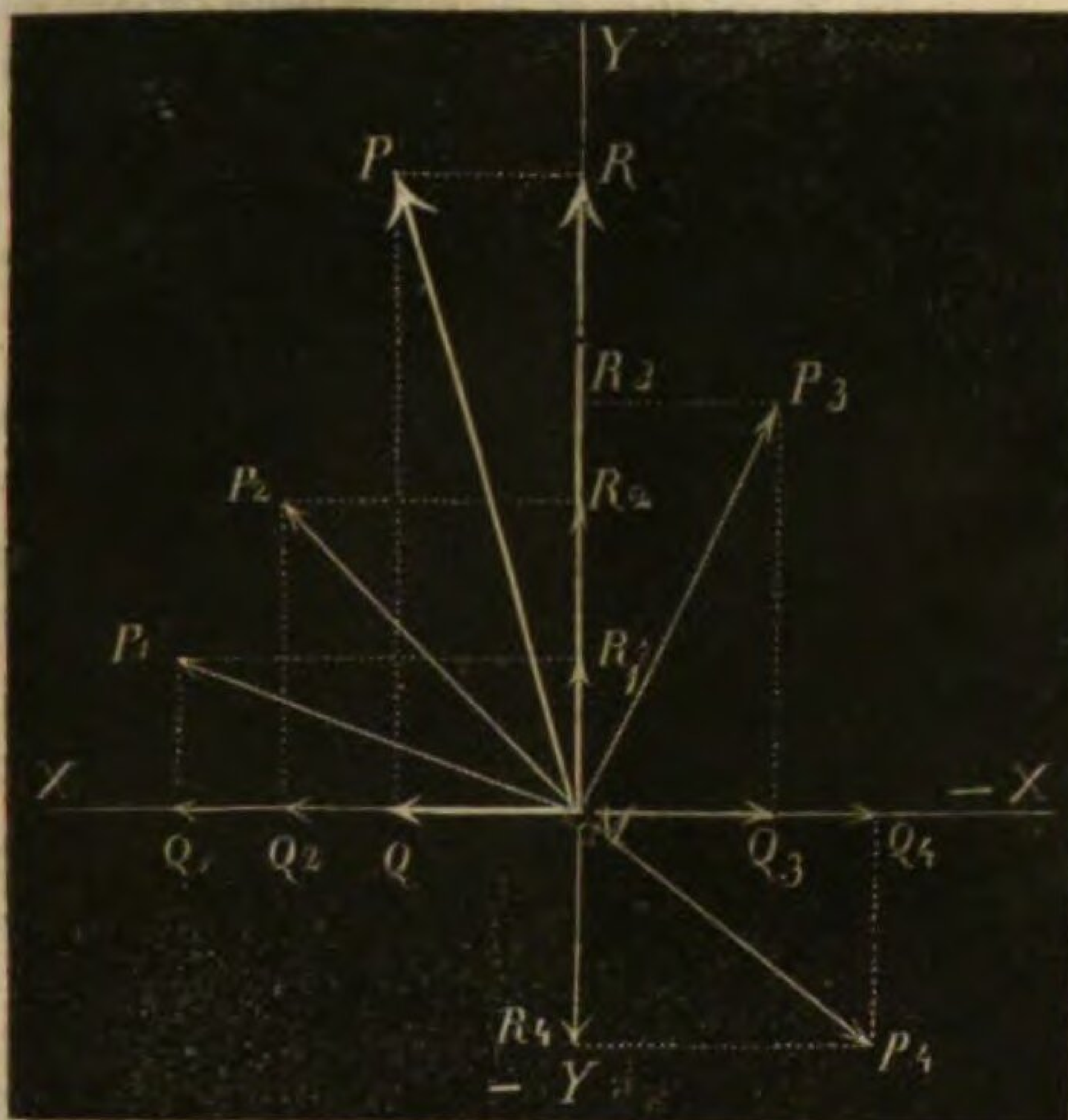
des Kräfteparallelogrammes je zwei und zwei Kräfte zu einer vereinigen, bis zuletzt nur noch eine übrig bleibt. Die Kräfte P_1 und P_2 geben z. B. durch das Parallelogramm MP_1QP_2 die Mittelkraft $MQ = Q$; wenn man diese wieder mit P_3 vereinigt, erhält man im Parallelogramm $MQRP_3$ die Mittelkraft $MR = R$, und die letztere wieder mit P_4 zu einem Parallelogramm verbunden, stellt sich in der Diagonale $MP = P$ die letzte, allen vier Kräften P_1, P_2, P_3 und P_4 zusammen äquivalente Mittelkraft heraus.

Es ist nicht nöthig, bei dieser Zusammensetzungsweise das Parallelogramm stets zu vollenden und dessen Diagonale anzugeben. Man bilde ein Polygon MP_1QRP, indem man die Seiten MP_1, P_1Q, QR, RP den gegebenen Componenten P_1, P_2, P_3, P_4 parallel legt und gleichmacht; die letzte, das Polygon zuschließende Seite MP, ist die gesuchte Mittelkraft P oder vielmehr nur ihr Maaß.

Anmerkung. Es ist sehr nützlich, die Aufgaben der Mechanik auch durch Construction aufzulösen; wenn die construirende Auflösung auch nicht so viel Genauigkeit gewährt als die rechnende, so sichert sie dagegen sehr vor groben Fehlern und kann deshalb immer als Prüfung der Rechnung dienen. In Fig. 75 sind die Kräfte unter den gegebenen Winkeln $P_1MP_2 = 72°, 30'$; $P_2MP_3 = 33° 20$ und $P_3MP_4 = 92° 40'$ an einander gestoßen und so aufgetragen, daß ein Pfund durch eine Linie des preuß. Zolles repräsentirt wird. Die Kräfte $P_1 = 11{,}5$ Pf., $P_2 = 10{,}8$ Pf., $P_3 = 8{,}5$ Pf. und $P_4 = 12{,}2$ Pf. sind daher durch Seiten von 11,5 Lin., 10,8 Lin., 8,5 Lin. und 12,2 Linien Länge ausgedrückt. Eine sorgfältige Construction des Kräftepolygons giebt die Größe der Mittelkraft $P = 14{,}6$ Pfund und die Abweichung ihrer Richtung MP von der Richtung MP_1 der ersten Kraft $= 86\frac{1}{2}$ Grad.

§. 77. Einfacher und schärfer bestimmt sich die Mittelkraft P, wenn man jeden der gegebenen Componenten P_1, P_2, P_3 u. s. w. nach zwei rechtwinklig gegen einander stehenden Axenrichtungen $X\overline{X}$ und $Y\overline{Y}$, Fig. 76,

Fig. 76.



in Seitenkräfte wie Q_1 und R_1, Q_2 und R_2, Q_3 und R_3 u. s. w. zerlegt, die in eine und dieselbe Axenrichtung fallenden Kräfte algebraisch addirt und nun aus den sich ergebenden, unter einem Rechtwinkel aus einander ziehenden zwei Kräften die Größe und Richtung der Resultirenden sucht. Sind die Winkel P_1MX, P_2MX, P_3MX u. s. w., welche die Richtungen von den Kräften P_1, P_2, P_3 u. s. w. mit der Axe XX einschließen, $= \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ u. s. w., so hat man die Seitenkräfte $Q_1 = P_1 \cos. \alpha_1$, $R_1 = P_1 \sin. \alpha_1$, $Q_2 = P_2 \cos. \alpha_2$, $R_2 = P_2 \sin. \alpha_2$ u. s. w., weshalb folgt aus $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots$,

Kräfte in einer Ebene.

1) $Q = P_1 \cos. \alpha_1 + P_2 \cos. \alpha_2 + P_3 \cos. \alpha_3 + \ldots$, und ebenso aus $R = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots$,

2) $R = P_1 \sin. \alpha_1 + P_2 \sin. \alpha_2 + P_3 \sin. \alpha_3 + \ldots$

Aus den so gefundenen zwei Seitenkräften Q und R folgt nun die Größe der gesuchten Mittelkraft

3) $P = \sqrt{Q^2 + R^2}$ und der Winkel $PMX = \varphi$, den ihre Richtung mit XX einschließt, durch

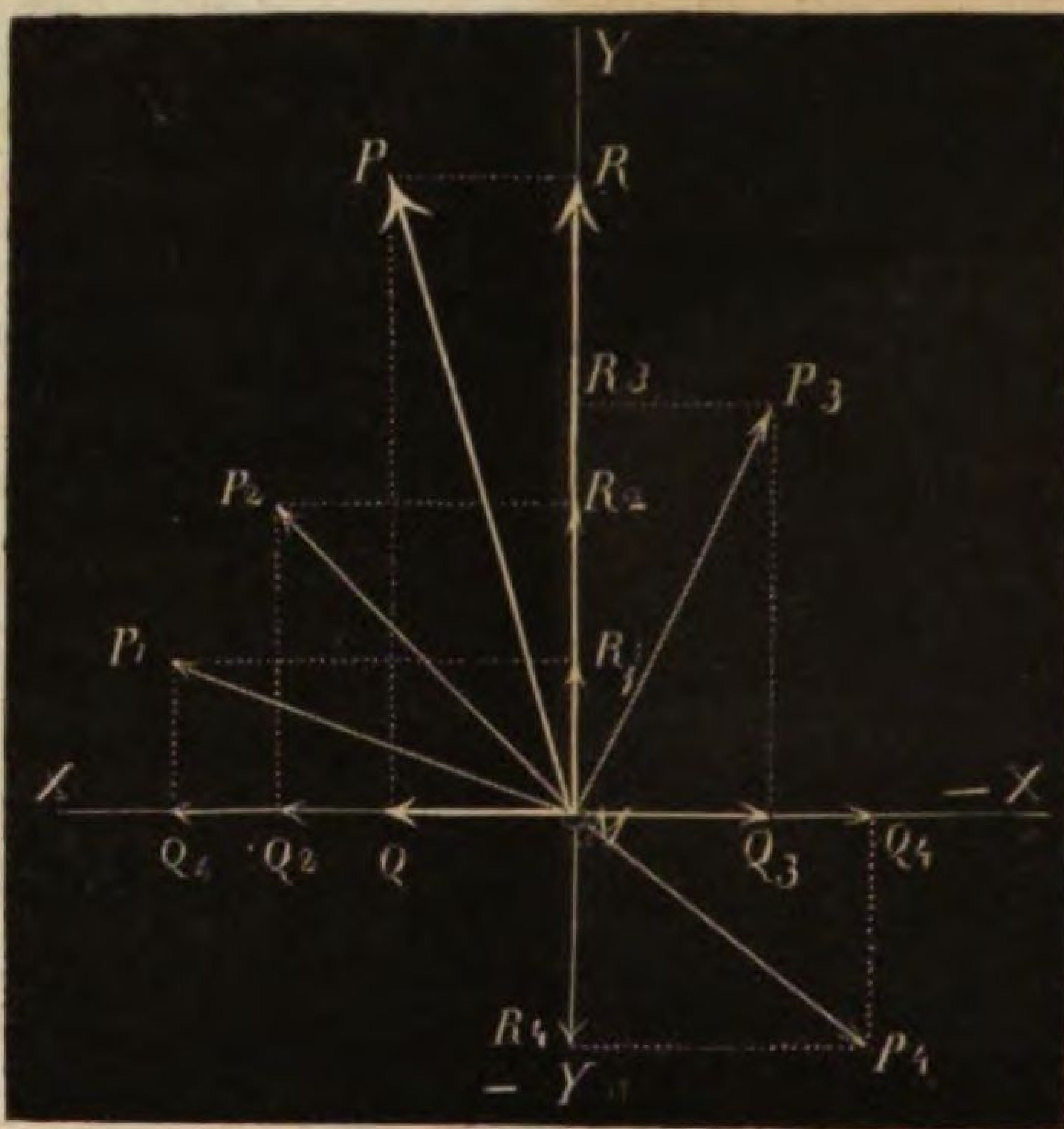
4) $tang.\ \varphi = \frac{R}{Q}$.

Bei der algebraischen Addition der Kräfte hat man die Vorzeichen genau zu berücksichtigen, denn sind dieselben bei zwei Kräften verschieden, d. h. sind diese Kräfte vom Angriffspunkte M aus nach entgegengesetzten Seiten gerichtet, so geht diese Addition in eine arithmetische Subtraction über (§. 73). Der Winkel φ ist spitz, so lange Q und R positiv sind, er ist zwischen einem und zwei Rechtwinkeln, wenn Q negativ und R positiv, zwischen zwei und drei Rechten, wenn Q und R beide negativ sind, liegt endlich aber zwischen drei und vier Rechten, wenn bloß R negativ ist.

Beispiel. Welches ist die Größe und Richtung der Mittelkraft aus den Seitenkräften $P_1 = 30$ Pf., $P_2 = 70$ Pf. und $P_3 = 50$ Pf., deren Richtungen,

Kräfte in einer Ebene. in einer Ebene liegend, die Winkel $P_1 MP_2 = 56°$ und $P_2MP_3 = 104°$ zwischen sich einschließen? Legen wir die Axe XX, Fig. 77, in die Richtung der ersten Kraft, so erhalten wir $\alpha_1 = 0°$, und $\alpha_2 = 56°$, $\alpha_3 = 56° + 104° = 160°$; daher

Fig. 77.



1) $Q = 30 \,.\, cos.\ 0° + 70 \,.\, cos.\ 56° + 50\ cos.\ 160° = 30 + 39{,}14 - 46{,}98 = 22{,}16$ Pf., und

2) $R = 30 \,.\, sin.\ 0° + 70 \,.\, sin.\ 56° + 50 \,.\, sin.\ 160° = 0 + 58{,}03 + 17{,}10 = 75{,}13$ Pf. Ferner

3) $tang.\ \varphi = \frac{75{,}13}{22{,}16} = 3{,}3903$,

und hiernach den Winkel, welchen die Mittelkraft mit dem positiven Axentheile MX oder der Kraft P_1 einschließt, $\varphi = 73°\ 34'$, endlich diese Kraft selber

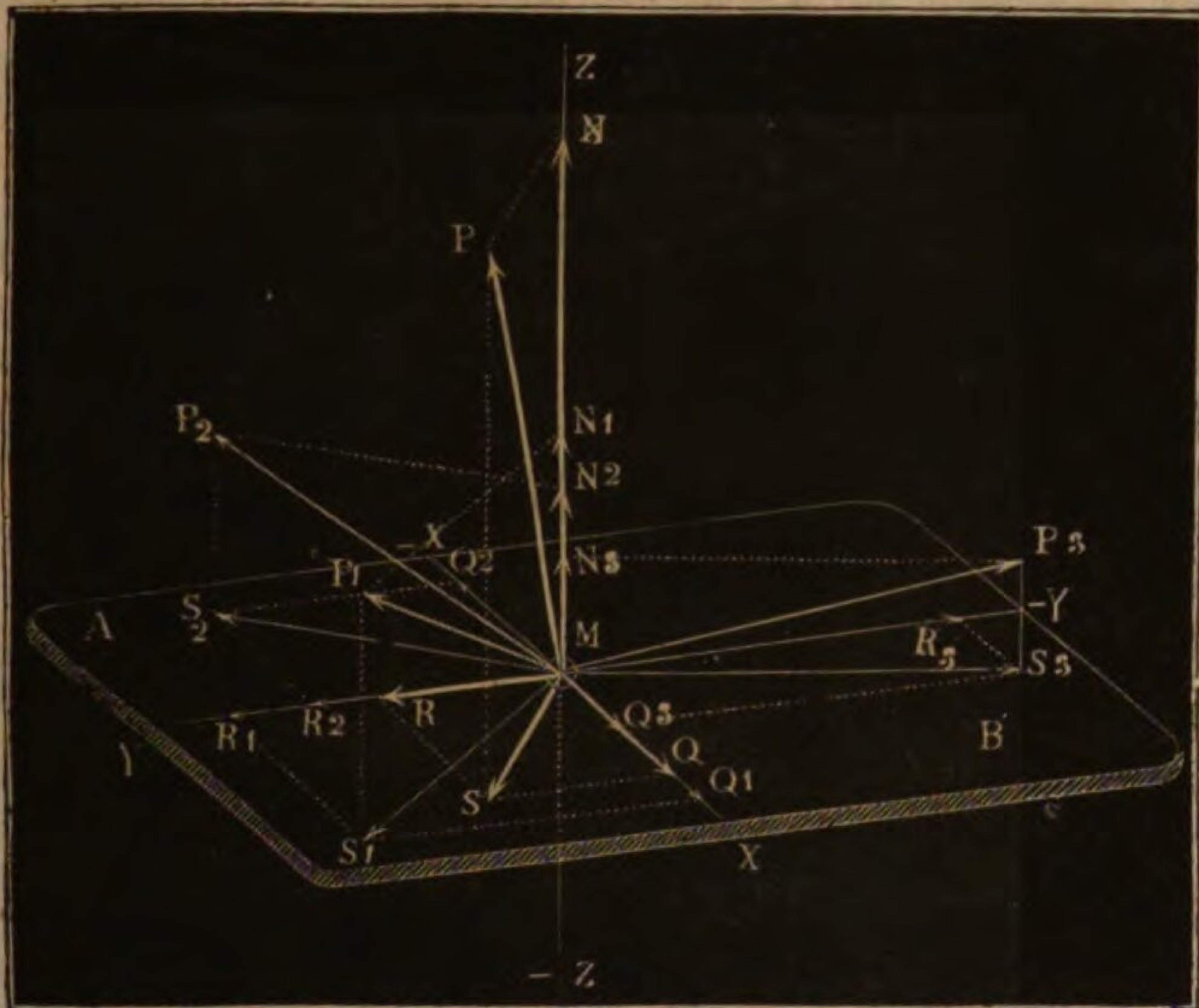
$$P = \sqrt{Q^2 + R^2} = \frac{Q}{cos.\ \varphi} = \frac{R}{sin.\ \varphi} = \frac{75{,}13}{sin.\ 73° 34'} = \frac{75{,}13}{0{,}9591} = 78{,}33 \text{ Pf.}$$

Kräfte im Raume. §. 78. Liegen die Kraftrichtungen nicht in einer und derselben Ebene, so lege man durch den Angriffspunkt der Kräfte eine Ebene und zerlege jede derselben in zwei andere, die eine derselben in der Ebene liegend, die andere rechtwinklig zur Ebene. Die so erhaltenen Seitenkräfte in der Ebene sind nach der Regel des vorigen §. in eine Mittelkraft und die Seitenkräfte rechtwinklig zur Ebene hat man durch Addition zu einer einzigen zu vereinigen; zu den auf diese Weise erhaltenen zwei rechtwinkligen Componenten ist endlich nach der bekannten Regel (§. 74) die Mittelkraft zu finden.

Fig. 78 (a. f. S.) führt das eben angegebene Verfahren mehr vor Augen. $MP_1 = P_1$, $MP_2 = P_2$, $MP_3 = P_3$ seien die einzelnen Kräfte, AB die Ebene (Projectionsebene) und $Z\bar{Z}$ die Axe winkelrecht zu ihr. Aus der Zerlegung der Kräfte P_1, P_2 u. s. w. ergeben sich die Kräfte S_1, S_2 u. s. w. in der Ebene und die Kräfte N_1, N_2 u. s. w. in der Normale $Z\bar{Z}$. Jene werden wieder nach zwei Axen XX und YY in die Seitenkräfte Q_1, Q_2 u. s. w. R_1, R_2 u. s. w, zerlegt und geben die Componenten Q und R, woraus nun wieder die Mittelkraft S entsteht, welche, mit der Summe N aller Normalkräfte N_1, N_2 u. s. w. vereinigt, die gesuchte Mittelkraft P giebt.

Setzen wir die Winkel, unter welchen die Kraftrichtungen gegen die Ebene AB, z. B. gegen den Horizont geneigt sind, β_1, β_2 u. s. w., so er- Kräfte im Raume.

Fig. 78.



geben sich Kräfte in der Ebene: $S_1 = P_1 \cos. \beta_1$, $S_2 = P_2 \cos. \beta_2$ u. s. w., und die Normalkräfte: $N_1 = P_1 \sin. \beta_1$, $N_2 = P_2 \sin \beta_2$ u. s. w.; bezeichnen wir endlich die Winkel, welche die in der Ebene AB liegenden Projectionen der Kraftrichtungen mit der Axe XX einschließen, mit α_1, α_2 u. s. w., setzen wir also $S_1MX = \alpha_1$, $S_2MX = \alpha_2$ u. s. w., so stoßen wir auf folgende drei, die Kanten eines geraden Parallelepipeds (des Kräfteparallelepipeds) bildende Kräfte:

$Q = S_1 \cos. \alpha_1 + S_2 \cos. \alpha_2 + \ldots$, oder

1) $Q = P_1 \cos. \beta_1 \cos. \alpha_1 + P_2 \cos. \beta_2 \cos. \alpha_2 + \ldots$, ebenso

2) $R = P_1 \cos. \beta_1 \sin. \alpha_1 + P_2 \cos. \beta_2 \sin. \alpha_2 + \ldots$, endlich

3) $N = P_1 \sin. \beta_1 + P_2 \sin. \beta_2 + \ldots$

Aus diesen drei Kräften folgt die letzte Resultirende:

4) $P = \sqrt{Q^2 + R^2 + N^2}$, ferner

der Neigungswinkel $PMS = \psi$ derselben gegen die Projectionsebene, durch

5) $tang. \psi = \frac{N}{S} = \frac{N}{\sqrt{Q^2 + R^2}}$, endlich

der Winkel $SMX = \varphi$, welchen die Projection der Resultirenden in der Ebene AB mit der ersten Axe XX einschließt, durch

Kräfte im Raume.

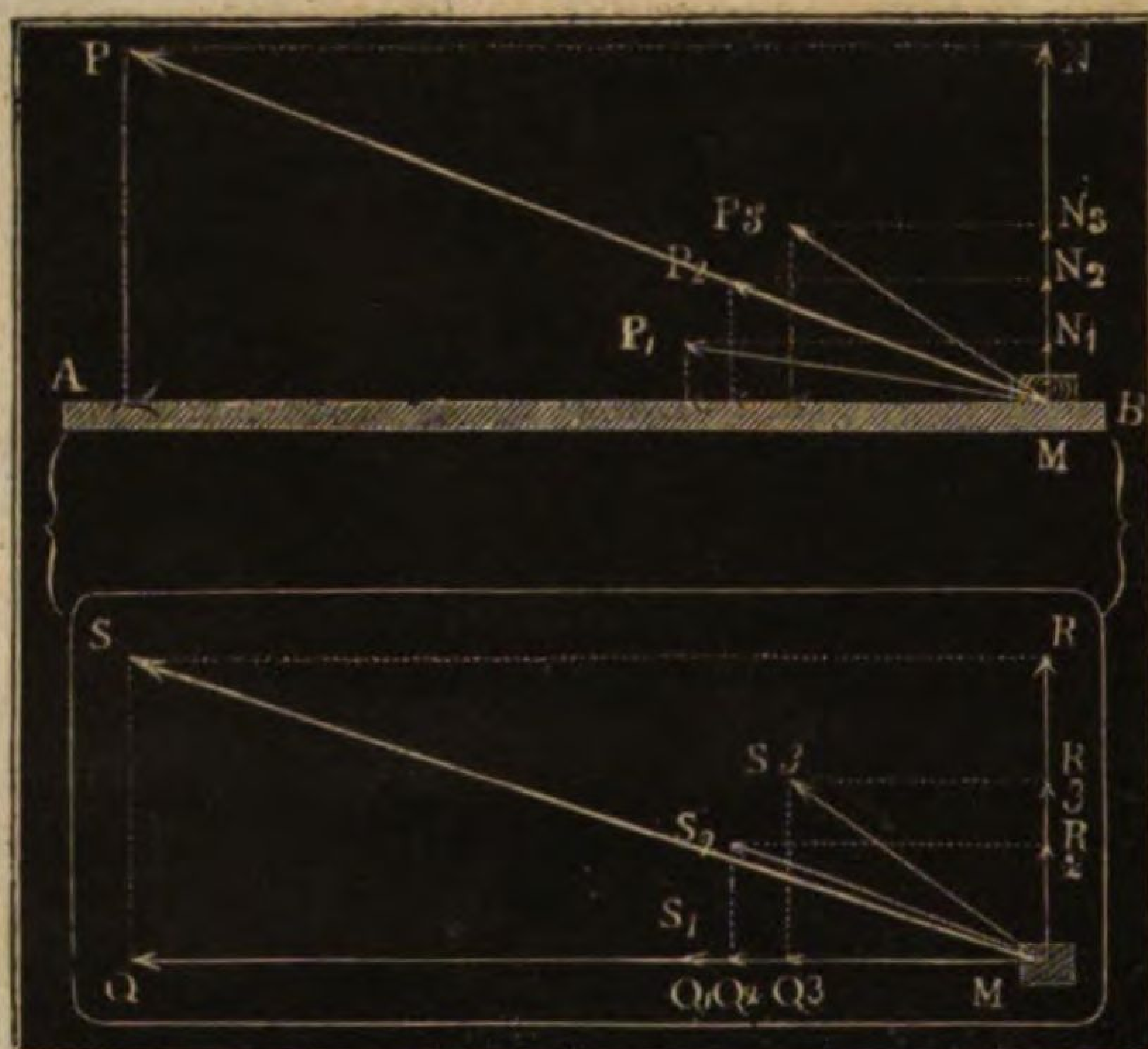
6) $tang.\,\varphi = \frac{R}{Q}$.

Beispiel. Drei Arbeiter ziehen an den Enden dreier Seile, welche an einer auf einem horizontalen Boden AB, Fig. 79, liegenden Last M angeknüpft sind,

Fig. 79.

Aufriß.

Grundriß.



jeder mit 50 Pfund Kraft; die Neigungswinkel dieser Kräfte gegen den Horizont sind 10°, 20° und 30°, und die Horizontalwinkel zwischen der ersten und zweiten und der ersten und dritten Kraft = 20° und 35°; welches ist die Größe und Richtung der Resultirenden und wie viel ist diese kleiner als die Summe aller Kräfte, welche resultiren würde, wenn alle drei Kräfte in einerlei Richtung wirkten. Die vertikal in die Höhe ziehende Kraft ist:

$N = N_1 + N_2 + N_3 = 50\,.\,(sin.10^0 + sin.20^0 + sin.30^0) = 50\,.\,1{,}01567 = 50{,}78$ Pf.; um so viel drückt also der Körper auf den Boden weniger als das ganze Gewicht desselben.

Die horizontalen Seitenkräfte sind $S_1 = 50\,.\,cos.\,10^0 = 50\,.\,0{,}9849 = 49{,}24$ Pf., $S_2 = 50\,.\,cos\,20^0 = 46{,}98$ Pf., $S_3 = 50\,.\,cos.\,30^0 = 43{,}30$ Pf. Legen wir die Axe $\overline{XX}$ in die Richtung der ersten Kraft S_1, so erhalten wir die Seitenkraft in dieser Axe $\overline{XX}$, $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = S_1\,cos.\,\alpha_1 + S_2\,cos.\,\alpha_2 + S_3\,cos.\,\alpha_3$ $= 49{,}24 \times cos.\,0^0 + 46{,}98 \times cos.\,20^0 + 43{,}30 \times cos.\,35^0 = 49{,}24 + 44{,}15 + 35{,}4$ $= 128{,}86$ Pf.; dagegen die Seitenkraft in der zweiten Axe $\overline{YY}$:

$R = R_1 + R_2 + R_3 = 49{,}24 \times sin.\,0^0 + 46{,}98 \times sin.\,20^0 + 43{,}30 \times sin.\,35^0$
$= 0 + 16{,}07 + 24{,}84 = 40{,}91$ Pf.

Die horizontale Mittelkraft, mit welcher der Körper fortgezogen wird, ist hiernach
$S = \sqrt{Q^2 + R^2} = \sqrt{(128{,}86)^2 + (40{,}91)^2} = \sqrt{18278{,}7} = 135{,}2$ Pf

Der Winkel φ, welchen diese Kraft mit der Axe $\overline{XX}$ einschließt, ist bestimmt durch $tang.\,\varphi = \frac{R}{Q} = \frac{40{,}91}{128{,}86} = 0{,}3175$; es ist also $\varphi = 17^0{,}37'$; die vollständige Re-

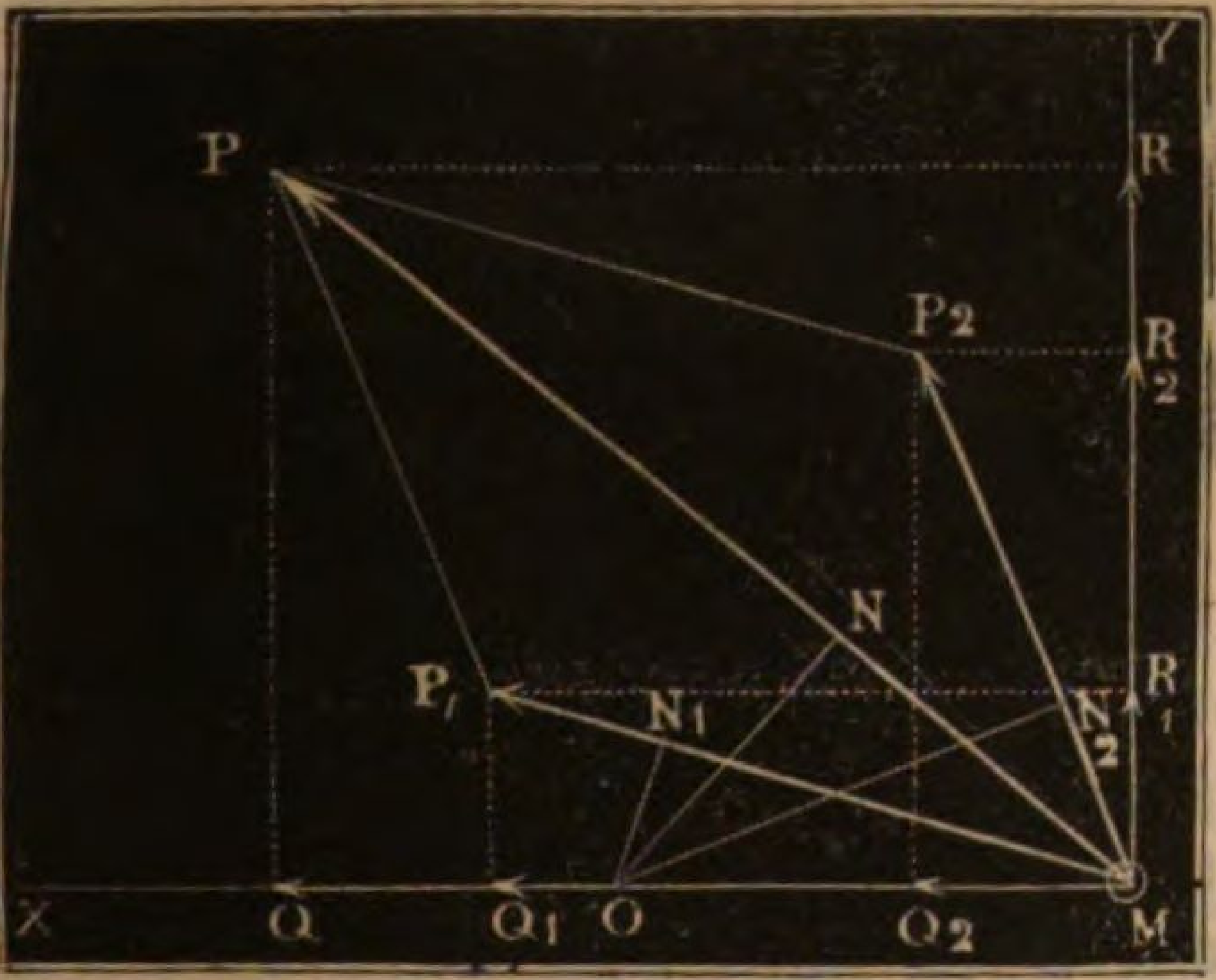
sultirende ist: $P = \sqrt{(135{,}2)^2 + (50{,}78)^2} = \sqrt{20856{,}6} = 144{,}43$ Pf. Kräfte im Raume.

Wirken die Kräfte in gleicher Richtung, so ist die Resultirende = $3 \times 50 =$ 150 Pf.; es ist also der Kraftverlust = 150 — 144,42 = 5,58 Pf.; weil ferner die den Körper fortziehende Horizontalkraft nur 135,20 Pf. beträgt, so hat man in Hinsicht auf die Horizontalbewegung den Kraftverlust 150 — 135,20 = 14,80 Pf.

Der Neigungswinkel ψ der Mittelkraft gegen den Horizont ist bestimmt durch $tang.\,\psi = \frac{N}{S} = \frac{50{,}78}{135{,}20} = 0{,}3756$, weshalb er = 20°, 35' ausfällt.

§. 79. Aus den in dem Vorigen gefundenen Regeln über die Zusammensetzung der Kräfte lassen sich noch zwei andere, im praktischen Gebrauch wesentliche Dienste leistende, ableiten. Es sei in Fig. 80 M ein materieller Punkt, es seien $MP_1 = P_1$ und $MP_2 = P_2$ die auf ihn wirkenden Kräfte, endlich sei $MP = P$ die Mittelkraft aus den Kräften P_1 und P_2. Legen wir durch M zwei Axen MX und MY winkelrecht gegen einander, und zerlegen wir die Kräfte P_1 und P_2, so wie ihre Mittelkraft P in nach diesen Axen gerichtete Seitenkräfte, also P_1 in Q_1 und R_1, P_2 in Q_2 und R_2, und P in Q und R; so erhalten wir die Kräfte in der einen Axe Q_1, Q_2 und Q, und die in der andern R_1, R_2 und R, und es ist $Q = Q_1 + Q_2$, so wie $R = R_1 + R_2$. Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

Fig. 80.



Nehmen wir nun in der Axe MX irgend einen Punkt O an, und fällen von demselben Perpendikel ON_1, ON_2 und ON gegen die Richtungen der Kräfte P_1, P_2 und P, so erhalten wir rechtwinkelige Dreiecke MON_1, MON_2, MON, welche den von den drei Kräften gebildeten Dreiecken ähnlich sind, nämlich:

$$\triangle\, MON_1 \sim \triangle\, MP_1Q_1$$
$$\triangle\, MON_2 \sim \triangle\, MP_2Q_2$$
$$\triangle\, MON \sim \triangle\, MPQ.$$

Diesen Aehnlichkeiten zufolge ist aber $\frac{MQ_1}{MP_1}$, d. i. $\frac{Q_1}{P_1} = \frac{MN_1}{MO}$, ebenso $\frac{Q_2}{P_2} = \frac{MN_2}{MO}$ und $\frac{Q}{P} = \frac{MN}{MO}$; setzen wir die hiernach bestimmten Werthe von Q_1, Q_2 und Q in die Gleichung $Q = Q_1 + Q_2$, so erhalten wir

$$P . MN = P_1 . MN_1 + P_2 . MN_2.$$

Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

Ebenso ist auch $\frac{R_1}{P_1} = \frac{ON_1}{MO}$, $\frac{R_2}{P_2} = \frac{ON_2}{MO}$ und $\frac{R}{P} = \frac{ON}{MO}$, daher

$$P.ON = P_1.ON_1 + P_2.ON_2.$$

Diese Gleichungen gelten selbst dann noch, wenn P die Mittelkraft aus drei oder mehreren Kräften P_1, P_2, P_3 u. s. w. ist, weil man allgemein

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots$$
$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \dots \text{ hat;}$$

man kann daher allgemein

1) $P.MN = P_1.MN_1 + P_2.MN_2 + P_3.MN_3 + \dots,$

2) $P.ON = P_1.ON_1 + P_2.ON_2 + P_3.ON_3 + \dots$ setzen.

Beiden Gleichungen muß die Mittelkraft P aus den Kräften P_1, P_2, P_3 u. s. w. entsprechen, es läßt sich aber auch dieselbe durch diese Gleichungen nicht allein der Größe, sondern auch der Richtung nach bestimmen.

§. 80. Rückt der Angriffspunkt M, Fig. 81, und Fig. 82. in einer geraden Linie nach O, oder denkt man sich den Angriffspunkt um den Weg

Fig. 81.

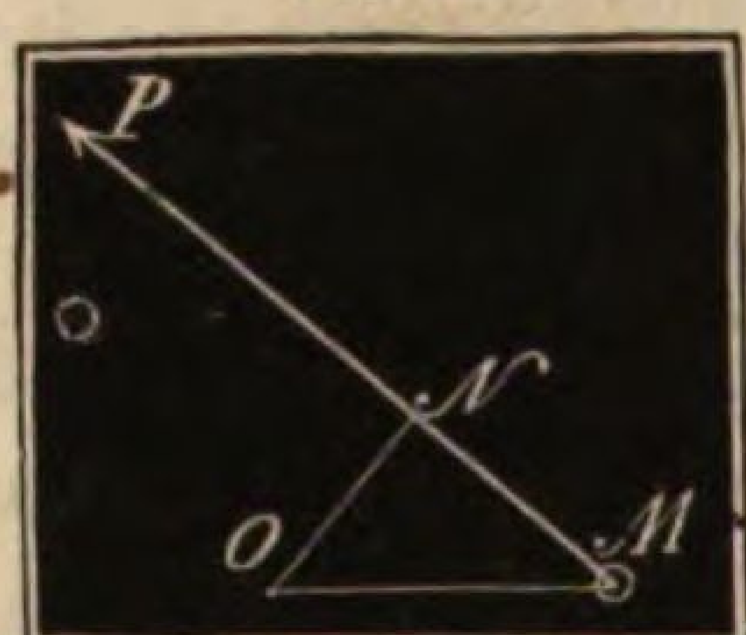
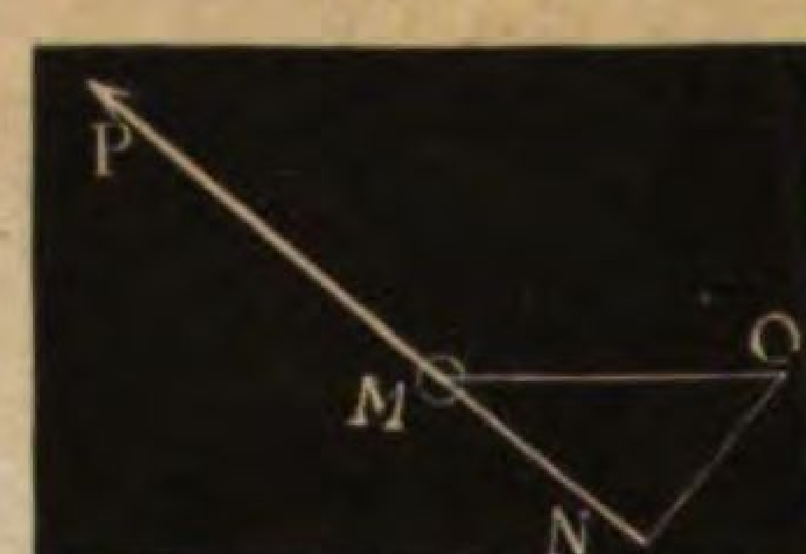


Fig. 82.



$MO = s$ fortgegangen, so nennt man die Projection $MN = s_1$ dieses Weges s nach der Kraftrichtung MP den **Weg der Kraft** P, und das Product Ps_1 aus der Kraft und ihrem Wege: **Arbeit der Kraft**. Führen wir nun diese Bezeichnungen in der Gleichung (1) des vorigen §. ein, so erhalten wir

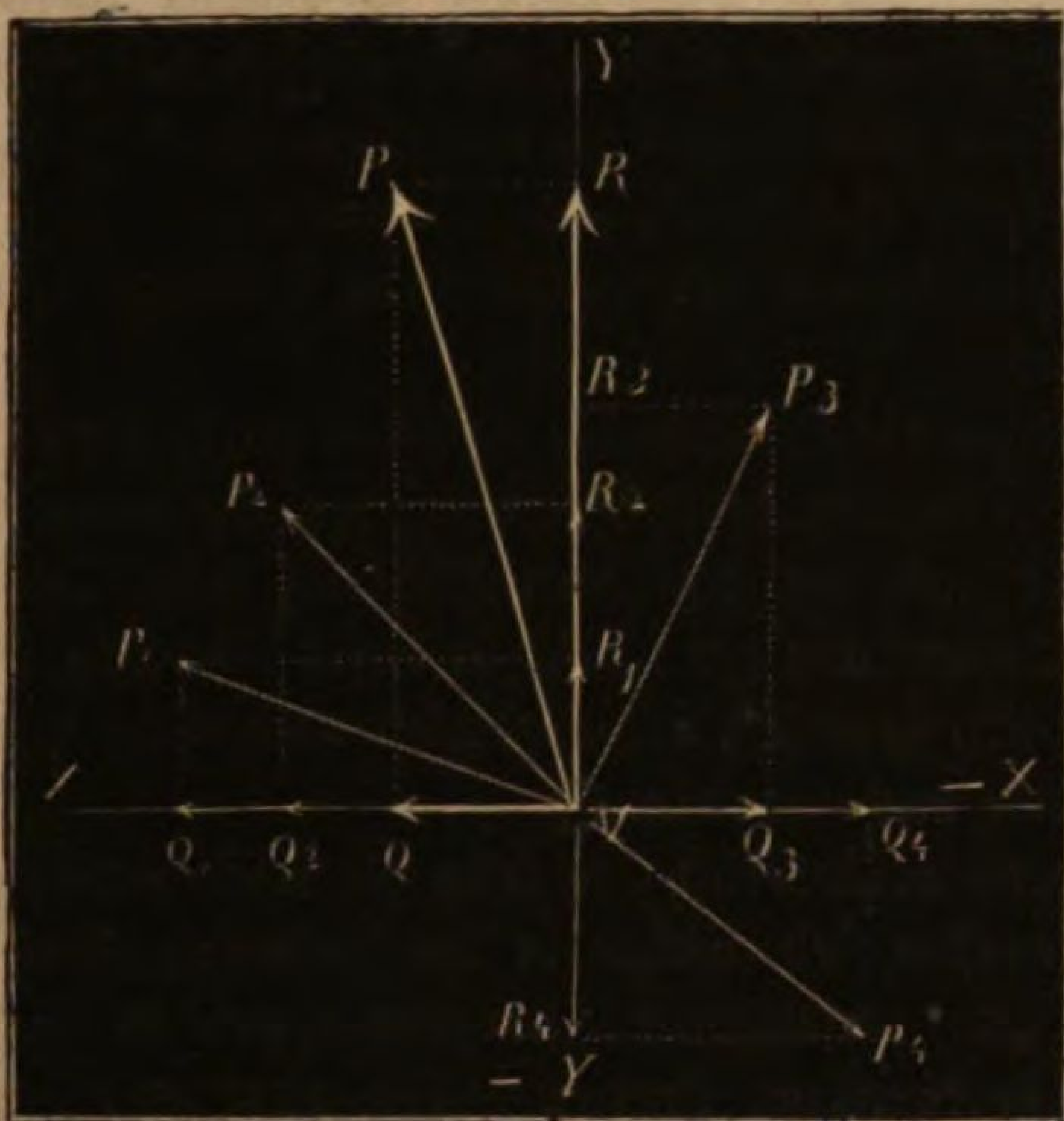
$$Ps = P_1s_1 + P_2s_2 + P_3s_3 + \dots,$$

es ist also die **Arbeit der Mittelkraft gleich der Summe aus den Arbeiten der Seitenkräfte**.

Bei der Summation dieser mechanischen Arbeiten hat man wie bei der Summation von Kräften auf die Zeichen dieser Rücksicht zu nehmen. Wirkt eine (Q_3) von den Kräften Q_1, Q_2 u. s. w. des vorigen §. den übrigen entgegengesetzt, so hat man sie als negative Kraft einzuführen; diese Kraft Q_3, Fig. 83., ist aber Component einer Kraft P_3, die unter den Verhältnissen, wie sie im vorigen §. vorausgesetzt wurden, ihrer eigenen Bewegung MN_3 entgegengesetzt wirkt; man ist daher genöthigt, diejenige Kraft, Fig. 82, welche der Bewegung MN entgegengesetzt wirkt, als **negativ** zu behandeln, wenn man diejenige Kraft P, Fig. 81, welche in der Bewegungsrichtung MN wirkt, **positiv** setzt.

Sind die Kräfte ihrer Größe oder Richtung nach veränderlich, so hat die Formel $Ps = P_1 s_1 + P_2 s_2 + P_3 s_3 + \ldots$ nur für unendlich kleine Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

Fig 83.



Wege s, s_1, s_2 u. s. w. ihre Richtigkeit.

Man nennt die einer unendlich kleinen Verrückung σ des materiellen Punktes entsprechenden Wege σ_1, σ_2, σ_3, u. s. w. der Kräfte die virtuellen Geschwindigkeiten (franz. vitesses virtuelles, engl. virtual velocities) derselben und das der Formel $P\sigma = P_1 \sigma_1 + P_2 \sigma_2 + P_3 \sigma_3$ entsprechende Gesetz das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

§. 81. Nach dem Principe der lebendigen Kräfte ist für eine geradlinige Bewegung (§. 71.) die mechanische Arbeit (Ps), welche eine Kraft (P) verrichtet, indem sie eine Masse M aus der Geschwindigkeit c in die Geschwindigkeit v versetzt: Uebertragung der mechanischen Arbeit.

$$Ps = \left(\frac{v^2 - c^2}{2}\right) M.$$

Ist nun aber P die Mittelkraft aus anderen, auf die Masse M wirkenden Kräften P_1, P_2 u. s. w., und sind die Wege, welche diese zurücklegen, s_1, s_2 u. s. w., während die Masse M selbst den Weg s macht, so hat man nach dem vorigen §.

$$Ps = P_1 s_1 + P_2 s_2 + \ldots,$$

es läßt sich daher folgende allgemeine Formel:

$$P_1 s_1 + P_2 s_2 + \ldots = \left(\frac{v^2 - c^2}{2}\right) M$$

Uebertragung der mechanischen Arbeit.

angeben und ihr nach die **Summe der Arbeiten der einzelnen Kräfte gleichsetzen dem halben Gewinn der lebendigen Kraft der Masse.**

Ist die Geschwindigkeit während der Bewegung unveränderlich, also $v = c$, und die Bewegung selbst gleichförmig, so hat man $v^2 - c^2 = 0$, also weder Gewinn noch Verlust an lebendiger Kraft, und daher

$$P_1 s_1 + P_2 s_2 + P_3 s_3 + \ldots. = 0;$$

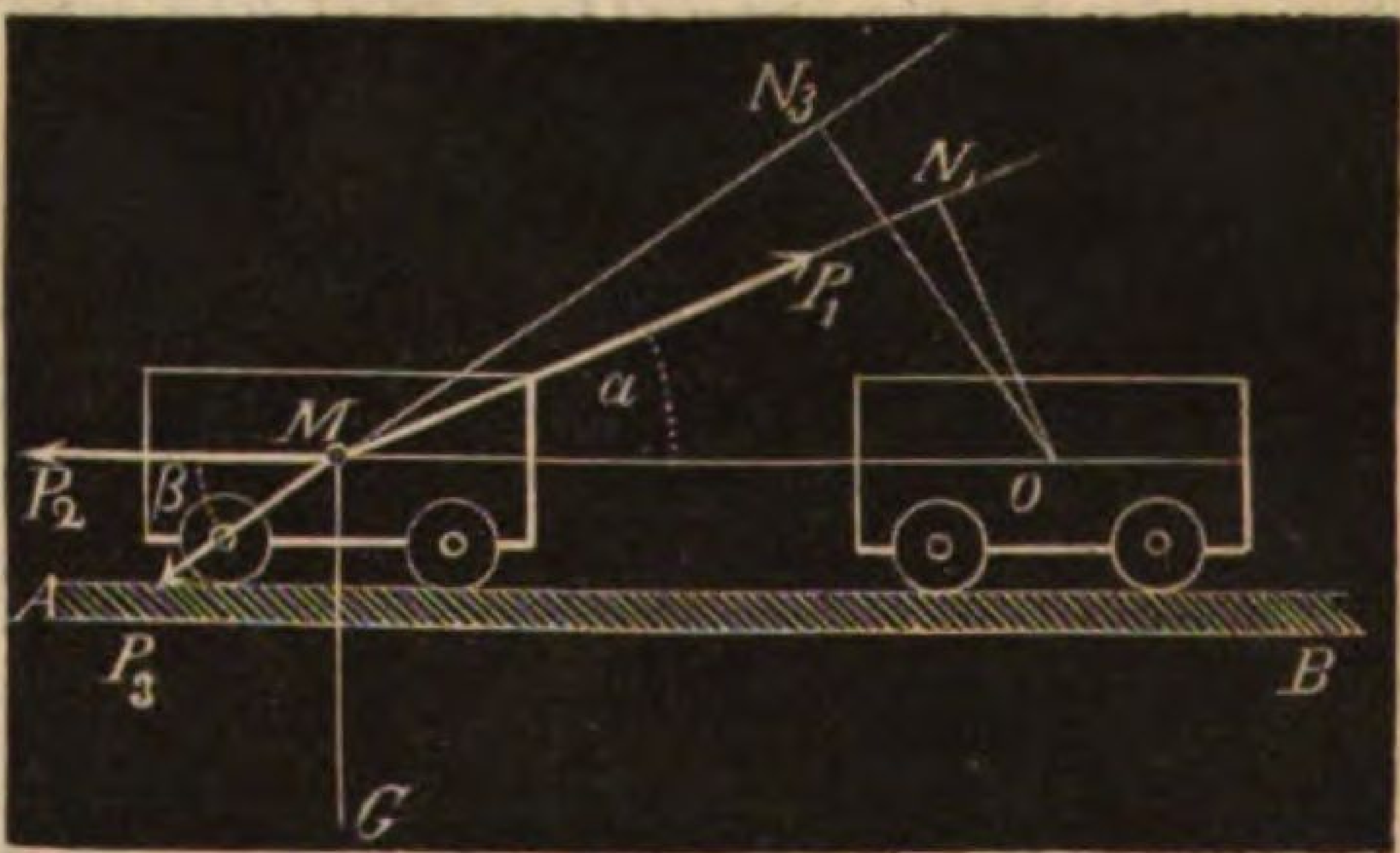
dann ist also die Summe der mechanischen Arbeiten von den einzelnen Kräften = Null.

Wenn umgekehrt die Summe der Arbeiten gleich Null ist, so verändern die Kräfte die Bewegung des Körpers in der gegebenen Richtung nicht; hatte der Körper nach der gegebenen Richtung keine Bewegung, so wird er auch durch Einwirkung der Kräfte in dieser Richtung keine bekommen; hatte er vorher eine gewisse Geschwindigkeit nach einer gewissen Richtung, so wird er dieselbe auch behalten.

Sind die Kräfte veränderlich, so kann die veränderliche Geschwindigkeit v nach einer gewissen Zeit wieder in die Anfangsgeschwindigkeit c übergehen, was bei allen periodischen Bewegungen, wie sie namentlich an vielen Maschinen vorkommen, eintritt. Nun giebt aber $v = c$ die Arbeit $\left(\frac{v^2 - c^2}{2}\right) M =$ Null, es ist daher innerhalb einer Periode der Bewegung der Arbeitsverlust oder Gewinn = Null.

Beispiel. Ein Wagen, Fig. 84., von dem Gewichte $G = 5000$ Pf. wird auf einem horizontalen Wege durch eine unter dem Winkel $\alpha = 24$ Grad aufsteigende Kraft $P_1 = 660$ Pf. vorwärts bewegt und hat während der Bewegung zwei Widerstände, einen horizontalen, $P_2 = 350$ Pf., der Reibung entsprechend, und einen unter $\beta = 35°$ gegen den Horizont abwärts wirkenden Widerstand $P_3 = 230$ Pf. zu überwinden. Welche Arbeit wird die Kraft (P_1) verrichten müssen, um diesen, anfänglich mit 2 Fuß Geschwindigkeit fortgehenden Wagen in eine Geschwindigkeit von 5 Fuß zu versetzen.

Fig. 84.



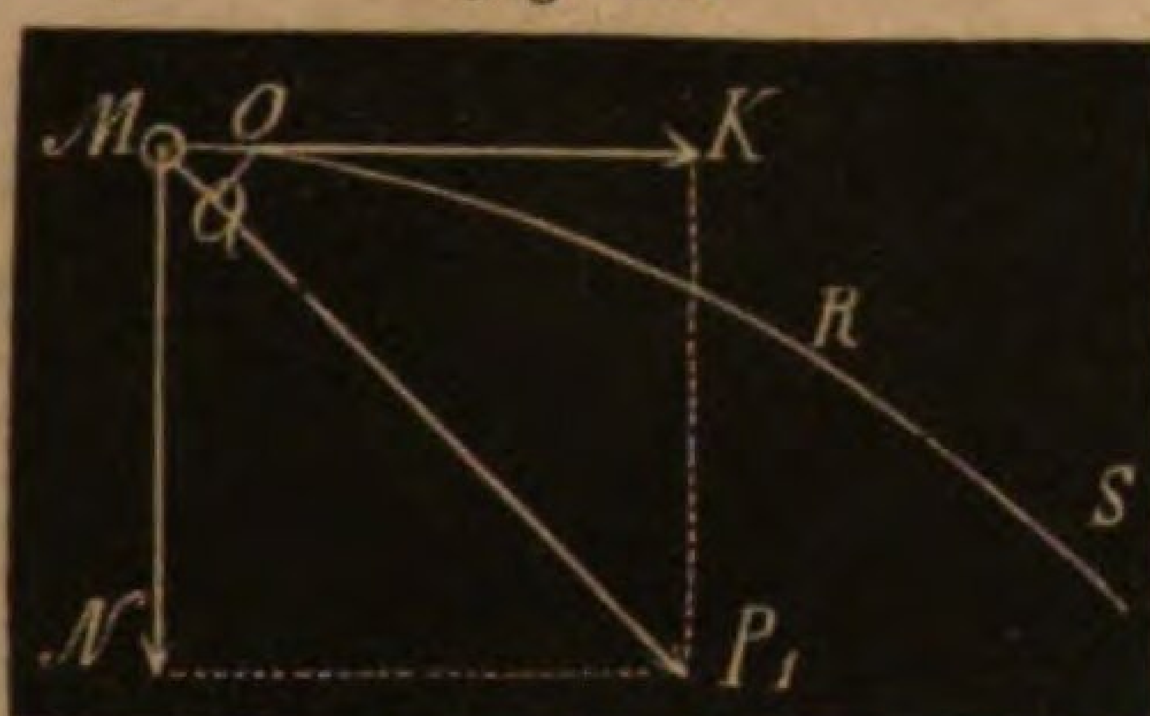
Setzen wir den Weg MO des Wagens $= s$, so haben wir die Arbeit der Kraft $P_1 = P_1 . MN_1 = P_1\, s \cos.\alpha = 660 \times s \cos. 24° = 602{,}94 . s$, ferner die Arbeit der als Widerstand wirkenden Kraft $P_2, = (-P_2) . s = -350 . s$, endlich die Arbeit von $P_3 = (-P_3) . MN_3 = -P_3\, s \cos.\beta = -230 \times s \cos. 35° = -188{,}40 . s$. Hiernach bleibt denn die Arbeit der bewegenden Kraft:

$Ps = P_1 s \cos.\alpha - P_2 s \cos 0 - P_3 s \cos.\beta = (602{,}94 - 350 - 188{,}40)\ s = 64{,}54\ .\ s$ Fßpf. Uebertragung der mechanischen Arbeit.

Die Masse erfordert aber zu ihrer Geschwindigkeitsveränderung die Arbeit $\left(\frac{v^2-c^2}{2g}\right) G = \left(\frac{5^2-2^2}{2g}\right) \times 5000 = 0{,}016 \times (25-4) \times 5000 = 1680$ Fßpf. setzen wir daher beide Arbeiten einander gleich, so erhalten wir $64{,}54\ .\ s = 1680$, folglich den Weg des Wagens : $s = \frac{1680}{64{,}54} = 26{,}03$ Fuß, und endlich die mechanische Arbeit der Kraft P_1: $P_1 s \cos.\alpha = 602{,}94\ .\ 26{,}03 = 15694$ Fßpf.

§. 82. Setzen wir unendliche kleine Wege (σ, σ_1 u. s. w.) voraus, so können wir die zuletzt gefundene Formel auch auf krumme Wege anwenden. Es sei *MORS*, Fig. 85., die Bahn des materiellen Punktes und $MP_1 = P_1$ die Mittelkraft aller auf ihn wirkenden Kräfte. Zerlegen wir diese Kraft in zwei andere, wovon die eine $MK = K$ tangential und die andere $MN = N$ normal zur Curve gerichtet ist, so nennen wir jene Tangential- und diese Normalkraft. Krummlinige Bewegung.

Fig. 85.



Während der materielle Punkt das Element $MO = \sigma$ seines krummen Weges *MS* durchläuft und seine Geschwindigkeit c in v_1 übergeht, nimmt die Masse M desselben die Arbeit $\left(\frac{v_1^2-c^2}{2}\right) M$ in Anspruch, gleichzeitig verrichtet aber die Tangentialkraft K die Arbeit $K\sigma$, und die Normalkraft die Arbeit $N\,.\,0 = 0$; es ist folglich $K\sigma = \left(\frac{v_1^2-c^2}{2}\right) M$.

Setzt man die Projection MQ des Wegelementes MO in der Kraftrichtung $= \sigma_1$, so hat man auch $P_1 \sigma_1 = K\sigma$; und daher

$$P_1 \sigma_1 = \left(\frac{v_1^2-c^2}{2}\right) M.$$

Zerlegt man den ganzen Weg *MR* des materiellen Punktes in lauter unendlich kleine Theile und projicirt jeden derselben auf die jedesmalige Kraftrichtung, so stößt man auf die Wegelemente der jedesmaligen Kraft, und man erhält durch Multiplication beider die jedesmalige Arbeit; addirt man endlich alle diese Arbeiten, so bekommt man

$$P_1\sigma_1 + P_2\sigma_2 + P_3\sigma_3 + \ldots = \left(\frac{v_1^2-c^2}{2}\right) M + \left(\frac{v_2^2-v_1^2}{2}\right) M + \left(\frac{v_3^2-v_2^2}{2}\right) M + \ldots = \left(\frac{v^2-c^2}{2}\right) M = (h-h_1)\ G,$$ wenn h_1 die der Anfangsgeschwindigkeit c, und h die der Endgeschwindigkeit v entspre-

Krummlinige Bewegung.

chende Geschwindigkeitshöhe, G aber das Gewicht Mg des bewegten Körpers bezeichnet.

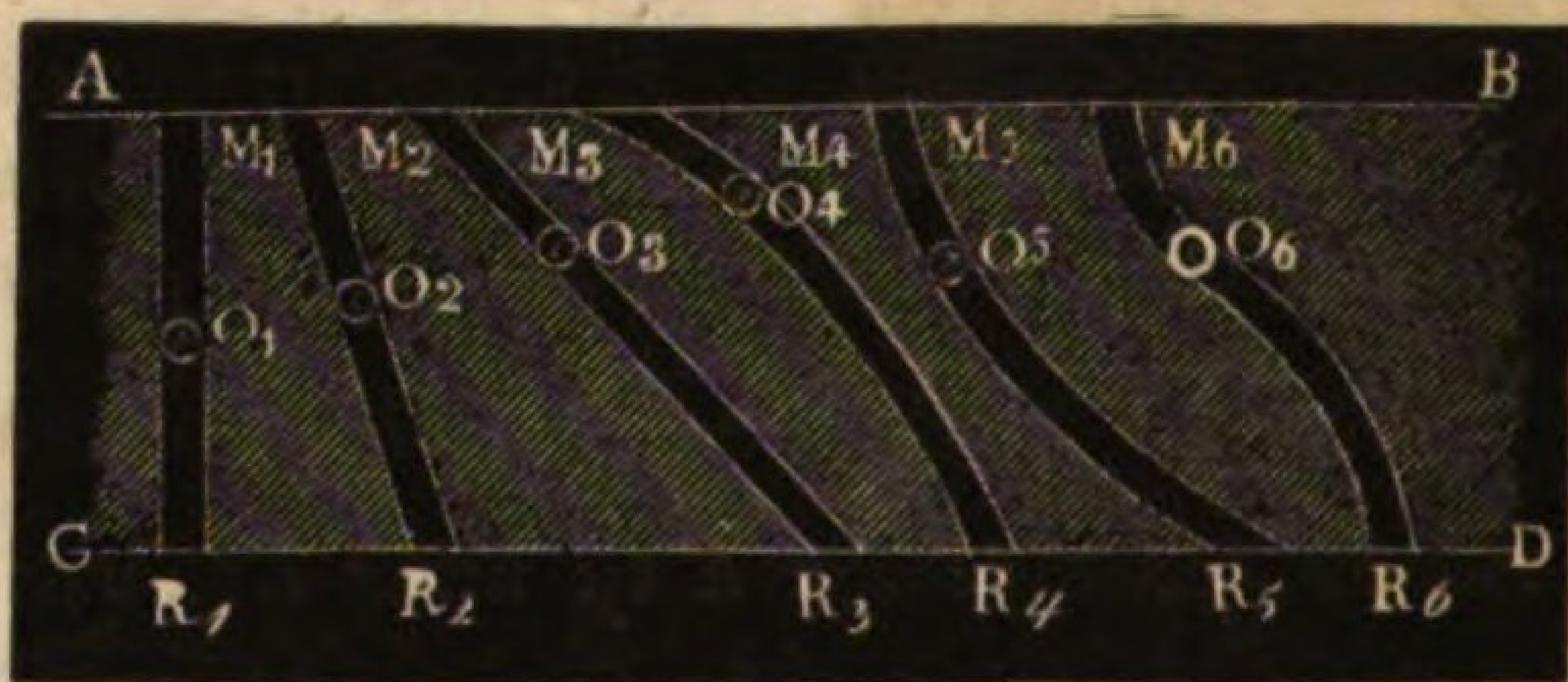
Es ist also auch bei einer krummlinigen Bewegung die ganze Arbeit der bewegenden Kraft gleich dem halben Gewinn an lebendiger Kraft oder gleich dem Producte aus dem Gewichte des bewegten Körpers und aus der Differenz der Geschwindigkeitshöhen.

Anmerkung und Beispiel. Die gewonnene Formel, welche aus der Verbindung des Principes der lebendigen Kräfte mit dem der virtuellen Geschwindigkeiten hervorgeht, ist vorzüglich in den Fällen anwendbar, wenn Körper durch feste Unterlagen oder durch Aufhängen gezwungen werden, eine bestimmte Bahn zu durchlaufen. Treibt einen solchen Körper die Schwerkraft allein, so ist die Arbeit, welche dieselbe in einem Körper vom Gewichte G beim Herabsinken von einer, der Vertikalprojection $M_1 R_1 = s$ entsprechenden Höhe erzeugt, $= Gs$ und daher

$$Gs = (h - h_1)\, G, \text{ d. i. } s = h - h_1$$

Welches also auch der Weg ist, in welchem ein Körper von einer horizontalen Ebene AB, Fig. 86, bis zu einer zweiten Horizontalebene CD herabsinkt, immer

Fig. 86.



ist die Differenz der Geschwindigkeitshöhen gleich der senkrechten Fallhöhe. Körper, welche die Bahnen $M_1\, O_1\, R_1$, $M_2\, O_2\, R_2$, $M_3\, O_3\, R_3$ u. s. w. mit gleicher Geschwindigkeit (c) zu durchlaufen anfangen, erlangen auch am Ende dieser Bahnen, obwohl zu verschiedenen Zeiten, gleiche Endgeschwindigkeiten (v). Ist die Anfangsgeschwindigkeit $c = 10$ Fuß und die senkrechte Fallhöhe $s = 20$ Fuß, also $h = s + h_1 = 20 + 0.016 . 10^2 = 21{,}6$ Fuß, so folgt die Endgeschwindigkeit $v = \sqrt{2gh} = 7{,}906 \sqrt{21{,}6} = 36{,}74$ Fuß, in welcher krummen oder geraden Linie auch das Herabfallen vor sich geht.

Dritter Abschnitt.

Statik fester Körper.

Erstes Kapitel.

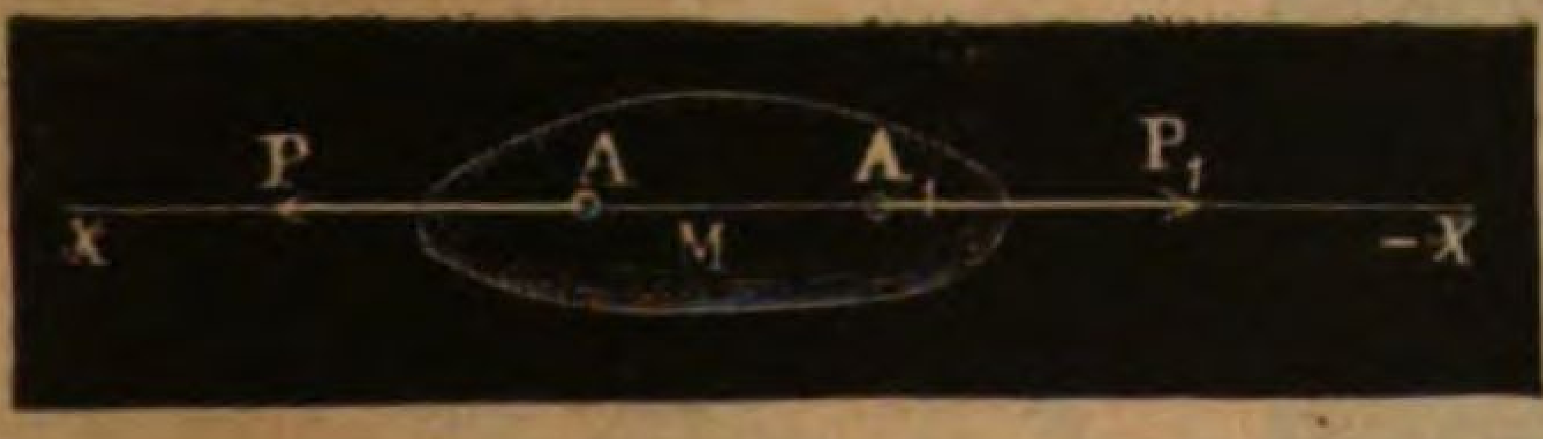
Allgemeine Lehren der Statik fester Körper.

Verlegung des Angriffspunktes.

§. 83. Obgleich jeder feste Körper durch die auf ihn wirkenden Kräfte in seiner Form verändert, nämlich zusammengedrückt, ausgedehnt, gebogen wird u. s. w., so ist es doch gestattet, denselben meist als eine feste und unveränderliche Verbindung materieller Punkte anzusehen, theils, weil diese Form-Veränderung oder Verrückung der Theile oft sehr klein ist, theils weil dieselbe innerhalb eines sehr kurzen Zeitraumes vor sich geht. Wir werden auch in der Folge, wenn es auch nicht besonders erwähnt wird, jeden festen Körper als ein System fest unter einander verbundener Punkte ansehen, weil wir dadurch die Untersuchungen wesentlich vereinfachen.

Eine Kraft P, Fig. 87., welche auf einen Punkt A eines festen Körpers M wirkt, pflanzt sich in ihrer eigenen Richtung $X\overline{X}$ unverändert durch den ganzen Körper hindurch, und eine ihr gleiche Gegenkraft P_1 setzt sich mit ihr nur dann in's Gleichgewicht,

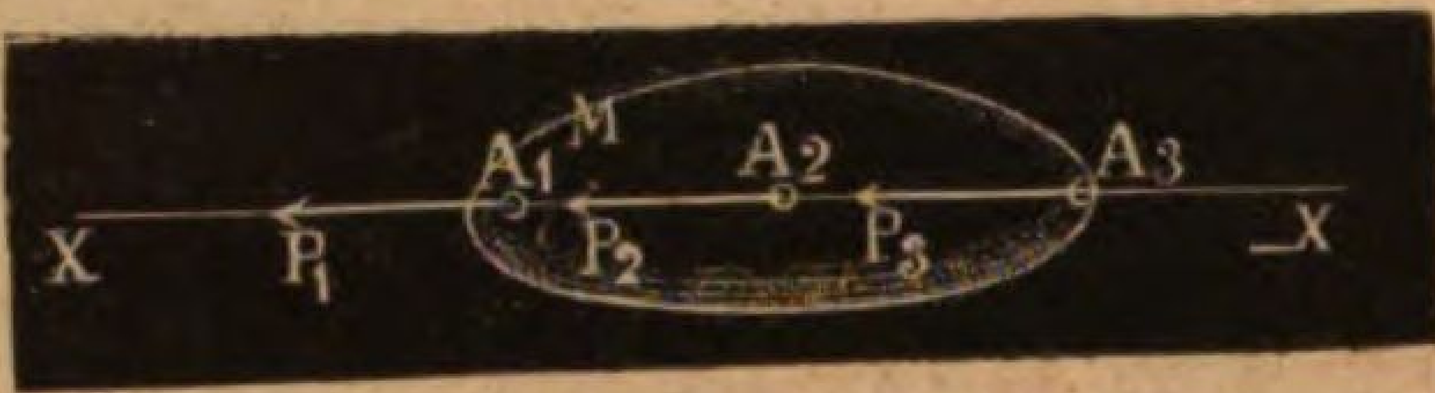
Fig. 87.



wenn der Angriffspunkt A_1 dieser in der Richtung $X\overline{X}$ der ersten Kraft liegt. Die Entfernung dieser Angriffspunkte A und A_1 ist ohne Einfluß auf diesen Gleichgewichtszustand; die beiden Gegenkräfte halten sich bei jeder Entfernung das Gleichgewicht, wenn nur beide Punkte fest unter einander verbunden sind. Hiernach läßt sich denn behaupten: die Wir-

Verlegung des Angriffspunktes.

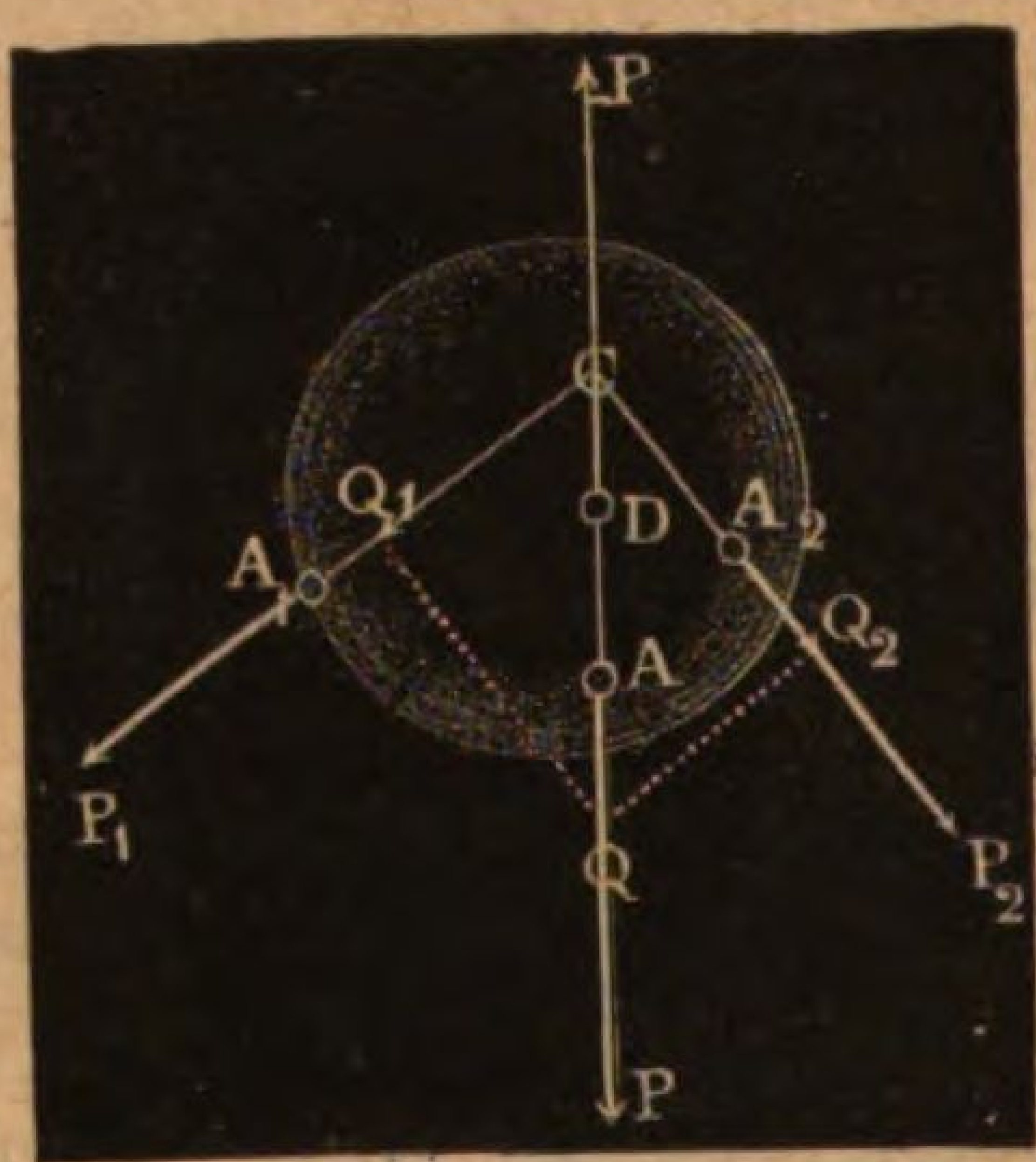
Fig. 88.



kung einer Kraft P, Fig. 88, bleibt dieselbe, in welchem Punkte A_1, A_2, A_3 u. s. w. ihrer Richtung sie auch angreift oder unmittelbar auf den Körper M wirkt.

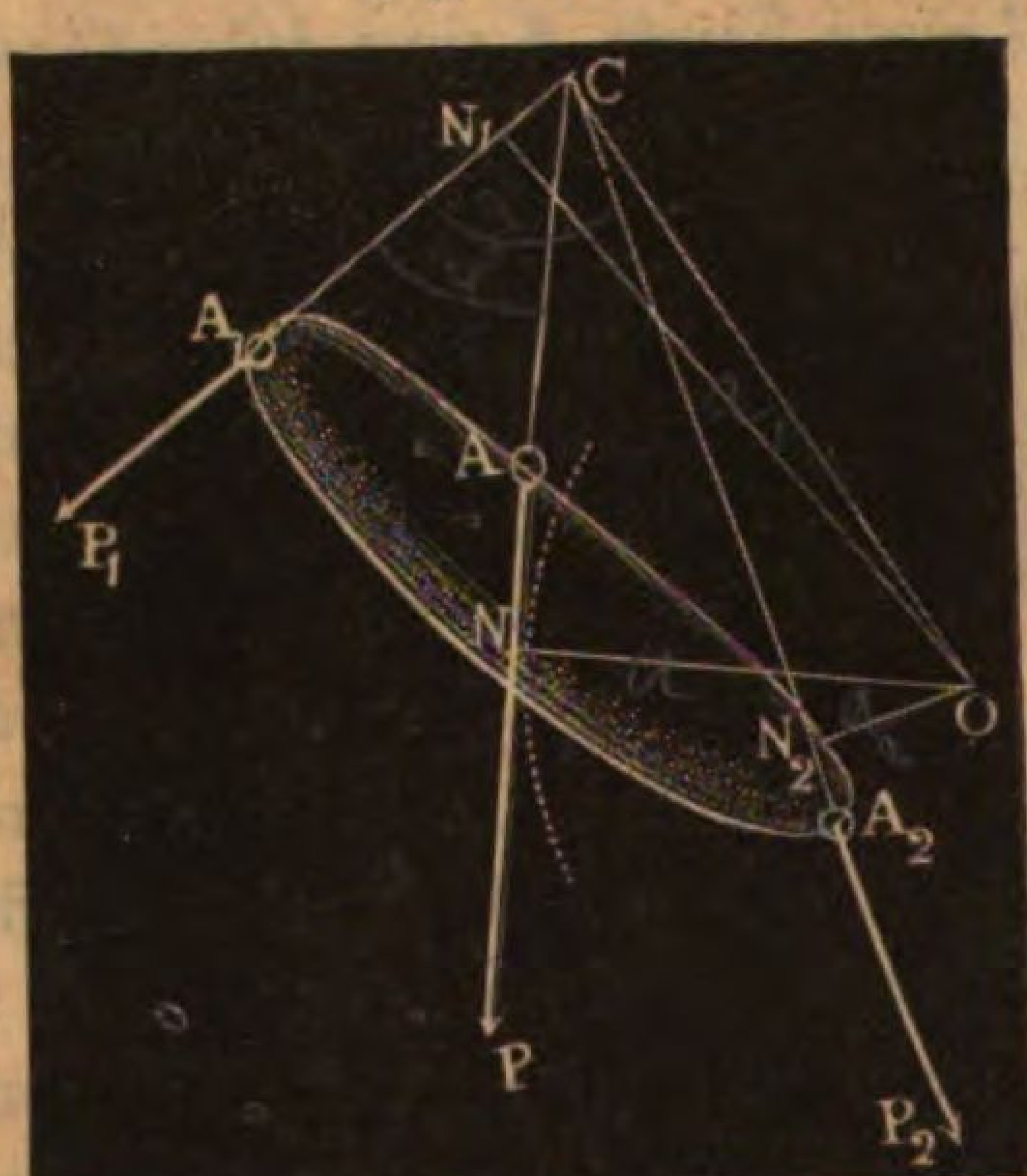
§. 84. Ergreifen zwei, in einerlei Ebene wirkende Kräfte P_1 und P_2, Fig. 89, einen Körper in verschiedenen Punkten A_1 und A_2, so ist deren Wirkung auf den Körper dieselbe, als wenn sie den Punkt C zum gemeinschaftlichen Angriffspunkte hätten, in welchem sich die Richtungen beider schneiden, denn es läßt sich nach dem oben ausgesprochenen Satze jeder dieser Angriffspunkte nach C verlegen, ohne eine Aenderung in den Wirkungen dadurch hervorzubringen. Machen wir deshalb $CQ_1 = A_1P_1 = P_1$ und $CQ_2 = A_2P_2 = P_2$, und vollenden wir jetzt das Parallelogramm CQ_1QQ_2, so giebt uns dessen Diagonale die Mittelkraft $CQ = P$ von CQ_1 und CQ_2 und also auch von den Kräften P_1 und P_2, deren Angriffspunkt übrigens auch jeder andere Punkt A in der Richtung dieser Diagonale sein kann.

Fig. 89.



Setzt man der so gefundenen Mittelkraft $AP = P$ eine gleich große, in irgend einem Punkte D der Diagonalrichtung CQ angreifende Gegenkraft $D\overline{P} = -P$ entgegen, so wird dadurch den gegebenen Kräften P_1 und P_2 das Gleichgewicht gehalten; P_1, P_2 und $-P$ sind also drei Kräfte im Gleichgewichte.

Fig. 90.



Statische Momente.

§. 85. Fällt man von irgend einem Punkte O, Fig. 90, in der Kräfteebene Perpendikel ON_1, ON_2 und ON gegen die Richtungen der Seitenkräfte P_1 und P_2 und ihrer Mittelkraft P, so hat man dem §. 79 zufolge:

$$P.ON = P_1.ON_1 + P_2.ON_2,$$ Statische Momente.

und es läßt sich demnach aus den Perpendikeln oder Abständen ON_1 und ON_2 der Seitenkräfte der Abstand ON der Mittelkraft finden, indem man setzt:

$$ON = \frac{P_1.ON_1 + P_2.ON_2}{P}.$$

Während man die Richtung und Größe der Mittelkraft durch Anwendung des Kräfteparallelogrammes findet, ergiebt sich der Ort derselben mit Hülfe der letzten Formel durch Bestimmung des Abstandes ON.

Schließen die gehörig verlängerten Kraftrichtungen den Winkel $P_1 CP_2 = \alpha$ zwischen sich ein, so hat man

1) Die Größe der Mittelkraft $P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2 P_1 P_2 \cos. \alpha}$.

Bildet ferner die Mittelkraft den Winkel $PCP_1 = \varphi$ mit der Richtung der Seitenkraft P_1, so ist

2) $\sin. \varphi = \frac{P_2 \sin. \alpha}{P}$.

Stehen endlich die Richtungen CP_1 und CP_2 der gegebenen Kräfte um $ON_1 = a_1$ und $ON_2 = a_2$ von einem willkürlichen Punkte O ab, so ist der Abstand $ON = a$ der Richtung CP der Mittelkraft von eben diesem Punkte

3) $a = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2}{P}$.

Mit Hülfe dieses letzten Abstandes a ergiebt sich aber der Ort der Mittelkraft ohne Rücksichtsnahme auf den Hülfspunkt C, wenn man mit a aus O einen Kreis construirt und an diesen eine Tangente NP legt, deren Richtung durch den Winkel φ bestimmt ist.

Beispiel. Es wirken auf einen Körper die Kräfte $P_1 = 20$ Pfund und $P_2 = 34$ Pf., deren Richtungen unter einem Winkel $P_1 CP_2 = \alpha = 70$ Grad zusammenstoßen und von einem gewissen Punkte O um $ON_1 = a_1 = 4$ Fuß und $ON_2 = a_2 = 1$ Fuß abstehen, welches ist die Größe, Richtung und der Ort der Mittelkraft? Die Größe der Mittelkraft ist:

$$P = \sqrt{20^2 + 34^2 + 2 \times 20 \times 34 \cos. 70^0} = \sqrt{400 + 1155 + 1360 \times 0,34202}$$

$= \sqrt{2021,15} = 44,96$ Pf; für ihre Richtung ist ferner $\sin. \varphi = \frac{34 \times \sin. 70}{44,96}$, $Log. \sin. \varphi = 0,85163 - 1$, daher $\varphi = 45^0\ 17'$ der Winkel, um welchen diese Mittelkraft von der Richtung der Kraft P_1 abweicht. Der Ort dieser Mittelkraft ist endlich bestimmt durch ihren Abstand ON von O, welcher ist

$$a = \frac{20 \times 4 + 34 \times 1}{44,96} = \frac{114}{44,96} = 2,536 \text{ Fuß}.$$

§. 86. Man nennt die Normalabstände $ON_1 = a_1$, $ON_2 = a_2$ u. s. w. der Kraftrichtungen von einem willkürlichen Punkte O, Fig. 91 a. f. S., die Hebelarme der Kräfte (franz. bras du levier, engl. arms of lever),

Statische Momente. weil sie bei der in der Folge abzuhandelnden Theorie des Hebels ein wesentliches Element ausmachen. Das Product Pa aus Kraft und Hebelarm hat den Namen **statisches** oder **Kraftmoment** (franz. moment des forces, engl. momentum of the forces) erhalten. Nun ist aber $Pa = P_1 a_1 + P_2 a_2$; folglich **das statische Moment der Mittelkraft gleich der Summe der statischen Momente der beiden Seitenkräfte.**

Bei der Addition der Momente ist noch auf Plus und Minus Rücksicht zu nehmen. Wirken die Kräfte P_1 und P_2, Fig. 91, nach gleicher Richtung um den Punkt O herum, stimmen z. B. die Kraftrichtungen mit den Bewegungsrichtungen der Zeiger einer Uhr überein, so nennt man

Fig. 91.

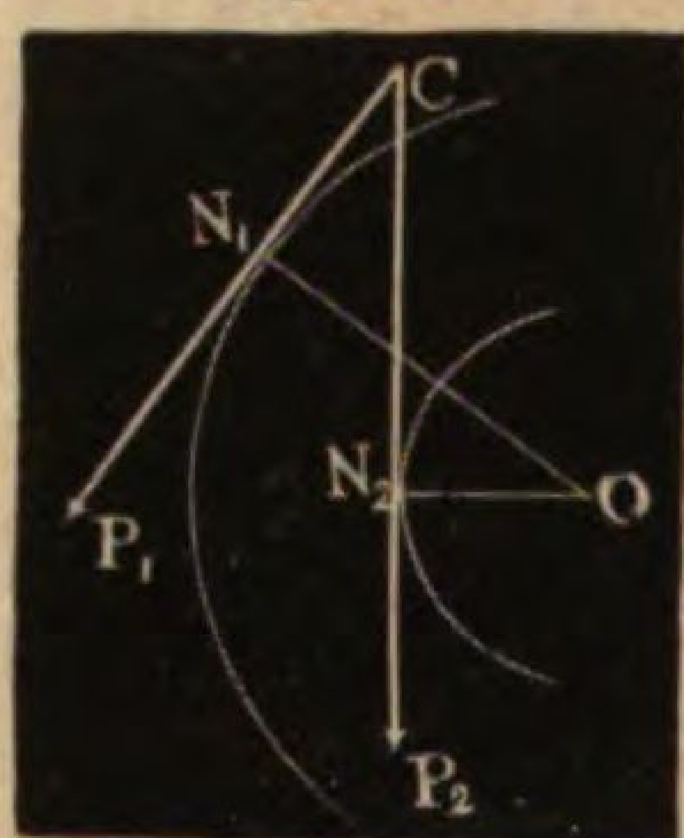
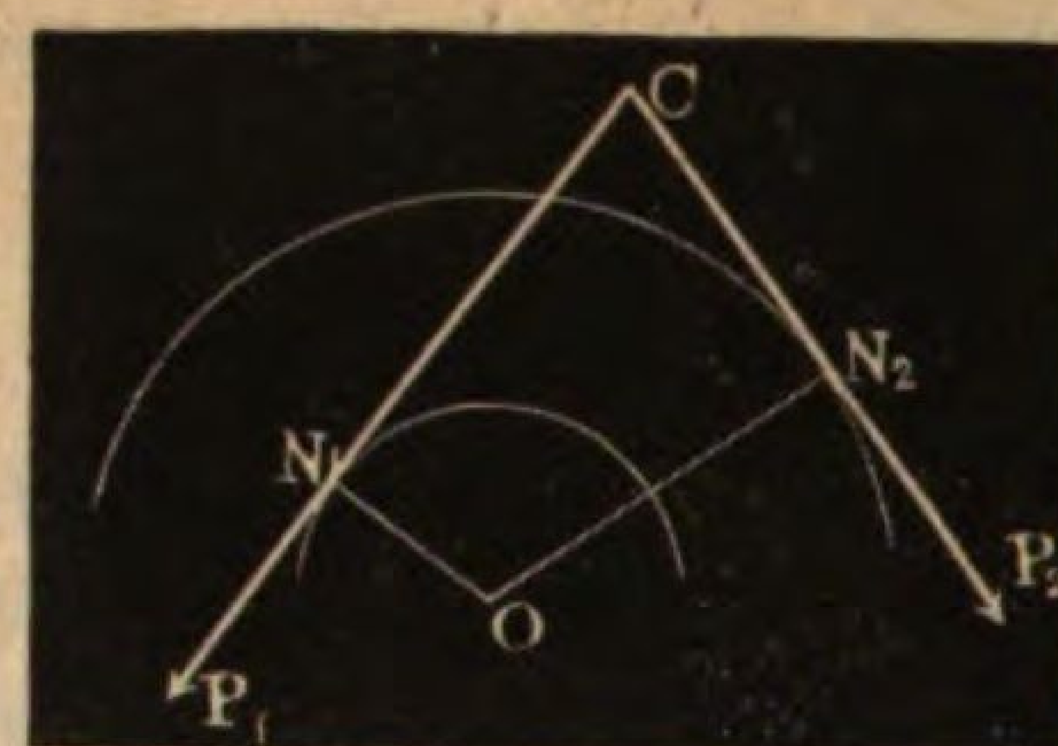
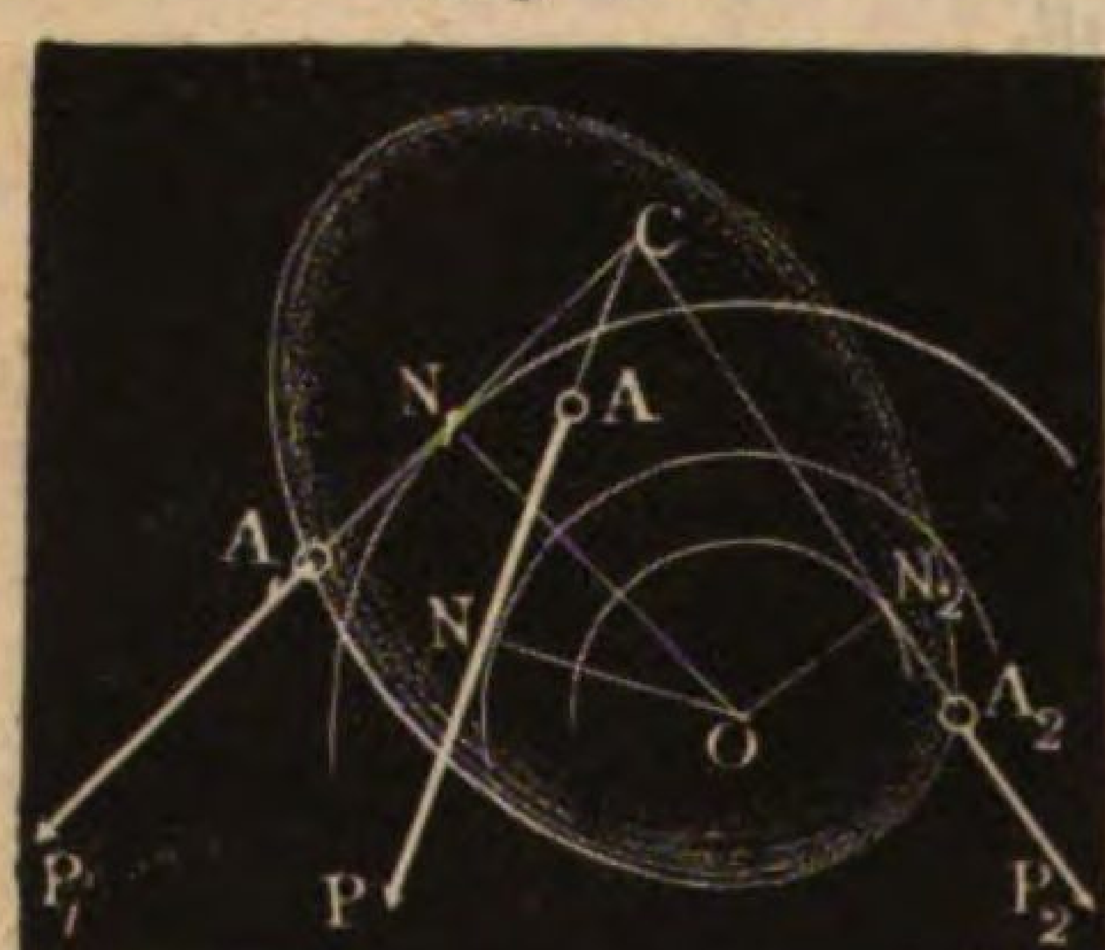


Fig. 92.



diese Kräfte, und deshalb auch ihre statischen Momente, gleichbezeichnete; wird also die eine positiv angenommen, so muß die andere ebenfalls positiv gesetzt werden. Wirken hingegen, wie in Fig. 92, die Kräfte in entgegengesetzten Richtungen um den Punkt O herum, so nennt man dieselben, sowie ihre statischen Momente, entgegensetzte, und es ist nun die eine negativ zu setzen, wenn man die andere positiv annimmt. Bei der in Fig. 93 repräsentirten Zusammensetzung ist z. B.

Fig. 93.

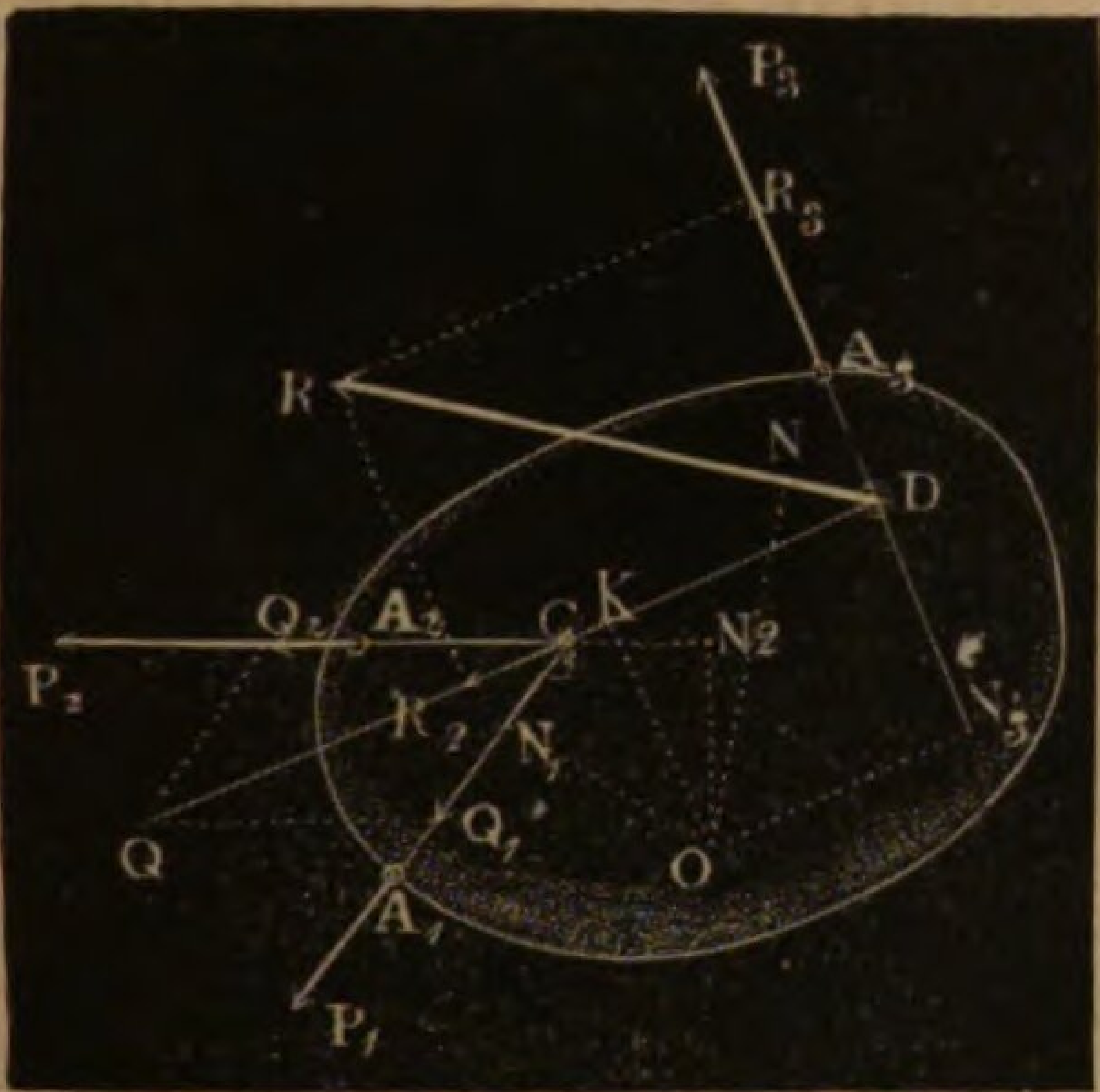


$$Pa = P_1 a_1 - P_2 a_2,$$

weil P_2 der Kraft P_1 entgegengesetzt, also ihr statisches Moment $P_2 a_2$ negativ ist.

Zusammensetzung der Kräfte in einer Ebene. §. 87. Ergreifen drei Kräfte P_1, P_2, P_3, Fig. 94, einen Körper in verschiedenen Punkten A_1, A_2, A_3, so vereinige man nach der letzten Regel erst zwei (P_1, P_2) dieser Kräfte zu einer Mittelkraft $CQ = Q$, und diese nachher, nach derselben Regel, mit der dritten Kraft (P_2), indem man aus $DR_2 = CQ$ und $DR_3 = A_3 P_3$ das Parallelogramm $DR_2 RR_3$ construirt. Die Diagonale $DR = P$ ist nun die gesuchte Mittelkraft zu P_1, P_2 und P_3.

Fig. 94.



Es ist hiernach auch leicht einzusehen, wie beim Hinzukommen einer vierten Kraft P_4 die Mittelkraft gefunden werden kann, u. s. w. Zusammensetzung der Kräfte in einer Ebene.

Bei dieser Zusammensetzung der Kräfte wird die Größe und Richtung der Mittelkraft genau so gefunden, als wenn die Kräfte in einem einzigen Punkte angriffen (s. §. 77.), es sind daher die in §. 77 angegebenen Rechnungsregeln anzuwenden, um diese beiden ersten Elemente der Mittelkraft zu finden; um aber das dritte Element, nämlich den Ort der Mittelkraft oder ihre Wirkungslinie zu finden, hat man von der Gleichung zwischen den statischen Momenten Gebrauch zu machen. Sind auch hier $ON_1 = a_1$, $ON_2 = a_2$, $ON_3 = a_3$ und $ON = a$ die Hebelarme der drei Seitenkräfte P_1, P_2, P_3 und ihrer Mittelkraft P in Hinsicht auf einen willkürlichen Punkt O, so hat man

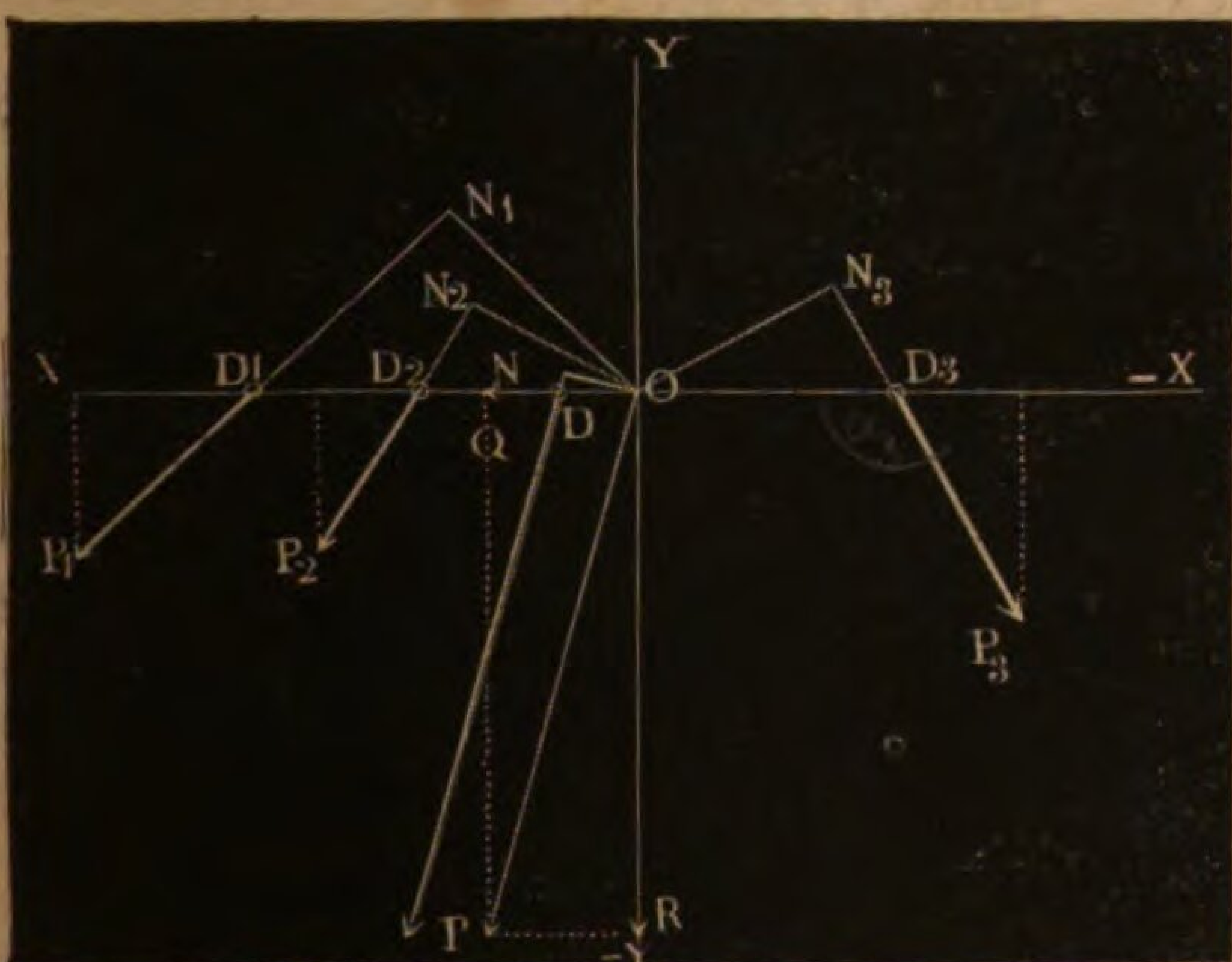
$Pa = Q.OK + P_3a_3$ und

$Q.OK = P_1a_1 + P_2a_2$, wofern Q die Mittelkraft aus P_1 und P_2 und OK der Hebelarm derselben ist. Verbinden wir aber diese beiden Gleichungen mit einander, so erhalten wir

$Pa = P_1a_1 + P_2a_2 + P_3a_3$, und ebenso stellt sich für mehr Kräfte heraus:

$Pa = P_1a_1 + P_2a_2 + P_3a_3 + \ldots$, d. h. es ist allemal das (statische) Moment der Mittelkraft gleich der algebraischen Summe aus den (statischen) Momenten der Seitenkräfte.

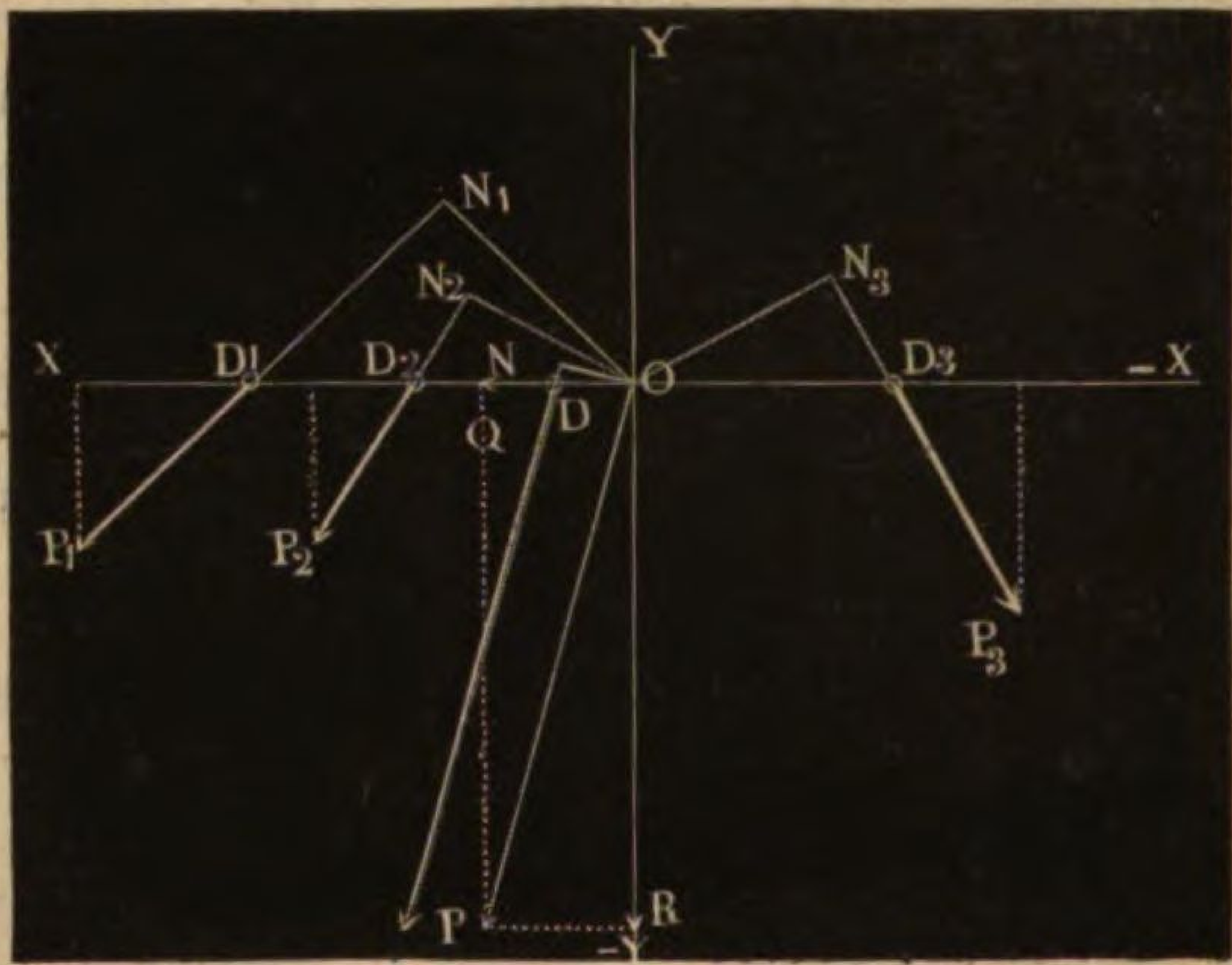
Fig. 95.



§. 88. Sind nun P_1, P_2, P_3 u. s. w., Fig. 95, die einzelnen Kräfte eines Kräftesystemes, sind ferner α_1, α_2, α_3 u. s. w. die Winkel P_1D_1X, P_2D_2X, P_3D_3X u. s. w.,

Zusammensetzung der Kräfte in einer Ebene. unter welchen eine beliebig angenommene Axe $X\overline{X}$ von den Kraftrichtungen geschnitten wird, und bezeichnen endlich a_1, a_2, a_3 u. s. w. die Hebel-

Fig. 96.



arme, ON_1, ON_2, ON_3 u. s. w. dieser Kräfte hinsichtlich des Durchschnittspunktes O zwischen beiden Axen $X\overline{X}$ und $Y\overline{Y}$, so hat man nach den §§. 77 und 87

1) die Seitenkraft parallel zur Axe $X\overline{X}$:

$$Q = P_1 \cos. \alpha_1 + P_2 \cos. \alpha_2 + \ldots.,$$

2) die Seitenkraft parallel zur Axe $Y\overline{Y}$;

$$R = P_1 \sin. \alpha_1 + P_2 \sin. \alpha_2 + \ldots.,$$

3) die Mittelkraft des ganzen Systemes:

$$P = \sqrt{Q^2 + R^2},$$

4) den Winkel φ, unter welchem die Mittelkraft die Axe schneidet, durch

$$tang. \varphi = \frac{R}{Q},$$

5) den Hebelarm der Mittelkraft, oder den Halbmesser des Kreises, welchen die Richtung der Mittelkraft tangirt:

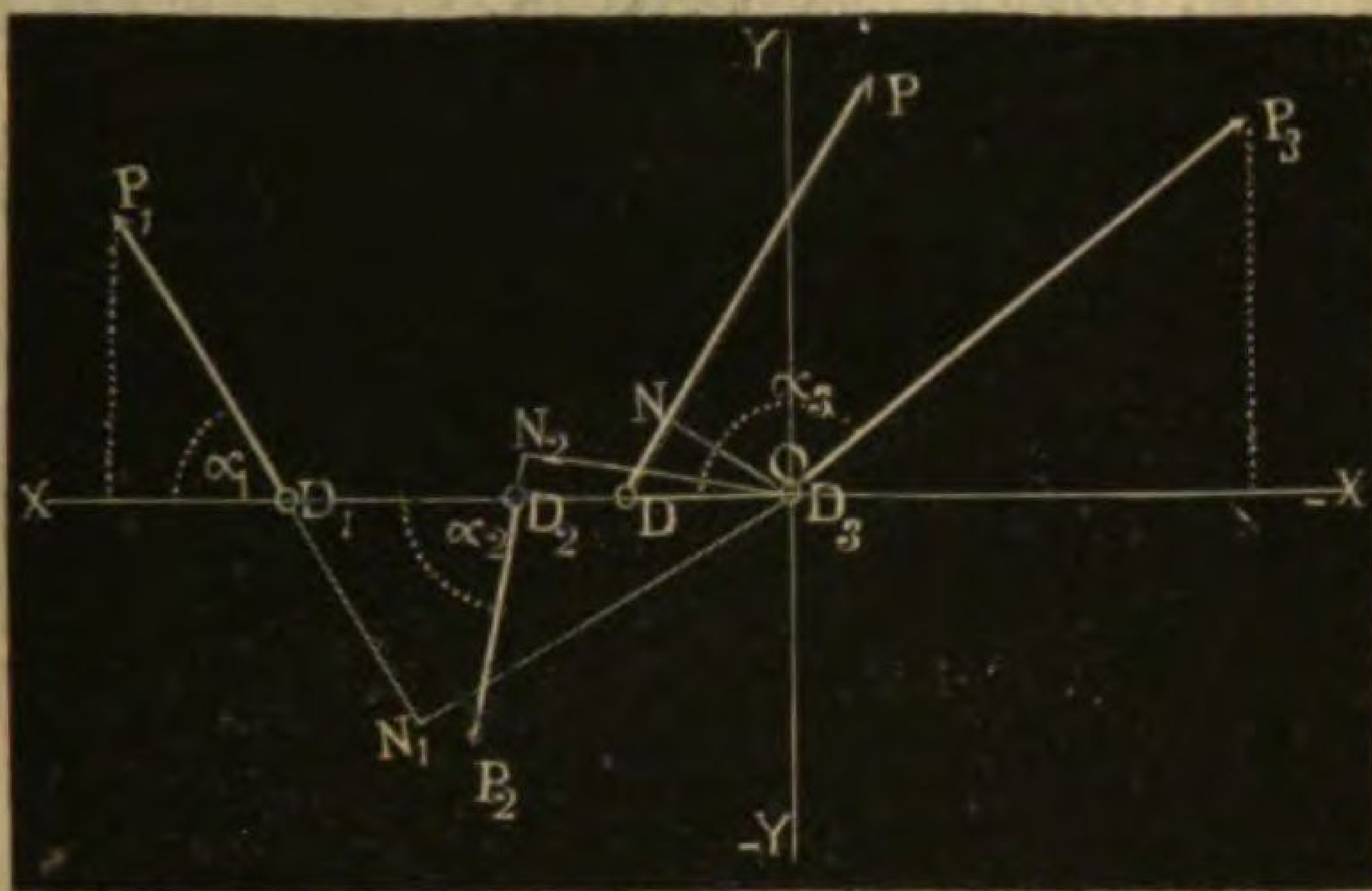
$$a = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2 + \ldots}{P}.$$

Ersetzt man diese Mittelkraft durch eine ihr gleiche Gegenkraft $(-P)$, so halten sich die Kräfte P_1, P_2, P_3.... $(-P)$ das Gleichgewicht.

Beispiel. Die Kräfte $P_1 = 40$ Pf., $P_2 = 30$ Pf., $P_3 = 70$ Pf, Fig. 97, durchschneiden die Axe $X\overline{X}$ unter den Winkeln $\alpha_1 = 60^\circ$, $\alpha_2 = -80^\circ$, $\alpha_3 = 142^\circ$, und es sind die Entfernungen der Durchschnittspunkte D_1, D_2, D_3 der Kraftrichtungen mit der Axe: $D_1 D_2 = 4$ Fuß und $D_2 D_3 = 5$ Fuß. Man sucht die sämmtlichen Bestimmungsstücke der Mittelkraft. Die Summe der Seitenkräfte parallel zur Axe $X\overline{X}$ ist:

$$Q = 40\ cos. 60^\circ + 30\ cos.\ (-80^\circ) + 70\ cos. 142^\circ$$ Zusammensetzung der Kräfte in einer Ebene.
$$= 40\ cos. 60^\circ + 30\ cos.\ 80^\circ - 70\ cos.\ 38^\circ$$
$$= 20 + 5{,}209 - 55{,}161 = -29{,}952 \text{ Pf.}$$

Fig. 97.



Die Summe der Seitenkräfte parallel zur Axe $\overline{YY}$:

$$R = 40\ sin. 60^\circ + 30\ sin. (-80^\circ) + 70\ sin. 142^\circ$$
$$= 40\ sin. 60^\circ - 30\ sin. 80^\circ + 70\ sin. 38^\circ$$
$$= 34{,}641 - 29{,}544 + 43{,}096 = 48{,}193.$$

Die gesuchte Mittelkraft ist nun:

$$P = \sqrt{Q^2 + R^2} = \sqrt{29{,}952^2 + 48{,}193^2} = \sqrt{3219{,}68} = 56{,}742 \text{ Pf.}$$

Der Winkel φ, unter welchem sie die Axe schneidet, ist ferner bestimmt durch

$$tang.\ \varphi = \frac{R}{Q} = \frac{48{,}193}{-29{,}952} = -1{,}6090, \text{ es ist daher}$$

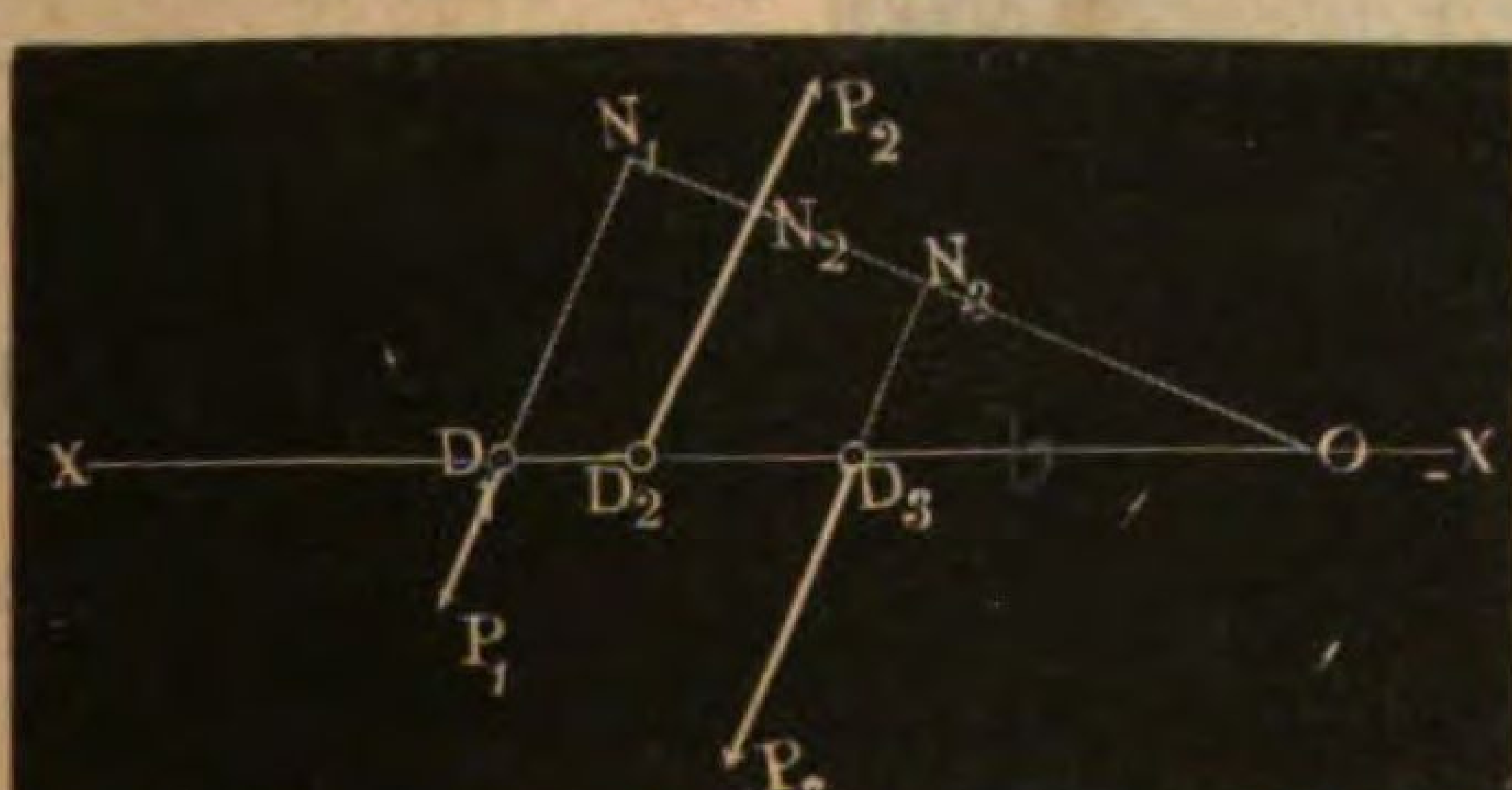
$$\varphi = 180^\circ - 58^\circ 8' = 121^\circ 52'.$$

Der Hebelarm ON_1 der Kraft P_1 ist $= OD_1\ sin.\ \alpha_1 = (4 + 5)\ sin.\ 60^\circ = 9 \times 0{,}86603 = 7{,}794$ Fß, der Hebelarm ON_2 von P_2, $= OD_2\ sin.\ \alpha_2 = 5\ sin.\ 80^\circ = 4{,}924$ Fß., endlich der Hebelarm ON_3 der Kraft $P_3 = 0$, wenn man den Angriffspunkt O nach D_3 verlegt. Es ergiebt sich folglich der Hebelarm der Mittelkraft:

$$a = \frac{40 \times 7{,}794 - 30 \times 4{,}924}{56{,}742} = \frac{311{,}76 - 147{,}72}{56{,}742} = \frac{164{,}04}{56{,}742} = 2{,}891 \text{ Fuß.}$$

§. 89. Sind die Kräfte P_1, P_2, P_3 u. s. w., Fig. 98, eines festen Systemes unter sich **parallel**, so fallen die Hebelarme ON_1, ON_2, ON_3 u. s. w. über einander; zieht man nun durch den Anfangspunkt O eine willkürliche Linie $X\bar{X}$, so schneiden hiervon die Kraftrichtungen die Stücke OD_1, OD_2, OD_3 u. s. w. ab, welche den Hebelarmen ON_1, Parallelkräfte

Fig. 98.



Parallelkräfte. ON_2, ON_3 u. s. w. proportional sind, weil $\triangle\ OD_1N_1 \sim \triangle\ OD_2N_2 \sim \triangle\ OD_3N_3$ u. s. w. ist. Bezeichnet man den Winkel $D_1ON_1 = D_2ON_2$ u. s. w. durch α, die Hebelarme ON_1, ON_2 u. s. w. durch a_1, a_2 u. s. w., die Abschnitte OD_1, OD_2 u. s. w. durch b_1, b_2 u. s. w., so hat man

$$a_1 = b_1 \cos.\alpha,\ a_2 = b_2 \cos.\alpha \text{ u. s. w.}$$

Setzt man endlich diese Werthe in die Formel

$$Pa = P_1a_1 + P_2a_2 + \ldots,$$

so erhält man

$$Pb \cos.\alpha = P_1b_1 \cos.\alpha + P_2b_2 \cos.\alpha + \ldots,$$

oder, wenn man den gemeinschaftlichen Factor $\cos.\ \alpha$ wegläßt,

$$Pb = P_1b_1 + P_2b_2 + \ldots$$

Es ist also bei jedem Systeme paralleler Kräfte gestattet, die Hebelarme durch die von irgend einer Linie $\overline{XX}$ abgeschnittenen schiefen Entfernungen, wie OD_1, OD_2 u. s. w., zu ersetzen. Weil die Größe und Richtung der Mittelkraft dieselbe ist, die Kräfte mögen in einem oder in verschiedenen Punkten angreifen, so hat die Mittelkraft des Systemes paralleler Kräfte mit den einzelnen Kräften gleiche Richtung und ist gleich der algebraischen Summe derselben; es ist also

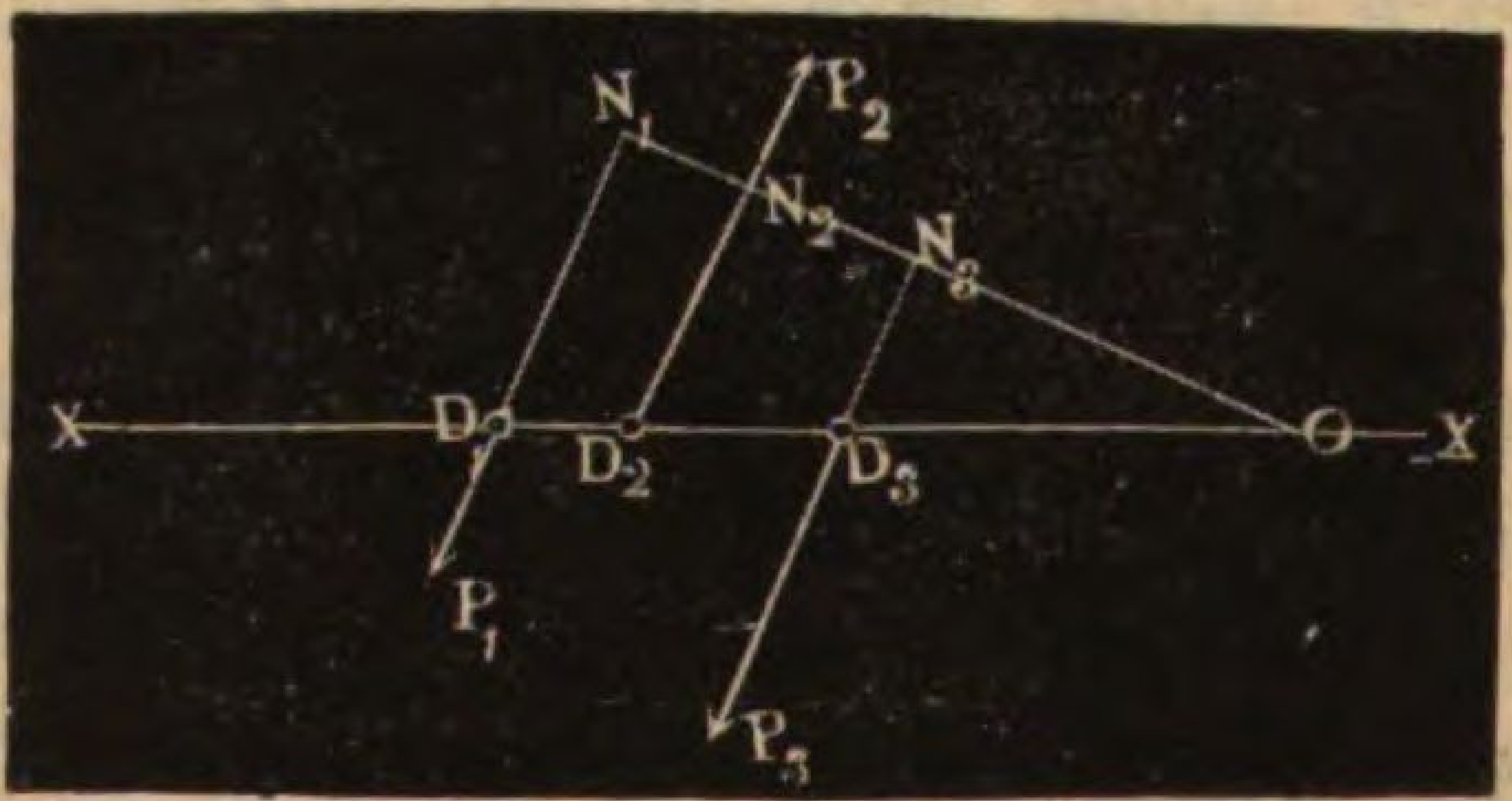
1) $P = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots$ und

2) $a = \dfrac{P_1a_1 + P_2a_2 + \ldots}{P_1 + P_2 + \ldots}$, oder auch

$$b = \frac{P_1b_1 + P_2b_2 + \ldots}{P_1 + P_2 + \ldots}.$$

Beispiel. Es seien die Kräfte $P_1 = 12$ Pf., $P_2 = -32$ Pf., $P_3 = 25$ Pf. und ihre Richtungen mögen eine gerade Linie in Punkten D_1, D_2 und D_3, Fig. 99., schneiden, deren Abstände von einander folgende sind: $D_1D_2 = 21$ Zoll, $D_2D_3 = 30$ Zoll. Man soll die Mittelkraft angeben. Die Größe dieser Kraft ist

Fig. 99.



$P = 12 - 32 + 25 = 5$ Pf., ihre Entfernung D_1O vom Punkte D_1 aus aber

$$b = \frac{12\ .\ 0 - 32\ .\ 21 + 25\ .\ (21 + 30)}{5} = \frac{0 - 672 + 1275}{5} = 120{,}6 \text{ Zoll.}$$

Kräftepaare. §. 90. Zwei gleich große, zwar parallel, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte P_1 und P_1, Fig. 100, haben die Mittelkraft

$$P = P_1 + (-P_1) = P_1 - P_1 = \text{Null, mit dem Hebelarme}$$

$$a = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2}{0} = \infty \text{ (unendlich groß).}$$ Kräftepaare.

Zur Herstellung des Gleichgewichtes mit einem solchen Kräftepaare ist diesemnach eine einzige endliche und in endlicher Entfernung wirkende

Fig. 100.

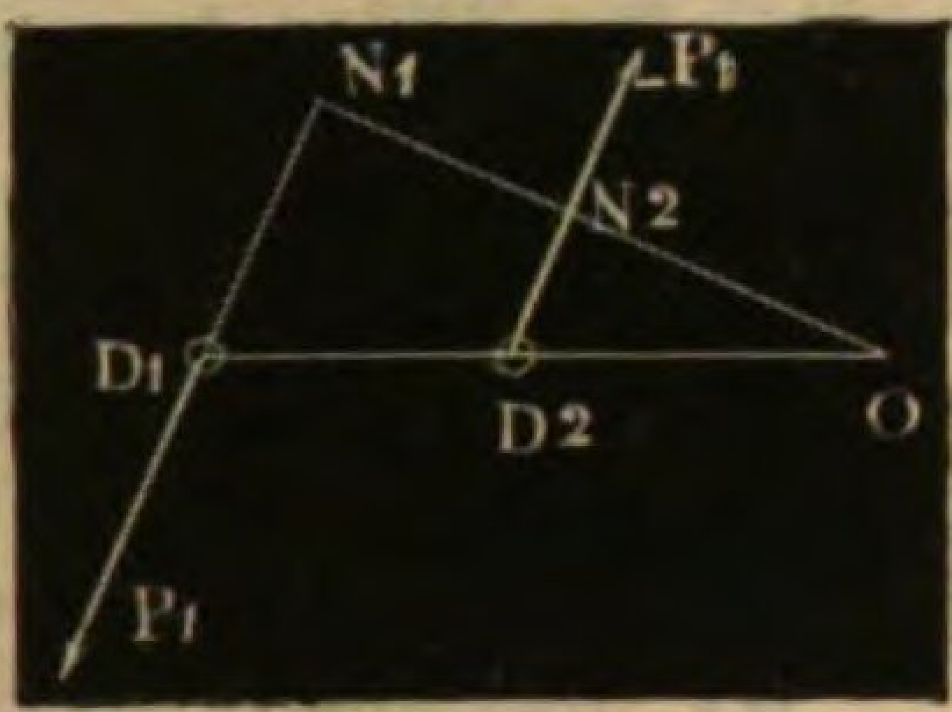
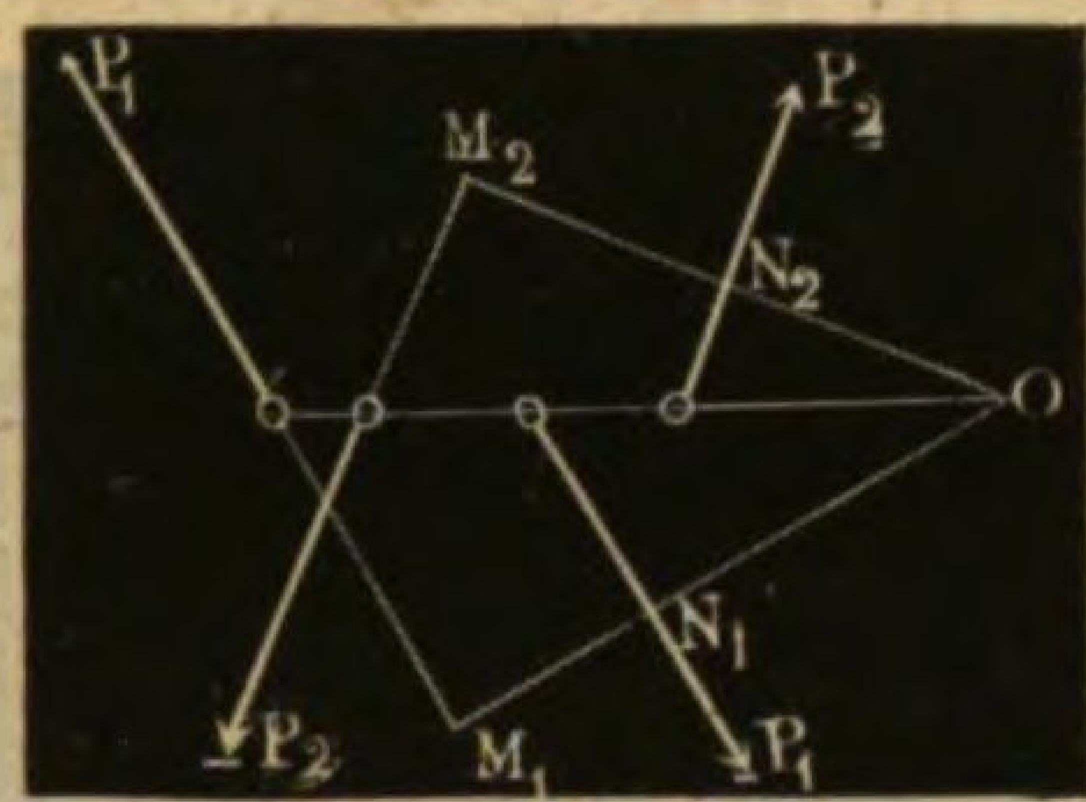


Fig. 101.



Kraft P nicht hinreichend, wohl aber können zwei solcher Kräftepaare einander das Gleichgewicht halten. Sind P_1 und $-P_1$ und $-P_2$ und P_2, Fig. 101, zwei solche Paare und $OM_1 = a_1$, $ON_1 = OM_1 - M_1N_1 = a_1 - b_1$, ferner $OM_2 = a_2$ und $ON_2 = OM_2 - M_2N_2 = a_2 - b_2$ die Hebelarme von einem gewissen Punkte O aus genommen, so hat man für das Gleichgewicht:

$$P_1 a_1 - P_1(a_1 - b_1) - P_2 a_2 + P_2(a_2 - b_2) = 0, \text{ d. i.}$$
$$P_1 b_1 = P_2 b_2.$$

Zwei solche Kräftepaare sind also im Gleichgewichte, wenn das Product aus einer Kraft und ihrem Abstande von der Gegenkraft bei einem Paare so groß ist wie bei dem anderen.

Ein Paar von gleichen Gegenkräften nennt man schlechtweg ein Kräftepaar (franz. und engl. couple), und das Product aus einer Kraft desselben und dem Normalabstande von der andern Kraft heißt das Moment des Kräftepaares. Nach dem Vorigen sind zwei nach entgegengesetzten Richtungen wirkende Kräftepaare im Gleichgewichte, wenn sie gleiche Momente besitzen.

Setzen wir in der Formel (§. 87) für den Hebelarm a der Mittelkraft:

$$a = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2 + \ldots}{P}$$

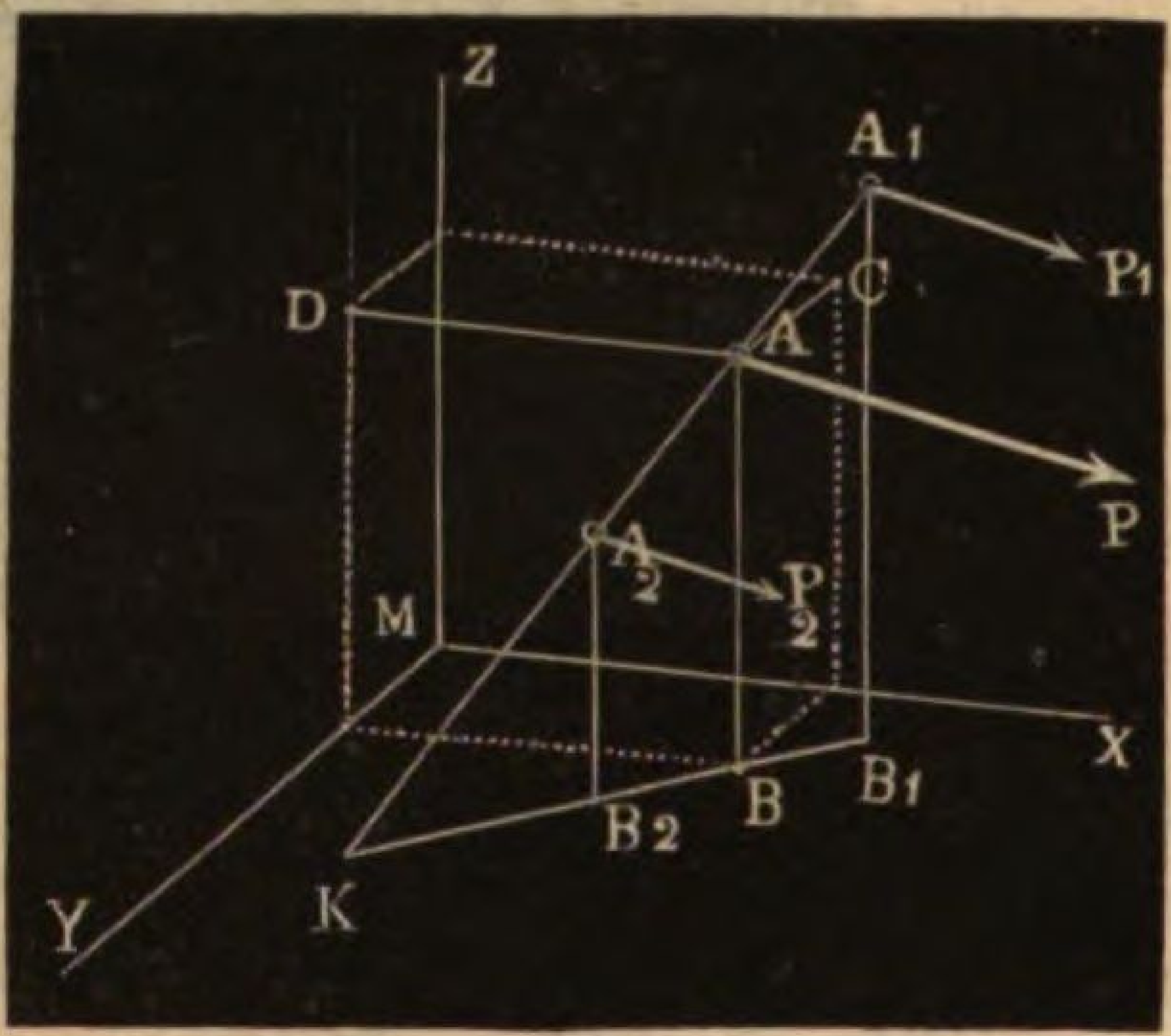
$P = 0$, ohne die Summe der statischen Momente Null zu haben, so bekommen wir ebenfalls $a = \infty$, ein Beweis, daß in diesem Falle gleichfalls keine Mittelkraft, sondern nur ein Kräftepaar möglich ist.

Beispiel. Besteht ein Kräftepaar aus den Kräften $P_1 = 25$ Pf. und $-P_1 = -25$ Pf.; ein anderes aber aus den Kräften $-P_2 = -18$ Pf. und $P_2 = 18$ Pf., und ist der Normalabstand a_1 des ersteren Paares $= 3$ Fuß, so muß

für den Gleichgewichtszustand der Normalabstand des zweiten, $a_2 = \frac{25 \times 3}{18} = 4^1/_6$ Fuß betragen.

Mittelpunkt paralleler Kräfte. §. 91. Liegen die Parallelkräfte in verschiedenen Ebenen, so ist deren Vereinigung auf folgende Weise auszuführen. Verlängert man die Gerade $A_1 A_2$, Fig. 102, welche die Angriffspunkte zweier Parallelkräfte P_1 und P_2 verbindet, bis zur Ebene XY zwischen den rechtwinklig gegen einander stehenden Axen MX und MY, und nimmt man den Durchschnittspunkt K als den Anfangspunkt an, so erhält man für den Angriffspunkt A der Mittelkraft $P_1 + P_2$ dieser Kräfte:

Fig. 102.



$$(P_1 + P_2) \cdot KA = P_1 \cdot KA_1 + P_2 \cdot KA_2.$$

Da nun B, B_1 und B_2 die Projectionen der Angriffspunkte A, A_1 und A_2 in der Ebene XY sind, so hat man

$$AB : A_1 B_1 : A_2 B_2 = KA : KA_1 : KA_2, \text{ und daher auch}$$
$$(P_1 + P_2)\, AB = P_1 \cdot A_1 B_1 + P_2 \cdot A_2 B_2.$$

Bezeichnen wir die Normalabstände $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ u. s. w. der Angriffspunkte von der Grundebene XY durch z_1, z_2, z_3 u. s. w., den Normalabstand des Angriffspunktes A von eben dieser Ebene aber durch w_1, so haben wir hiernach für zwei Kräfte:

$$(P_1 + P_2)\, w_1 = P_1 z_1 + P_2 z_2; \text{ für drei:}$$
$$(P_1 + P_2 + P_3)\, w_2 = (P_1 + P_2)\, w_1 + P_3 z_3 = P_1 z_1 + P_2 z_2 + P_3 z_3$$

u. s. w., es ist also allgemein:

$$(P_1 + P_2 + P_3 + \ldots)\, w = P_1 z_1 + P_2 z_2 + P_3 z_3 \ldots, \text{ folglich:}$$
$$1)\ w = \frac{P_1 z_1 + P_2 z_2 + \ldots}{P_1 + P_2 + \ldots}$$

Setzen wir ebenso die Abstände AC und AD des Angriffspunktes der Mittelkraft von den Ebenen XZ und $YZ = v$ und u, so wie die Abstände der Angriffspunkte $A_1, A_2 \ldots$ von eben diesen Ebenen durch $y_1, y_2 \ldots$ und $x_1, x_2 \ldots$, so erhalten wir

$$2)\ v = \frac{P_1 y_1 + P_2 y_2 + \ldots}{P_1 + P_2 + \ldots} \text{ und}$$
$$3)\ u = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + \ldots}{P_1 + P_2 + \ldots}.$$

Drei Abstände, u, v, w, von drei Grundebenen, wie z. B. von dem Fußboden und zwei Seitenwänden eines Zimmers, bestimmen aber den Punkt (A) vollständig, denn er ist der achte Endpunkt des aus u, v, und w zu construirenden Parallelepipedes; es giebt folglich nur einen einzigen Angriffspunkt der Mittelkraft eines solchen Kräftesystems. Mittelpunkt paralleler Kräfte.

Da die drei Formeln für u, v und w die Winkel, welche die Kräfte mit den Grundebenen einschließen, gar nicht enthalten, so ist der Angriffspunkt von diesen, und also auch von den Kraftrichtungen, gar nicht abhängig, es läßt sich demnach auch das ganze System um diesen Punkt drehen, ohne daß er aufhört, Angriffspunkt zu sein, wenn nur bei dieser Drehung der Parallelismus unter den Kräften nicht aufhört.

Man nennt bei einem Systeme paralleler Kräfte das Product aus einer Kraft und dem Abstande ihres Angriffspunktes von einer Ebene oder Linie das Moment dieser Kraft hinsichtlich dieser Ebene oder Linie, auch ist es gewöhnlich, den Angriffspunkt der Mittelkraft selbst den Mittelpunkt des ganzen Systems (franz. centre des forces parallèles, engl. centre of parallel forces) zu nennen. Man erhält also den Abstand des Mittelpunktes eines Systems paralleler Kräfte von irgend einer Ebene oder Linie (letzteres, wenn die Kräfte in einer Ebene liegen), wenn man die Summe der (statischen) Momente durch die Summe der Kräfte dividirt.

Beispiel. Sind die Kräfte	P_n	5	— 7	10	4	Pf.
die Abstände	x_n	1	2	0	9	Fß.
» »	y_n	2	4	5	3	»
» »	z_n	8	3	7	10	»
so hat man die Momente	$P_n x_n$	5	— 14	0	36	Fßpf.
» »	$P_n y_n$	10	— 28	50	12	»
» »	$P_n z_n$	40	— 21	70	40	»

Nun ist aber die Kraftsumme $= 19 - 7 = 12$ Pf.; es folgen daher die Abstände des Mittelpunktes dieses Systems von den drei Grundebenen:

$$u = \frac{5+36-14}{12} = \frac{27}{12} = \frac{9}{4} = 2,25 \text{ Fuß};$$

$$v = \frac{10+50+12-28}{12} = \frac{44}{12} = \frac{11}{3} = 3,66 \text{ Fuß und}$$

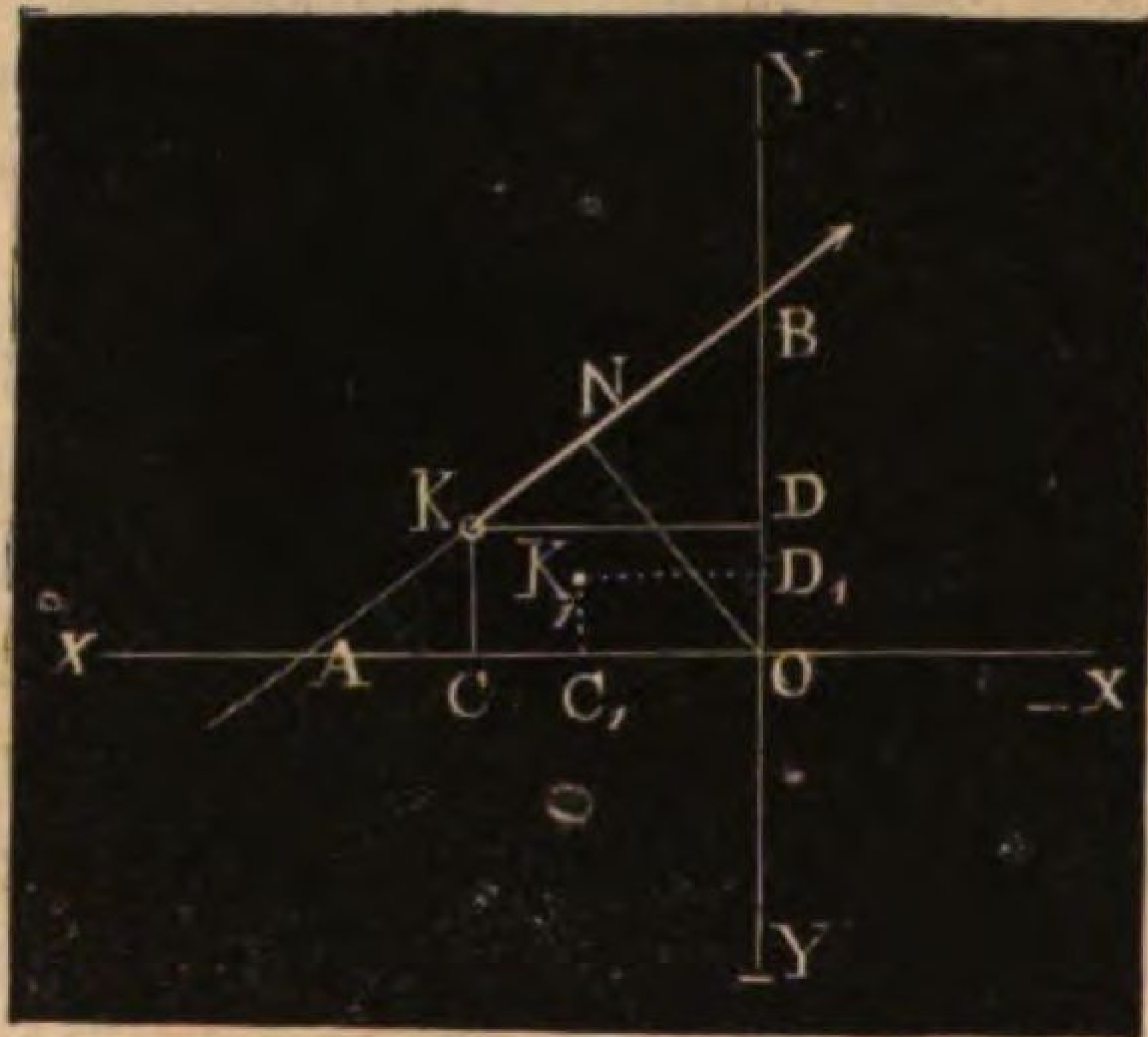
$$w = \frac{40+70+40-21}{12} = \frac{129}{12} = \frac{43}{2} = 10,75 \text{ Fuß}.$$

§. 92. Kommt es darauf an, ein aus verschieden gerichteten Kräften bestehendes System zu vereinigen, so lege man eine Ebene durch dasselbe, verlege sämmtliche Angriffspunkte in diese Ebene und zerlege jede Kraft in zwei Seitenkräfte, die eine winkelrecht auf diese Ebene und die zweite in die Ebene selbst fallend. Sind β_1, β_2 . . . die Winkel, unter welchen die Ebene von den Kraftrichtungen geschnitten wird, so folgen die Normalkräfte: $P_1 \sin. \beta_1$, $P_2 \sin. \beta_2$, . . ., dagegen die Kräfte in der Ebene Kräfte im Raume.

Kräfte im Raume.

$P_1 \cos. \beta_1$, $P_2 \cos. \beta_2$ u. s. w. Die letzteren lassen sich nach §. 88 und die ersteren aber nach dem letzten §. (91) zu einer Mittelkraft vereinigen. In der Regel werden sich die Richtungen beider Mittelkräfte nirgends schneiden, und es wird demnach auch eine Vereinigung dieser Kräfte nicht möglich sein; geht aber die Mittelkraft aus den parallelen Kräften durch einen Punkt K, Fig. 103, in der Richtung AB der Mittelkraft aus den in der Ebene (der Papierebene) befindlichen Kräften, so ist eine Zusammsetzung möglich. Setzen wir die Abstände $OC = DK = u$ und $OD = CK = v$ für den Angriffspunkt K der ersten Mittelkraft, dagegen den Hebelarm ON der zweiten $= a$ und den Winkel BAO, unter welchem dieselbe die Axe $X\overline{X}$ schneidet, $= \alpha$, so ist die Bedingung für die Möglichkeit der Zusammensetzung:

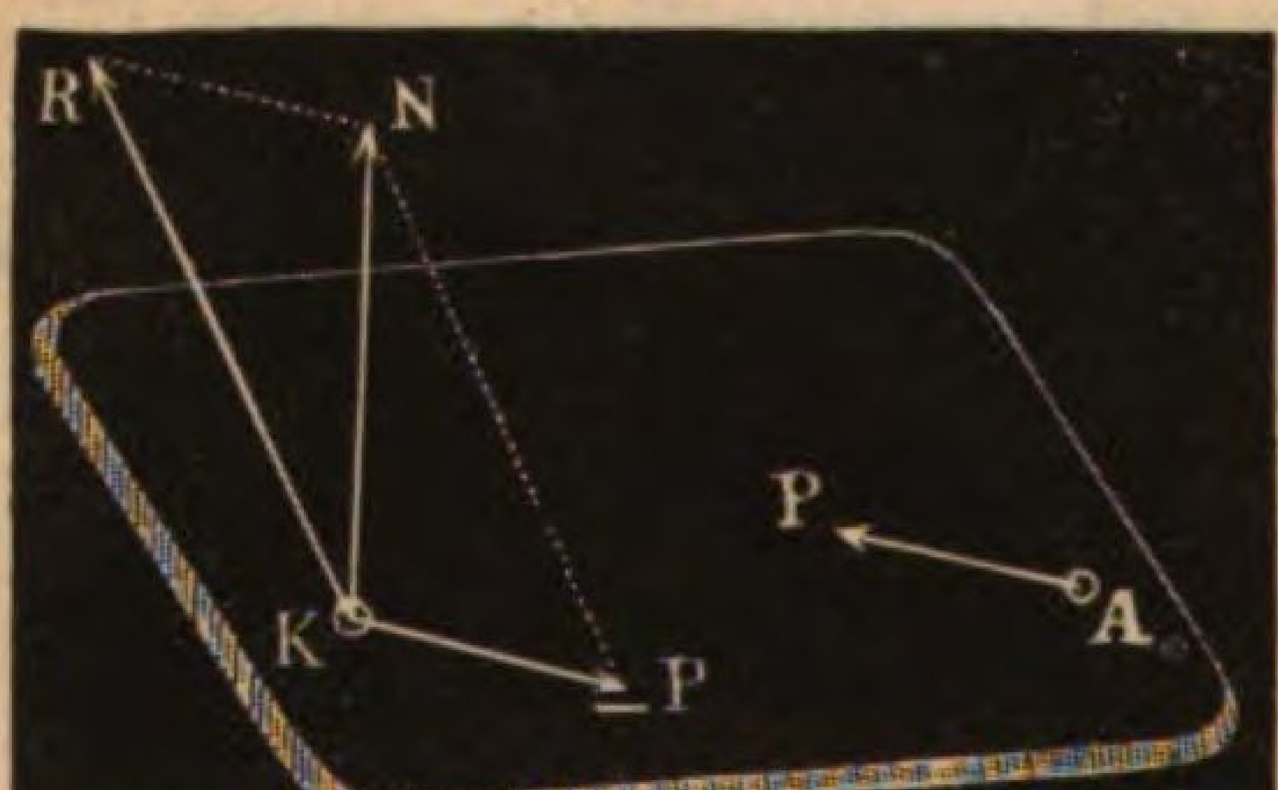
Fig. 103.



$$u \sin. \alpha + v \cos. \alpha = a.$$

Wird dieser Gleichung nicht Genüge geleistet, geht z. B. die Mittelkraft aus den Normalkräften durch K_1, so ist die Zurückführung des ganzen Kräftesystems auf eine Mittelkraft gar nicht möglich, wohl aber läßt sich dasselbe auf eine Mittelkraft R, Fig. 104 und ein Kräftepaar P, $-P$ zurückführen, wenn man die Mittelkraft N der parallelen Seitenkräfte in die Kräfte $-P$ und R zerlegt, von denen die eine der Mittelkraft P von den Kräften in der Ebene gleich, parallel und entgegengesetzt gerichtet ist.

Fig. 104.

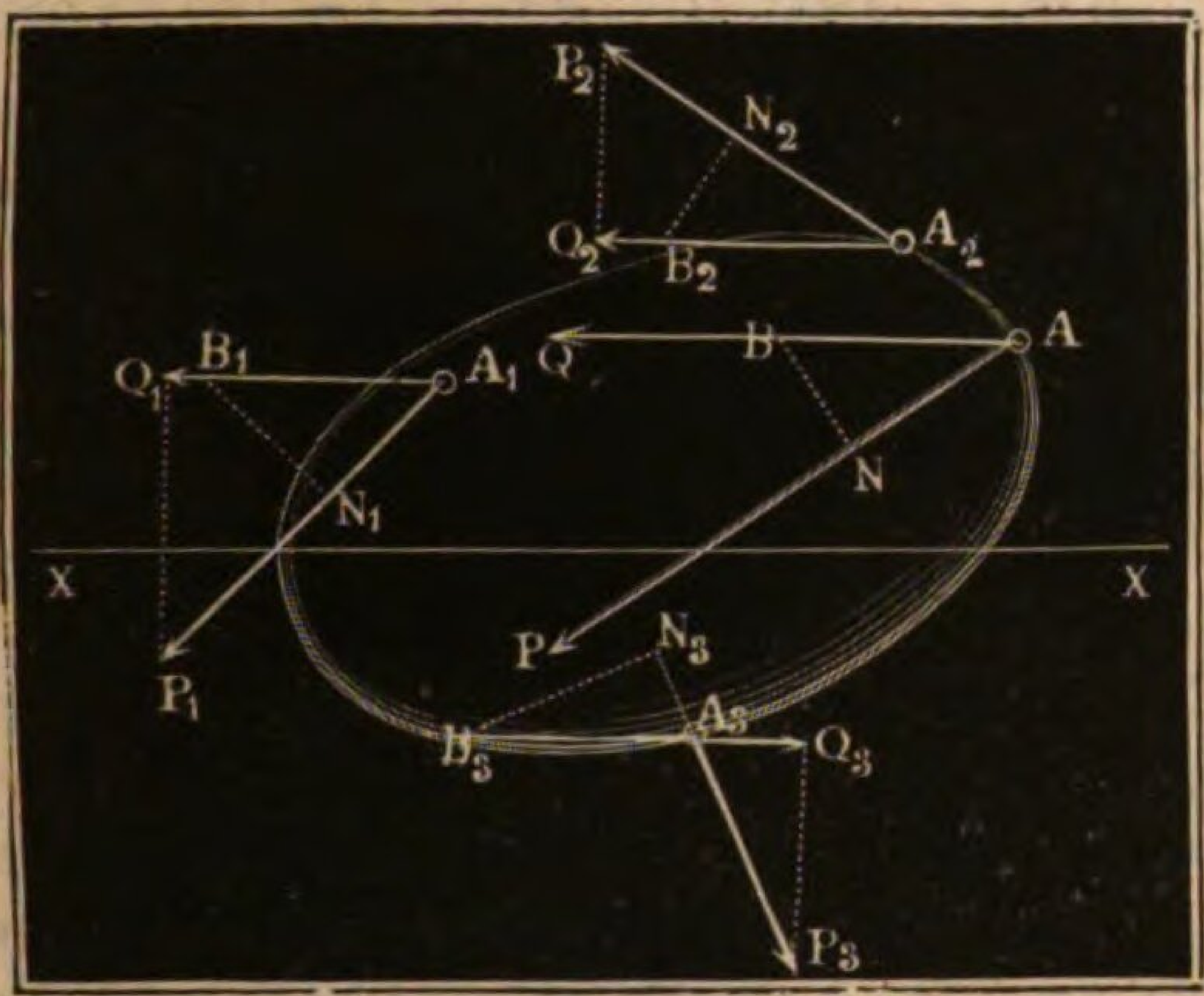


Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

§. 93. Wird ein System von in einer Ebene wirkenden Kräften P_1, P_2, P_3, Fig. 105, progressiv, d. h. so fortgerückt, daß alle Angriffspunkte A_1, A_2, A_3 ... gleiche Parallelwege $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ $A_3 B_3$ durchlaufen, so ist (in dem Sinne des Paragraphen 80) die Arbeit der Mittelkraft gleich der Summe aus den Arbeiten der Seitenkräfte, im Zustande des Gleichgewichts dieselbe also $=$ Null. Sind die in die Kraftrichtungen fallenden Projectionen $A_1 N_1, A_2 N_2$ u. s. w. des gemeinschaftlichen Weges $A_1 B_1 = A_2 B_2$ u. s. w. $= s_1, s_2$ u. s. w., so ist also die mechanische Arbeit der Mittelkraft:

$$Ps = P_1 s_1 + P_2 s_2 + \ldots.$$

Fig. 105.



Princip der virtuellen Geschwindigkeiten

Dieses Gesetz folgt aus einer der Formeln des §. 88. Nach dieser ist der mit einer Axe XX paralell laufende Component Q der Mittelkraft gleich der Summe $Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots$ der gleichlaufenden Componenten der Seitenkräfte P_1, P_2 u. s. w.; nun folgt aber aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $A_1B_1N_1$ und $A_1P_1Q_1$ die Proportion:

$$\frac{Q_1}{P_1} = \frac{A_1N_1}{A_1B_1} = \frac{s_1}{AB}, \text{ und hieraus}$$

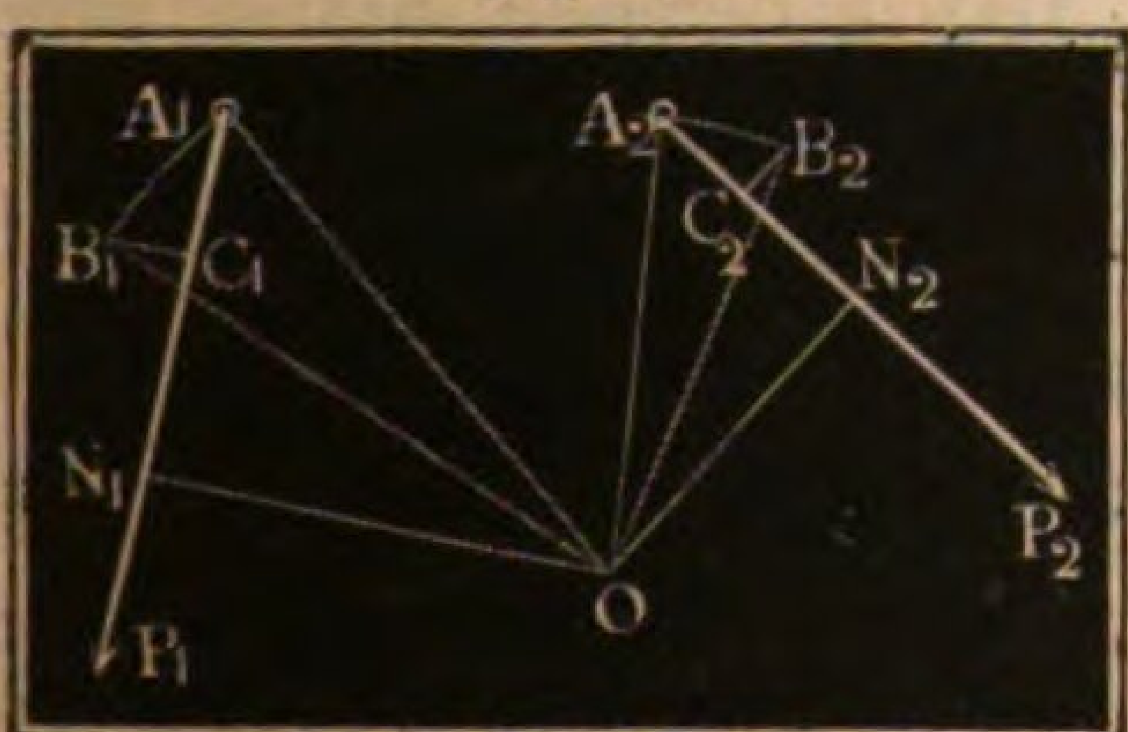
$$Q_1 = \frac{P_1 s_1}{AB}, \text{ ebenso } Q_2 = \frac{P_2 s_2}{AB} \text{ u. s. w.,}$$

man kann daher statt

$$Q = Q_1 + Q_2 + \ldots$$
$$Ps = P_1 s_1 + P_2 s_2 + \ldots \text{ setzen.}$$

§. 94. Wird das Kräftesystem P_1, P_2 u. s. w., Fig. 106, um einen Punkt O sehr wenig gedreht, so gilt das in den Paragraphen 80 und 93 ausgesprochene Gesetz des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten ebenfalls, wie sich auf folgende Weise beweisen läßt. Nach §. 86 ist das Kraftmoment $P.ON$ der Mittelkraft gleich der Summe von den Momenten der Seitenkräfte, also:

Fig. 106.



$$Pa = P_1 a_1 + P_2 a_2 + \ldots$$

Der der Drehung um den kleinen Winkel $A_1OB_1 = \varphi^0$ oder Bogen $\varphi = \frac{\varphi^0}{180^0} \cdot \pi$ entsprechende Weg $A_1 B_1$ ist auf dem Halbmesser OA_1 winkelrecht, daher das Dreieck $A_1B_1C_1$, welches entsteht, wenn man ein

Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

Loth B_1C_1 gegen die Kraftrichtung fällt, dem durch den Hebelarm $ON_1 = a_1$ bestimmten Dreiecke OA_1N_1 ähnlich und diesemnach

$$\frac{ON_1}{OA_1} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1}.$$

Setzt man die virtuelle Geschwindigkeit $A_1C_1 = \sigma_1$ und den Bogen $A_1B_1 = OA_1 . \varphi$, so erhält man

$$a_1 = \frac{OA_1 . \sigma_1}{OA_1 . \varphi} = \frac{\sigma_1}{\varphi}, \text{ ebenso } a_2 = \frac{\sigma_2}{\varphi} \text{ u. s. w.}$$

Wenn man nun diese Werthe für $a_1 . a_2$ u. s. w. in der obigen Gleichung einsetzt, so erhält man

$$\frac{P\sigma}{\varphi} = \frac{P_1\sigma_1}{\varphi} + \frac{P_2\sigma_2}{\varphi} + \ldots \text{ u. s. w,}$$

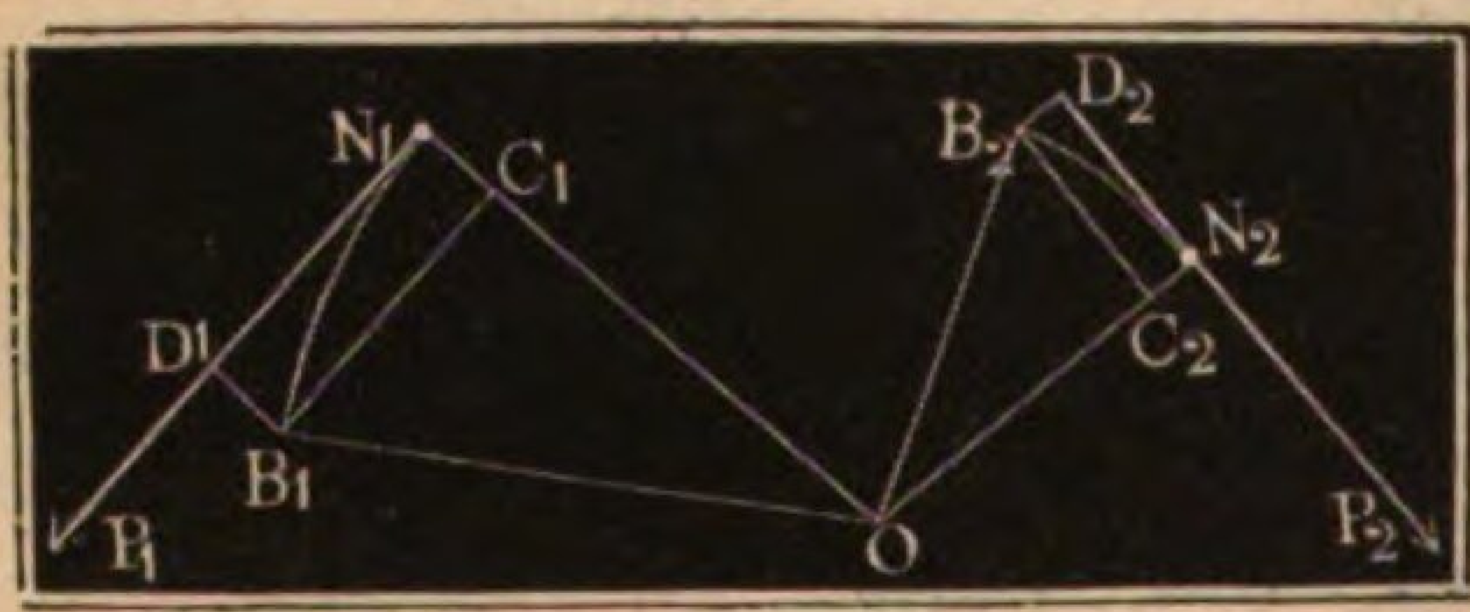
oder, da φ ein gemeinschaftlicher Divisor ist,

$$P\sigma = P_1\sigma_1 + P_2\sigma_2 + \ldots, \text{ genau wie in §. 80.}$$

Es ist also auch für kleine Drehungen die mechanische Arbeit ($P\sigma$) der Mittelkraft gleich der Summe aus den mechanischen Arbeiten der Seitenkräfte.

§. 95. Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten gilt sogar bei beliebig großen Drehungen, wenn man statt der virtuellen Geschwindigkeiten der Angriffspunkte die Projectionen N_1D_1, N_2D_2 u. s. w, Fig. 107, der in den Lothpunkten N_1, N_2 u. s. w. anfangenden Wege

Fig. 107.



einführt, denn multiplicirt man die bekannte Gleichung der statischen Momente

$Pa = P_1a_1 + P_2a_2 + \ldots$, durch $sin. \varphi_1$ und setzt in der neuen Gleichung

$$Pa\, sin. \varphi = P_1 a_1\, sin. \varphi + P_2a_2\, sin. \varphi + \ldots,$$

statt $a_1\, sin. \varphi$, $a_2\, sin. \varphi \ldots$ die Wege

$$OB_1\, sin.\, N_1OB_1 = B_1C_1 = s_1,$$

$OB_2\, sin.\, N_2OB_2 = B_2C_2 = s_2$ u. s. w., so folgt die Gleichung

$$Ps = P_1s_1 + P_2s_2 + \ldots$$

Ebenso behält dieses Princip bei endlichen Drehungen seine Richtigkeit, wenn sich die Kraftrichtungen mit dem Systeme gleichzeitig und so drehen, oder wenn sich der Angriffs- oder Lothpunkt N unaufhörlich und so verändert, daß die Hebelarme $ON_1 = OB_1$ u. s. w. unveränderlich bleiben, denn aus

$$Pa = P_1a_1 + P_2a_2,$$

folgt durch Multiplication mit φ:

$$Pa\,\varphi = P_1a_1\varphi + P_2a_2\,\varphi + \ldots,\text{ d. i.}$$

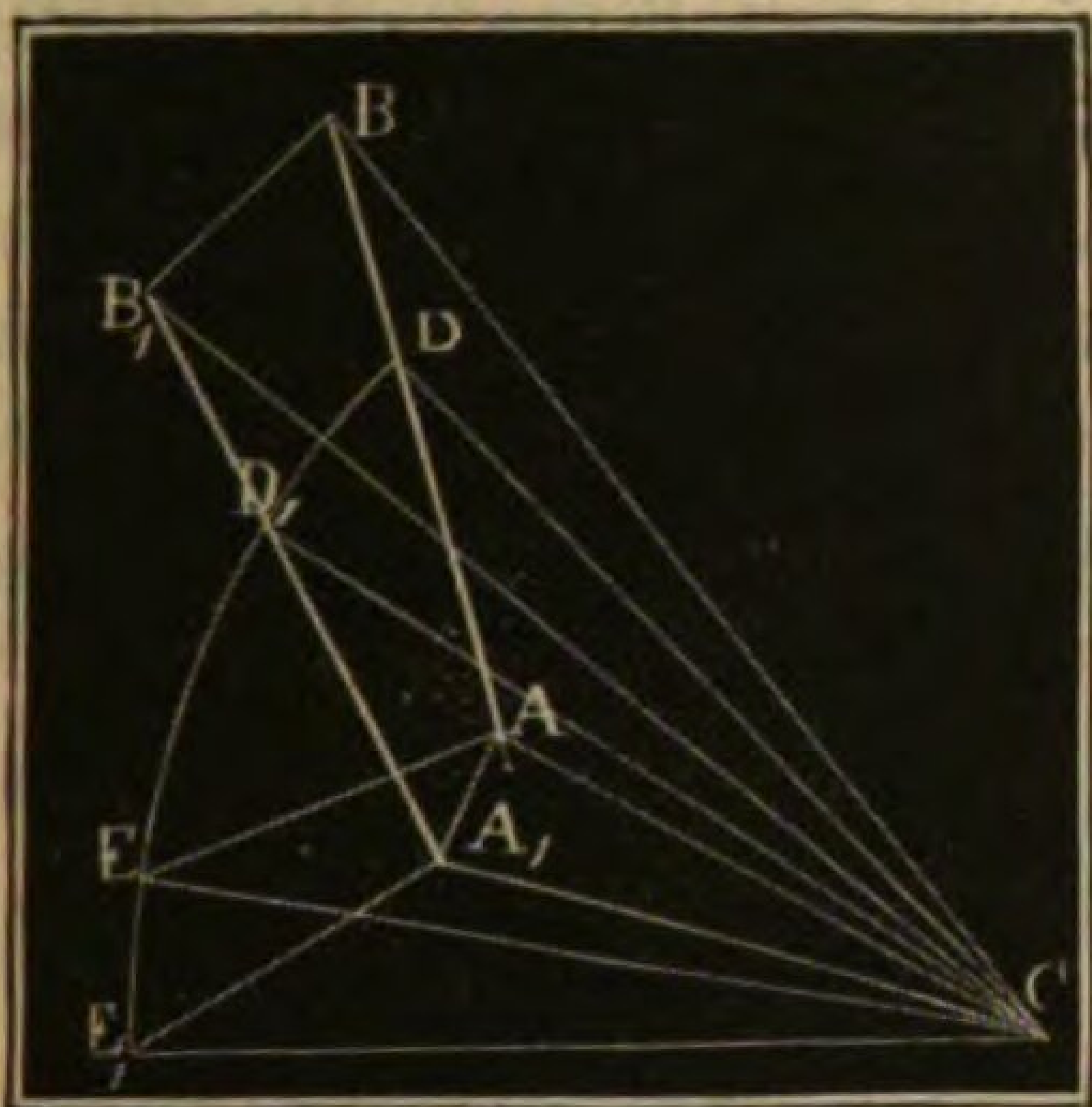
Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

$$Ps = P_1s_1 + P_2s_2 + \ldots,$$

wenn s_1, s_2 u. s. w. die bogenförmigen Wege N_1B_1, N_2B_2 u. s. w. der Lothpunkte N_1, N_2 u. s. w. bezeichnen.

§. 96. Jede in einer Ebene vor sich gehende kleine Bewegung oder Verrückung eines Körpers läßt sich als eine kleine Drehung um einen beweglichen Mittelpunkt ansehen, wie in Folgendem bewiesen werden soll. Seien zwei Punkte A und B, Fig. 108, dieses Körpers (dieser Fläche oder Linie) bei einer kleinen Bewegung nach A_1 und B_1 fortgerückt, sei also $A_1B_1 = AB$. Errichten wir in diesen Punkten Perpendikel auf die durchlaufenen kleinen Wege AA_1 und BB_1, so schneiden sich dieselben in einem Punkte C, aus dem man sich diese als Kreisbogen anzusehenden Wege AA_1 und BB_1 beschrieben denken kann. Nun sind aber wegen der Gleichheiten $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C$ und $BC = B_1C$ die Dreiecke ABC und A_1B_1C einander gleich, es ist daher auch der Winkel B_1CA_1 gleich dem Winkel BCA

Fig. 108.



und der Drehungswinkel ACA_1 gleich dem Drehungswinkel BCB_1. Macht man $A_1D_1 = AD$, so bekommt man wegen der Gleichheit der Winkel D_1A_1C und DAC und wegen der Gleichheit der Seiten CA_1 und CA in CA_1D_1 und CAD wieder zwei congruente Dreiecke, in welchen $CD_1 = CD$ und $\angle A_1CD_1 = \angle ACD$ ist. Es geht folglich bei der kleinen Verrückung der Linie AB auch jeder beliebige Punkt D in ihr in einem kleinen Kreisbogen DD_1 fort. Ist endlich E ein außerhalb der Linie AB liegender und mit ihr fest verbundener Punkt, so ist auch der kleine Weg EE_1 von diesem als ein Kreisbogen aus C anzusehen, denn macht man den Winkel $E_1A_1B_1 = EAB$ und die Entfernung $A_1E_1 = AE$, so erhält man wieder zwei congruente Dreiecke E_1A_1C und EAC mit den gleichen Seiten CE_1 und CE und den gleichen Winkeln A_1CE_1 und ACE, und dasselbe läßt sich auch für jeden andern mit AB fest verbundenen Punkt beweisen. Man kann folglich jede kleine Bewegung einer mit AB fest verbundenen Fläche oder eines festen Körpers als eine kleine Drehung um ein Centrum ansehen, das sich ergiebt, wenn man den Durchschnittspunkt C bestimmt, in welchem sich die Perpendikel zu den Wegen AA_1 und BB_1 zweier Punkte des Körpers schneiden.

§. 97. Nach einem vorhergehenden Paragraphen (94) ist für eine kleine

Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

Drehung des Kräftesystemes die mechanische Arbeit der Mittelkraft gleich der algebraischen Summe aus den Arbeiten ihrer Componenten, nach dem letzten Paragraphen (95) läßt sich aber jede kleine Verrückung eines Körpers als eine kleine Drehung ansehen; es gilt daher das oben ausgesprochene Gesetz von dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten auch für jede beliebig kleine Bewegung eines festen Körpers oder Kräftesystemes.

Ist also in einem Kräftesysteme Gleichgewicht vorhanden, d. h. die Mittelkraft selbst gleich Null, so muß auch nach einer kleinen, übrigens beliebigen Bewegung die Summe der mechanischen Arbeiten gleich Null sein. Wenn umgekehrt für eine kleine Bewegung des Körpers die Summe der mechanischen Arbeiten gleich Null ist, so ist deshalb noch nicht Gleichgewicht nothwendig, es muß vielmehr bei allen möglichen kleinen Verrückungen diese Summe gleich Null ausfallen, wenn Gleichgewicht vorhanden sein soll. Da die das Gesetz der virtuellen Geschwindigkeiten ausdrückende Formel nur eine Bedingung des Gleichgewichts erfüllt, so fordert das Gleichgewicht, daß diesem Gesetze wenigstens bei ebensoviel Bewegungen entsprochen wird, als solcher Bedingungen gemacht werden können, z. B. für ein Kräftesystem in der Ebene bei drei von einander unabhängigen Bewegungen.

Zweites Kapitel.

Die Lehre vom Schwerpunkte.

Schwerpunkt.

§. 98. Die Gewichte von den Theilen eines schweren Körpers bilden ein System von Parallelkräften, dessen Mittelkraft das Gewicht des ganzen Körpers ist und dessen Mittelpunkt nach den drei Formeln des Paragraphen 91 bestimmt werden kann. Man nennt diesen Mittelpunkt der Schwerkräfte eines Körpers oder einer Körperverbindung den **Schwerpunkt** (franz. centre de gravité, engl. centre of gravity), auch wohl **Mittelpunkt der Masse des Körpers** oder der **Verbindung von Körpern**. Dreht man einen Körper um seinen Schwerpunkt, so hört dieser Punkt nicht auf, Mittelpunkt der Schwere zu sein, denn läßt man die drei Grundebenen, auf die man die Angriffspunkte der einzelnen Gewichte bezieht, mit dem Körper zugleich umdrehen, so ändert sich bei dieser Drehung nur die Lage der Kraftrichtungen gegen diese Ebenen, die Abstände der Angriffspunkte von diesen Ebenen hingegen bleiben unverändert. Der Schwerpunkt ist hiernach derjenige Punkt eines Körpers, in welchem

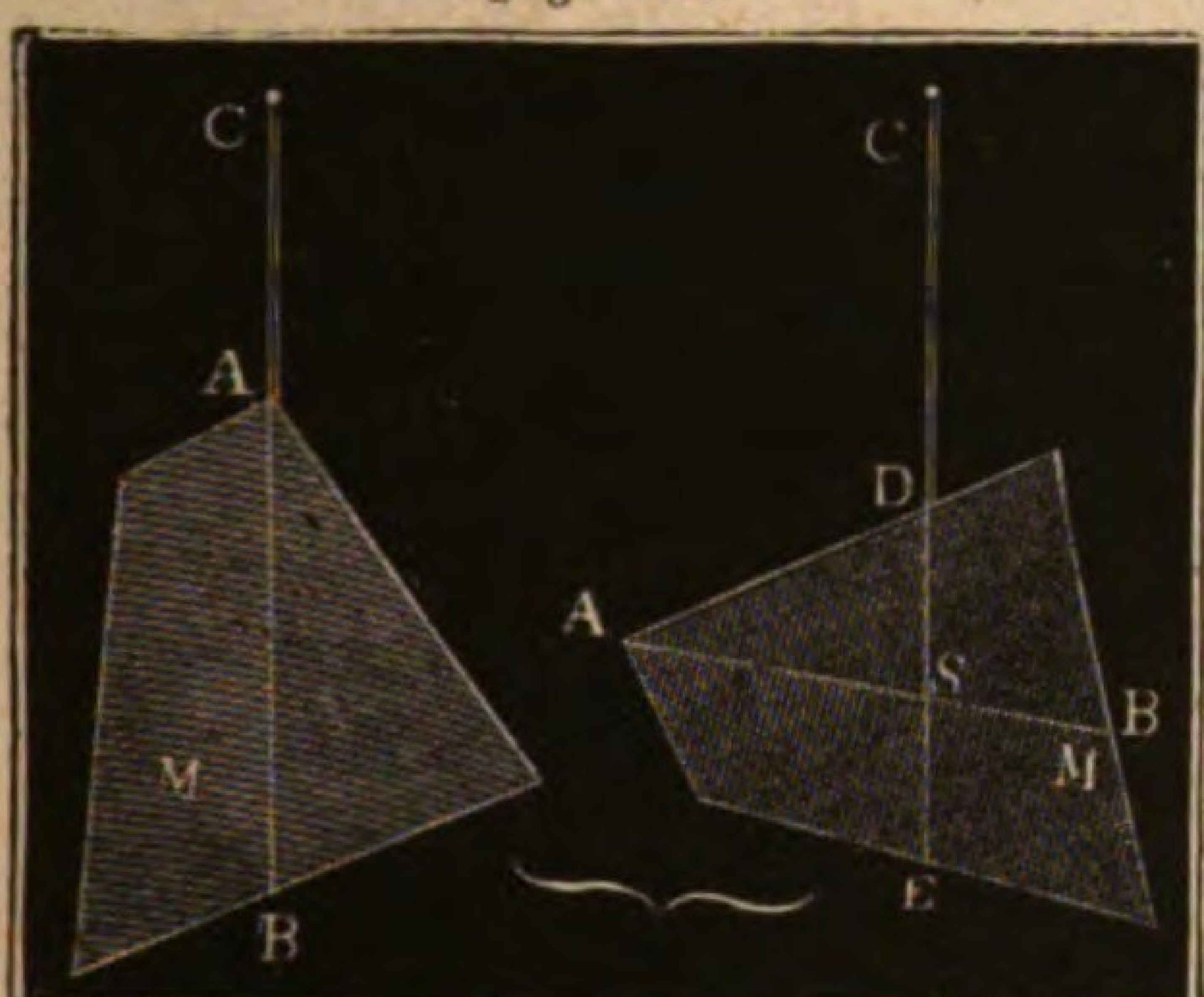
das Gewicht desselben als vertikal niederziehende Kraft wirkt, der also unterstützt oder festgehalten werden muß, um den Körper in jeder Lage in Ruhe zu erhalten. Schwerpunkt.

§. 99. Jede, den Schwerpunkt enthaltende gerade Linie heißt **Schwerlinie**, und jede durch den Schwerpunkt gehende Ebene **Schwerebene**. Der Schwerpunkt bestimmt sich durch den Durchschnitt zweier Schwerlinien, oder durch den Durchschnitt einer Schwerlinie mit einer Schwerebene, oder durch das Sichkreuzen dreier Schwerebenen.

Da sich der Angriffspunkt einer Kraft in der Kraftrichtung beliebig verlegen läßt, ohne die Wirkung der Kraft zu verändern, so ist ein Körper in einer Lage im Gleichgewichte, wenn irgend ein Punkt in der durch den Schwerpunkt gehenden Vertikallinie festgehalten wird.

Hängt man einen Körper M, Fig. 109, an einem Faden CA auf, so erhält man hiernach in der Verlängerung AB dieses Fadens eine Schwerlinie, und hängt man ihn noch auf eine zweite Weise auf, so stößt man auf eine zweite Schwerlinie DE. Der Durchschnittspunkt S beider Linien ist nun der Schwerpunkt des ganzen Körpers.

Fig. 109.



Hängt man den Körper an einer Axe auf, oder bringt man ihn über einer scharfen Kante (Schneide eines Messers) in's Gleichgewicht, so erhält man in der Vertikalebene durch die Axe oder scharfe Kante eine Schwerebene u. s. w. Empirische Bestimmungen des Schwerpunktes, wie sie eben angedeutet wurden, sind selten anwendbar, — meistens hat man von den im Folgenden gegebenen geometrischen Regeln Gebrauch zu machen, um den Schwerpunkt mit Sicherheit zu bestimmen.

Bei manchen Körpern, z. B. bei Ringen, fällt der Schwerpunkt außerhalb der Masse des Körpers. Soll ein solcher Körper in seinem Schwerpunkte festgehalten werden, so ist es nöthig, diesen durch einen zweiten Körper so mit dem ersten zu verbinden, daß die Schwerpunkte beider zusammenfallen.

§. 100. Sind x_1, x_2, x_3 u. s. w. die Abstände der Theile eines schweren Körpers von der einen Grundebene, y_1, y_2, y_3 . . . dieselben von der andern und z_1, z_2, z_3 . . . die von der dritten, sind endlich die Gewichte Schwerpunktsbestimmung.

Schwerpunkts-bestimmung. dieser Theile P_1, P_2, P_3 u. s. w., so hat man nach §. 91 die Abstände des Schwerpunktes dieses Körpers von diesen drei Ebenen:

$$x = \frac{P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 + \ldots}{P_1 + P_2 + P_3 + \ldots},$$

$$y = \frac{P_1y_1 + P_2y_2 + P_3y_3 + \ldots}{P_1 + P_2 + P_3 + \ldots},$$

$$z = \frac{P_1z_1 + P_2z_2 + P_3z_3 + \ldots}{P_1 + P_2 + P_3 + \ldots},$$

Sind die Volumina der Körpertheile: V_1, V_2, V_3 u. s. w., und ihre Dichtigkeiten: γ_1, γ_2, γ_3 u. s. w., so läßt sich auch setzen:

$$x = \frac{V_1\gamma_1x_1 + V_2\gamma_2x_2 + \ldots}{V_1\gamma_1 + V_2\gamma_2 + \ldots} \text{ u. s. w.}$$

Ist endlich der Körper homogen, haben also alle Theile desselben einerlei Dichtigkeit γ, so läßt sich setzen:

$$x = \frac{(V_1x_1 + V_2x_2 + \ldots)\gamma}{V_1 + V_2 + \ldots)\gamma},$$

oder, indem man den gemeinschaftlichen Factor γ oben und unten hebt:

$$1)\ x = \frac{V_1x_1 + V_2x_2 + \ldots}{V_1 + V_2 + \ldots},$$

$$2)\ y = \frac{V_1y_1 + V_2y_2 + \ldots}{V_1 + V_2 + \ldots},$$

$$3)\ z = \frac{V_1z_1 + V_2z_2 + \ldots}{V_1 + V_2 + \ldots}.$$

Man kann also statt der Gewichte die Volumina der einzelnen Theile eines Körpers einsetzen, und bringt dadurch die Bestimmung des Schwerpunktes in das Gebiet der reinen Geometrie.

Wenn Körper nach einer oder nach zwei Raumdimensionen wenig ausgedehnt sind, wie z. B. dünne Bleche, feine Drähte u. s. w., so kann man sie als Flächen oder Linien ansehen und nun mit Hülfe der letzteren drei Formeln ihre Schwerpunkte ebenfalls bestimmen, wenn man statt der Volumina V_1, V_2 u. s. w. Flächeninhalte oder Längen einführt.

§. 101. Bei regelmäßigen Räumen fällt der Schwerpunkt mit dem Mittelpunkte zusammen, z. B. bei dem Würfel, der Kugel, dem gleichseitigen Dreiecke, Kreise u. s. w. Symmetrische Räume haben ihren Schwerpunkt in der Ebene oder Axe der Symmetrie. Die Ebene der Symmetrie $ABCD$ theilt einen Körper $ADFE$, Fig. 110, in zwei congruente Hälften, es finden daher auf beiden Seiten dieser Ebene gleiche Verhältnisse Statt, es sind also auch die Momente auf der einen

Seite so groß, wie auf der andern, und es fällt folglich der Schwerpunkt in diese Ebenen selbst. Weil ebenso die Axe EF der Symmetrie eine Schwerpunkts-bestimmung.

Fig 110

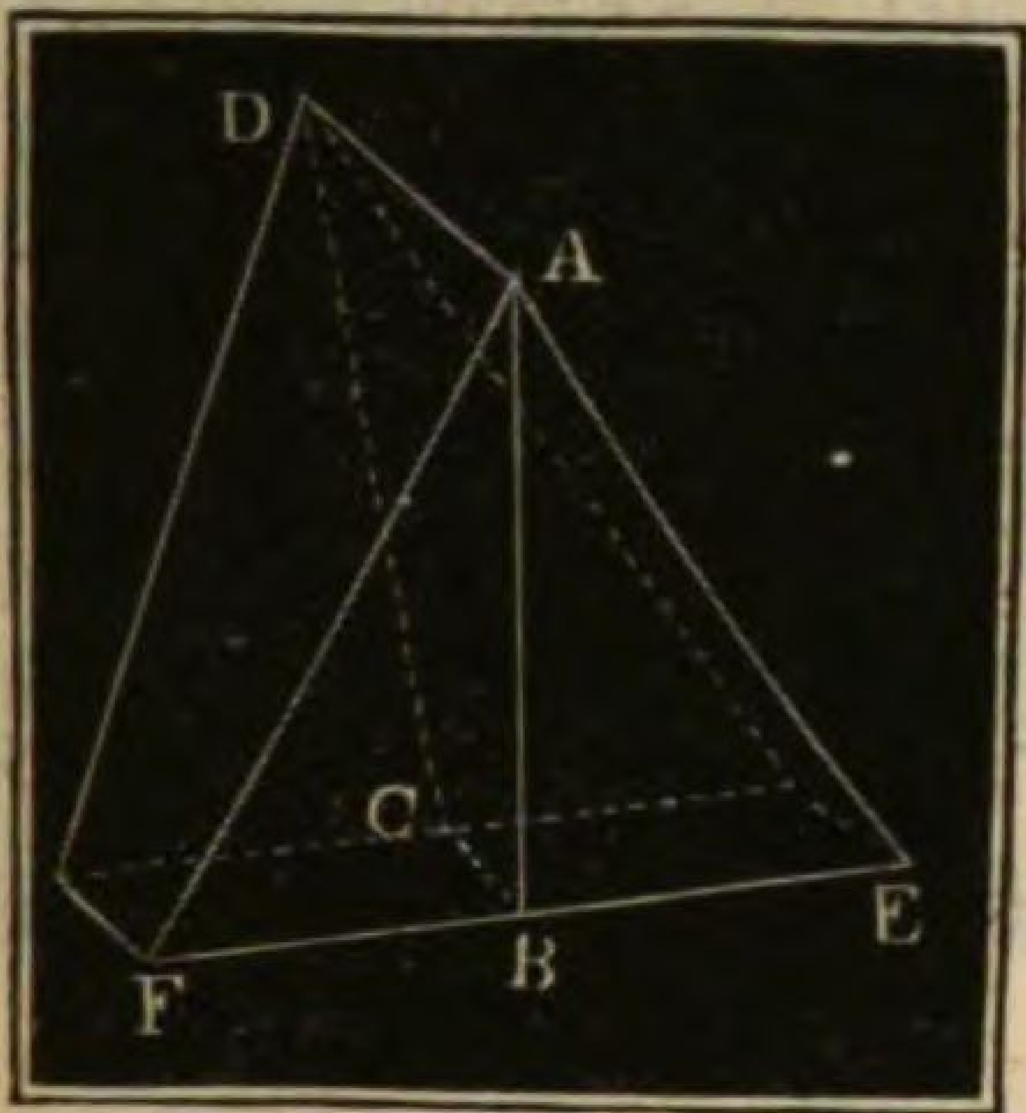
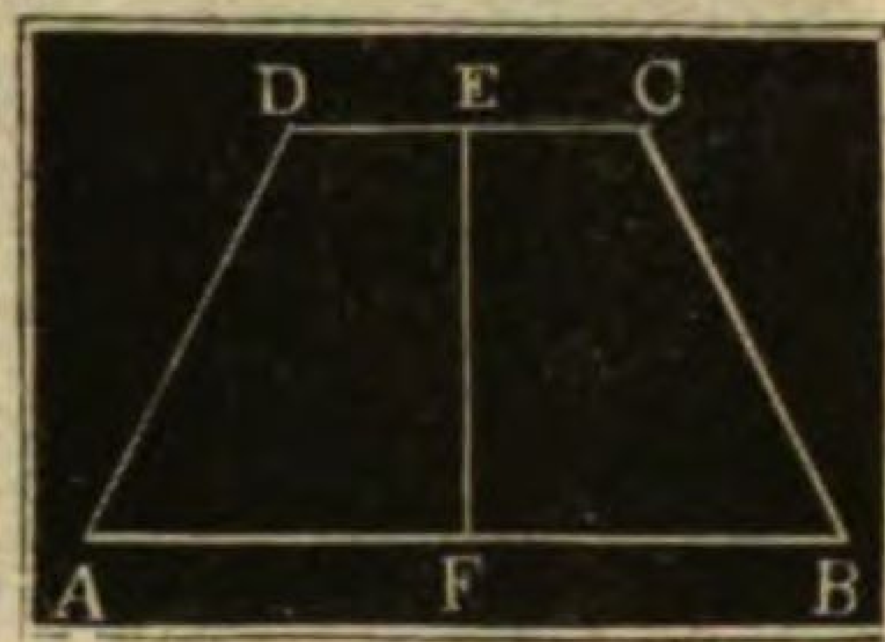


Fig. 111.



ebene Fläche $ABCD$, Fig. 111, in zwei congruente Theile zerschneidet, so sind auch hier die Verhältnisse auf der einen Seite dieselben wie auf der andern, es sind folglich auch die Momente auf beiden Seiten gleich, und es liegt der Schwerpunkt des Ganzen in dieser Linie selbst. Endlich ist auch die Symmetrieaxe KL eines Körpers $ABGH$, Fig. 112, Schwerlinie desselben, weil sie aus dem Durchschnitt von zwei Symmetrieebenen $ABCD$

Fig. 112.

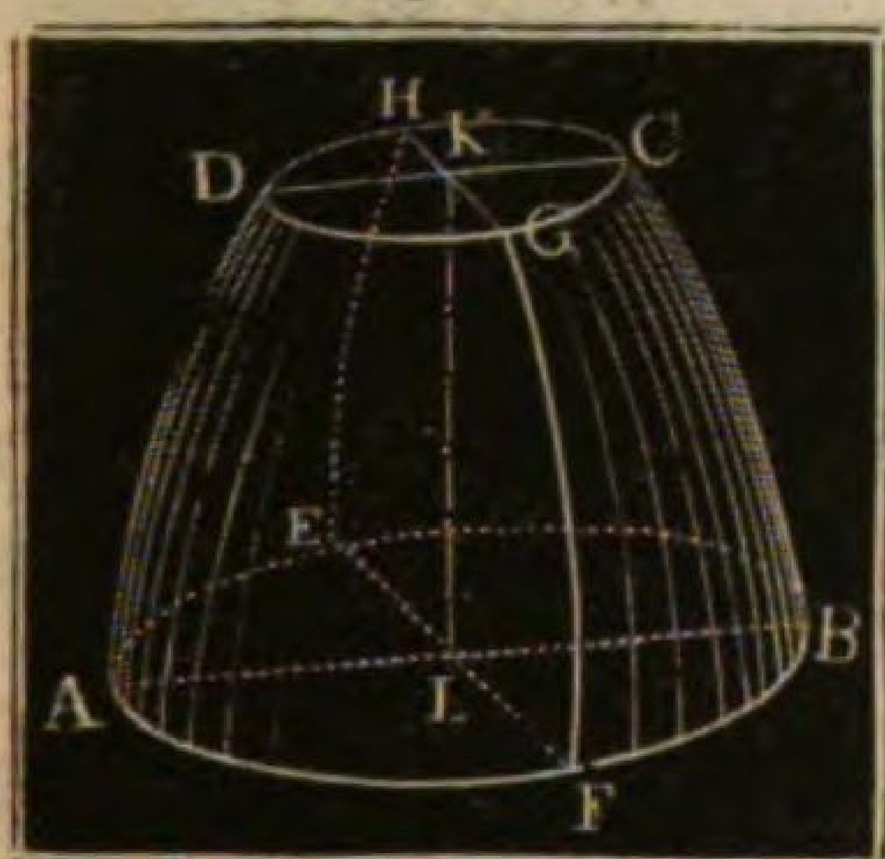
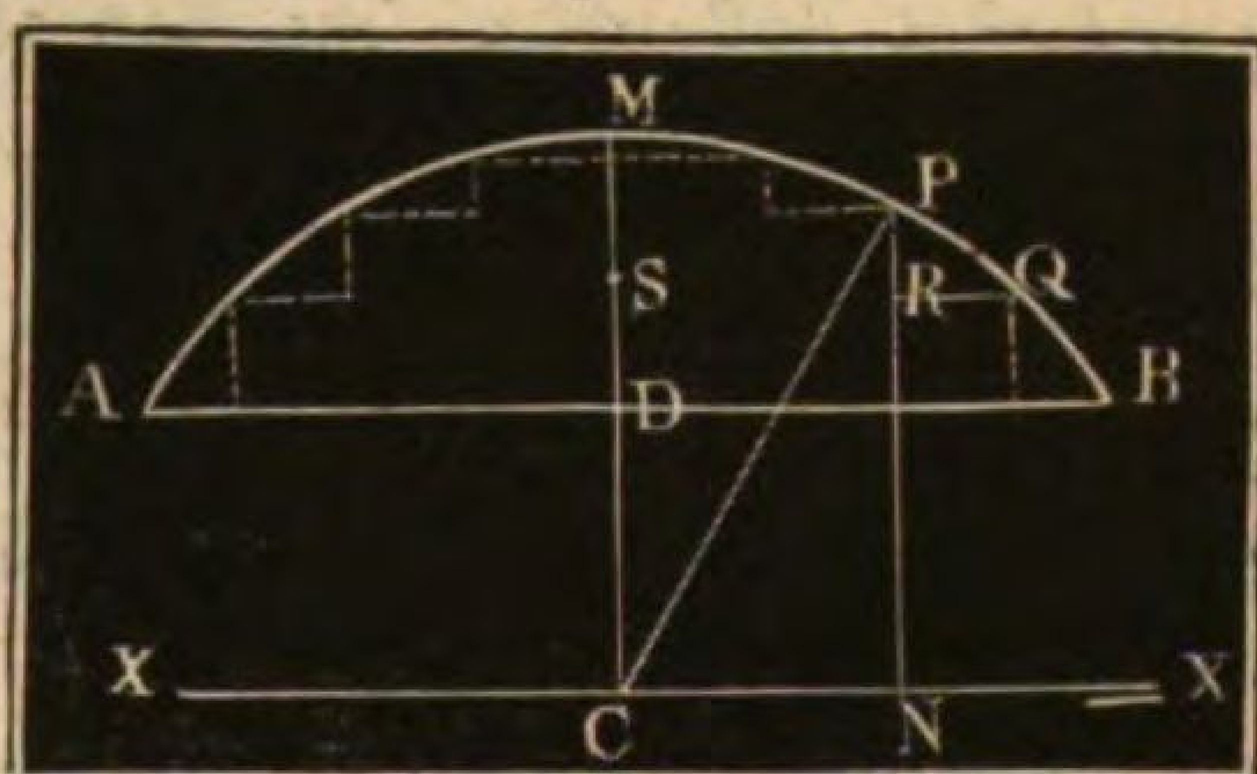


Fig. 113.



und $EFGH$ hervorgeht. Aus diesem Grunde fällt der Schwerpunkt eines Cylinders, eines Kegels und eines durch Umdrehung einer Fläche, oder durch Abdrehung auf der Drehbank entstandenen Rotationskörpers überhaupt, in die Axe dieser Körper.

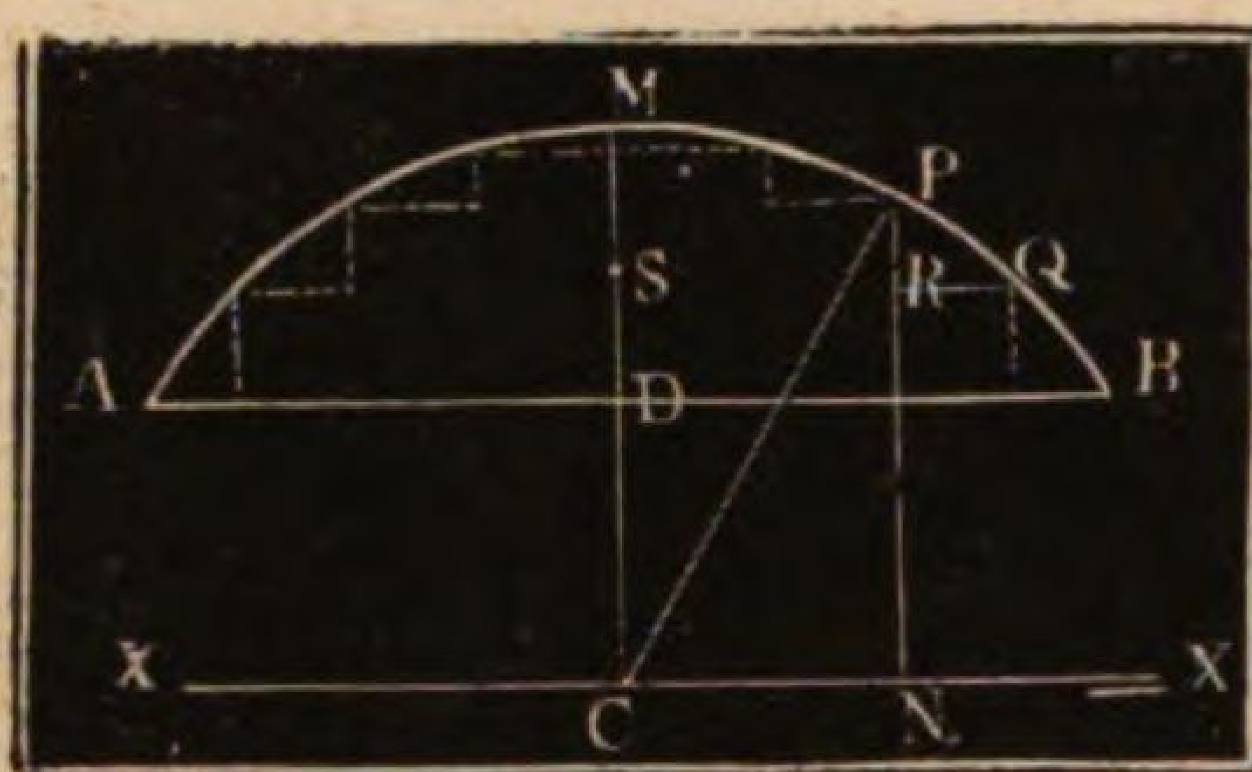
§. 102. Der Schwerpunkt einer geraden Linie liegt in der Mitte derselben. Schwerpunkte von Linien.

Der Schwerpunkt eines Kreisbogens $AB = b$, Fig. 113, befindet sich in dem Halbmesser CM, welcher in der Mitte M des Bogens ausläuft, denn dieser Halbmesser ist Axe der Symmetrie dieses Bogens. Um aber die Entfernung $CS = x$ des Schwerpunktes S vom Mittel-

Schwerpunkte von Linien.

punkte zu finden, theile man den Bogen in sehr viele Theile und bestimme die statischen Momente derselben in Beziehung auf eine durch den Mittelpunkt C und mit der Sehne $AB = s$ parallel gehende Axe $\overline{XX}$. Ist PQ ein Theil des Bogens, und PN dessen Abstand von $\overline{XX}$, so ist das statische Moment dieses Bogentheiles $= PQ \, . \, PN$. Zieht man nun den Halbmesser $PC = MC = r$, und QR parallel zu AB, so erhält man zwei ähnliche Dreiecke PQR und CPN, für welche gilt:

Fig. 114.



$$PQ : QR = CP : PN,$$

und woraus sich das statische Moment eines Bogenelementes $PQ \, . \, PN = QR \, . \, CP = QR \, . \, r$ bestimmt.

Nun ist aber für die statischen Momente aller übrigen Elemente der Halbmesser r ein gemeinschaftlicher Factor und die Summe aller Projectionen QR der Bogenelemente gleich der der Projection des ganzen Bogens entsprechenden Sehne; es folgt daher auch das Moment des ganzen Bogens = Sehne s mal Halbmesser r. Setzt man dieses Moment gleich Bogen b mal Abstand x, setzt man also $bx = sr$, so erhält man

$$\frac{x}{r} = \frac{s}{b}, \text{ und } x = \frac{sr}{b}.$$

Es verhält sich also der Abstand des Schwerpunktes vom Mittelpunkte zum Halbmesser, wie die Sehne zum Bogen.

Ist der Centriwinkel ACB des Bogens $b = \beta^0$, also der dem Halbmesser 1 entsprechende Bogen $\beta = \frac{\beta^0}{180^0} . \pi$, so hat man $b = \beta r$ und $s = 2 r \sin. \frac{\beta}{2}$, weshalb auch folgt: $x = \frac{2 \sin. \frac{1}{2}\beta \, . \, r}{\beta}$.

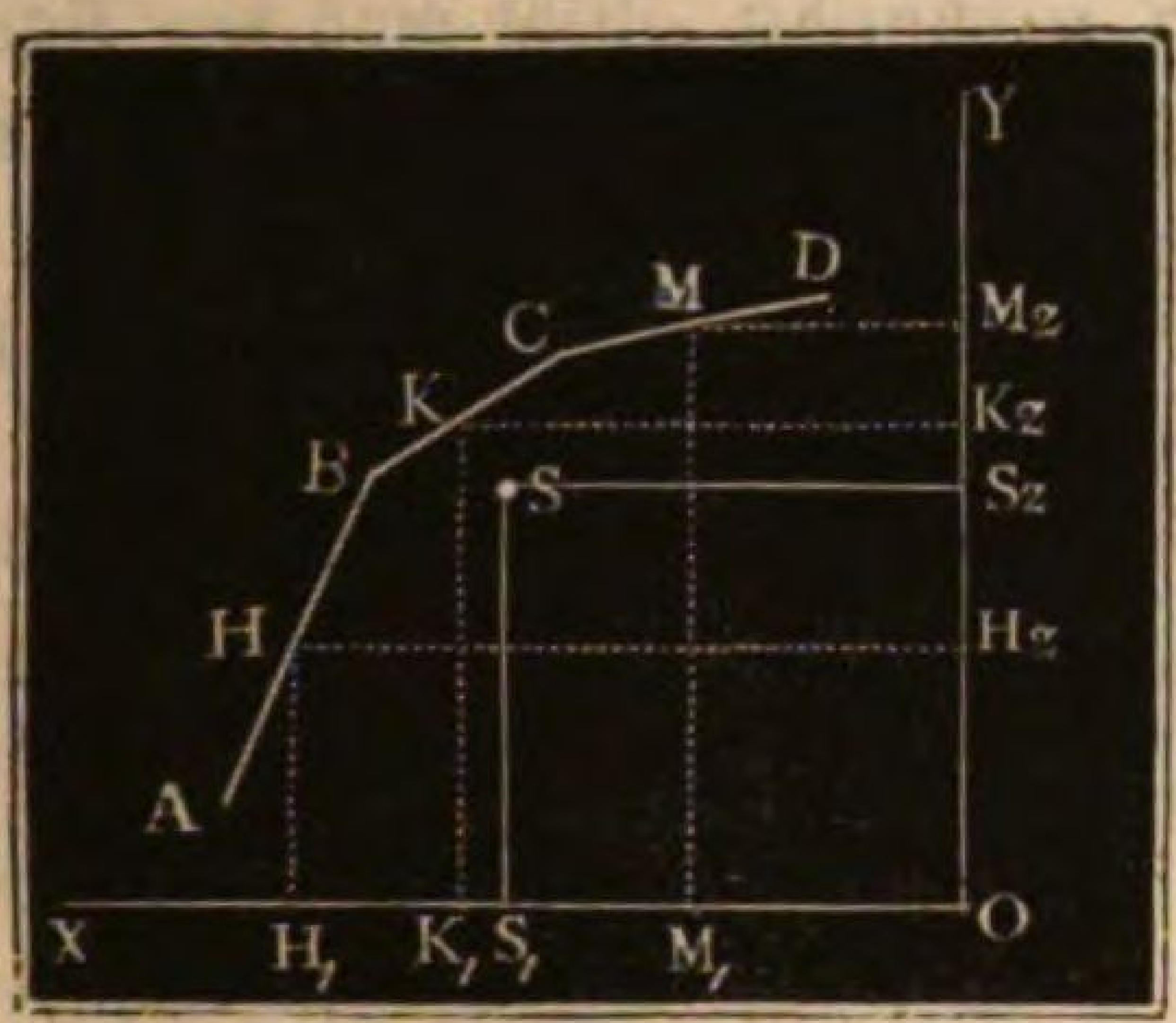
Für den Halbkreis ist $\beta = \pi$ und $\sin. \frac{\beta}{2} = 1$, daher

$$x = \frac{2}{\pi} r = 0{,}6366 \ldots r, \text{ ohngefähr } = \frac{7}{11} r.$$

§. 103. Um den Schwerpunkt eines Polygons oder einer Linienverbindung $ABCD$, Fig. 115, zu finden, suche man die Abstände der Mittelpunkte H, K, M der Linien $AB = L_1$, $BC = L_2$, $CD = L_3$ u. s. w. von zwei Axen OX und OY, nämlich $HH_1 = y_1$, $HH_2 = x_1$,

$KK_1 = y_2$. $KK_2 = x_2$ u. s. w.; die Abstände des gesuchten Schwerpunktes von eben diesen Axen sind dann: Schwerpunkte von Linien.

Fig. 115.



$$SS_2 = x = \frac{L_1 x_1 + L_2 x_2 + \ldots}{L_1 + L_2 + \ldots},$$

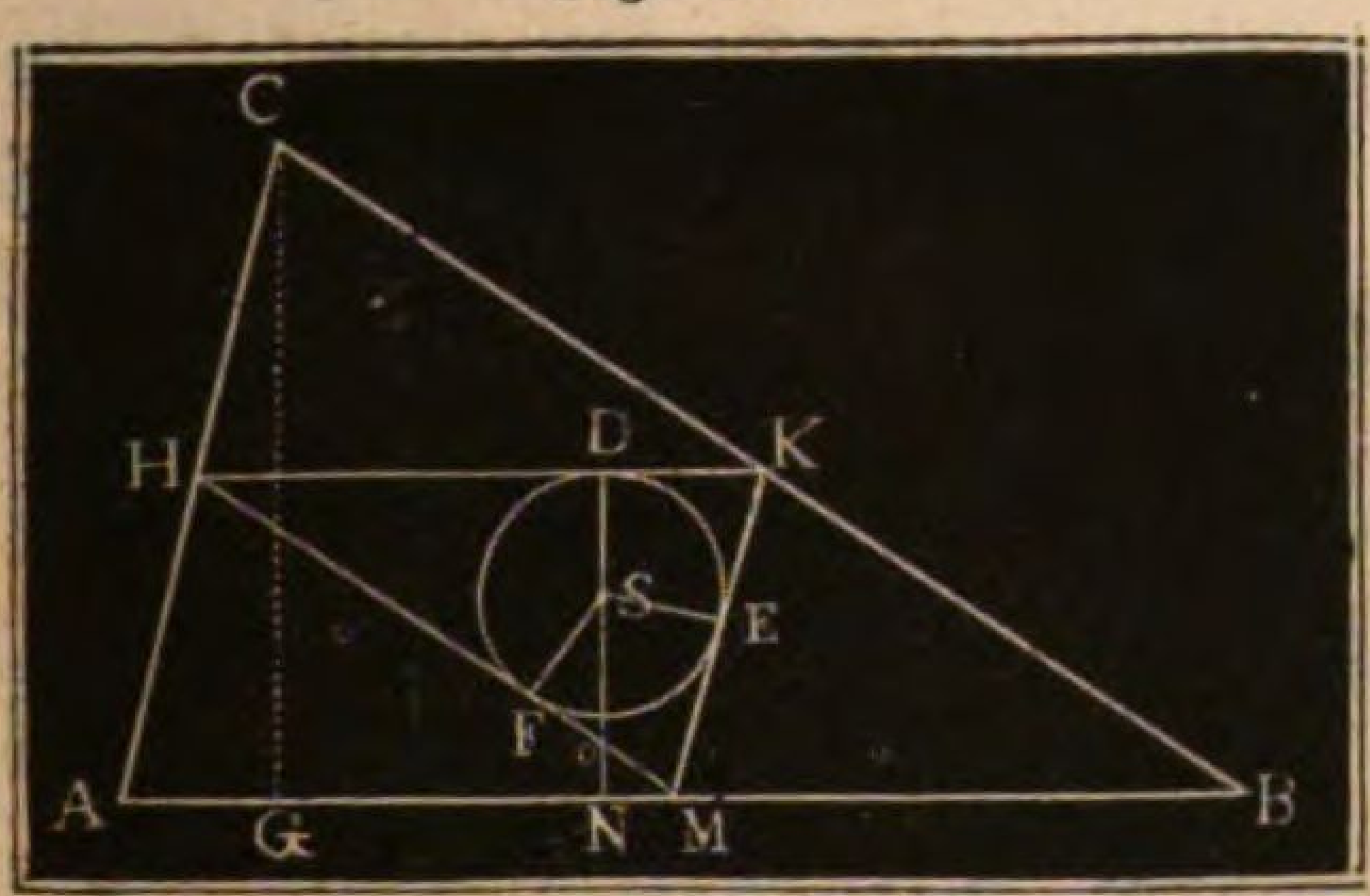
$$SS_1 = y = \frac{L_1 y_1 + L_2 y_2 + \ldots}{L_1 + L_2 + \ldots}.$$

Z. B. der Abstand des Schwerpunktes S eines im Triangel gebogenen Drahtes ABC, Fig. 116, von der Grundlinie ist:

$$NS = x = \frac{\frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh}{a+b+c} = \frac{a+b}{a+b+c} \cdot \frac{h}{2},$$

wenn die den Winkeln A, B, C gegenüberstehenden Seiten durch a, b, c und die Höhe CG durch h bezeichnet werden.

Fig. 116.

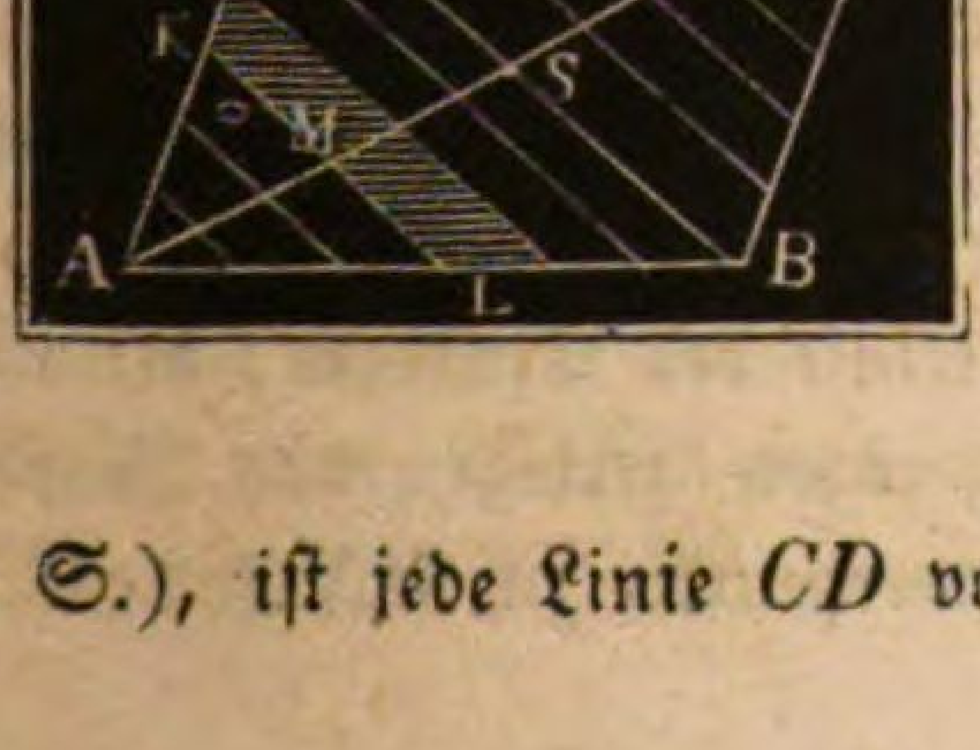


Verbindet man die Mittelpunkte H, K, M der Dreiecksseiten unter einander, und construirt man in das so erhaltene Dreieck einen Kreis, so fällt dessen Mittelpunkt mit dem Schwerpunkte S zusammen, denn der Abstand SD von der einen Seite HK ist $= DN - SN$

$$= \frac{h}{2} - \frac{a+b}{a+b+c} \cdot \frac{h}{2} = \frac{ch}{2(a+b+c)} = \frac{\triangle ABC}{a+b+c}$$ = den Abständen SE und SF von den anderen Seiten.

§. 104. Der Schwerpunkt eines Parallelogrammes $ABCD$, Fig. 117, liegt im Durchschnittspunkte S seiner Diagonalen, denn alle Streifen, wie KL, welche durch Legung von zu einer Diagonale BD parallelen Linien sich ergeben, werden durch die andere Diagonale AC halbirt, es ist also jede von den Diagonalen eine Schwerlinie. Schwerpunkte ebener Figuren.

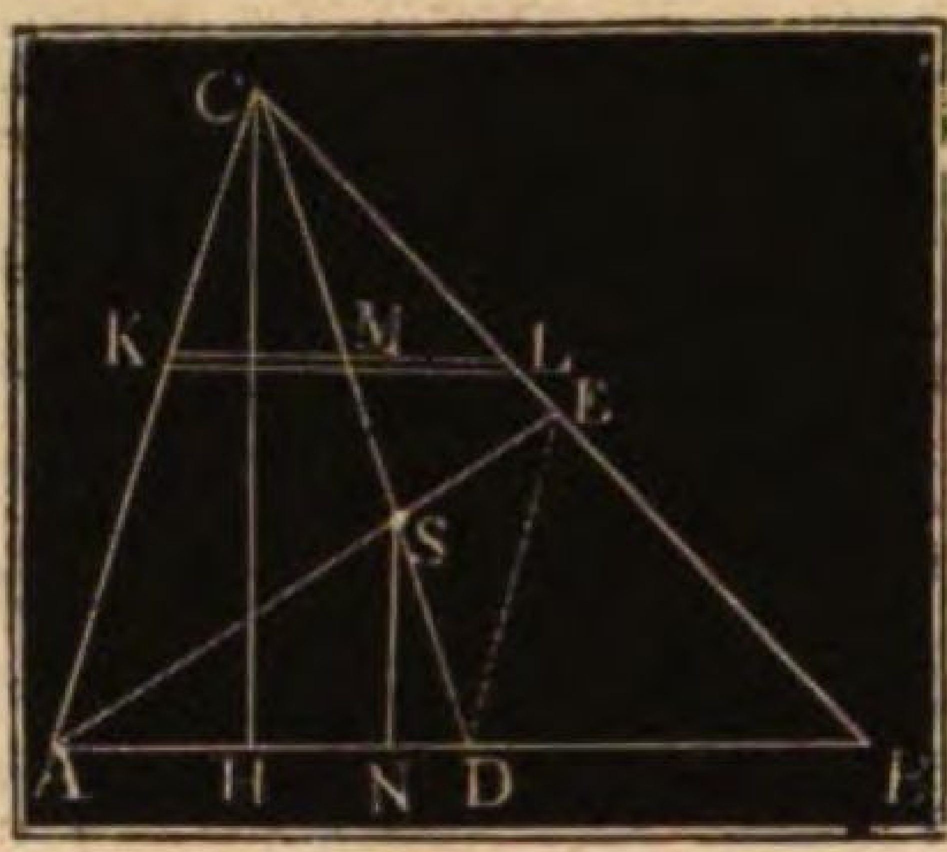
Fig. 117.



Bei einem Dreiecke ABC, Fig. 118 (s. f. S.), ist jede Linie CD von einer Spitze nach der Mitte D der Ge-

Schwerpunkte ebener Figuren genseite AB eine Schwerlinie, denn es halbirt dieselbe alle Elemente KL des Dreieckes, welche sich ergeben, wenn man dasselbe durch Parallellinien zu AB zerschneidet. Zieht man von einem zweiten Ecke A nach der Mitte E der Gegenseite BC eine zweite Schwerlinie, so giebt der Durchschnitt S beider den Schwerpunkt des ganzen Dreieckes.

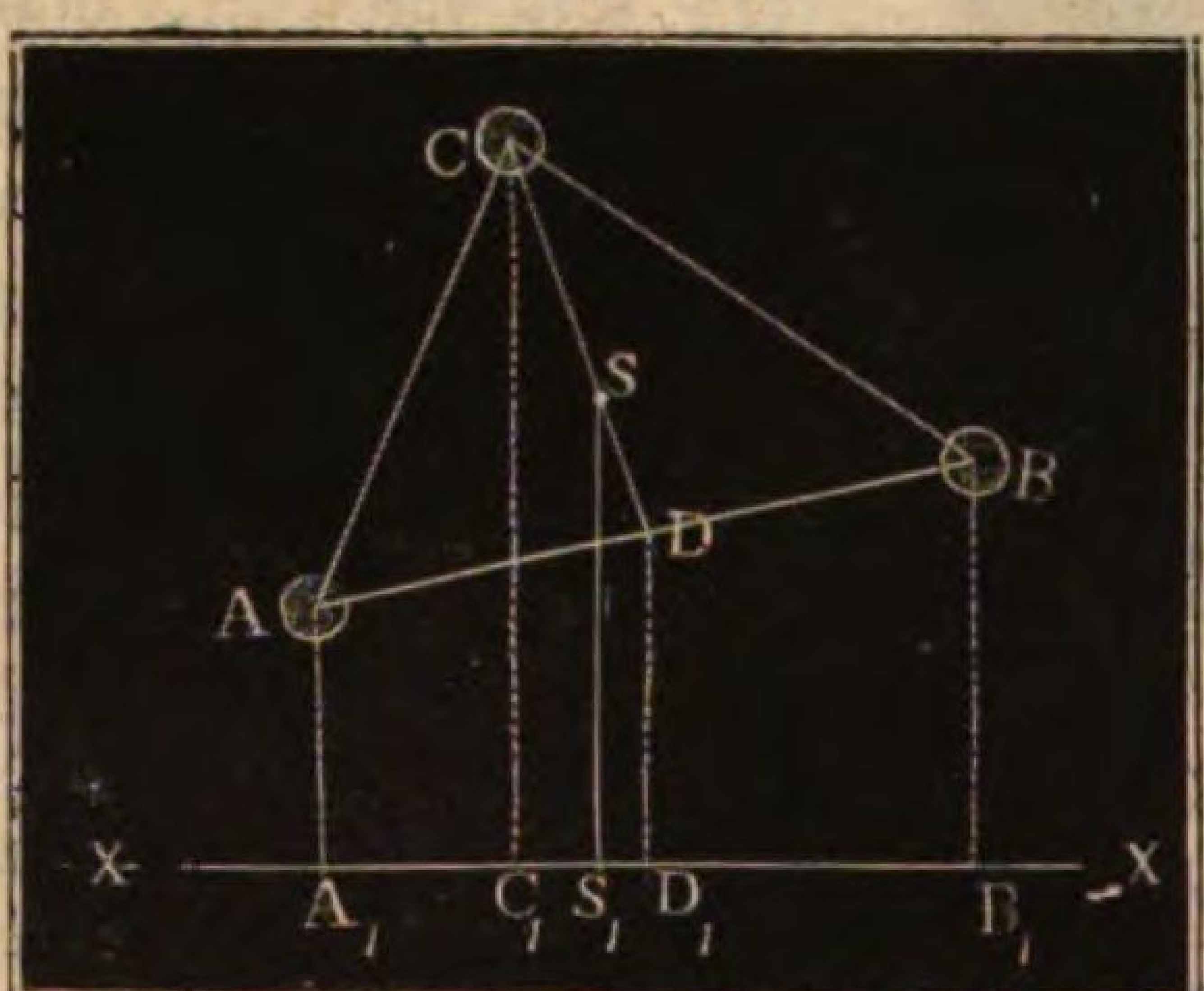
Fig. 118.



Weil $BD = \frac{1}{2}\, BA$ und $BE = \frac{1}{2} BC$, so ist DE parallel zu AC und gleich $\frac{1}{2} AC$, auch $\triangle\ DES$ ähnlich dem Dreiecke CAS und endlich $CS = 2\, SD$. Addirt man hierzu noch SD, so folgt $CS + SD$, d. i. $CD = 3\ DS$, und demnach umgekehrt $DS = \frac{1}{3}\, CD$. Es steht also der Schwerpunkt S um ein Drittel der Linie CD von dem Mittelpunkte D der Grundlinie und um zwei Drittel derselben von der Spitze C ab. Zieht man CH und SN winkelrecht zur Basis, so hat man auch $SN = \frac{1}{3}\ CH$; es steht also der Schwerpunkt S um ein Drittel der Höhe von der Basis des Dreieckes ab.

Der Abstand SS_1 des Schwerpunktes eines Dreieckes ABC, Fig. 119, von einer Axe XX ist $= DD_1 + \frac{1}{3}\,(CC_1 - DD_1)$, aber $DD_1 = \frac{1}{2}\,(AA_1 + BB_1)$, folglich ist $x = SS_1 = \frac{1}{3}\ CC_1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\,(AA_1 + BB_1)$ $= \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{3}$, d. i. das arithmetische Mittel aus den Abständen der drei Eckpunkte.

Fig. 119.

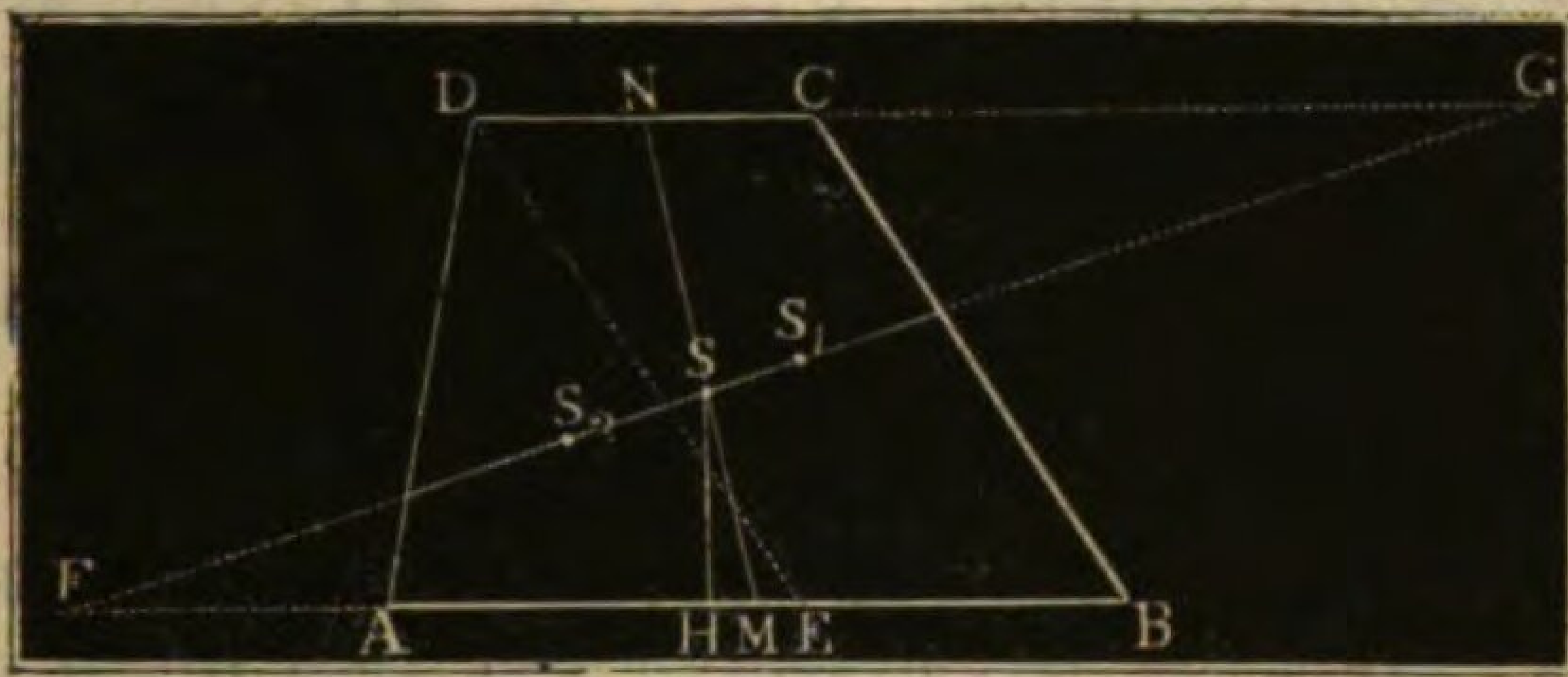


Da der Abstand des Schwerpunktes von drei gleichen, in den Eckpunkten eines Dreieckes angebrachten Gewichten auf dieselbe Weise bestimmt wird, so fällt der Schwerpunkt eines ebenen Dreieckes mit dem Schwerpunkte von diesen drei gleichen Gewichten zusammen.

§. 105. Die Bestimmung des Schwerpunktes S eines Trapezes $ABCD$, Fig. 120 (s. f. S.), läßt sich auf folgende Weise bewerkstelligen. Die gerade Linie MN, welche die Mittelpunkte der beiden Grundlinien AB und CD mit einander verbindet, ist Schwerlinie des Trapezes, denn viele gerade Linien parallel zu den Grundlinien gezogen, zerlegen das Trapez in schmale Streifen, deren Mittel- oder Schwerpunkte in MN fallen. Um

nun den Schwerpunkt S vollständig zu bestimmen, hat man nur noch dessen Abstand SH von der einen Basis AB zu finden. Schwerpunkte ebener Figuren.

Fig. 120.



Es bezeichne b die eine und b_1 die andere der parallelen Seiten AB und CD des Trapezes, h aber die Höhe oder den Normalabstand dieser Seiten. Zieht man nun DE parallel zur Seite BC, so erhält man ein Parallelogramm $BCDE$ mit dem Inhalte $b_1 h$ und dem Schwerpunkte S_1, dessen Abstand von $AB = \frac{h}{2}$, und ein Dreieck ADE mit dem Inhalte $\frac{(b-b_1)h}{2}$ und dem Schwerpunkte S_2, dessen Abstand von $AB = \frac{h}{3}$ ist. Das statische Moment des Trapezes hinsichtlich AB ist deshalb

$$= b_1 h \cdot \frac{h}{2} + \frac{(b-b_1)h}{2} \cdot \frac{h}{3} = (b+2b_1)\frac{h^2}{6},$$

aber der Inhalt des Trapezes ist $= (b + b_1)\frac{h}{2}$; es folgt daher der Normalabstand des Schwerpunktes S von der Basis:

$$HS = \frac{\frac{1}{6}(b+2b_1)h^2}{\frac{1}{2}(b+b_1)h} = \frac{b+2b_1}{b+b_1} \cdot \frac{h}{3}.$$

Um den Schwerpunkt construirend zu finden, verlängere man die beiden Grundlinien, mache die Verlängerung $CG = b$ und die Verlängerung $AF = b_1$, und verbinde die dadurch erhaltenen Endpunkte F und G durch eine Gerade; der Durchschnittspunkt S mit der Mittellinie MN ist der gesuchte Schwerpunkt, denn aus $HS = \frac{b+2b_1}{b+b_1} \cdot \frac{h}{3}$ folgt auch

$$MS = \frac{b+2b_1}{b+b_1} \cdot \frac{MN}{3} \text{ und } NS = \frac{2b+b_1}{b+b_1} \cdot \frac{MN}{3}; \text{ also}$$

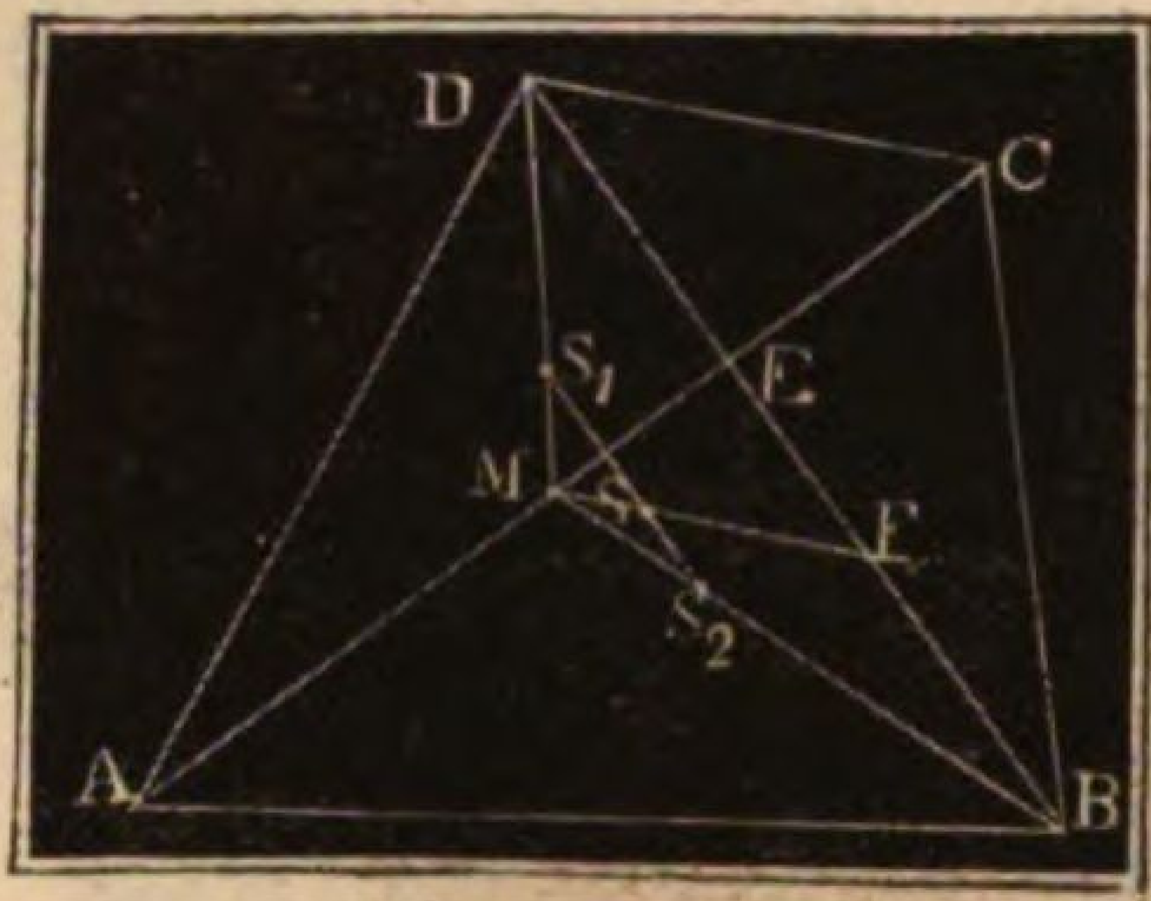
$$\frac{MS}{NS} = \frac{b+2b_1}{2b+b_1} = \frac{\frac{1}{2}b+b_1}{b+\frac{1}{2}b_1} = \frac{MA+AF}{CG+NC} = \frac{MF}{NG},$$

wie aus der Aehnlichkeit der Dreiecke MSF und NSG wirklich hervorgeht.

§. 106. Um den **Schwerpunkt irgend eines andern Viereckes** $ABCD$, Fig. 121 (s. f. S.) zu ermitteln, kann man dasselbe durch eine Dia-

Schwerpunkte ebener Figuren.

Fig. 121.



gonale AC in zwei Dreiecke zerlegen, und nach dem Vorhergehenden die Schwerpunkte S_1 und S_2 derselben und dadurch eine Schwerlinie $S_1 S_2$ bestimmen. Zerlegt man nun noch das Viereck durch die Diagonale BD in zwei andere Dreiecke, und bestimmt deren Schwerpunkte, so stößt man auf eine zweite Schwerlinie, deren Durchschnitt mit der ersteren den Schwerpunkt des ganzes Viereckes giebt.

Einfacher geht man aber zu Werke, wenn man die Diagonale AC in M halbirt, das größere Stück BE der zweiten Diagonale über das kleinere trägt, so das $DF = BE$ wird, denn zieht man nun FM und theilt diese Linie in drei gleiche Theile, so liegt im ersten Theilpunkte S von M aus der Schwerpunkt, wie sich auf folgende Weise beweisen läßt. Es ist $MS_1 = \frac{1}{3}MD$ und $MS_2 = \frac{1}{3} MB$, folglich S_1S_2 parallel zu BD, aber SS_1 mal $\triangle\ ACD = SS_2$ mal $\triangle\ ACB$, oder $SS_1 . DE = SS_2 . BE$, daher $SS_1 : SS_2 = BE : DE$. Nun ist noch $BE = DF$ und $DE = BF$, folglich auch $SS_1 : SS_2 = DF : BF$. Die Gerade MF schneidet demnach die Schwerlinie S_1S_2 in dem Schwerpunkte des ganzes Viereckes.

§. 107. Kommt es darauf an, den Schwerpunkt S eines Polygons $ABCDE$, Fig. 122, zu finden, so zerlege man dieses Polygon in Dreiecke und bestimme die statischen Momente dieser in Hinsicht auf zwei rechtwinkelige Axen $X\overline{X}$ und $Y\overline{Y}$.

Sind die Coordinaten $OA_1 = x_1$, $OA_2 = y_1$, $OB_1 = x_2$, $OB_2 = y_2$ u. s. w. der Endpunkte gegeben, so lassen sich die statischen Momente der einzelnen Dreiecke ABO, BCO, COD u. s. w. einfach auf folgende Weise ermitteln. Der Inhalt des Dreieckes ABO ist nach der unten stehenden Anmerkung, $= D_1 = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)$, der Inhalt des folgenden Dreieckes $BCO = D_2 = \frac{1}{2}(x_2y_3 - x_3y_2)$ u. s. w., die Abstände des Schwerpunktes des Dreieckes ABO von $Y\overline{Y}$, nach §. 104, $= u_1 = \frac{x_1 + x_2 + 0}{3}$ $= \frac{x_1 + x_2}{3}$, von $X\overline{X} = v_1 = \frac{y_1 + y_2}{3}$, des Schwerpunktes des Dreieckes BCO, $= u_2 = \frac{x_2 + x_3}{2}$ und $v_2 = \frac{y_2 + y_3}{3}$ u. s. w. Multiplicirt man diese Abstände mit den Inhalten der Dreiecke, so erhält man die Momente der letzteren, und setzt man die so erhaltenen Werthe in die Formeln:

$$u = \frac{D_1 u_1 + D_2 u_2 + \ldots}{D_1 + D_2 + \ldots} \text{ und}$$

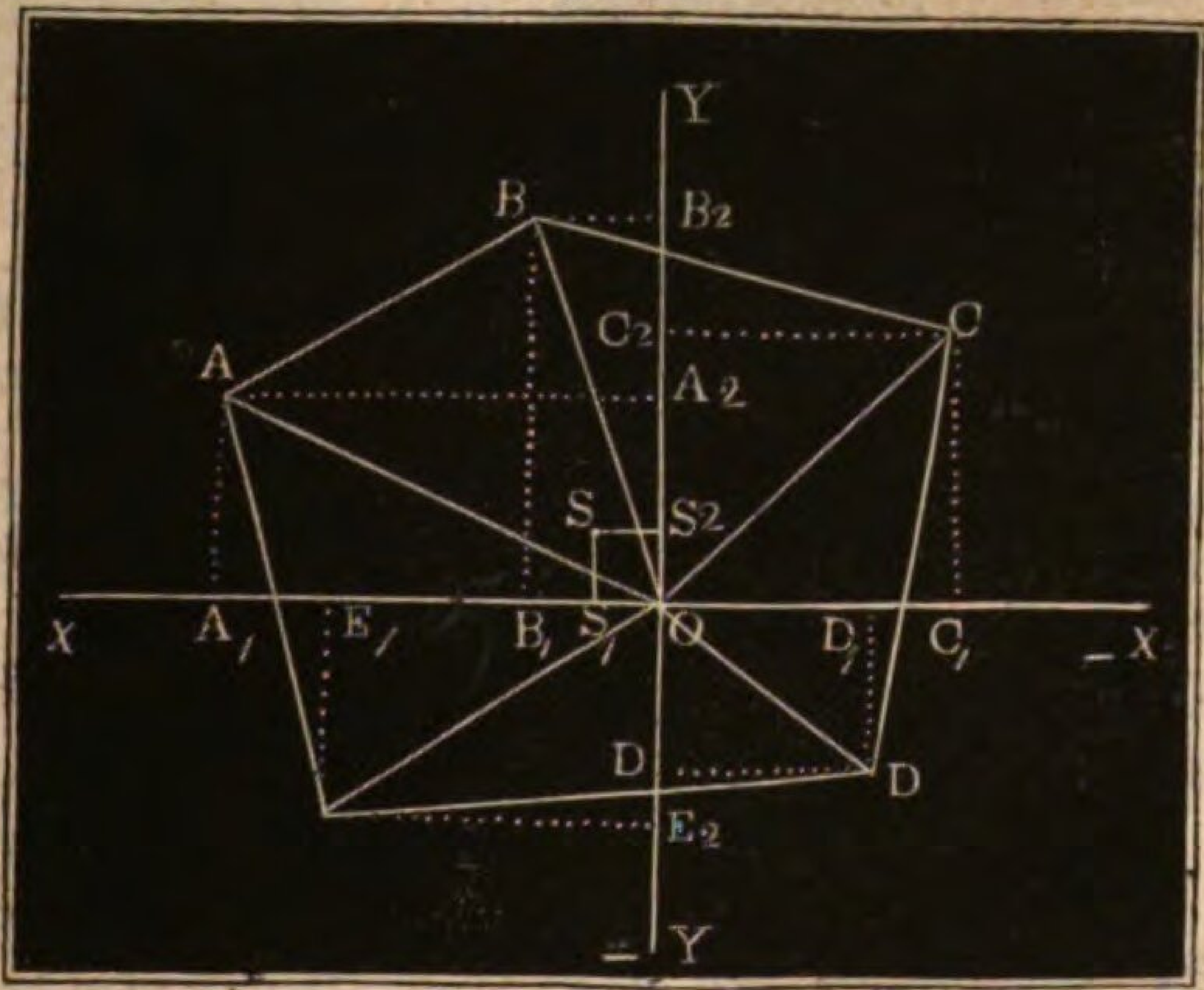
$$v = \frac{D_1 v_1 + D_2 v_2 + \ldots}{D_1 + D_2 + \ldots},$$

Schwerpunkte ebener Figuren.

so erhält man die Abstände u und v des gesuchten Schwerpunktes von den Axen $Y\overline{Y}$ und $X\overline{X}$.

Beispiel. Ein Fünfeck $ABCDE$, Fig. 122, ist durch die folgenden Coordi-

Fig. 122.



naten seiner Eckpunkte A, B, C u. s. w. gegeben, und man sucht die Coordinaten des Schwerpunktes:

Gegebene Coordinaten		Die zweifachen Inhalte der Dreiecke.	Die dreifachen Coordinaten der Schwerpunkte.		Sechsfache statischen Momente.	
x	y		$3u_n$	$3v_n$	$6D_n u_n$	$6D_n v_n$
24	11	24 . 21 — 7 11 = 427	31	32	13237	13664
7	21	7 . 15 + 21 . 16 = 441	— 9	36	— 3969	15876
— 16	15	16 . 9 + 12 . 15 = 324	— 28	6	— 9072	1944
— 12	— 9	12 . 12 + 18 . 9 = 306	+ 6	— 21	1836	— 6426
18	— 12	18 . 11 + 24 . 12 = 486	+ 42	— 1	20412	— 486
		Summe: 1984			22444	24572

Der Abstand des Schwerpunktes von der Axe YY ist nun:

$$SS_2 = u = \frac{1}{3} \cdot \frac{22444}{1984} = 3,771$$

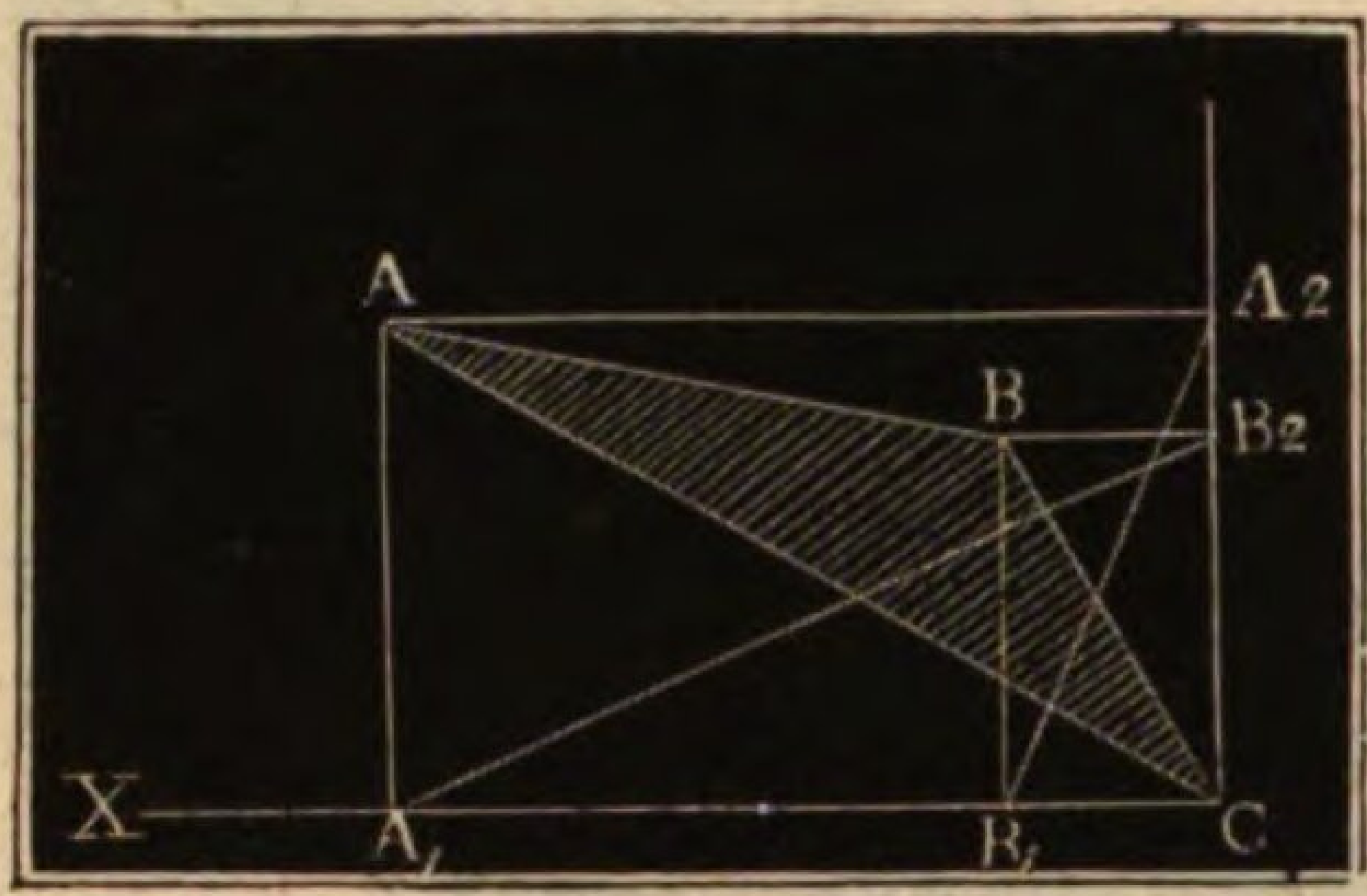
und von der Axe XX:

$$SS_1 = v = \frac{1}{3} \cdot \frac{24572}{1984} = 4,128.$$

Anmerkung. Sind $CA_1 = x_1$, $CB_1 = x_2$, $CA_2 = y_1$ und $CB_2 = y_2$

Schwerpunkte ebener Figuren. die Coordinaten von zwei Eckpunkten eines Dreieckes ABC, Fig. 123, deren dritter Eckpunkt C mit dem Anfangspunkte des Coordinatensystemes zusammenfällt, so hat man den Inhalt desselben:

Fig. 123.



$D =$ Trapez ABB_1A_1 + Dreieck CBB_1 — Dreieck CAA_1

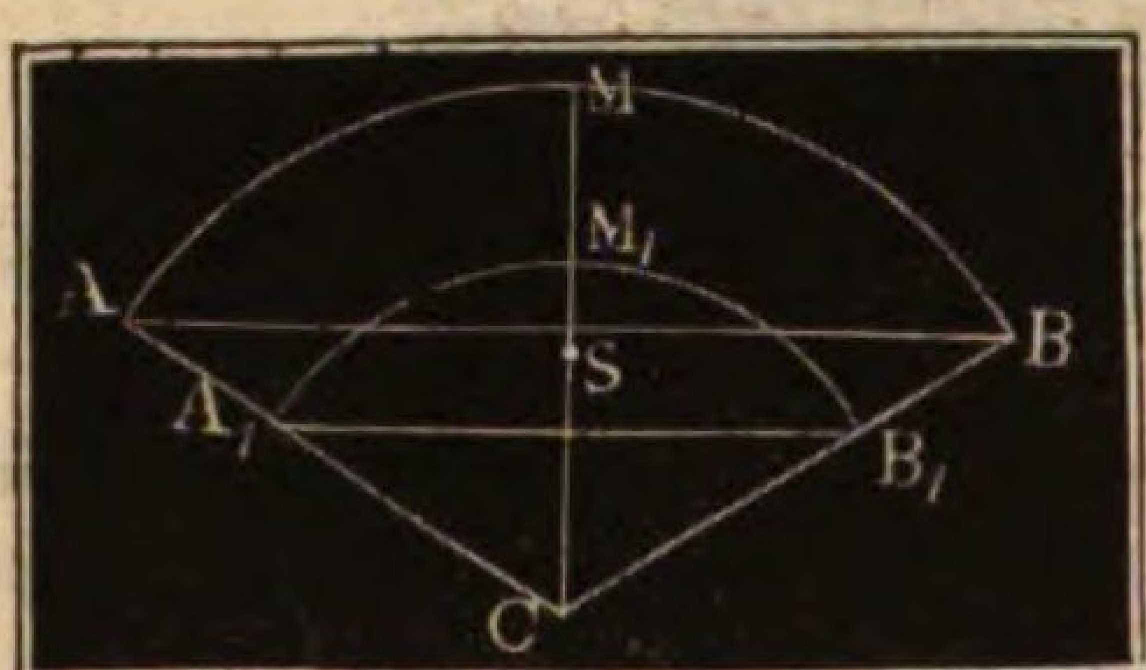
$$= \left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)(x_1-x_2)+\frac{x_2y_2}{2}-\frac{x_1y_1}{2}$$

$$= \frac{x_1y_2-x_2y_1}{2}.$$

Es ist also der Inhalt dieses Dreieckes die Differenz von zwei anderen Dreiecken, CB_2A_1 und CA_2B_1, und es ist die eine Coordinate eines Punktes Grundlinie des einen und die andere Coordinate Höhe des andern Dreieckes, ebenso die eine Coordinate des andern Punktes Höhe des einen und die andere Coordinate Grundlinie des andern Dreieckes.

§. 108. **Der Schwerpunkt eines Kreisausschnittes** ACB, Fig. 124, fällt mit dem Schwerpunkte S eines Kreisbogens A_1B_1 zusammen, der mit dem Ausschnitte einerlei Centriwinkel hat und dessen Halbmesser CA_1 zwei Drittel von dem Halbmesser CA des Ausschnittes ist, denn es läßt sich der Ausschnitt durch unendlich viele Halbmesser in lauter schmale Dreiecke zerlegen, deren Schwerpunkte um zwei Drittel des Halbmessers von dem Centro C abstehen und deshalb in ihrer stetigen Folge den Bogen $A_1M_1B_1$ bilden. Es liegt also der Schwerpunkt S des Ausschnittes in dem dieses Flächenstück halbirenden Radius CM und in der Entfernung

Fig. 124.



$CS = x = \frac{\text{Sehne}}{\text{Bogen}} \cdot \frac{2}{3}\, CA = \frac{4}{3} \cdot \frac{sin. \frac{1}{2}\beta}{\beta} \cdot r$, insofern r den Halbmesser CA des Sectors und β den den Centriwinkel ACB desselben messenden Bogen bezeichnet.

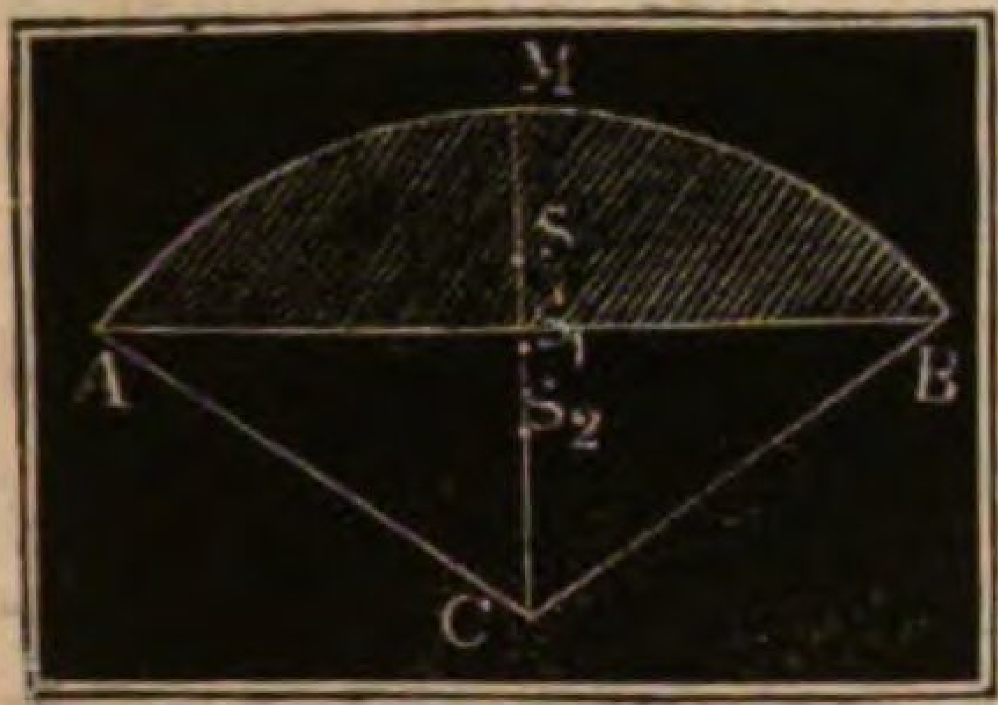
Für die halbe Kreisfläche ist $\beta = \pi$, $sin. \frac{1}{2}\beta = sin.\ 90^0 = 1$, daher $x = \frac{4}{3\pi} r = 0{,}4244\, r$ oder ungefähr $\frac{14}{33} r$. Für einen Quadranten folgt $x = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\pi} r = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} r = 0{,}6002\, r$ und für einen Sextanten $x = \frac{4}{3} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\pi} r = \frac{2}{\pi} r = 0{,}6366\, r$.

§. 109. **Der Schwerpunkt eines Kreisabschnittes** ABM, Fig. 125, ergiebt sich, wenn man das Moment des Ausschnittes $ACBM$

gleich setzt der Summe aus dem Momente des Abschnittes und dem Momente des Dreieckes ACB. Ist r der Halbmesser CA, s die Sehne AB und A der Flächeninhalt des Segmentes ABM, so hat man das Moment des Ausschnittes = Ausschnitt mal $CS_1 = \frac{r\,.\,\text{Bogen}}{2} \cdot \frac{\text{Sehne}}{\text{Bogen}} \cdot \frac{2}{3} r$ $= \frac{1}{3} s r^2$, ferner das Moment des Dreieckes

Schwerpunkte ebener Figuren.

Fig. 125.



$= \text{Dreieck mal } CS_2 = \frac{s}{2}\sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}} = \frac{s r^2}{3} - \frac{s^3}{12}$ und demnach das Moment des Abschnittes

$$A\,.\,CS = Ax = \frac{1}{3} s r^2 - \left(\frac{s r^2}{3} - \frac{s^3}{12}\right) = \frac{s^3}{12}.$$

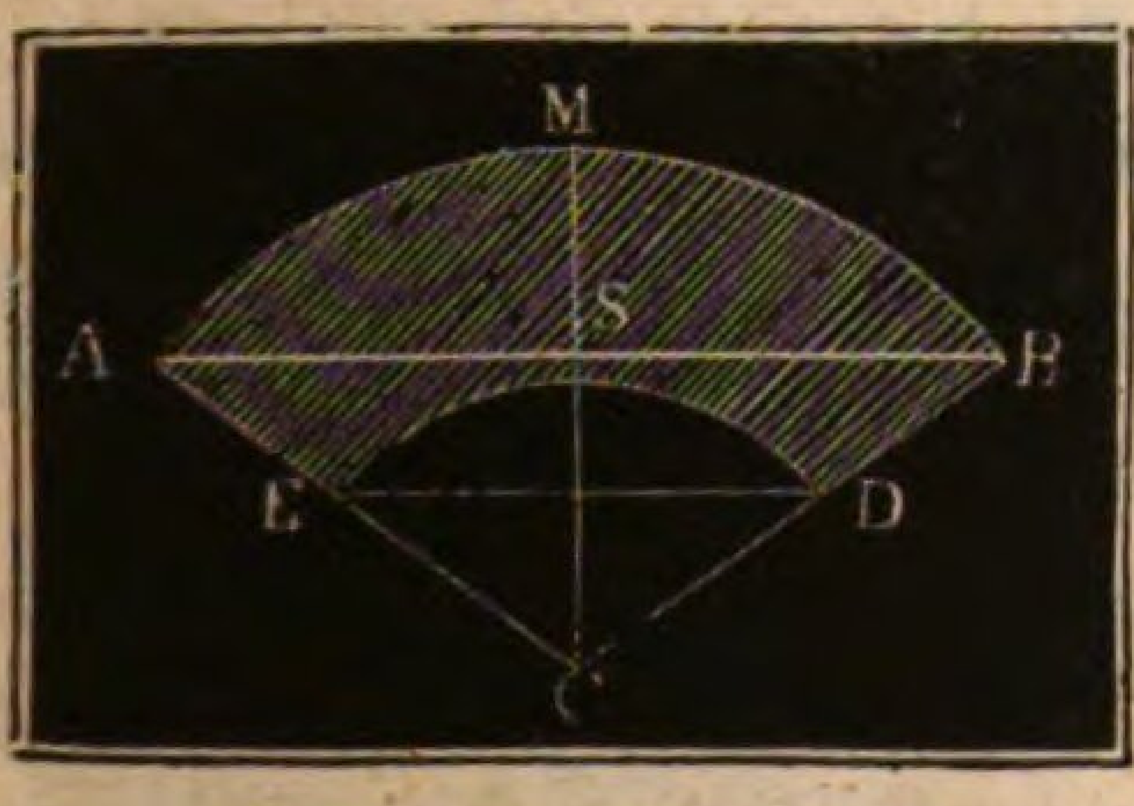
Es ist folglich der gesuchte Abstand $x = \frac{s^3}{12A}$.

Für den Halbkreis ist $s = 2r$ und $A = \frac{1}{2}\pi r^2$, daher

$$x = \frac{8r^3}{12\,.\,\frac{\pi r^2}{2}} = \frac{4r}{3\pi},$$ wie oben gefunden wurde.

Auf gleiche Weise bestimmt sich auch der **Schwerpunkt** S **eines Ringstückes** $ABDE$, Fig. 126, denn dieses ist die Differenz zweier Sectoren ACB und DCE. Sind die Halbmesser $CA = r$ und $CD = r_1$ und die Sehnen $AB = s$ und $DE = s_1$, so erhält man die statischen Momente der Sectoren: $\frac{s r^2}{3}$ und $\frac{s_1 r_1^2}{3}$, daher das statische Moment des Ringstückes: $= \frac{s r^2 - s_1 r_1^2}{3}$, oder, da $\frac{s_1}{s} = \frac{r_1}{r}$ ist,

Fig. 126.



$= \frac{r^3 - r_1^3}{3} \cdot \frac{s}{r}$. Der Inhalt des Ringstückes ist aber $= \frac{\beta r^2}{2} - \frac{\beta r_1^2}{2}$ $= \beta\left(\frac{r^2 - r_1^2}{2}\right)$, wofern β den dem Centriwinkel ACB entsprechenden Bogen bezeichnet; es folgt demnach der Schwerpunkt S des Ringstückes durch den Abstand $CS = x = \frac{\text{Moment}}{\text{Fläche}} = \frac{r^3 - r_1^3}{r^2 - r_1^2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{s}{r\beta}$ $= \frac{2}{3}\left(\frac{r^3 - r_1^3}{r^2 - r_1^2}\right) \cdot \frac{\text{Sehne}}{\text{Bogen}} = \frac{4}{3} \frac{\sin.\frac{1}{2}\beta}{\beta} \cdot \frac{r^3 - r_1^3}{r^2 - r_1^2}.$

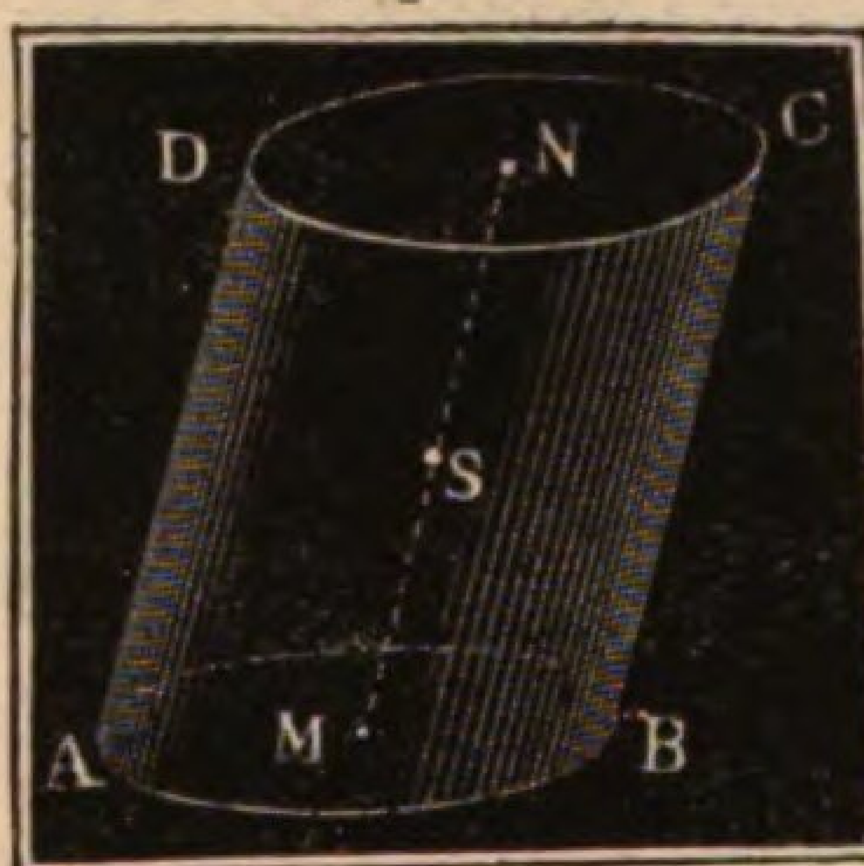
Beispiel. Sind die Halbmesser der Stirnfläche eines Gewölbes: $r = 5$ Fuß und $r_1 = 3\frac{1}{2}$ Fuß, und ist der Centriwinkel dieser Fläche: $\beta^0 = 130^0$, so ist der Abstand des Schwerpunktes dieser Fläche vom Mittelpunkte:

$$x = \frac{4}{3}\frac{sin. 65^0}{arc. 130^0} \cdot \frac{5^3 - 3{,}5^3}{5^2 - 3{,}5^2} = \frac{4 \,.\, 0{,}9063}{3 \,.\, 2{,}2689} \cdot \frac{125 - 42{,}875}{25 - 12{,}25} = \frac{3{,}6252 \times 82{,}125}{6{,}8067 \times 12{,}75}$$
$= 3{,}430$ Fuß.

Schwerpunkte krummer Flächen.

§. 110. Der Schwerpunkt von der krummen Oberfläche (dem Mantel) eines Cylinders *ABCD*, Fig. 127, liegt in der Mitte *S* der Axe *MN* dieses Körpers, denn alle ringförmigen Elemente des Cylindermantels, welche man erhält, wenn man parallel zur Basis Schnitte durch den Körper führt, sind unter sich gleich und haben ihre Schwer- und Mittelpunkte in der Axe; es bilden also diese Schwerpunkte eine gleichförmig schwere Linie. Aus denselben Gründen liegt auch der Schwerpunkt von der Umfläche eines Prisma's im Mittelpunkte der die Schwerpunkte beider Grundflächen verbindenden Geraden.

Fig. 127.



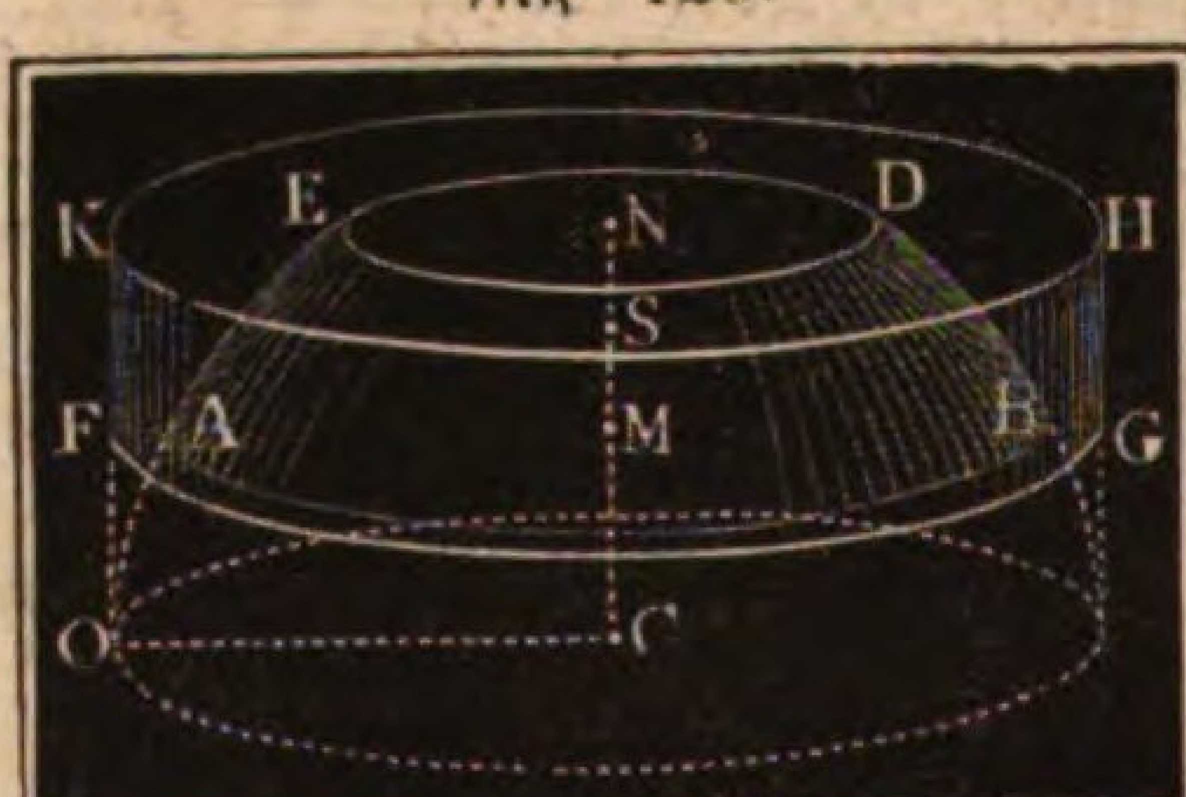
Der Schwerpunkt *S* des Mantels von einem geraden Kegel *ABC*, Fig. 128, liegt in der Axe des Kegels und ist um ein Drittel dieser Linie von der Basis oder um zwei Drittel von der Spitze entfernt, denn diese krumme Fläche läßt sich durch gerade Linien, welche man Seiten des Kegels nennt, in unendlich viele, unendlich schmale Dreiecke zerlegen, deren Schwerpunkte einen Kreis *HK* bilden, welcher um zwei Drittel der Axe von der Spitze absteht, dessen Schwer- oder Mittelpunkt *S* aber in die Axe *CM* fällt.

Fig. 128.



Der Schwerpunkt einer Kugelzone *ABDE*, Fig. 129, und ebenso der Schwerpunkt einer Kugelschaale (Calotte) liegt im Mittelpunkte *S* ihrer Höhe *MN*; denn es hat, den Lehren der Geometrie zufolge, die Zone mit einem Cylindermantel *FGHK* gleichen Inhalt, dessen Höhe gleich ist der Höhe *MN* und dessen Halbmesser gleich ist dem Kugelhalbmesser *CO* der Zone, und es findet diese Gleichheit auch unter den ringförmigen Elementen statt, die man erhält, wenn man unendlich viele Ebenen

Fig. 129.

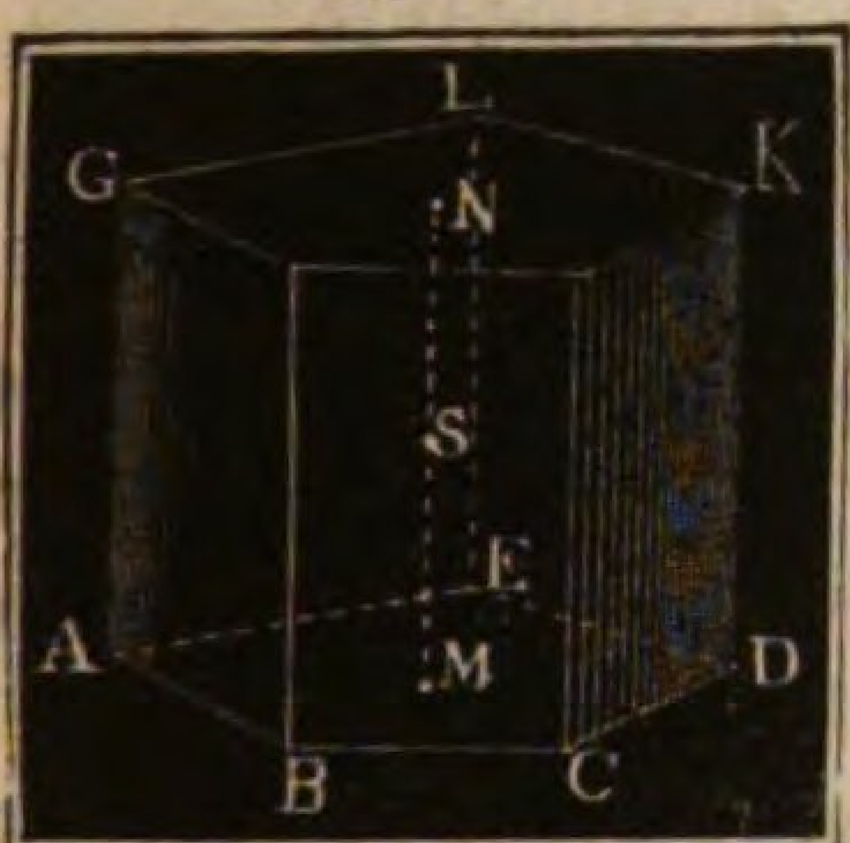


parallel zu den Grundkreisen beider krummen Flächen durch dieselben hindurchlegt; es fällt diesemnach der Schwerpunkt der Zone mit dem des Cylindermantels zusammen.

Anmerkung. Der Schwerpunkt von dem Mantel eines schiefen Kegels oder einer schiefen Pyramide steht zwar um ein Drittel der Höhe von der Basis ab, befindet sich aber nicht in der von der Spitze nach dem Schwerpunkte des Umfanges der Basis gehenden Geraden, weil Schnitte parallel zur Basis den Mantel in Ringe zerlegen, die an verschiedenen Stellen ihres Umfanges verschieden breit sind.

§. 111. Der Schwerpunkt eines Prisma's AK, Fig. 130, ist der Mittelpunkt S derjenigen geraden Linie, welche die Schwerpunkte M und N der beiden Grundflächen AD und GK verbindet, denn das Prisma läßt sich durch Schnitte parallel zur Basis in lauter congruente Scheiben zerlegen, deren Schwerpunkte in MN fallen, und in ihrer stetigen Folge die gleichförmig schwere gerade Linie MN selbst bilden. Schwerpunkte von Körpern.

Fig. 130.



Aus demselben Grunde befindet sich auch der Schwerpunkt eines Cylinders in der Mitte der Axe desselben.

Der Schwerpunkt einer Pyramide ADF, Fig. 131., liegt in der geraden Linie MF von der Spitze F nach dem Schwerpunkte M der Basis, denn alle Schnitte, wie $NOPQR$, haben wegen ihrer Aehnlichkeit mit der Basis ihre Schwerpunkte in dieser Linie.

Fig. 131.

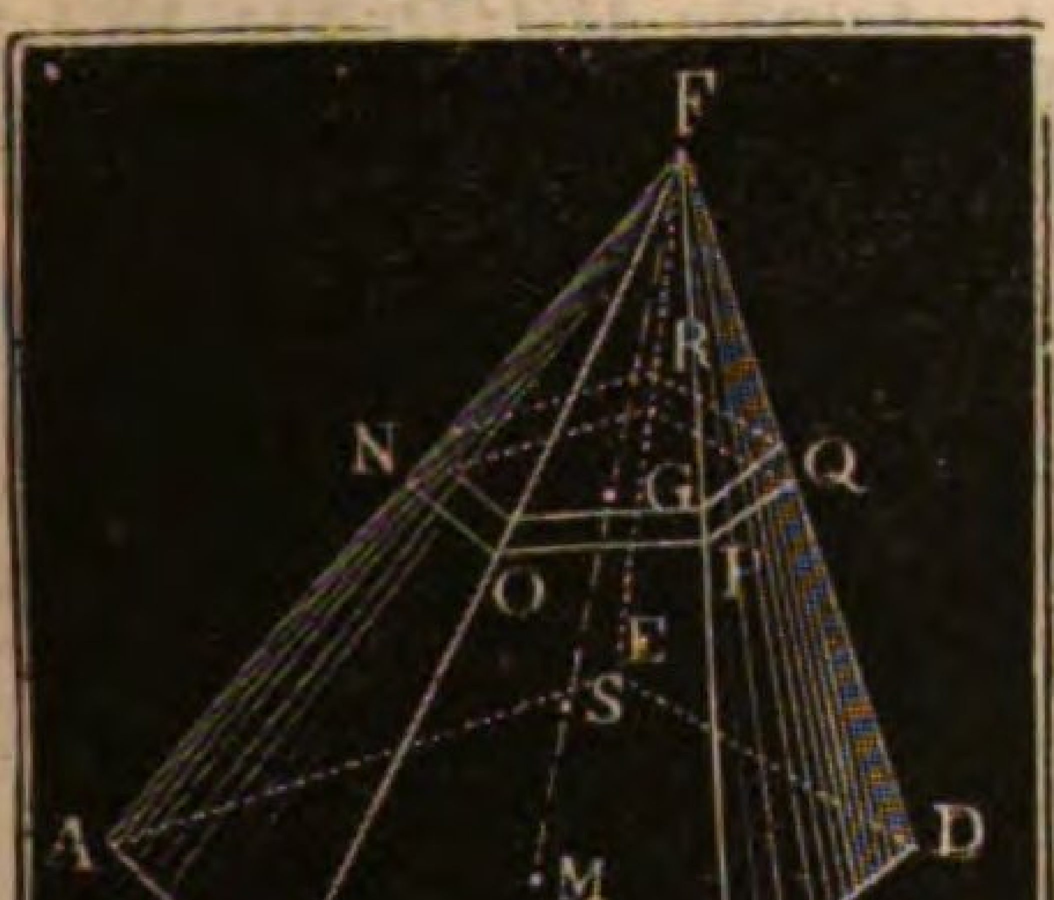
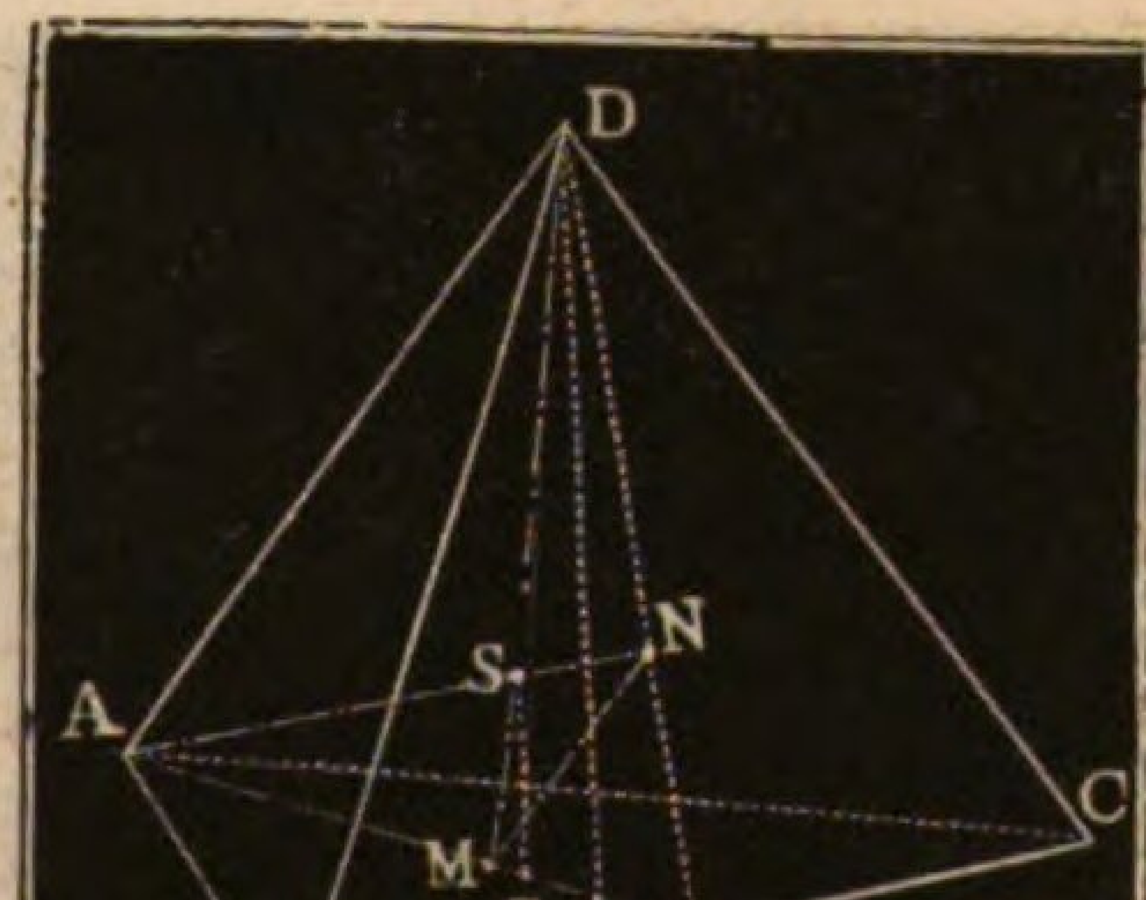


Fig. 132.



Ist die Pyramide dreiseitig, wie $ABCD$, Fig. 132, so läßt sich jeder der vier Eckpunkte als Spitze und die gegenüberliegende Fläche als Basis ansehen; es bestimmt sich daher der Schwerpunkt S in dem Durchschnitte von zwei aus den Ecken D und A nach den Schwerpunkten M und N der gegenüberliegenden Flächen ABC und BCD gehenden geraden Linien.

Schwerpunkte von Körpern.

Giebt man noch die geraden Linien EA und ED an, so hat man (nach §. 104) $EM = \frac{1}{3} EA$ und $EN = \frac{1}{3} ED$; es ist daher MN parallel AD und $= \frac{1}{3} AD$, und auch das Dreieck MNS ähnlich dem Dreiecke DAS. Dieser Aehnlichkeit zufolge hat man wieder $MS = \frac{1}{3} DS$, oder $DS = 3\,MS$, also $MD = MS + SD = 4\,MS$, und umgekehrt $MS = \frac{1}{4} MD$. Der Schwerpunkt der dreiseitigen Pyramide liegt also um ein Viertel derjenigen Linie von der Basis ab, welche die Spitze D der Pyramide mit dem Schwerpunkte M ihrer Basis verbindet.

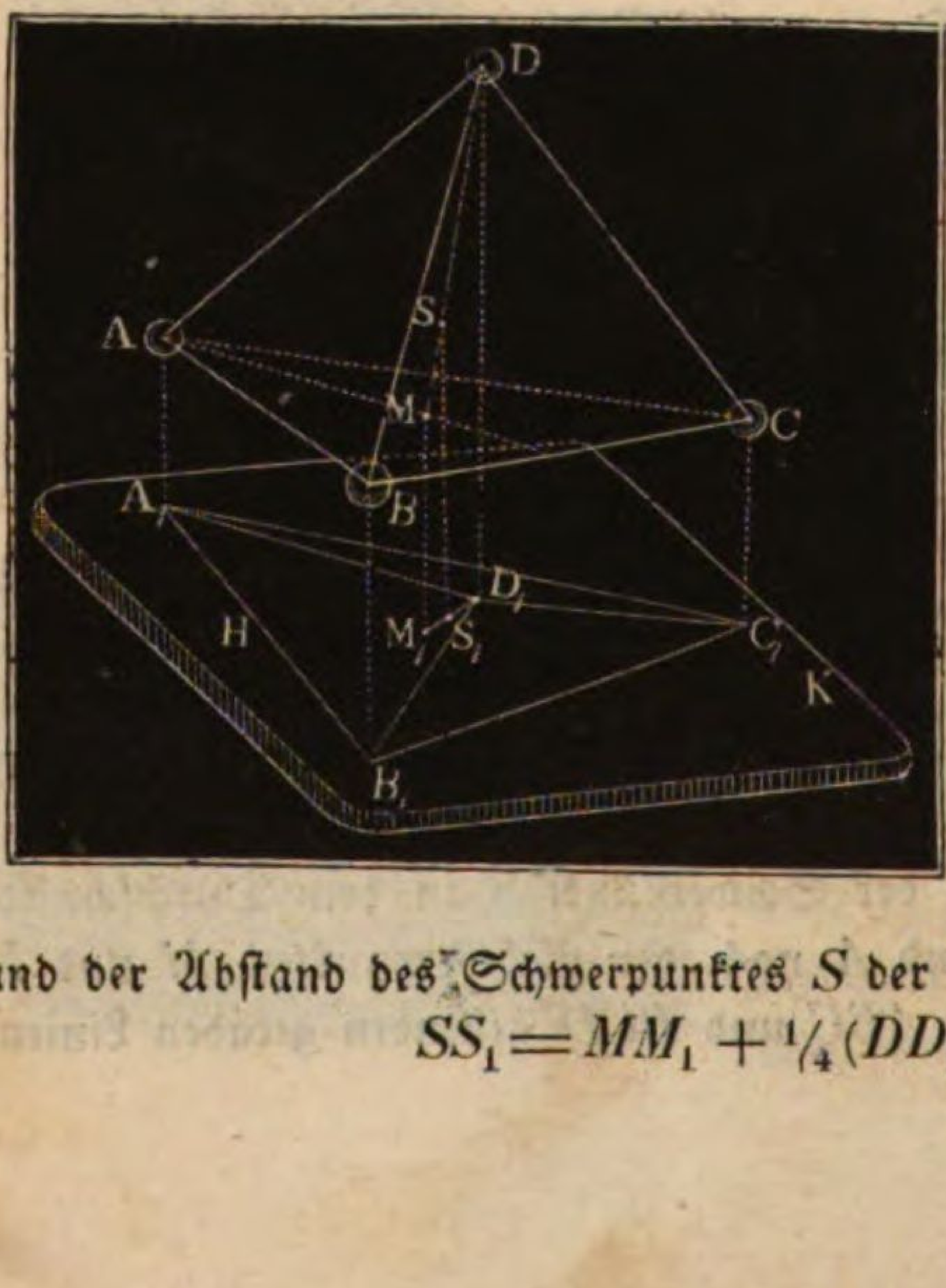
Giebt man noch die Höhenlinien DH und SG an und zieht man die HM, so erhält man die ähnlichen Dreiecke DHM und SGM, in welchen nach dem Vorigen $SG = \frac{1}{4} DH$ ist. Man kann also behaupten: der Abstand des Schwerpunktes S einer dreiseitigen Pyramide ist von der Basis gleich ein Viertel, und der von der Spitze gleich drei Viertel der Höhe von der ganzen Pyramide.

Da endlich jede Pyramide, und ebenso jeder Kegel, aus lauter gleich hohen dreiseitigen Pyramiden zusammengesetzt ist, so steht auch der Schwerpunkt aller Pyramiden und Kegel um ein Viertel der Höhe von der Grundfläche und um drei Viertel derselben von der Spitze ab.

Man findet also den Schwerpunkt einer Pyramide oder den eines Kegels, wenn man in dem Abstande ein Viertel der Höhe von der Basis eine Ebene parallel zu dieser legt und den Schwerpunkt des erhaltenen Querschnittes oder den Durchschnitt desselben mit der die Spitze und den Schwerpunkt der Basis verbindenden Geraden aufsucht.

§. 112. Kennt man die Abstände AA_1, BB_1 u. s. w. der vier Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide $ABCD$, Fig. 133, von einer Ebene HK, so erhält man den Abstand SS_1 des Schwerpunktes S von dieser Ebene durch den Mittelwerth

Fig. 133.



$$SS_1 = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1 + DD_1}{4},$$

wie sich folgendergestalt beweisen läßt.

Der Abstand des Schwerpunktes M der Basis ABC von eben dieser Ebene ist (§. 104)

$$MM_1 = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{3},$$

und der Abstand des Schwerpunktes S der Pyramide läßt sich setzen

$$SS_1 = MM_1 + \frac{1}{4}(DD_1 - MM_1),$$

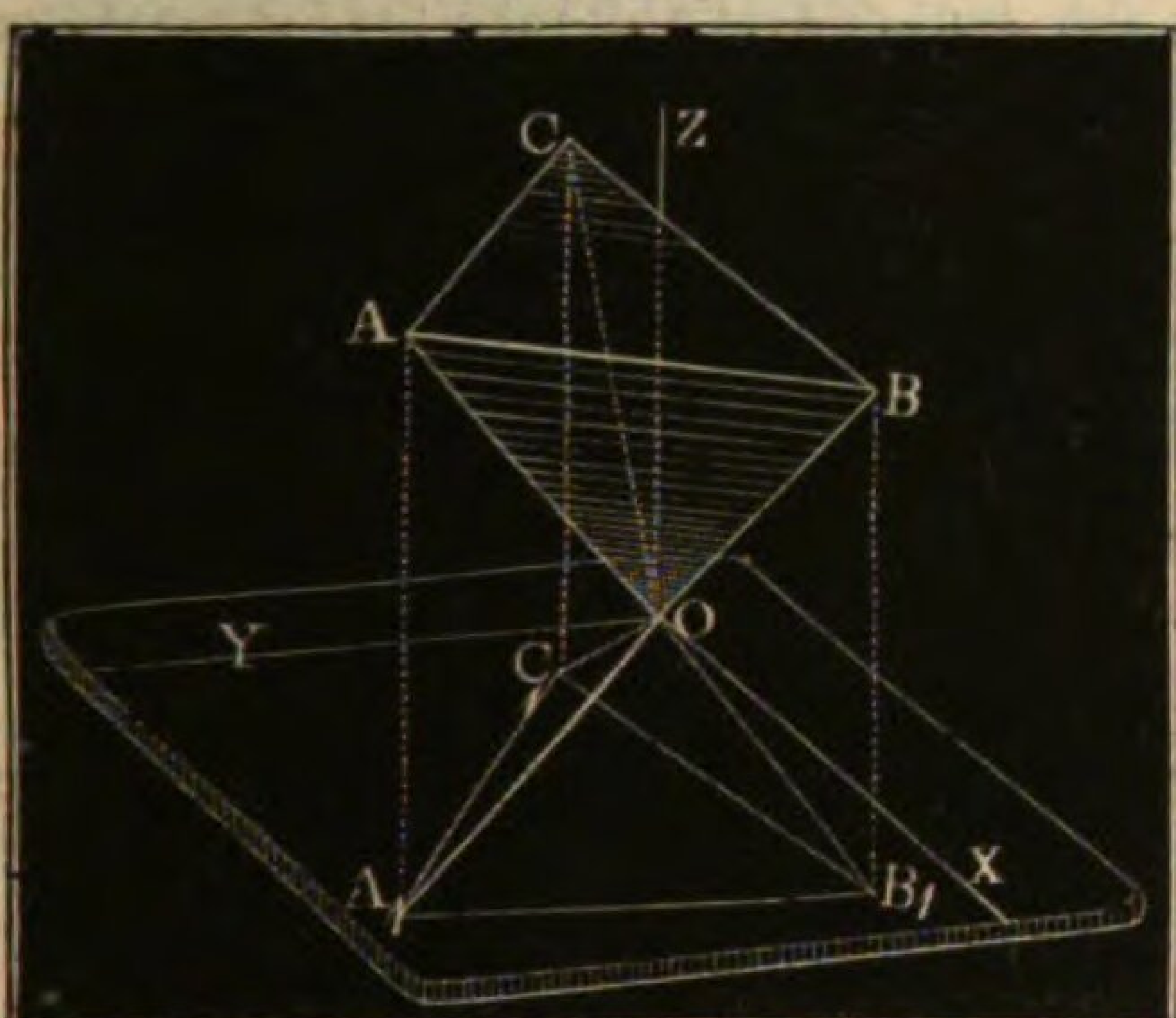
Schwerpunkte von Körpern.

wofern DD_1 der Abstand der Spitze ist; es folgt daher aus der Verbindung der beiden letzten Gleichungen

$$SS_1 = \frac{3}{4} MM_1 + \frac{1}{4} DD_1 = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1 + DD_1}{4}.$$

Der Abstand des Schwerpunktes von vier gleichen, in den Eckpunkten der dreiseitigen Pyramide angebrachten Gewichten ist ebenfalls gleich dem arithmetischen Mittel $\frac{AA_1 + BB_1 + CC_1 + DD_1}{4}$, folglich fällt der Schwerpunkt der Pyramide mit dem von diesem Gewichtssysteme zusammen.

Fig. 134.



Anmerkung. Auch die Volumenbestimmung einer dreiseitigen Pyramide aus den Coordinaten ihrer Eckpunkte ist eine sehr einfache. Legen wir durch die Spitze *O* einer solchen Pyramide *ABCO*, Fig. 134, drei Grundebenen, *XY*, *XZ*, *YZ*, und bezeichnen wir die Abstände der Eckpunkte *A*, *B*, *C* von diesen Ebenen durch $z_1, z_2, z_3; y_1, y_2, y_3$ und x_1, x_2, x_3, so ist das Volumen der Pyramide

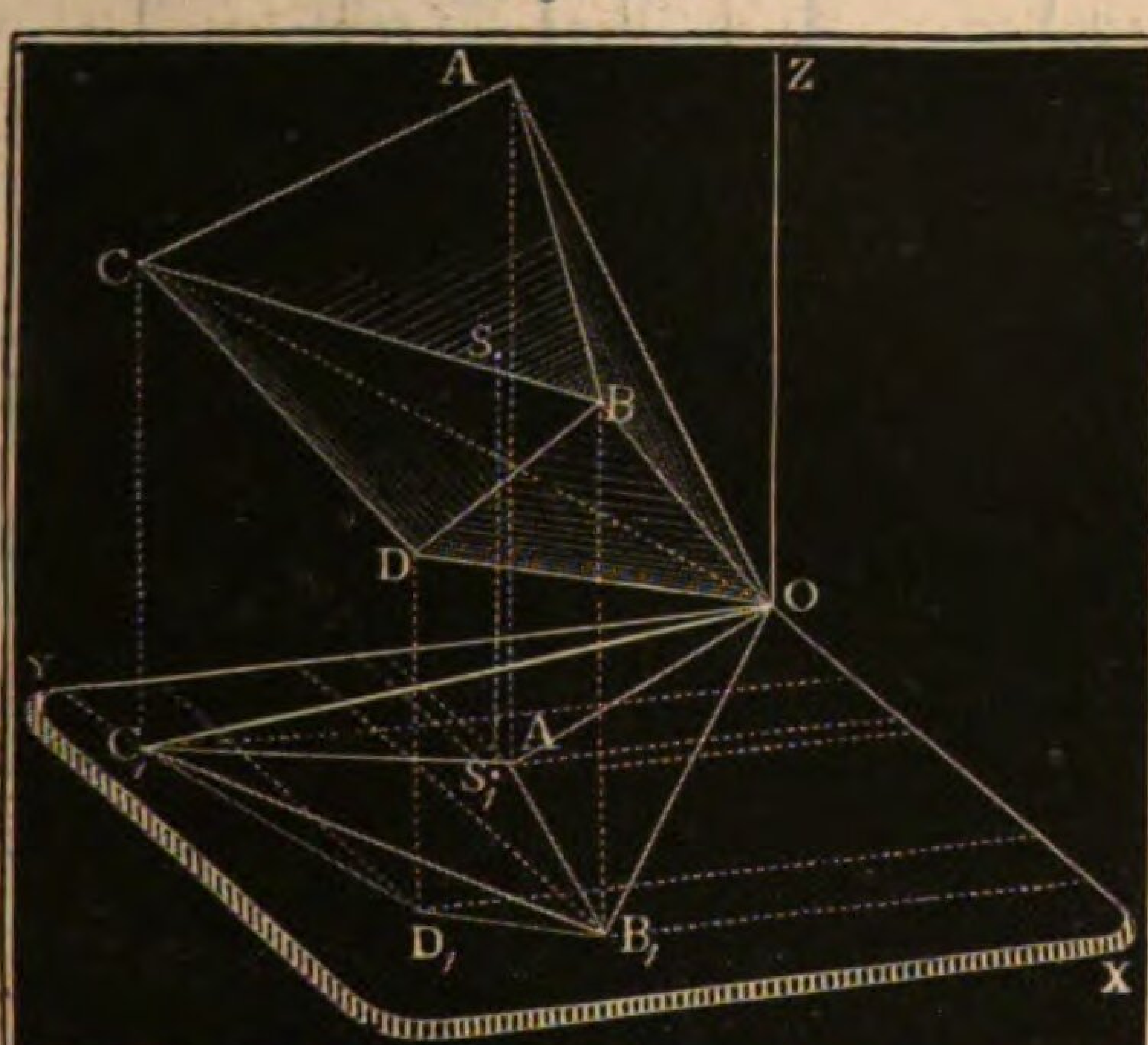
$$V = \pm \frac{1}{6} (x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3 - x_3 y_2 z_1),$$

wie sich ergiebt, wenn man die Pyramide als das Aggregat von vier schief abgeschnittenen Prismen ansiebt.

Die Abstände des Schwerpunktes dieser Pyramide von den drei Grundebenen sind:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{4},\ y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{4} \text{ und } z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{4}.$$

Fig. 135.



§. 113. Da sich jedes Polyeder, wie *ABCDO*, Fig. 135, in lauter dreiseitige Pyramiden, wie *ABCO*, *BCDO* zerlegen läßt, so kann man auch den Schwerpunkt *S* desselben finden, wenn man die Volumina und statischen Momente der einzelnen Pyramiden berechnet.

Sind die Abstände der Eckpunkte *A*, *B*, *C* u. s. w.

Schwerpunkte von Körpern.

von den durch die gemeinschaftliche Spitze O aller Pyramiden gelegten Coordinatebenen: x_1, x_2, x_3, u. s. w., y_1, y_2, y_3 u. s. w., z_1, z_2, z_3 u. s. w., so hat man die Volumina der einzelnen Pyramiden

$$V_1 = \pm \tfrac{1}{6} (x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3 - x_3 y_2 z_1),$$
$$V_2 = \pm \tfrac{1}{6} (x_2 y_3 z_4 + x_3 y_4 z_2 + x_4 y_2 z_3 - x_2 y_4 z_3 - x_3 y_2 z_4 - x_4 y_3 z_2)$$

u. s. w. und die Abstände ihrer Schwerpunkte:

$$u_1 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{4},\ v_1 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{4},\ w_1 = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{4},$$
$$u_2 = \frac{x_2 + x_3 + x_4}{4},\ v_2 = \frac{y_2 + y_3 + y_4}{4},\ w_2 = \frac{z_2 + z_3 + z_4}{4} \text{ u. s. w.}$$

Aus diesen Werthen berechnen sich endlich die Abstände des Schwerpunktes des ganzen Körpers mittels der Formeln;

$$u = \frac{V_1 u_1 + V_2 u_2 + \dots}{V_1 + V_2 + \dots},\ v = \frac{V_1 v_1 + V_2 v_2 + \dots}{V_1 + V_2 + \dots},$$
$$w = \frac{V_1 w_1 + V_2 w_2 + \dots}{V_1 + V_2 + \dots}.$$

Beispiel. Ein von sechs Dreiecken begrenzter Körper *ADO*, Fig. 135, ist durch folgende Coordinatenwerthe seiner Eckpunkte bestimmt, und man sucht die Coordinaten seines Schwerpunktes.

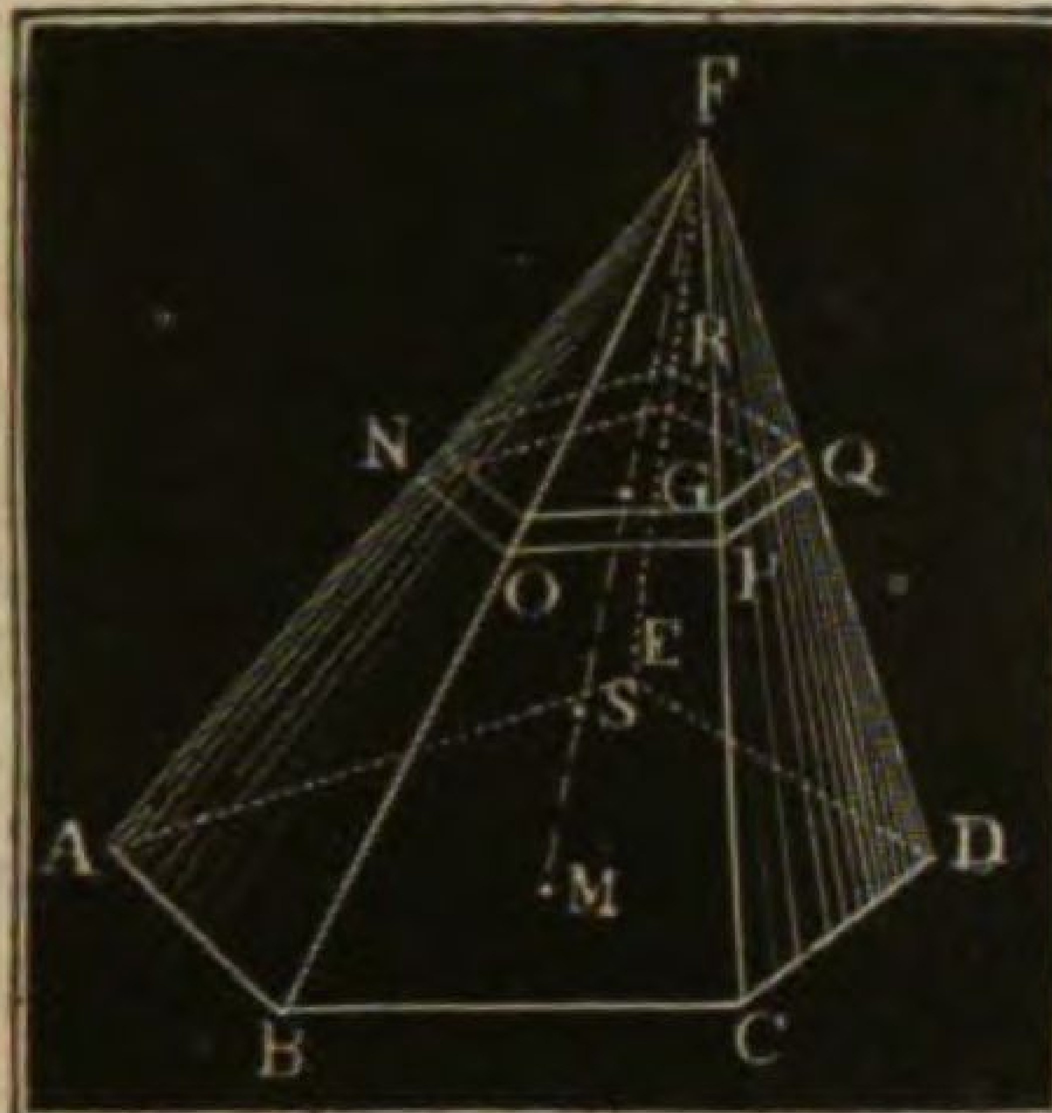
Gegebene Coordinaten.			Die sechsfachen Inhalte der dreiseitigen Pyramiden.	Vierfache Coordinaten der Schwerpunkte.			Vierundzwanzigfache statische Momente.		
x	y	z		$4u_n$	$4v_n$	$4w_n$	$24 V_n u_n$	$24 V_n v_n$	$24 V_n w_n$
20	23	41							
45	29	30	$6V = \begin{Bmatrix}20.29.28\\23.30.12\\41.45.40\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}20.40.30\\23.28.45\\41.12.29\end{Bmatrix} = 31072$	77	92	99	2392544	2858624	3076128
12	40	28							
38	35	20	$6V = \begin{Bmatrix}45\ 35.28\\29.20.12\\30.38.40\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}45.40.20\\29.28.38\\30.12.35\end{Bmatrix} = 17204$	95	104	78	1634380	1789216	1341912
			Summe: 48276				4026924	4647840	4418040

Aus den Ergebnissen dieser Rechnung folgen nun die Abstände des Schwerpunktes des ganzen Körpers von den Ebenen *YZ*, *XZ* und *XY*,

$$u = \frac{1}{4} \cdot \frac{4026924}{48276} = 20{,}853,$$
$$v = \frac{1}{4} \cdot \frac{4647840}{48267} = 24{,}069,$$
$$w = \frac{1}{4} \cdot \frac{4418040}{48276} = 22{,}879.$$

§. 114. **Der Schwerpunkt einer abgestumpften Pyramide** $ADQN$, Fig. 136, liegt in der Linie MG, welche die Schwerpunkte beider (parallelen) Grundflächen verbindet. Um aber den Abstand dieses Punktes von einer der Grundflächen zu bestimmen, hat man die Volumina und Momente der vollständigen Pyramide ADF und der Ergänzungspyramide NQF zu ermitteln. Sind die Inhalte der Grundflächen AD und $NQ = G$ und G_1 und ist der Normalabstand beider $= h$, so bestimmt sich die Höhe x der Ergänzungspyramide aus der Formel Schwerpunkt von Körpern.

Fig. 136.



$$\frac{G}{G_1} = \frac{(h+x)^2}{x^2}, \text{ welche } \frac{h}{x} + 1 = \sqrt{\frac{G}{G_1}}, \text{ also } x = \frac{h\sqrt{G_1}}{\sqrt{G}-\sqrt{G_1}},$$

so wie $h + x = \dfrac{h\sqrt{G}}{\sqrt{G}-\sqrt{G_1}}$ giebt.

Das Moment der ganzen Pyramide in Beziehung auf die Basis G ist nun

$$\frac{G(h+x)}{3} \cdot \frac{h+x}{4} = {}^1\!/_{12} \cdot \frac{h^2G^2}{(\sqrt{G}-\sqrt{G_1})^2}, \text{ das der Ergänzungspyramide}$$

$$= \frac{G_1 x}{3}\left(h + \frac{x}{4}\right) = {}^1\!/_3 \, \frac{h^2\sqrt{G_1^3}}{\sqrt{G}-\sqrt{G_1}} + {}^1\!/_{12} \cdot \frac{h^2 G_1^2}{(\sqrt{G}-\sqrt{G_1})^2};$$ es folgt daher das Moment der abgekürzten Pyramide:

$$\frac{h^2}{12(\sqrt{G}-\sqrt{G_1})^2} \cdot (G^2 - 4(\sqrt{GG_1^3} - G_1^2) - G_1^2)$$

$$= \frac{h^2(G^2 - 4G_1\sqrt{GG_1} + 3G_1^2)}{12(G - 2\sqrt{GG_1} + G_1)} = \frac{h^2}{12} \cdot (G + 2\sqrt{GG_1} + 3G_1).$$

Nun ist noch der Inhalt der abgekürzten Pyramide:

$$V = \frac{h}{3}(G + \sqrt{GG_1} + G_1);$$

es folgt daher endlich der Abstand ihres Schwerpunktes S von der Basis:

$$y = \frac{h}{4} \cdot \frac{G + 2\sqrt{GG_1} + 3G_1}{G + \sqrt{GG_1} + G_1}.$$

Sind die Halbmesser der Grundflächen eines **abgekürzten Kegels**: r und r_1, ist also $G = \pi r^2$ und $G_1 = \pi r_1^2$, so hat man für diesen

$$y = \frac{h}{4} \cdot \frac{r^2 + 2rr_1 + 3r_1^2}{r^2 + rr_1 + r_1^2}.$$

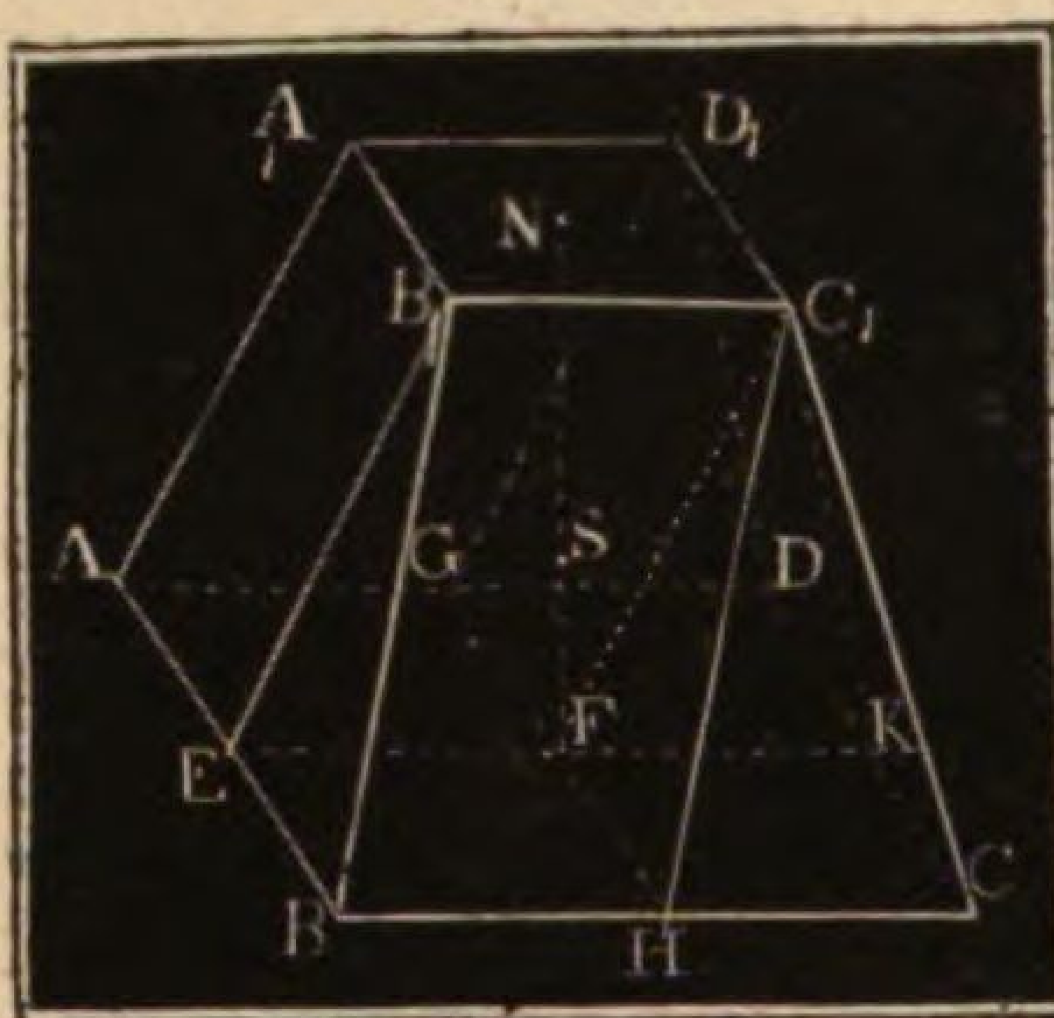
Schwerpunkte von Körpern.

Beispiel. Der Schwerpunkt eines abgekürzten Kegels von der Höhe $h = 20$ Zoll und den Halbmessern $r = 12$ und $r_1 = 8$ Zoll, liegt, wie alle Mal, in der die Mittelpunkte beider kreisförmigen Grundflächen verbindenden Linie und steht von der größeren um

$$y = {}^{20}/_{4} \cdot \frac{12^2+2.12.8+3.8^2}{12^2+12.8+8} = \frac{5.528}{304} = \frac{2640}{304} = 8{,}684 \text{ Zoll ab.}$$

§. 115. Ein Ponton, d. i. ein von zwei unähnlichen rectangulären Grundflächen und von vier Trapezen umschlossener Körper ACC_1A_1 Fig. 137, läßt sich in ein Parallelepiped AFC_1A_1, in zwei dreiseitige Prismen EHC_1B_1 und GKC_1D_1 und in eine vierseitige Pyramide HKC_1 zerlegen; man kann daher mit Hülfe der Momente dieser Bestandtheile den Schwerpunkt des Körpers finden.

Fig. 137.



Es läßt sich sehr leicht einsehen, daß die gerade Linie von der Mitte der einen Basis nach der Mitte der andern Schwerlinie dieses Körpers ist; es bleibt also nur noch der Abstand des Schwerpunktes von der einen Basis zu bestimmen übrig. Bezeichnen wir die Länge BC und Breite AB der einen Basis durch l und b, die Länge B_1C_1 und Breite A_1B_1 der andern Basis durch l_1 und b_1, und die Höhe des Körpers oder den Abstand beider Grundflächen durch h. Dann ist der Inhalt des Parallelepipedes $= b_1l_1h$ und dessen Moment $b_1l_1h \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{2}\, b_1l_1h^2$, ferner der Inhalt der beiden dreiseitigen Prismen $= ([b-b_1]\,l_1+[l-l_1]\,b_1)\,\frac{h}{2}$ und deren Moment $= ([b-b_1]\,l_1+[l-l_1]\,b_1)\,\frac{h}{2} \cdot \frac{h}{3}$, endlich der Inhalt der Pyramide $= (b-b_1)(l-l_1)\,\frac{h}{3}$ und deren Moment $= (b-b_1)\,(l-l_1)\,\frac{h}{3} \cdot \frac{h}{4}$. Das Volumen des ganzen Körpers ist nun

$$V = (6b_1l_1 + 3bl_1 + 3lb_1 - 6\,b_1l_1 + 2bl + 2b_1l_1 - 2bl_1 - 2b_1l) \cdot \frac{h}{6}$$

$$= (2bl + 2b_1l_1 + bl_1 + lb_1)\,\frac{h}{6}, \text{ und dessen Moment}$$

$$Vy = (6b_1l_1 + 2bl_1 + 2lb_1 - 4b_1l_1 + bl + b_1l_1 - bl_1 - lb_1) \cdot \frac{h^2}{12}$$

$$= (3b_1l_1 + bl + bl_1 + b_1l)\,\frac{h^2}{12}.$$

Hieraus folgt endlich der Abstand des Schwerpunktes von der Grundfläche bl: Schwerpunkte von Körpern.

$$y = \frac{bl + 3b_1l_1 + bl_1 + b_1l}{2bl + 2b_1l_1 + bl_1 + b_1l} \cdot \frac{h}{2}.$$

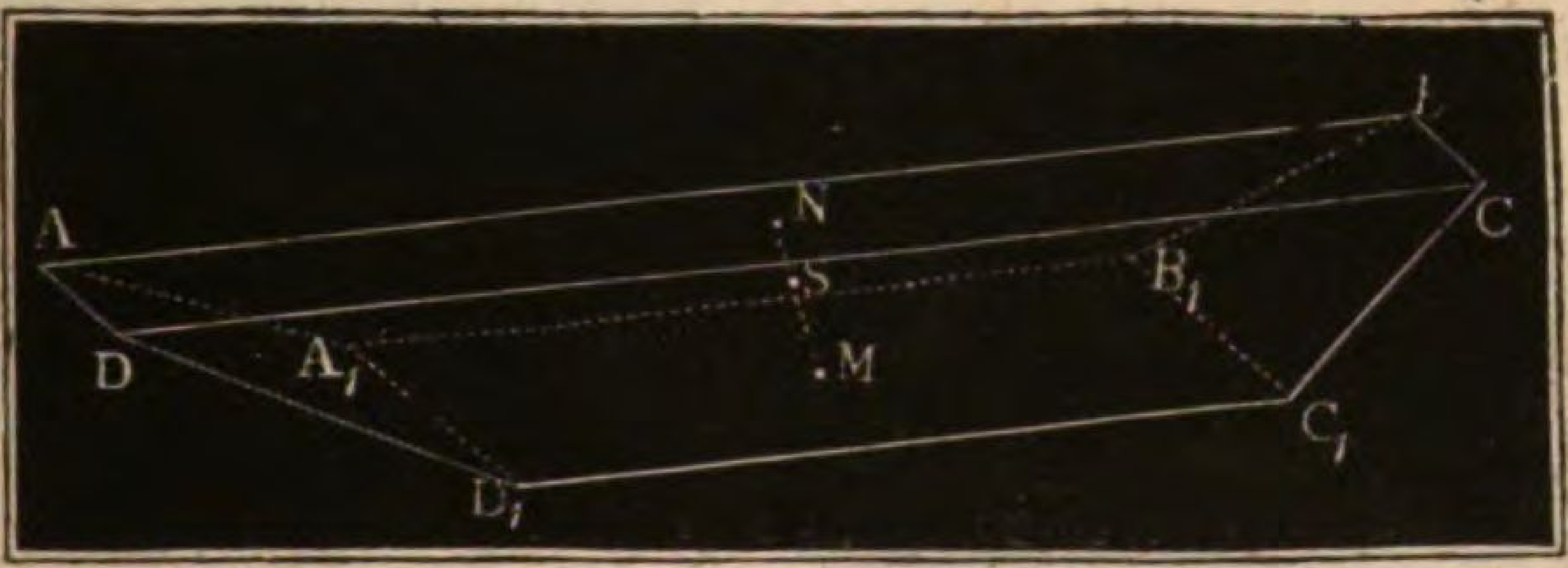
Anmerkung. Diese Formel findet auch ihre Anwendung bei Körpern mit elliptischen Grundflächen. Sind die Axen der einen Grundfläche a und b und die der andern a_1 und b_1, so ist das Volumen eines solchen Körpers (Kübels):

$V = \frac{\pi h}{24}(2ab + 2a_1b_1 + ab_1 + a_1b)$, und der Abstand des Schwerpunktes:

$$y = \frac{ab + 3a_1b + ab_1 + a_1b}{2ab + 2a_1b_1 + ab_1 + a_1b} \cdot \frac{h}{2}.$$

Beispiel. Ein Teichdamm ACC_1A_1, Fig. 138, von 20 Fuß Höhe ist

Fig. 138.

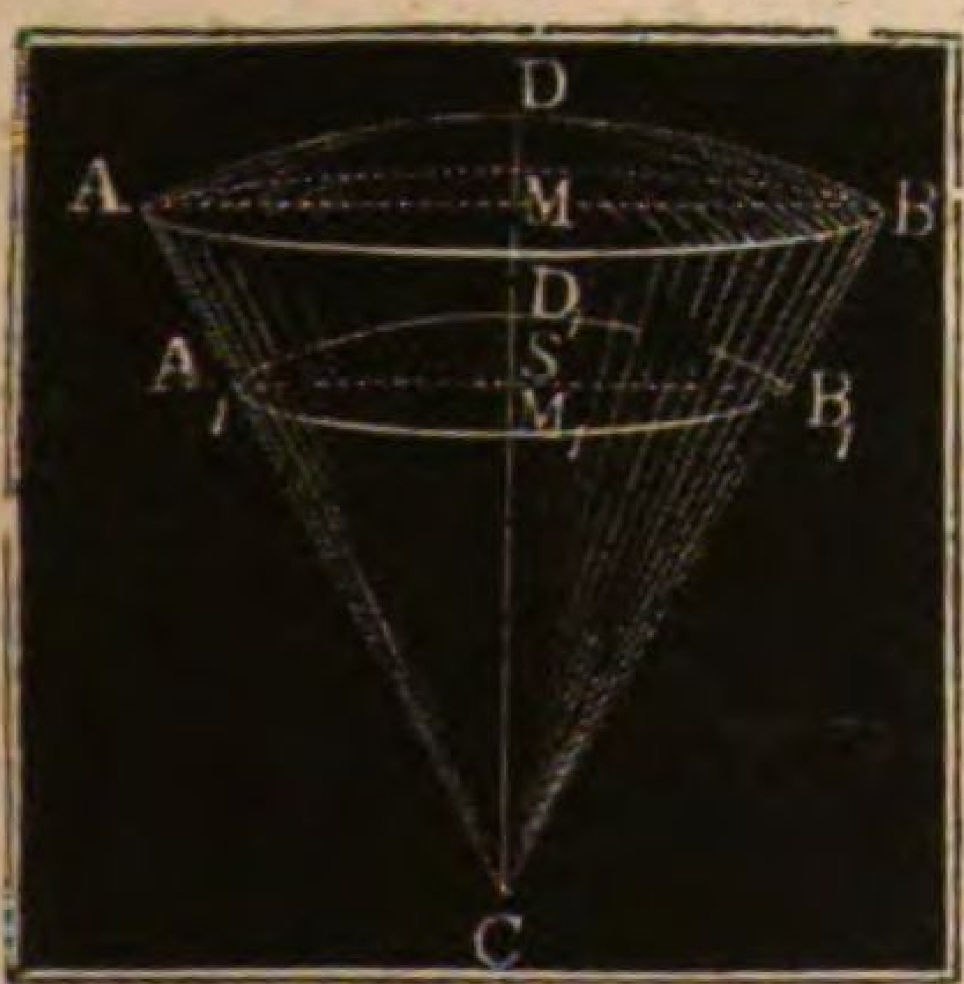


unten 250 Fuß lang und 40 Fuß breit, oben aber 400 Fuß lang und 15 Fuß breit, man sucht den Abstand seines Schwerpunktes von der Basis. Hier ist $b = 40$, $l = 250$, $b_1 = 15$, $l_1 = 400$, $h = 20$, daher der gesuchte Vertikalabstand:

$$y = \frac{40 \cdot 250 + 3 \cdot 15 \cdot 400 + 40 \cdot 400 + 15 \cdot 250}{2 \cdot 40 \cdot 250 + 2 \cdot 15 \cdot 400 + 40 \cdot 400 + 15 \cdot 250} \cdot {}^{20}/_{2}$$
$$= \frac{4775}{5175} \cdot 10 = \frac{1910}{207} = 9{,}227 \text{ Fuß}.$$

§. 116. Dreht sich ein Kreisausschnitt ACD, Fig. 139, um seinen Halbmesser CD, so entsteht ein Kugelausschnitt ACB, dessen Schwerpunkt wir bestimmen wollen. Man kann sich diesen Körper als einen Inbegriff von unendlich vielen und unendlich dünnen Pyramiden vorstellen, deren gemeinschaftliche Spitze der Mittelpunkt C ist und deren Grundflächen die Kugelmütze ADB bilden. Die Schwerpunkte aller dieser Pyramiden stehen um $^3/_4$ des Kugelhalbmessers vom Mittelpunkte C ab, es bilden daher dieselben eine zweite Kugelmütze $A_1D_1B_1$ vom Halbmesser $CA_1 = {}^3/_4\, CA$. Der Schwerpunkt S dieser krummen Fläche ist aber auch der Schwerpunkt des Kugelausschnittes, weil sich die

Fig. 139.



Schwerpunkt von Körpern.

Gewichte der Elementarpyramiden auf diese Fläche gleichförmig vertheilen, diese also gleichförmig schwer ausfällt.

Setzen wir nun den Halbmesser $CA = CD = r$ und die Höhe DM der äußeren Calotte $= h$, so erhalten wir für die innere Calotte $CD_1 = \frac{3}{4} r$, und $M_1D_1 = \frac{3}{4} h$, folglich (§. 110) $D_1S = \frac{1}{2} M_1D_1 = \frac{3}{8} h$ und den Abstand des Schwerpunktes des Kugelausschnittes vom Centro:

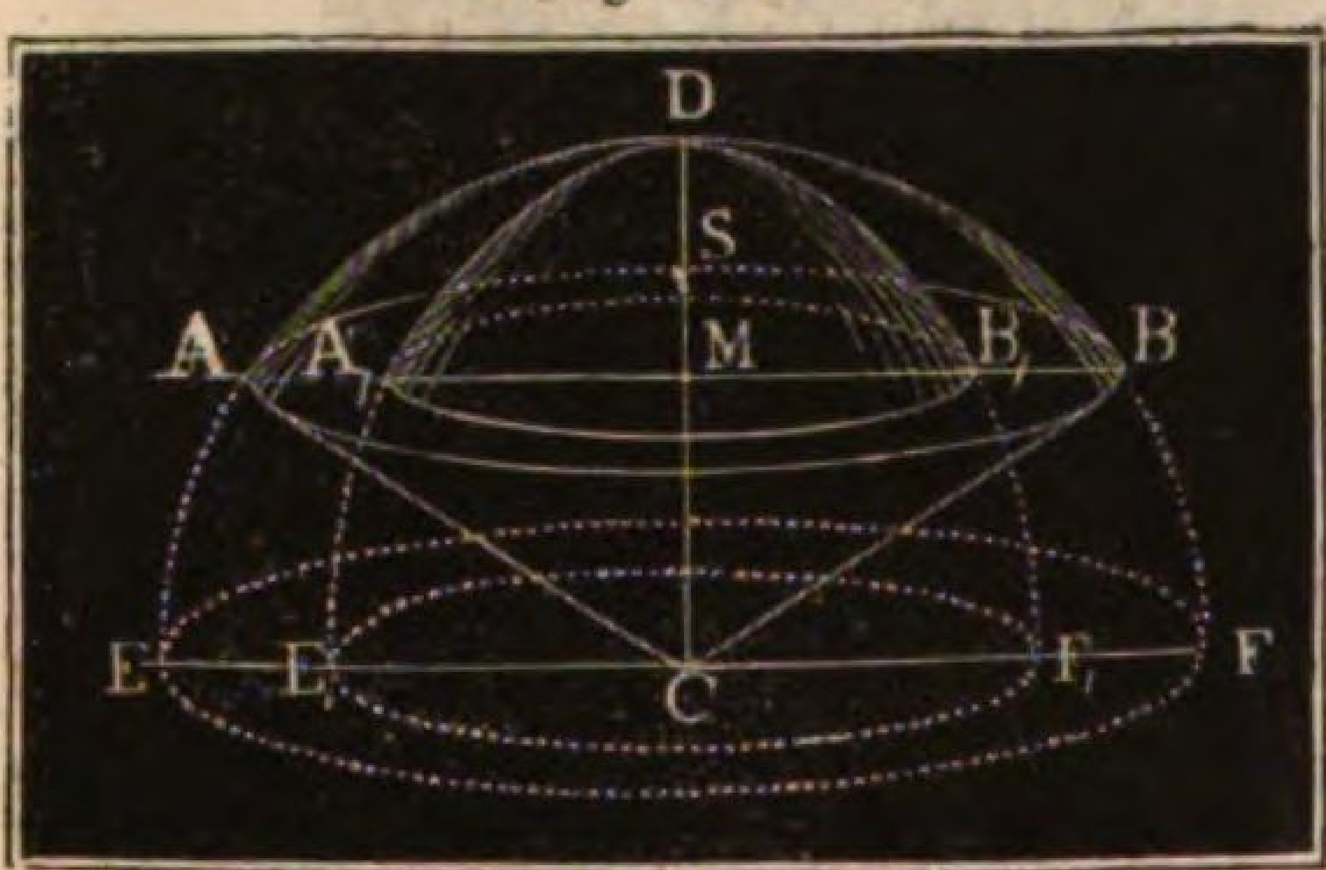
$$CS = CD_1 - SD_1 = \frac{3}{4} r - \frac{3}{8} h = \frac{3}{4}\left(r - \frac{h}{2}\right).$$

Für die Halbkugel ist z. B. $h = r$, daher der Abstand ihres Schwerpunktes S vom Mittelpunkte C:

$$CS = \frac{3}{4} \cdot \frac{r}{2} = \frac{3}{8} r.$$

§. 117. Den Schwerpunkt S von einem Kugelsegmente ABD, Fig. 140, erhält man, indem man das Moment desselben gleichsetzt der Differenz zwischen dem Momente des Ausschnittes $ADBC$ und dem des Kegels ABC. Setzen wir wieder den Kugelhalbmesser $CD = r$ und die Höhe $DM = h$, so erhalten wir das Moment des Ausschnittes $= \frac{2}{3} \pi r^2 h \,.\, \frac{3}{8}(2r - h) = \frac{1}{4} \pi r^2 h\,(2r - h)$ und das des Kegels $= \frac{1}{3} \pi h\,(2r - h) \,.\, (r-h) \,.\, \frac{3}{4}(r-h) = \frac{1}{4} \pi h\,(2r-h)\,(r-h)^2$; es ist also das Moment des Kugelsegmentes $= \frac{1}{4} \pi h\,(2r-h)\,(r^2 - [r-h]^2) = \frac{1}{4} \pi h^2\,(2r-h)^2$. Der Inhalt des Segmentes ist aber $= \frac{1}{3} \pi h^2\,(3r - h)$; es folgt daher der in Frage stehende Abstand

Fig. 140.



$$CS = \frac{\frac{1}{4}\pi h^2 (2r-h)^2}{\frac{1}{3}\pi h^2 (3r-h)} = \frac{3}{4} \cdot \frac{(2r-h)^2}{3r-h}.$$

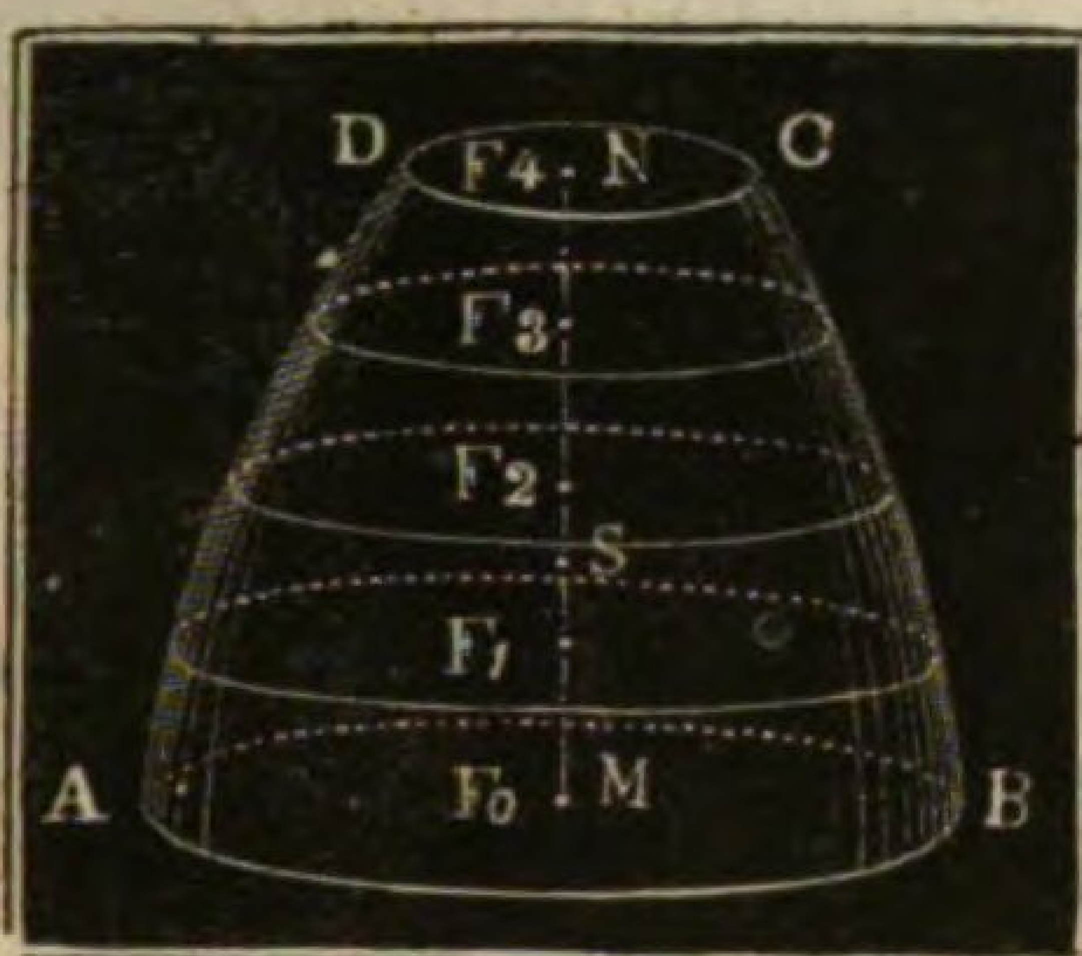
Setzt man wieder $h = r$, so geht das Segment in eine Halbkugel über, und es folgt wie oben, $CS = \frac{3}{8} r$.

Diese Formel gilt selbst für das Segment eines Sphäroides A_1DB_1, welches entsteht, wenn sich der elliptische Bogen DA_1 um die große Halbaxe $CD = r$ dreht; denn zerschneidet man beide Segmente durch Ebenen parallel zur Basis AB in lauter dünne Scheiben, so ist das Verhältniß von je zwei derselben unveränderlich $= \frac{\overline{MA_1}^2}{\overline{MA}^2} = \frac{\overline{CE_1}^2}{\overline{CE}^2} = \frac{b^2}{r^2}$, wenn b die kleine Halbaxe der Ellipse bezeichnet. Man muß also sowohl das Volumen, als auch das Moment des Kugelsegmentes durch $\frac{b^2}{r^2}$ multipliciren, um

das Volumen und das Moment des Segmentes vom Sphäroid zu erhalten, und verändert dadurch den Quotienten $CS = \frac{\text{Moment}}{\text{Volumen}}$ um Nichts. Schwerpunkte von Körpern.

§. 118. Um den Schwerpunkt eines ungesetzmäßigen Körpers $ABCD$, Fig. 141, zu finden, zerlege man denselben durch gleich viel von einander abstehende Ebenen in dünne Scheiben, bestimme die Inhalte der erhaltenen Durchschnitte und deren Momente in Hinsicht auf die als Basis dienende erste Parallelebenene AB, und vereinige endlich beide durch die Simpson'sche Regel.

Fig. 141.



Sind die Inhalte dieser Durchschnitte F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 und ist die ganze Höhe oder der Abstand zwischen den äußersten Parallelebenen $= h$. so ist das Volumen des Körpers nach der Simpson'schen Regel (annähernd)

$$V = (F_0 + 4F_1 + 2F_2 + 4F_3 + F_4)\frac{h}{12}.$$

Multiplicirt man aber in dieser Formel jede dieser Flächen durch ihren Abstand von der Basis, so erhält man das Moment des Körpers, nämlich:

$$Vy = (0.F_0 + 1.4F_1 + 2.2F_2 + 3.4F_3 + 4F_4)\frac{h}{4}\cdot\frac{h}{12},$$

endlich giebt die Division beider Ausdrücke den gesuchten Abstand

$$MS = y = \frac{(0.F_0 + 1.4F_1 + 2.2F_2 + 3.4F_3 + 4.F_4)}{F_0 + 4F_1 + 2F_2 + 4F_3 + F_4}\frac{h}{4}.$$

Ist die Zahl der plattenförmigen Elemente $= 6$, so hat man

$$y = \frac{0.F_0 + 1.4F_1 + 2.2F_2 + 3.4F_3 + 4.2F_4 + 5.4F_5 + 6.F_6}{F_0 + 4F_1 + 2F_2 + 4F_3 + 2F_4 + 4F_5 + F_6}\cdot\frac{h}{6}.$$

Es ist leicht zu erachten, wie man diese Formel umzuändern hat, wenn die Zahl der Schnitte eine andere ist. Nur fordert diese Regel, daß die Zahl der abgeschnittenen Stücke eine gerade, die Flächenzahl also eine ungerade ist.

In den meisten Fällen der Anwendung genügt die Bestimmung eines Abstandes, weil außerdem noch eine Schwerlinie bekannt ist. Die in der Praxis gewöhnlich vorkommenden Körper sind auf der Drehbank erzeugte Rotationskörper, deren Rotationsaxe die Schwerlinie ist.

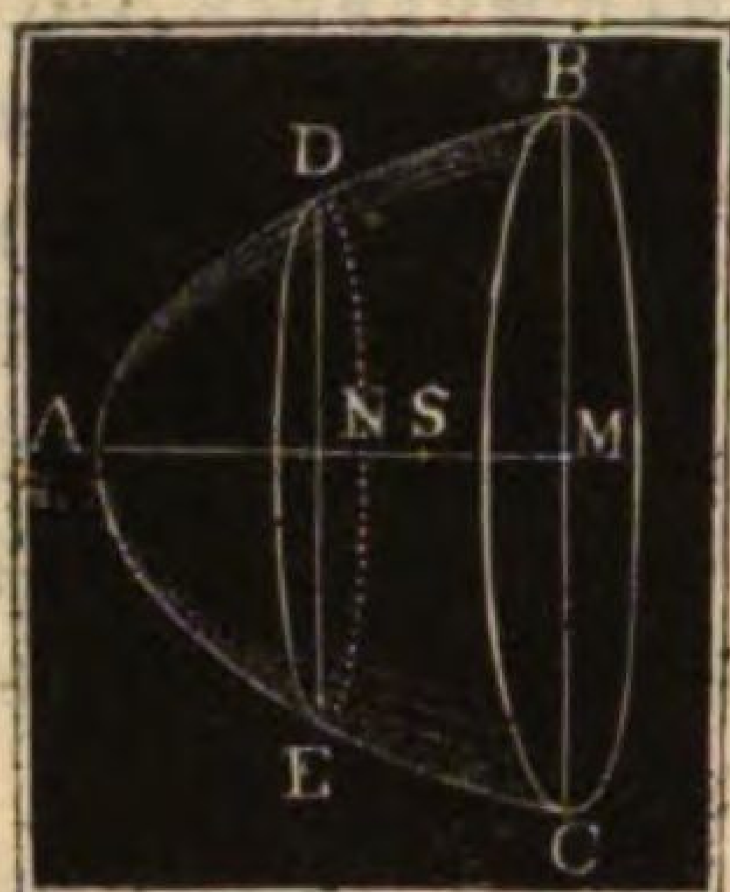
Endlich findet die Formel auch ihre Anwendung bei Bestimmung des

Schwerpunkte von Körpern.

Schwerpunktes einer Fläche, in welchem Falle die Durchschnitte $F_0, F_1 F_2,$ u. s. w. in Linien übergehen.

Beispiel 1. Für das parabolische Conoid ABC, Fig. 142, welches durch Umdrehung des Parabelstückes ABM um seine Axe AM entstanden ist, erhält man, wenn man nur einen Schnitt DNE durchführt, Folgendes:

Fig. 142.

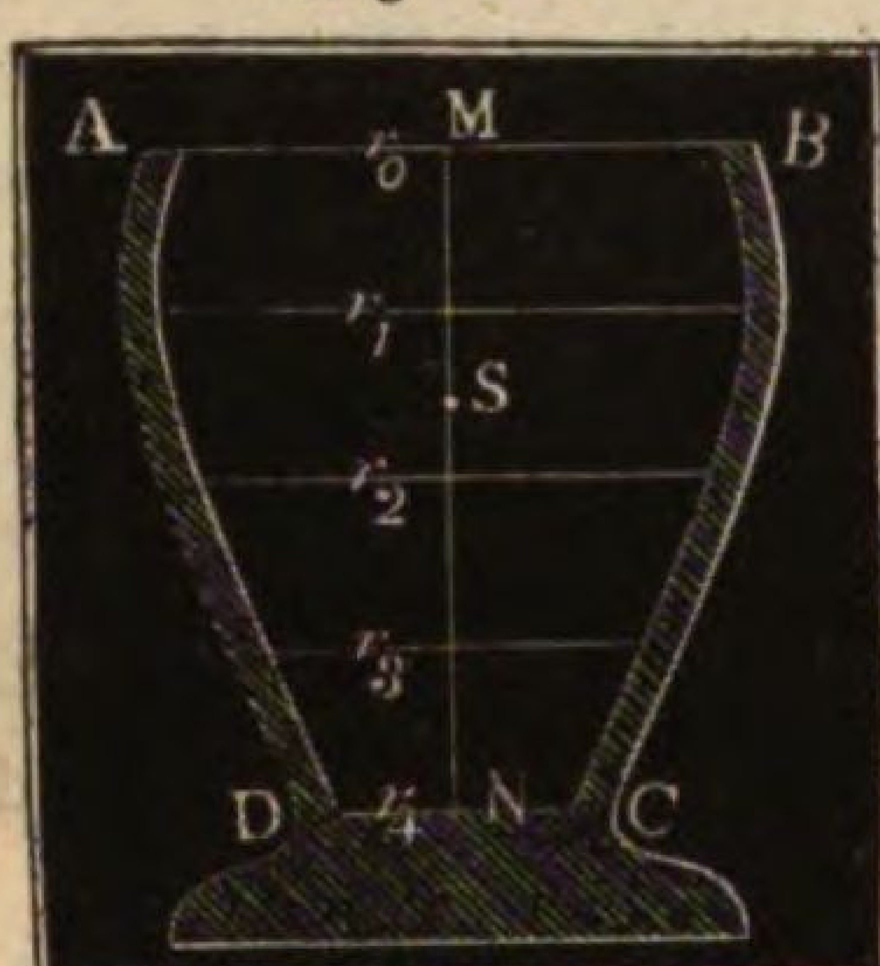


Es sei die Höhe $AM = h$, der Halbmesser $BM = r$, $AN = NM = \frac{h}{2}$ und daher der Radius $DN = r\sqrt{1/2}$. Der Inhalt des Schnittes durch A ist $F_0 = 0$, durch $N = F_1 = \pi \overline{DN}^2 = \frac{\pi r^2}{2}$ und durch $M = F_2 = \pi r^2$. Hiernach ist das Volumen dieses Körpers:

$$V = \frac{h}{6}(0 + 4F_1 + F_2) = \frac{h}{6}(2\pi r^2 + \pi r^2) = \frac{1}{2}\pi r^2 h$$

$= \frac{1}{2} F_2 h$; dagegen das Moment $= \frac{h^2}{12}(1.2\pi r^2 + 2.\pi r^2) = \frac{1}{3}\pi r^2 h^2 = \frac{1}{3} F_2 h^2$, endlich der Abstand des Schwerpunktes S vom Scheitel:

Fig. 143.



$$AS = \frac{\frac{1}{3} F_2 h^2}{\frac{1}{2} F_2 h} = \frac{2}{3}\, h.$$

Beispiel 2. Das Gefäß $ABCD$, Fig. 143, hat die mittleren halben Weiten $r_0 = 1$ Zoll, $r_1 = 1{,}1$ Zoll, $r_2 = 0{,}9$ Zoll, $r_3 = 0{,}7$ Zoll, $r_4 = 0{,}4$ Zoll bei einer Höhe $MN = 2{,}5$ Zoll, man sucht den Schwerpunkt S seines Fassungsraumes. Die Querschnitte sind $F_0 = 1 \,.\, \pi$, $F_1 = 1{,}21 \,.\, \pi$, $F_2 = 0{,}81 \,.\, \pi$, $F_3 = 0{,}49 \,.\, \pi$, $F_4 = 0{,}16\, \pi$, es ist daher der Abstand des Schwerpunktes von der Horizontalebene AB:

$$MS = \frac{0.1\pi + 1.4.1{,}21.\pi + 2.2.0{,}81\pi + 3.4.0{,}49\pi + 4.0{,}16.\pi}{1\pi + 4.1{,}21\pi + 2.0{,}81\pi + 4.0{,}49\pi + 0{,}16\pi} \cdot \frac{2{,}5}{4}$$

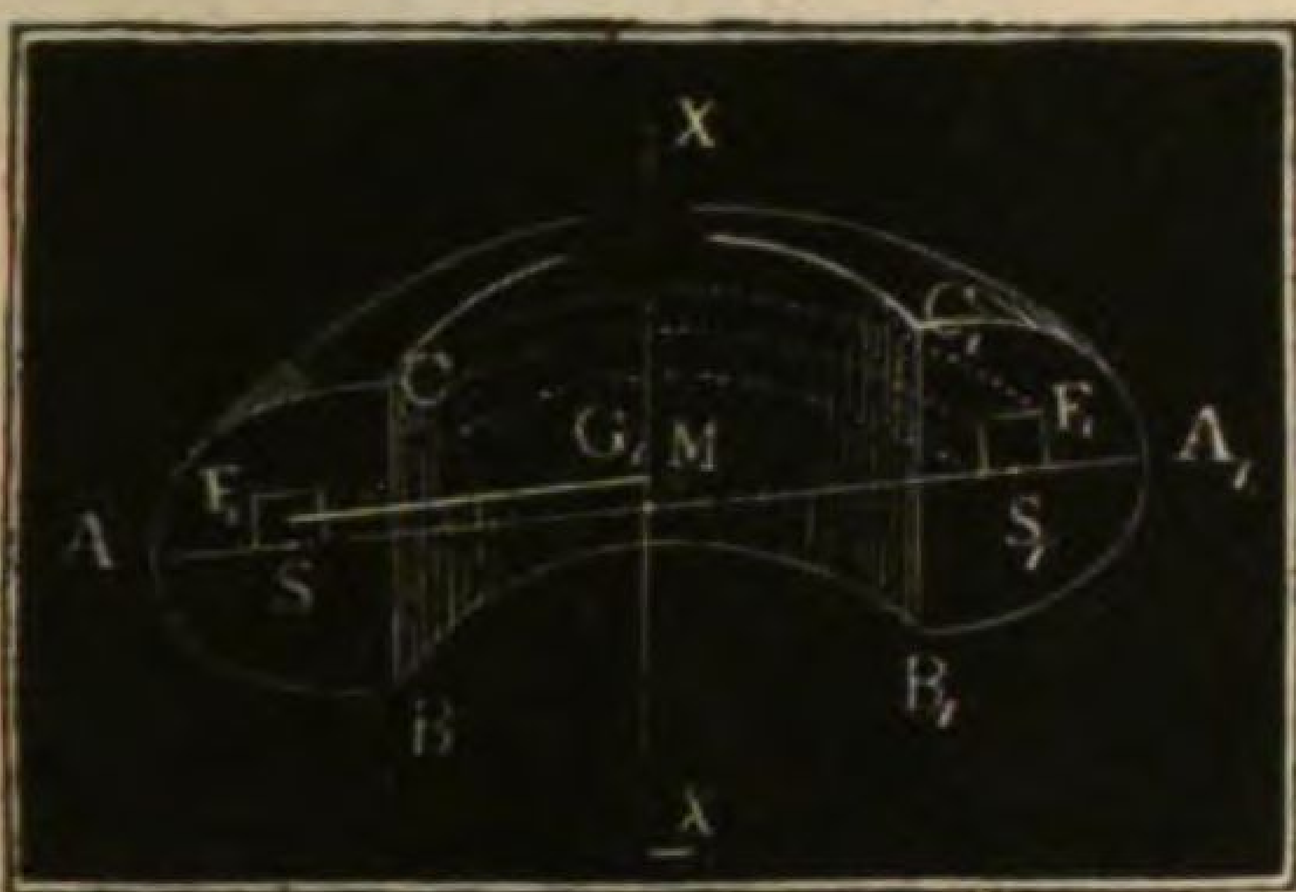
$$= \frac{14{,}60}{9{,}58} \cdot \frac{2{,}5}{4} = \frac{36{,}50}{38{,}32} \cdot 0{,}9502 \text{ Zoll.}$$

Der Fassungsraum ist $V = 9{,}58\, \pi \,.\, \frac{2{,}5}{12} = 6{,}270$ Cub.-Zoll.

§. 119. Eine interessante und zuweilen sehr nützliche Anwendung der Lehre vom Schwerpunkte ist die Guldinische Regel oder die barycentrische Methode (franz. méthode centrobarique, engl. the properties of Guldinus). Dieser zufolge ist der Inhalt eines Rotationskörpers (oder einer Rotationsfläche) gleich dem Producte aus der Erzeugungsfläche (oder Erzeugungslinie) und dem bei der Erzeugung des Rotationskörpers (oder der Rotationsfläche) durchlaufenen Wege ihres Schwerpunktes. Die Richtigkeit dieses Satzes läßt sich auf folgende Weise darthun.

Drehet sich die ebene Fläche ABC, Fig. 144, um eine Axe $\overline{XX}$, so beschreibt jedes Element F_1, F_2 u. s. w. derselben einen Ring; sind die Entfernungen F_1G_1, F_2G_2 u. s. w. dieser Elemente von der Umdrehungsaxe $\overline{XX_1} = r_1, r_2$ u. s. w. und ist der Umdrehungswinkel $AMA_1 = \alpha^0$, also der entsprechende Bogen für den Halbmesser $1, = \alpha$, so sind die bogenförmigen Wege der Elemente $= r_1\alpha$, $r_2\alpha$ u. s. w. Die von den Elementen F_1, F_2 u. s. w. durchlaufenen Räume lassen sich als krummgebogene Prismen von den Grundflächen F_1, F_2 u. s. w. und von den Höhen $r_1\alpha$, $r_2\alpha$ u. s. w. ansehen, haben also die Inhalte: $F_1r_1\alpha$, $F_2r_2\alpha$ u. s. w., und es ist sonach das Volumen des ganzen Körpers $ABCB_1A_1C_1$: Guldinische Regel.

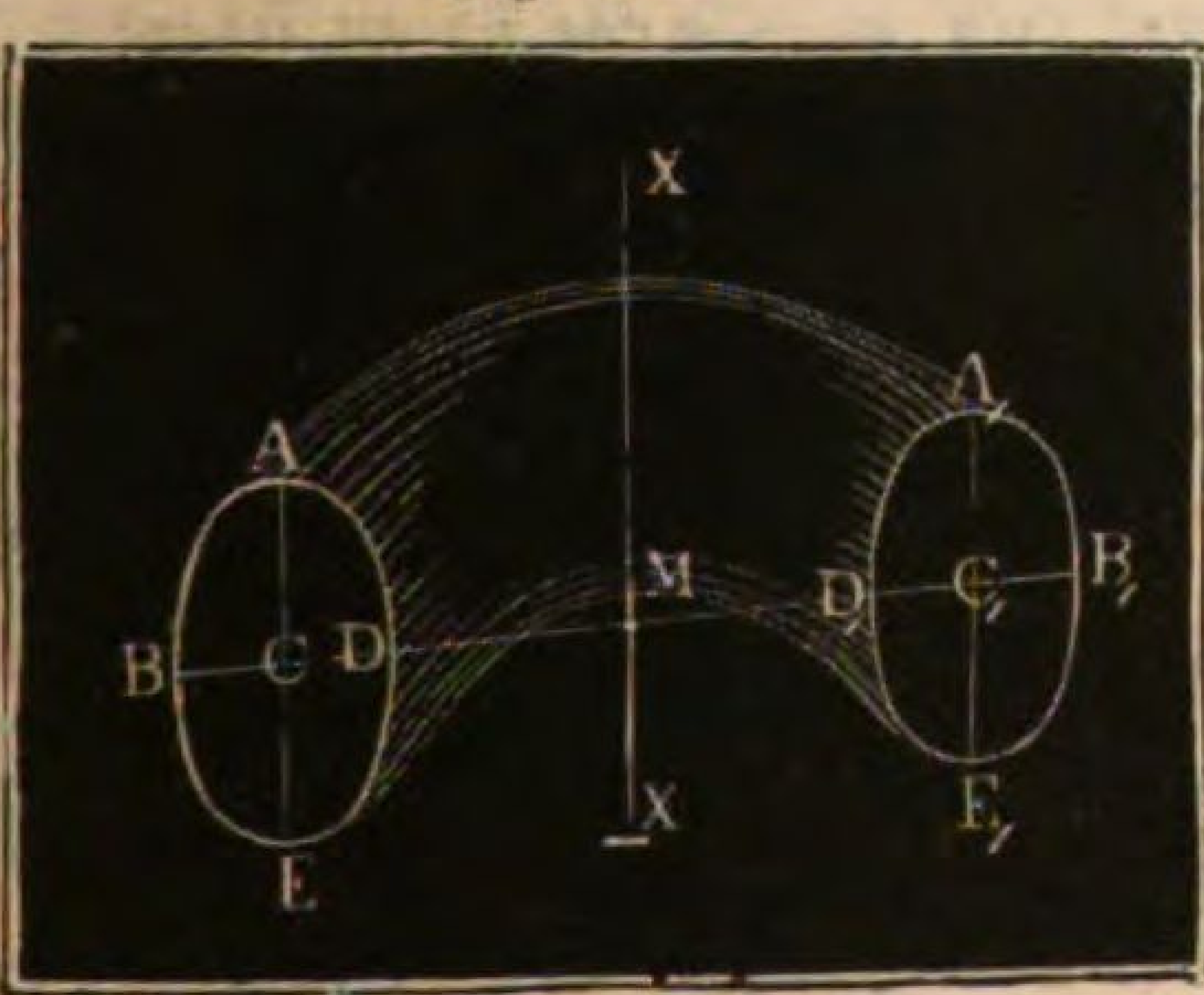
Fig. 144.



$V = F_1r_1\alpha + F_2r_2\alpha \ldots = (F_1r_1 + F_2r_2 + \ldots) \cdot \alpha$. Ist $MS = x$ der Abstand des Schwerpunktes S der Erzeugungsfläche von der Umdrehungsaxe, so hat man auch $(F_1 + F_2 + \ldots)\, x = F_1r_1 + F_2r_2 + \ldots$, es ist folglich auch das Volumen des ganzen Körpers:
$V = (F_1 + F_2 + \ldots)\, x\alpha$. Aber $F_1 + F_2 + \ldots$ ist der Inhalt der ganzen Fläche F und $x\alpha$ ist der vom Schwerpunkte S durchlaufene Kreisbogen $w = SS_1$: es ist daher $V = Fw$, wie oben behauptet wurde. Diese Formel gilt auch für die Rotation einer Linie, weil sich dieselbe als eine Fläche von unendlich kleiner Breite ansehen läßt, es ist nämlich $F = Lw$, d. h. die Rotationsfläche ist ein Product aus der Erzeugungslinie (L) und dem Wege (w) ihres Schwerpunktes.

Beispiel. Bei einem halben Ringe mit elliptischem Querschnitte $ABED$, Fig. 145, seien die Halbaxen des Querschnittes $CA = a$ und $CB = b$, und sei die Entfernung CM des Mittelpunktes C dieses Schnittes von der Axe $\overline{XX} = r$. Dann ist die elliptische Erzeugungsfläche $F = \pi ab$, und der Weg des Schwerpunktes (C) $w = \pi r$: daher das Volumen dieses halben Ringes: $V = \pi^2 abr$ und das des ganzen Ringes $= 2\pi^2 abr$. Sind die Dimensionen folgende: $a = 5$ Zoll, $b = 3$ Zoll, $r = 6$ Zoll, so ist das Volumen eines Viertelringes $= \frac{1}{2}\pi^2 . 5 . 3 . 6 = 9{,}8696 . 5 . 9 = 444{,}132$ Cubikzoll.

Fig. 145.



Beispiel 2. Für einen Ring mit halbkreisförmigem Querschnitte ABD, Fig. 146 (s. f. S.), ist, wenn $CA = CB = a$ den Halbmesser dieses Querschnittes und $MC = r$

Guldinische Regel.

den des hohlen Raumes oder Halses bezeichnet, das Volumen:

$$V = \frac{\pi a^2}{2} \cdot 2\pi\left(r + \frac{4a}{3\pi}\right) = \pi a^2 \left(\pi r + \frac{4}{3} a\right).$$

Beispiel 3. Es sei die Oberfläche und der Inhalt der Kuppel ADB,

Fig. 146.

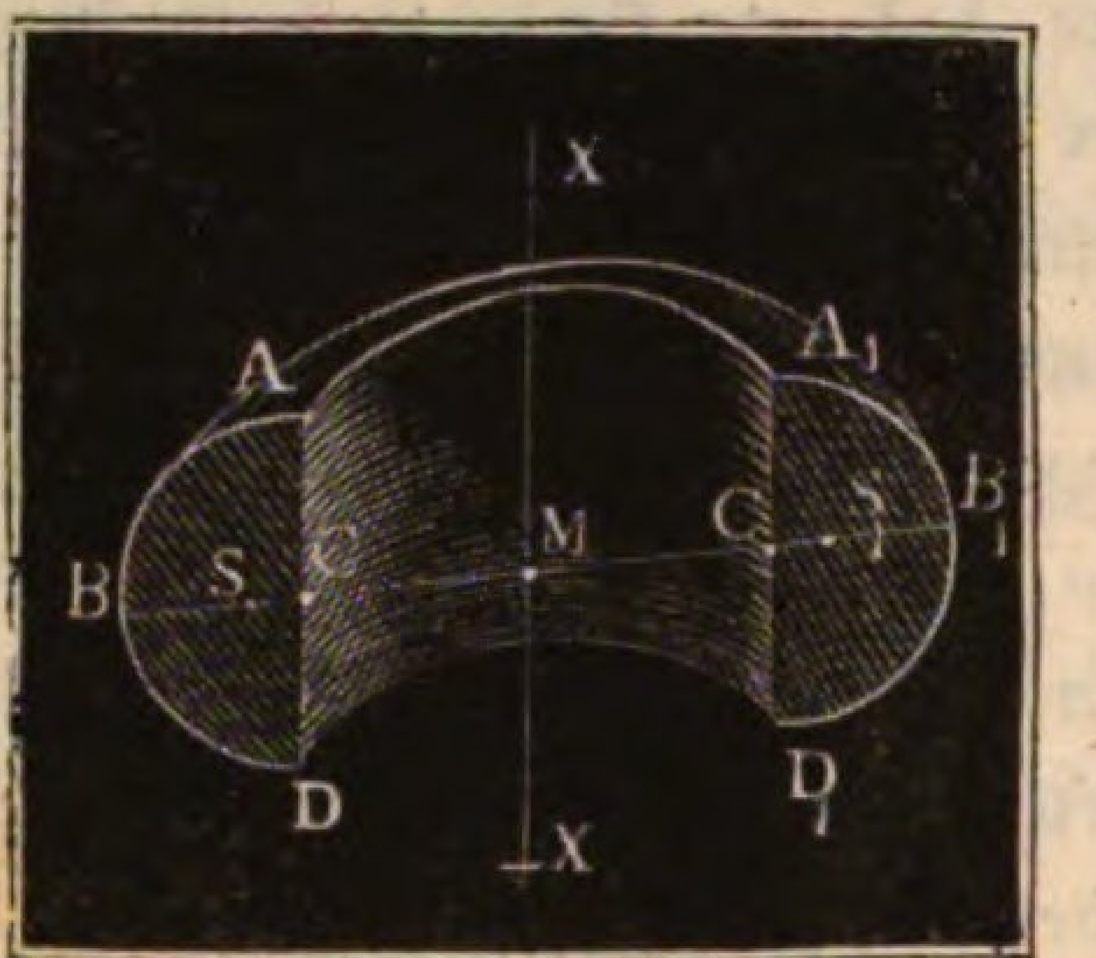


Fig. 147.

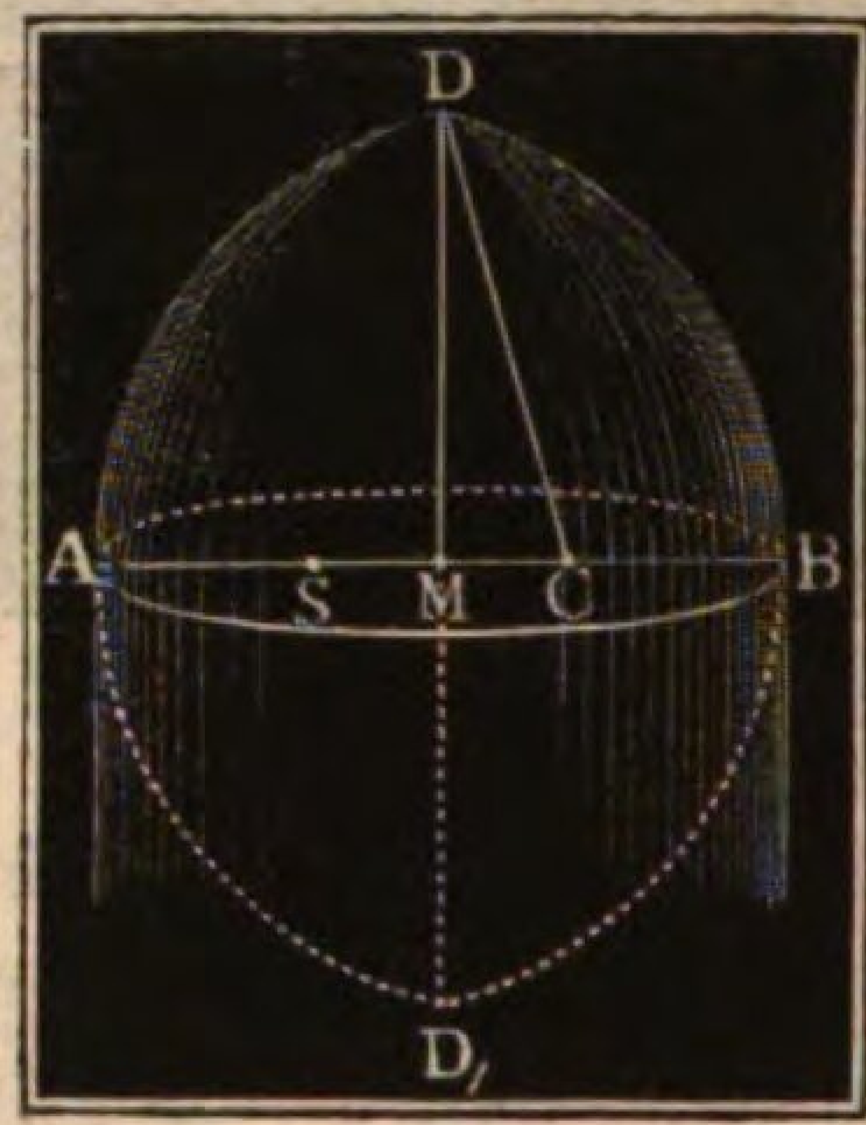


Fig. 147, eines Klostergewölbes zu finden, und zu diesem Zwecke die halbe Weite $MA = MB = a$ und die Höhe $MD = h$ gegeben. Aus beiden Dimensionen folgt der Halbmesser $CA = CD$ des Erzeugungskreises $= r = \frac{a^2+h^2}{2a}$, und der Centriwinkel $ACD = \alpha^0$, wenn man setzt $sin.\alpha = \frac{h}{r}$. Der Schwerpunkt S eines Bogens $DAD_1 = 2AD$ ist bestimmt durch die Entfernung $CS = r.\frac{\text{Sehne } MD}{\text{Bogen } AD} = \frac{r\,sin.\alpha}{\alpha}$, ferner $CM = r\,cos.\alpha$, es ist folglich der Abstand MS des Schwerpunktes S von der Axe $MD = \frac{r\,sin.\alpha}{\alpha} - r\,cos.\alpha = r\left(\frac{sin.\alpha}{\alpha} - cos.\alpha\right)$, und der Weg des Schwerpunktes bei Erzeugung der Fläche ADB $w = 2\pi r.\left(\frac{sin.\alpha}{\alpha} - cos.\alpha\right)$. Die Erzeugungslinie DAD_1 ist $2r\alpha$, da es sich aber nur um die Bestimmung der Hälfte ADB handelt, so ist dieselbe $= r\alpha$, und folglich die ganze Oberfläche

$$O = r\alpha.2\pi r\left(\frac{sin.\alpha}{\alpha} - cos.\alpha\right) = 2\pi r^2\,(sin.\alpha - \alpha\,cos.\alpha) \text{ zu setzen.}$$

Sehr gewöhnlich ist $\alpha^0 = 60^0$, also $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $sin.\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, und $cos.\alpha = \frac{1}{2}$, daher folgt dann $O = \pi r^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 2{,}1515.r^2$.

Für das Segment $DAD_1 = A = r^2\,(\alpha - \frac{1}{2} sin.2\alpha)$ ist der Abstand des Schwerpunktes vom Mittelpunkte C, $= \frac{(2.MD)^3}{12A} = \frac{2}{3}.\frac{r^3 sin.\alpha^3}{A}$, daher Abstand von der Axe $MS = CS - CM = \frac{2}{3}\frac{r^3 sin\,\alpha^3}{A} - r\,cos.\alpha$, endlich der Weg dieses Schwerpunktes bei einer Umdrehung, $w = \frac{2\pi r}{A}\left(\frac{2}{3} r^2\,sin.\alpha^3 - A\,cos.\alpha\right)$

$= \frac{2\pi r^3}{A} (\frac{2}{3} sin.\alpha^3 - [\alpha - \frac{1}{2} sin.2\alpha] cos.\alpha)$. Das Volumen des ganzen durch das Segment DAD_1 erzeugten Körpers ergiebt sich, wenn man diesen Weg durch A multiplicirt und das Volumen der Kuppel wird gefunden, wenn man hiervon die Hälfte nimmt, also $V = \pi r^3 (\frac{2}{3} sin.\alpha^3 - [\alpha - \frac{1}{2} sin.2\alpha] cos.\alpha)$. Z. B. für $\alpha^0 = 60^0$, also $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ist $sin.\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und $cos.\alpha = \frac{1}{2}$, daher Guldinische Regel.

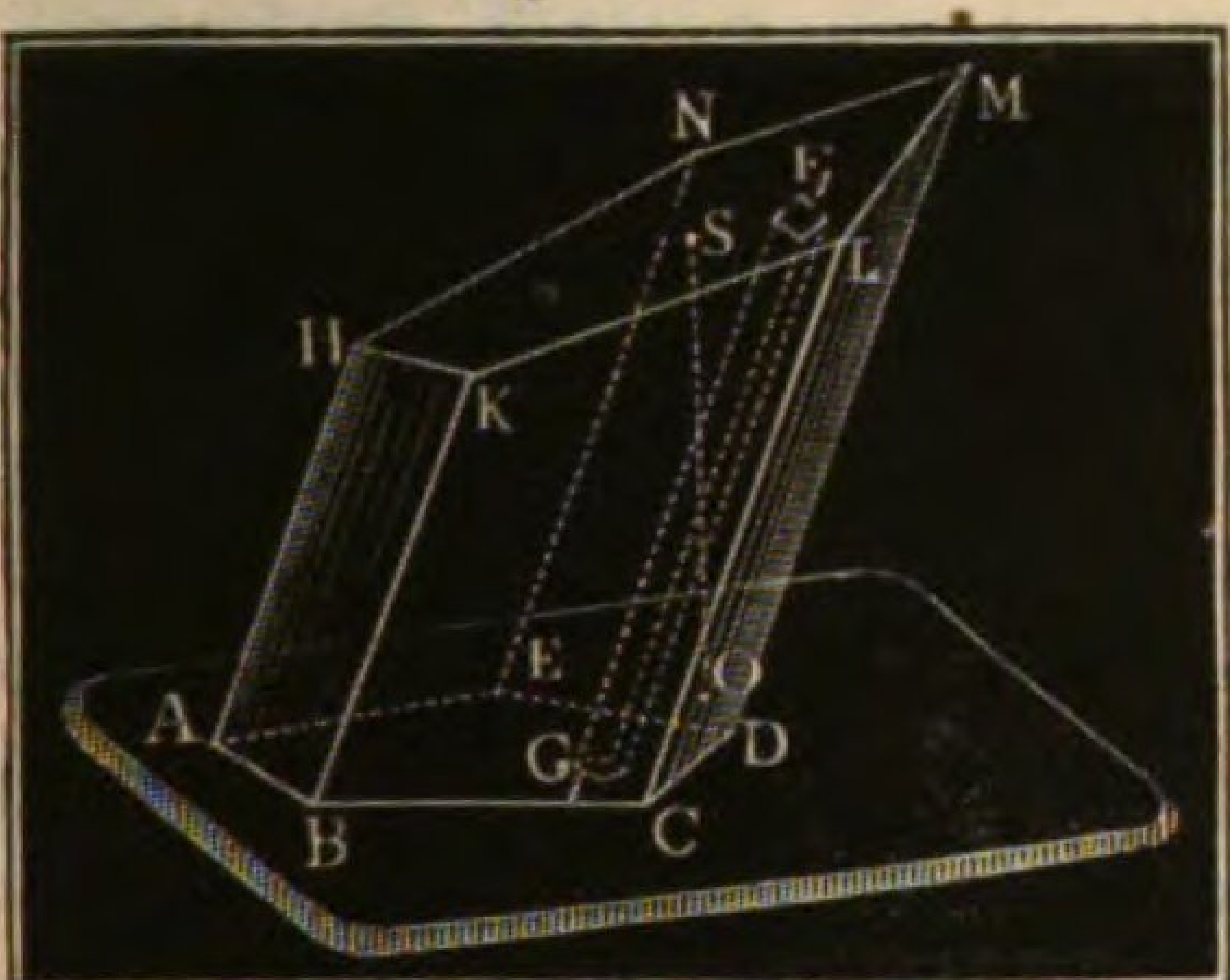
$$V = \pi r^3 \left(\frac{3}{8}\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}\right) = 0{,}3956 . r^3.$$

Anmerkung. Die Guldinische Regel findet auch ihre Anwendung auf solche Körper, welche entstehen, wenn sich die Erzeugungsfläche so bewegt, daß sie an jeder Stelle rechtwinkelig auf dem Wege ihres Schwerpunktes steht, weil sich annehmen läßt, daß jeder kleine Theil irgend einer krummlinigen Bewegung kreisförmig ist. Man kann hiernach die Inhalte von Schraubengewinden, auch zuweilen die zum Zwecke für Kanäle, Straßen und Eisenbahnen ausgehobenen oder aufgetragenen Erdmassen u. s. w. berechnen.

§. 120. Eine andere, mit der letzten Regel in naher Verbindung stehende Anwendung der Lehre vom Schwerpunkte ist folgende.

Man kann annehmen, daß jeder schief abgeschnittene, übrigens prismatische Körper $ABCHKL$ Fig. 148, aus lauter unendlich dünnen Prismen wie $F_1 G_1$ bestehe. Sind nun G_1, G_2 u. s. w. die Grundflächen und h_1, h_2 u. s. w. die Höhen dieser prismatischen Elemente, so hat man ihre Inhalte $G_1 h_1$, $G_2 h_2$ u. s. w., und sonach das Volumen des ganzen schief abgeschnittenen Prisma's

Fig. 148



$$V = G_1 h_1 + G_2 h_2 + \ldots$$

Nun verhält sich aber ein Element F_1 des schiefen Schnittes HKL zum Elemente G_1 der Basis ABC, wie die ganze schiefe Fläche F zur Basis G; es ist daher $G_1 = \frac{G}{F} F_1$, $G_2 = \frac{G}{F} F_2$ u. s. w., und $V = \frac{G}{F}(F_1 h_1 + F_2 h_2 + \ldots)$.

Da endlich $F_1 h_1 + F_2 h_2 + \ldots$ das statische Moment Fh des ganzen schiefen Schnittes ist, so folgt

$$V = \frac{G}{F} . Fh = Gh, \text{ d. i.}$$

der Inhalt des schief abgeschnittenen Prisma's ist gleich dem Inhalte eines vollständigen Prisma's, das mit demselben auf einerlei Grundfläche steht und dessen Höhe gleich ist dem Abstande SO des Schwerpunktes S des schiefen Schnittes von der Basis.

Guldinische Regel. Bei einem geraden und schief abgeschnittenen dreiseitigen Prisma ist, wenn h_1, h_2 und h_3 die Seitenkanten desselben sind, der Abstand des Schwerpunktes des schiefen Schnittes von der Basis $h = \frac{h_1 + h_2 + h_3}{3}$, daher das Volumen dieses Prisma's $V = G \frac{(h_1 + h_2 + h_3)}{3}$.

Drittes Kapitel.

Gleichgewicht festgehaltener und unterstützter Körper.

Befestigungsarten. §. 121. Die im ersten Kapitel dieses Abschnittes entwickelten Regeln über das Gleichgewicht fester Kräftesysteme finden ihre Anwendung auch auf feste, von Kräften ergriffene Körper, wenn man das Gewicht des Körpers als eine im Schwerpunkte desselben angreifende und vertikal abwärts wirkende Kraft behandelt.

Die durch Kräfte im Gleichgewichte erhaltenen Körper sind entweder frei beweglich, d. h. sie können der Einwirkung der Kräfte folgen, oder sie sind in einem oder mehreren Punkten festgehalten, oder sie werden von anderen Körpern unterstützt.

Wird ein Punkt eines festen Körpers festgehalten, so kann jeder andere Punkt eine Bewegung annehmen, deren Weg in die Oberfläche einer Kugel fällt, die sich aus dem festgehaltenen Punkte mit der Entfernung des andern Punktes, als Halbmesser, beschreiben läßt. Hält man hingegen einen Körper in zwei Punkten fest, so sind bei jeder noch möglichen Bewegung die Wege von den übrigen Punkten Kreise, die sich als die Durchschnitte von je zweien, aus den festgehaltenen Punkten beschriebenen Kugeloberflächen herausstellen. Diese Kreise sind unter sich parallel und winkelrecht auf der geraden Linie, welche die festen Punkte mit einander verbindet. Die Punkte dieser Linie bleiben unbeweglich; es dreht sich also der Körper um diese Linie, die man deshalb auch Umdrehungsaxe nennt.

Man findet den Halbmesser des Kreises, in welchem sich jeder Punkt bewegt, wenn man von demselben ein Perpendikel gegen die Umdrehungsaxe fällt. Je größer dieses ausfällt, je größer ist also auch der Kreis, in welchem der Punkt um die Axe herumgeht.

Werden von einem Körper drei nicht in eine gerade Linie fallende

Punkte festgehalten, so kann der Körper in keiner Beziehung eine Bewegung annehmen, weil sich die drei Kugeloberflächen, in welchen sich ein vierter Punkt bewegen müßte, nur in einem Punkte schneiden.

§. 122. Soll ein in einem Punkte festgehaltener Körper durch eine oder durch die Mittelkraft mehrerer Kräfte im Gleichgewichte erhalten werden, so muß die Richtung dieser Kraft durch den festen Punkt selbst gehen, denn man hält einen Punkt fest, indem man jede durch ihn gerichtete Kraft aufhebt. Besteht diese Kraft nur in dem Gewichte des Körpers, so ist nöthig, daß der Schwerpunkt desselben in die vertikale Linie durch den festen Punkt falle. Fällt der Schwerpunkt mit dem festgehaltenen oder sogenannten Aufhängepunkte zusammen, so hat man ein indifferentes Gleichgewicht (franz. équilibre indifferent, engl. indifferent equilibrium), weil der Körper im Gleichgewichte bleibt, man mag ihn um den festen Punkt drehen wie man will. Wird ein Körper AB, Fig. 149, in einem über dem Schwerpunkte S liegenden Punkte C festgehalten oder unterstützt, so befindet sich der Körper in einem sichern oder stabilen Gleichgewichte (franz. u. engl. stable), weil, wenn man diesen Körper in eine andere Lage bringt, aus dem Gewichte G desselben eine Seitenkraft N hervorgeht, die den Körper in die erste Lage zurück- Gleichgewichtsarten.

Fig. 149.

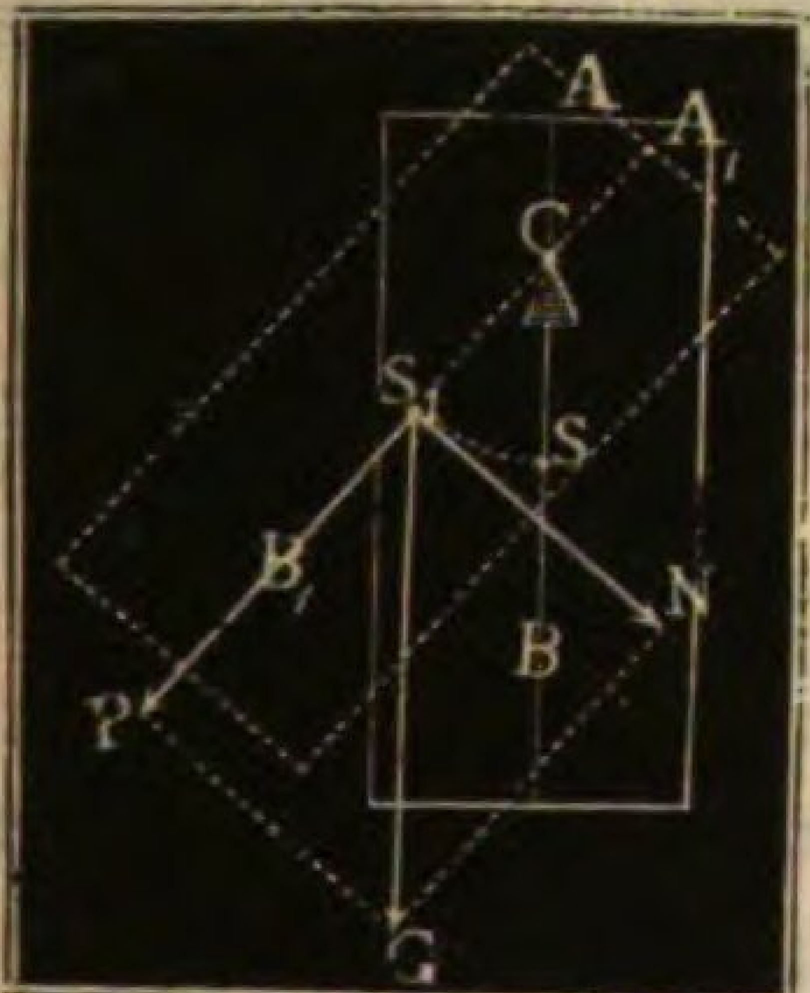
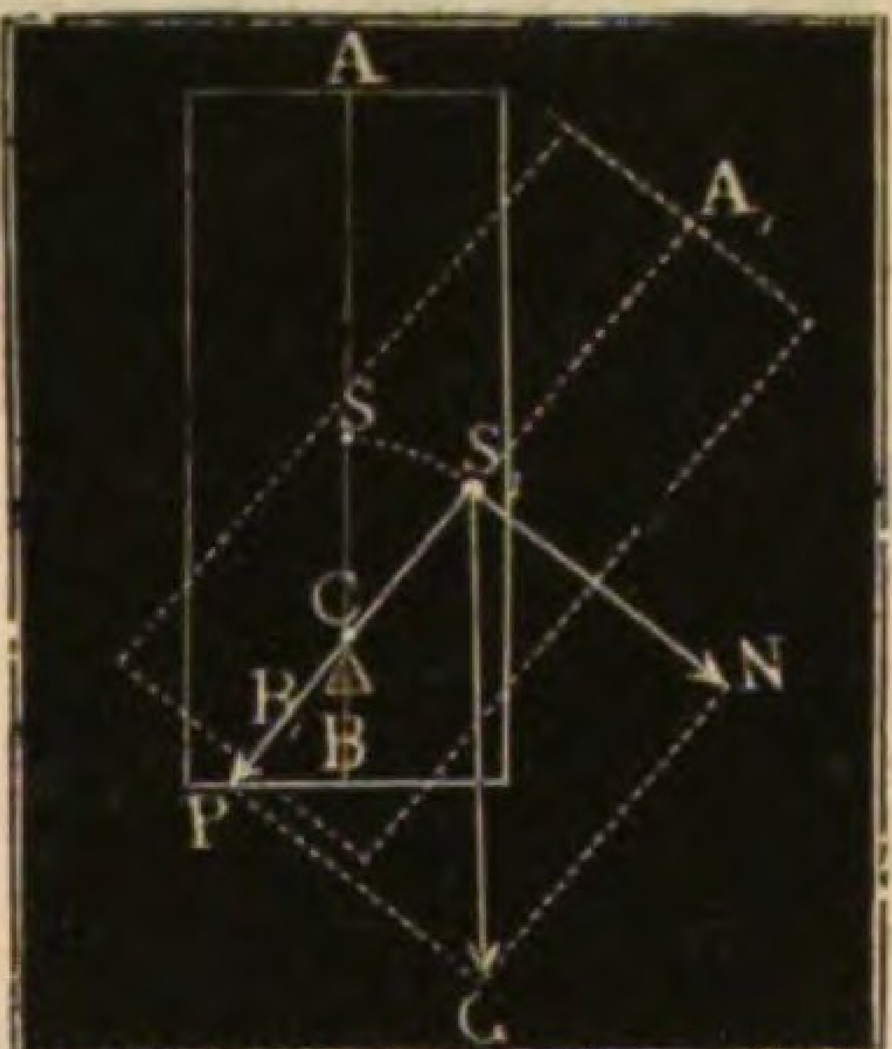


Fig. 150.



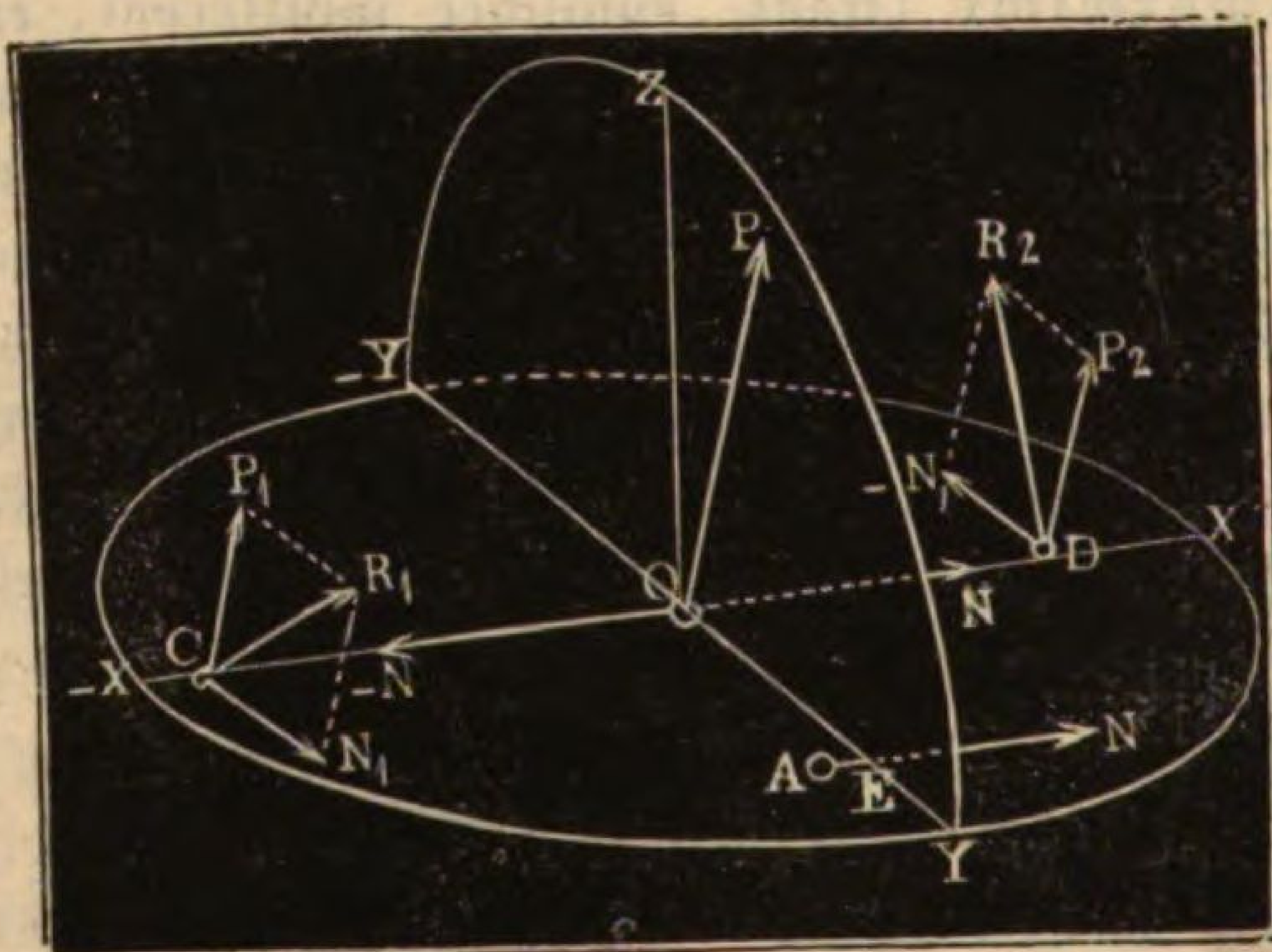
führt, während die andere Seitenkraft P der feste Punkt C aufnimmt. Wird hingegen der Körper AB, Fig. 150, in einem Punkte C festgehalten, der unter dem Schwerpunkte S liegt, so ist der Körper in einem unsicheren oder labilen Gleichgewichte (franz. eq. instable, engl. unstable), denn wenn man den Schwerpunkt von der Vertikalen durch C entfernt, so geht aus dem Gewichte G des Körpers eine Seitenkraft N hervor, die den Körper in seine erste Lage nicht nur nicht zurückführt, sondern denselben davon noch mehr abzieht, und ihn so weit umdreht, bis der Schwerpunkt unter den festen Punkt zu liegen kommt.

Dieselben Beziehungen finden auch bei einem in zwei Punkten oder

einer Axe festgehaltenen Körper statt; derselbe ist im indifferenten, stabilen oder labilen Gleichgewichte, je nachdem der Schwerpunkt in, vertikal unter oder vertikal über der Axe befindlich ist.

Anwendung. §. 123. Wird ein von Kräften im Raume ergriffener Körper in zwei Punkten oder einer Linie festgehalten, so treten Verhältnisse ein, die wir im Folgenden untersuchen wollen. Wir können nach §. 92 jedes Kräftesystem auf zwei Kräfte zurückführen, nämlich auf eine parallel mit der festen Axe gerichtete und auf eine in einer Normalebene zu dieser Linie wirkende Kraft. Es sei $AN = N$, Fig. 151, die erstere, mit der durch die festen Punkte C und D gehende Axe $X\overline{X}$ parallel und $OP = P$ die zweite, in der zur Axe $X\overline{X}$ winkelrecht stehenden Ebene $YZ\overline{Y}$ wirkende Kraft.

Fig. 151.



Denken wir uns noch zwei Kräfte N und $-N$ hinzu, welche in der Axe $X\overline{X}$ eingreifen und einander entgegenwirken, so ändern wir im Gleichgewichtszustand nichts, da sich diese Kräfte selbst wieder aufheben. Die Kraft $-N$ bildet mit der außerhalb der Axe $X\overline{X}$ eingreifenden Kraft ein Kräftepaar, das durch ein anderes Kräftepaar $(N_1, -N_1)$ ersetzt werden kann, dessen Angriffspunkte mit den festen Punkten C und D der Axe zusammenfallen und dessen Richtungen rechtwinkelig auf der Axe $X\overline{X}$ stehen. Es läßt sich folglich die außerhalb der Axe angreifende Kraft $AN = N$ in eine gleichgroße Kraft N und in ein Kräftepaar $(N_1, -N_1)$ zerlegen, und, da alle diese drei Kräfte in der Axe $X\overline{X}$ selbst angreifen, annehmen, daß dieselben auch von dieser Axe aufgenommen werden, und daher im Gleichgewichts- oder Bewegungszustand des Körpers nichts ändern. Ist der Normalabstand EO zwischen der Kraft N und der Axe $X\overline{X} = y$, und die Entfernung CD der festen Punkte $= x$, so hat man die Momente beider Kräftepaare (§. 90) $= Ny$ und $N_1 x$, und es sind dieselben unter sich äquivalent, wenn $Ny = N_1 x$ ist. Es sind daher die in C und D angreifenden Kräfte

$$N_1 = \frac{y}{x} N \text{ und } -N_1 = -\frac{y}{x} N.$$

Soll nun der Körper im Gleichgewichtszustande sein, so ist nöthig, daß

auch die Richtung der in einer Normalebene YZ wirkenden Mittelkraft P (in O) durch die Axe gehe. Diese Kraft P läßt sich aber durch zwei in C und D angreifende Parallelkräfte P_1 und P_2 ersetzen, die sich bestimmen, wenn man $P_1 . CD = P . DO$ und $P_2 . CD = P . CO$ setzt; es hat daher außer den Kräften $ON = N$, $CN_1 = N_1$ und $DN_1 = - N_1$, die Axe $\overline{XX}$ auch noch die Kräfte $P_1 = \frac{x_2}{x} . P$ und $P_2 = \frac{x_1}{x} . P$ aufzunehmen, die sich aus den Entfernungen $CD = x$, $OC = x_1$ und $OD = x_2$ berechnen lassen. Axendruck.

§. 124. Aus den Ergebnissen der Untersuchungen des vorigen Paragraphen kann man nun leicht die von der Axe oder von den festen Punkten C und D aufzunehmenden Kräfte berechnen. Erstens hat die Axe einen der Kraft N gleichen Druck in ihrer eigenen Richtung auszuhalten, der allerdings auch von einem oder auch von beiden festen Punkten C und D aufgenommen werden kann. Zweitens resultiren aus den in Normalebenen zu $\overline{XX}$ wirkenden und in C und D angreifenden Kräften $N_1 = \frac{y}{x} N$, $P_1 = \frac{x_2}{x} P$ und $- N_1 = - \frac{y}{x} N$ und $P_2 = \frac{x_1}{x} P$ Mittelkräfte R_1 und R_2, welche von den festen Punkten C und D noch besonders aufgenommen werden müssen.

Setzen wir den Winkel POY, unter welchem die die Axe $\overline{XX}$ und die Richtung der Kraft N enthaltende Grundebene XY von der Richtung der Kraft P geschnitten wird, $= \alpha$, so ist auch der Winkel $N_1CP_1 = \alpha$, dagegen $- N_1DP_2 = 180^0 - \alpha$, und es ergeben sich daher die resultirenden Drücke

$$R_1 = \sqrt{N_1^2 + P_1^2 + 2 N_1 P_1 cos. \alpha} \text{ und}$$
$$R_2 = \sqrt{N_1^2 + P_2^2 - 2 N_1 P_2 cos. \alpha.}$$

Beispiel. Es sei das ganze Kräftesystem eines in der Axe $\overline{XX}$ festgehaltenen Körpers auf die Normalkraft $P = 36$ Pf und auf die Parallelkraft $N = 20$ Pf zurückgeführt, es sei der Abstand der letzteren Kraft von der Axe, $y = 1\frac{1}{2}$ Fuß, und der Abstand CD zwischen den festgehaltenen Punkten $= x = 4$ Fuß; man sucht die von der Axe oder von den festen Punkten in ihr aufzunehmenden Kräfte, vorausgesetzt, daß die Richtung der Kraft P um den Winkel $\alpha = 65$ Grad von der Grundebene XY abweiche und ihr Angriffspunkt O um $CO = x_1 = 1$ Fuß von dem festen Punkte C abstehe? Die Kraft $N = 20$ Pf. ertheilt der Axe in ihrer eigenen Richtung den Schub $N = 20$ Pf., außerdem erzeugt sie noch die Kräfte $N_1 = \frac{y}{x} N = \frac{1,5}{4} . 20 = 7,5$ Pf. und $- N_1 = - 7,5$ Pf., welche die festen Punkte C und D aufnehmen. Aus der Kraft P entspringen die Kräfte $P_1 = \frac{x_2}{x} P = \frac{4-1}{4} . 36 = 27$ Pf. und $P_2 = \frac{x_1}{x} P = \frac{1}{4} . 36 = 9$ Pf., aus welchen endlich durch Vereinigung die Mittelkräfte

Axendruck.

$R_1 = \sqrt{7{,}5^2+27^2+2.7{,}5.27.\cos.65^0} = \sqrt{56{,}25+729+171{,}160}$
$= \sqrt{956{,}410} = 30{,}926$ Pf. und

$R_2 = \sqrt{7{,}5^2+9^2-2.7{,}5.9.\cos.65^0} = \sqrt{56{,}25+81-57{,}054}$
$= \sqrt{80{,}196} = 8.955$ Pf. entstehen.

Gleichgewicht von Kräften um eine Axe.

§. 125. Die Mittelkraft P resultirt aus allen denjenigen Seitenkräften, deren Richtungen in einer oder mehreren Normalebenen zur Axe liegen. Nun ist aber in diesem Falle nach §. 86 das statische Moment Pa der Mittelkraft gleich der Summe $P_1a_1 + P_2a_2 + \ldots$ der statischen Momente der Seitenkräfte und für den Gleichgewichtszustand des festgehaltenen Körpers der Hebelarm a der Mittelkraft = Null, weil diese durch die Axe selbst geht; es ist daher auch die Summe

$$P_1a_1 + P_2a_2 + \ldots . = o,$$

d. h. ein in einer Axe festgehaltener Körper ist im Zustande des Gleichgewichtes, bleibt also ohne Umdrehung, wenn die Summe der statischen Momente seiner Kräfte hinsichtlich dieser Axe = Null, oder die Summe der Momente der nach der einen Umdrehungsrichtung wirkenden Kräfte ebenso groß ist als die Summe der Momente von den nach der entgegengesetzten Richtung wirkenden Kräften.

Mit Hülfe der letzen Formel läßt sich ein Element des im Gleichgewicht befindlichen Kräftesystemes, entweder eine Kraft, oder ein Hebelarm finden.

Beispiel. An einem um eine Axe drehbaren Körper wirken die Umdrehungskräfte $P_1 = 50$ Pf. und $P_2 = -35$ Pfund an den Armen $a_1 = 1\frac{1}{4}$ Fuß und $a_2 = 2\frac{1}{2}$ Fuß; man sucht die Kraft P_3, welche an einem Hebelarme $a_3 = 4$ Fuß wirken soll, um Gleichgewicht herzustellen, d. i. Umdrehung um die Axe zu verhindern? Es ist

$$50.1{,}25-35.2{,}5+4P_3 = 0, \text{ daher}$$

$$P_3 = \frac{87{,}5-62{,}5}{4} = 6{,}25 \text{ Pf.}$$

Hebel.

§. 126. Ein um eine feste Axe drehbarer und von Kräften ergriffener Körper hat den Namen Hebel (franz. levier, engl. lever) erhalten. Denkt man sich denselben gewichtslos, so heißt er ein mathematischer Hebel, außerdem aber ein materieller oder physischer.

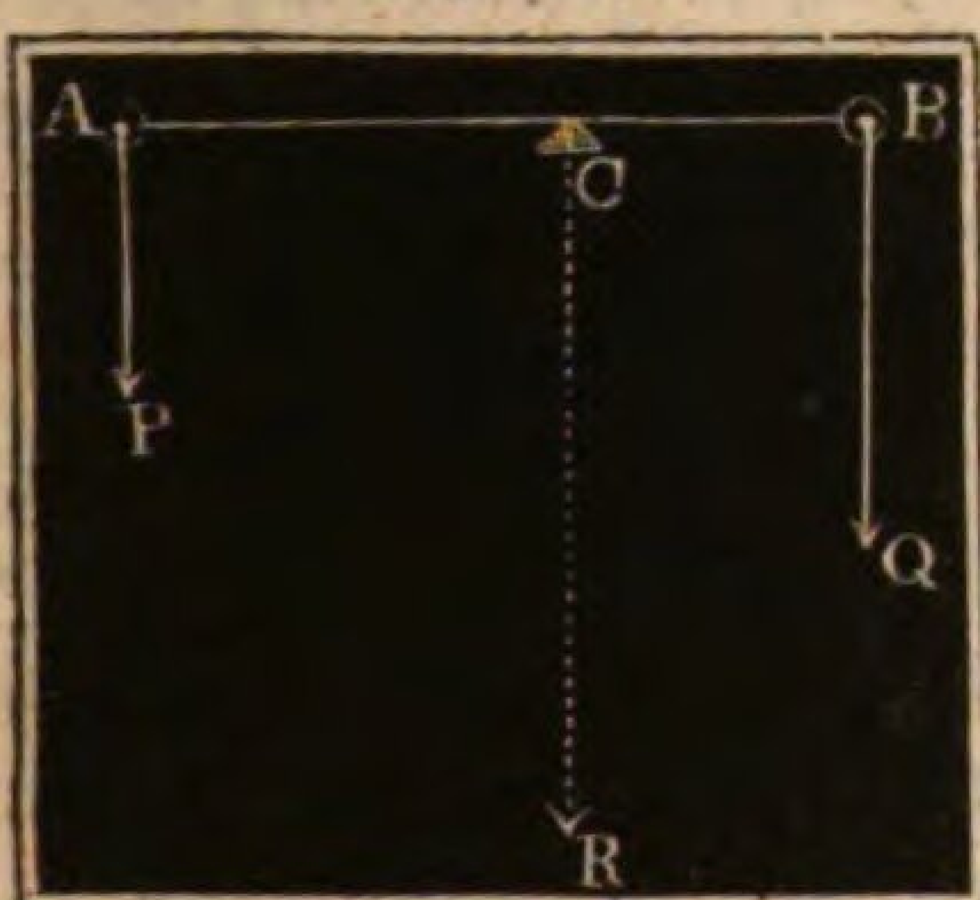
In der Regel nimmt man an, daß die Kräfte eines Hebels in einer winkelrecht zur Axe stehenden Ebene wirken, und ersetzt die Axe durch einen festen Punkt, den man den Ruhe-, Dreh- oder Stützpunkt (fr. point d'appui, engl. fulcrum, hypomochlion) nennt. Die von diesem Punkte nach den Richtungen der Kräfte gefällten Perpendikel heißen (§. 86) Hebelarme. Sind die Richtungen der Kräfte eines Hebels unter sich

parallel, so bilden die Hebelarme eine einzige gerade Linie, und der Hebel heißt dann ein geradliniger oder gerader Hebel (franz. levier droit, engl. straight lever), stoßen aber die Hebelarme unter Winkeln zusammen, so heißt der Hebel ein Winkelhebel (franz. levier courbé, engl. bent lever). Der geradlinige von nur zwei Kräften ergriffene Hebel ist entweder einarmig oder doppelarmig, je nachdem die Angriffspunkte auf einerlei oder auf entgegengesetzten Seiten des Stützpunktes liegen. Man unterscheidet auch wohl Hebel der ersten, zweiten und dritten Art von einander, indem man den doppelarmigen Hebel, Hebel der ersten Art, den einarmigen Hebel aber entweder Hebel der zweiten oder Hebel der dritten Art nennt, je nachdem die vertikal abwärts wirkende Kraft (Last), oder die vertikal aufwärts wirkende Kraft (Kraft) dem Stützpunkte näher liegt. Hebel.

§. 127. Die Theorie des Gleichgewichtes am Hebel ist in dem Vorhergehenden vollständig begründet, wir haben daher nur noch ein Specialisiren derselben nöthig.

Bei dem doppelarmigen Hebel *ACB*, Fig. 152 ist, wenn man den Hebelarm *CA* der Kraft *P* durch *a* und den Hebelarm *CB* der andern Kraft *Q*, die man gewöhnlich Last nennt, mit *b* bezeichnet, nach der allgemeinen Theorie: $Pa = Qb$, d. i. Moment der Kraft gleich Moment der Last, oder auch $P : Q = b : a$, d. i. die Kraft verhält sich zur Last, wie der Hebelarm der letzteren zu dem Hebelarme der ersteren. Der Druck im Stützpunkte ist $R = P + Q$.

Fig. 152.



Bei den einarmigen Hebeln *ABC*, Fig. 153, und *BAC*, Fig. 154,

Fig. 153.

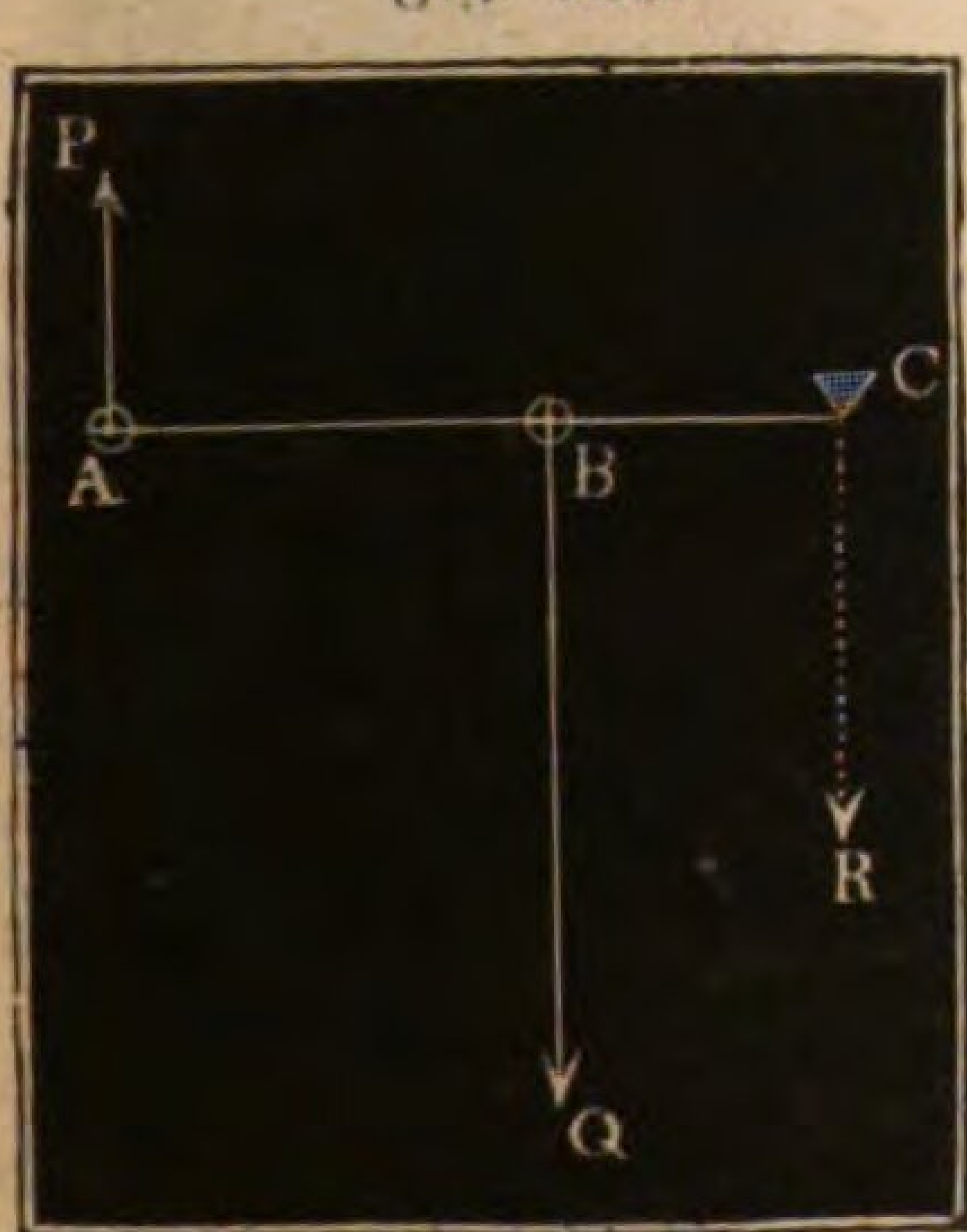
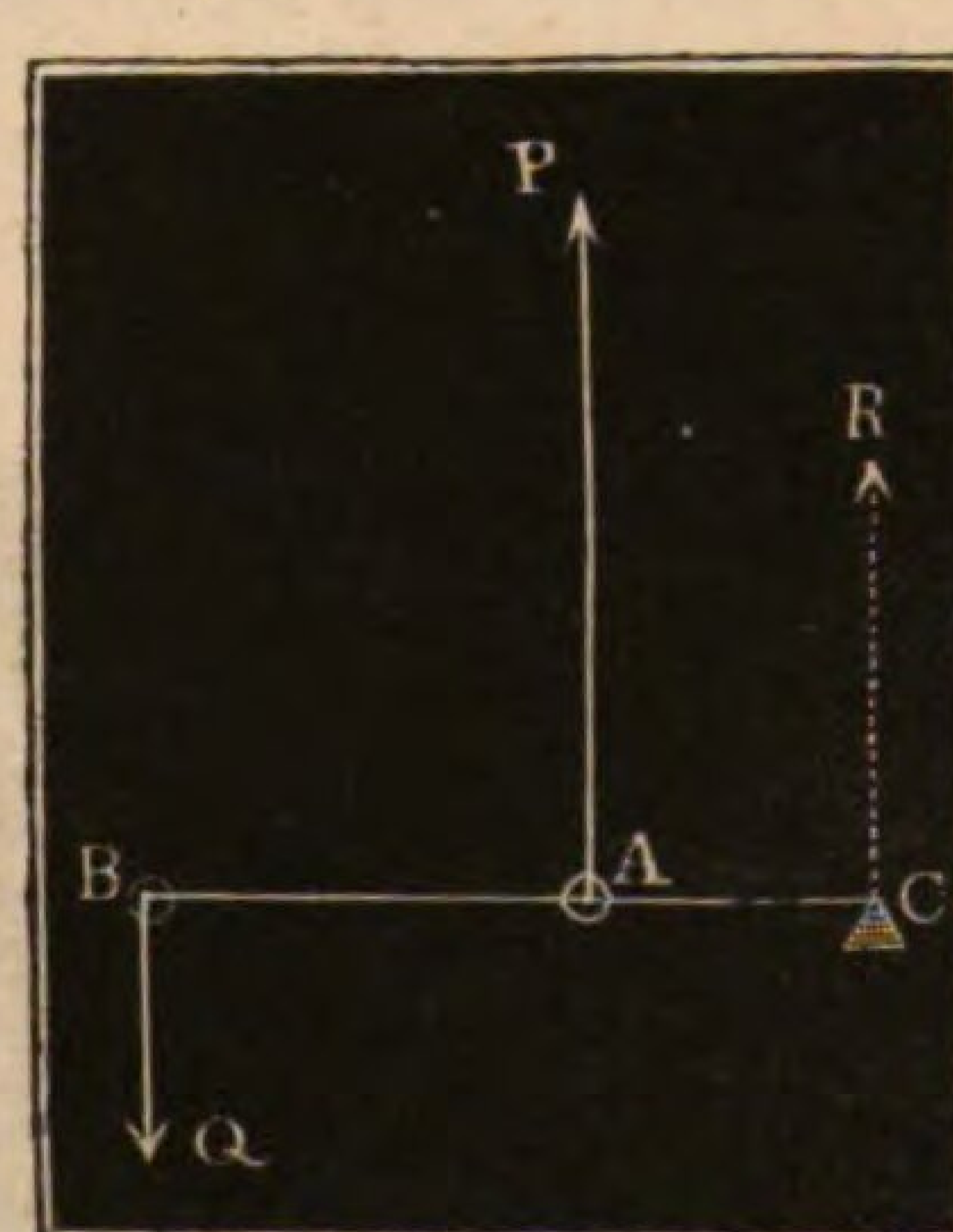
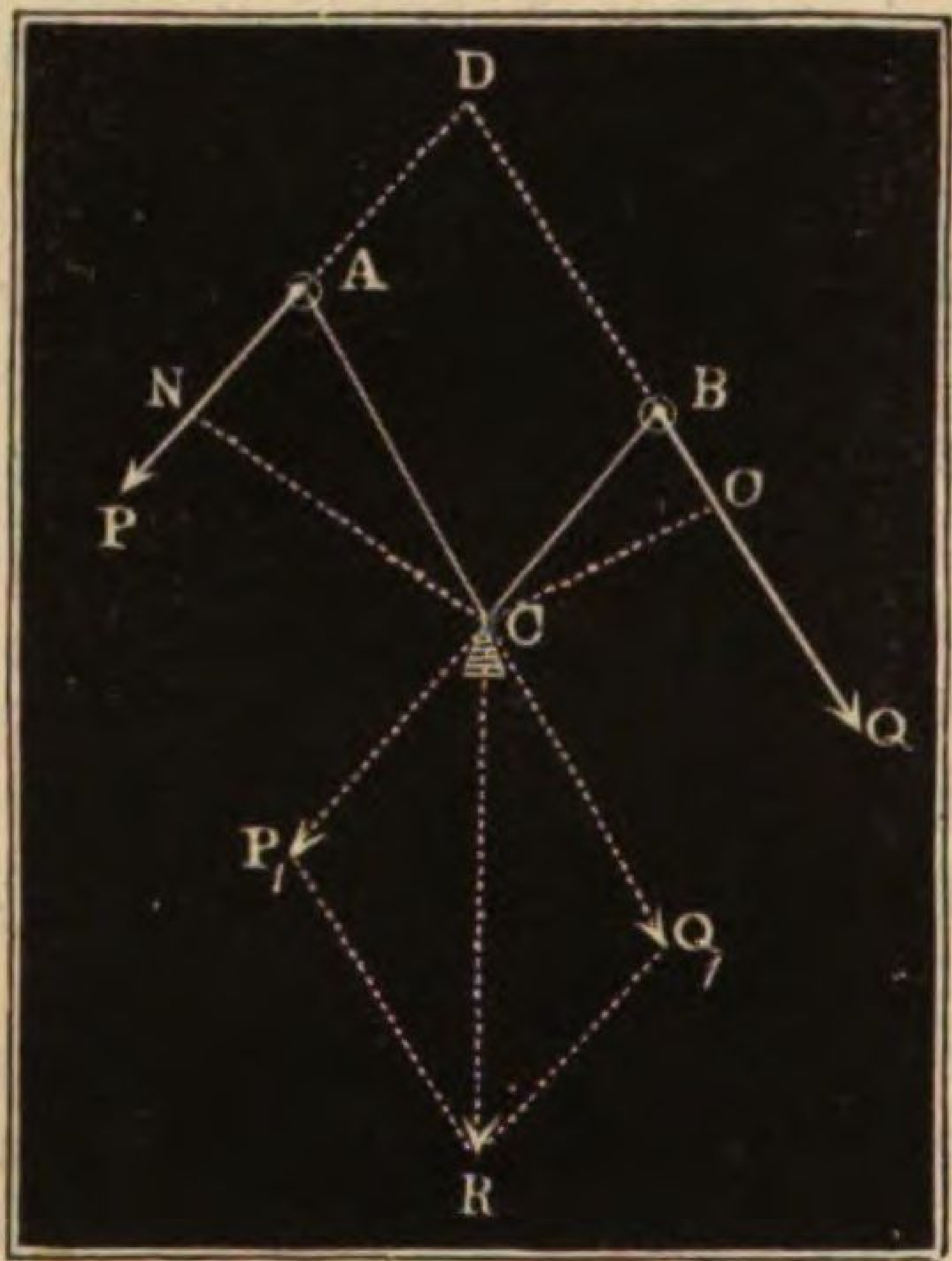


Fig. 154.



Hebel. findet dieselbe Beziehung zwischen Kraft (P) und Last (Q) statt, es ist hier aber die Kraft der Last entgegengesetzt gerichtet, und deshalb der Druck im Stützpunkte die Differenz beider, und zwar im ersten Falle

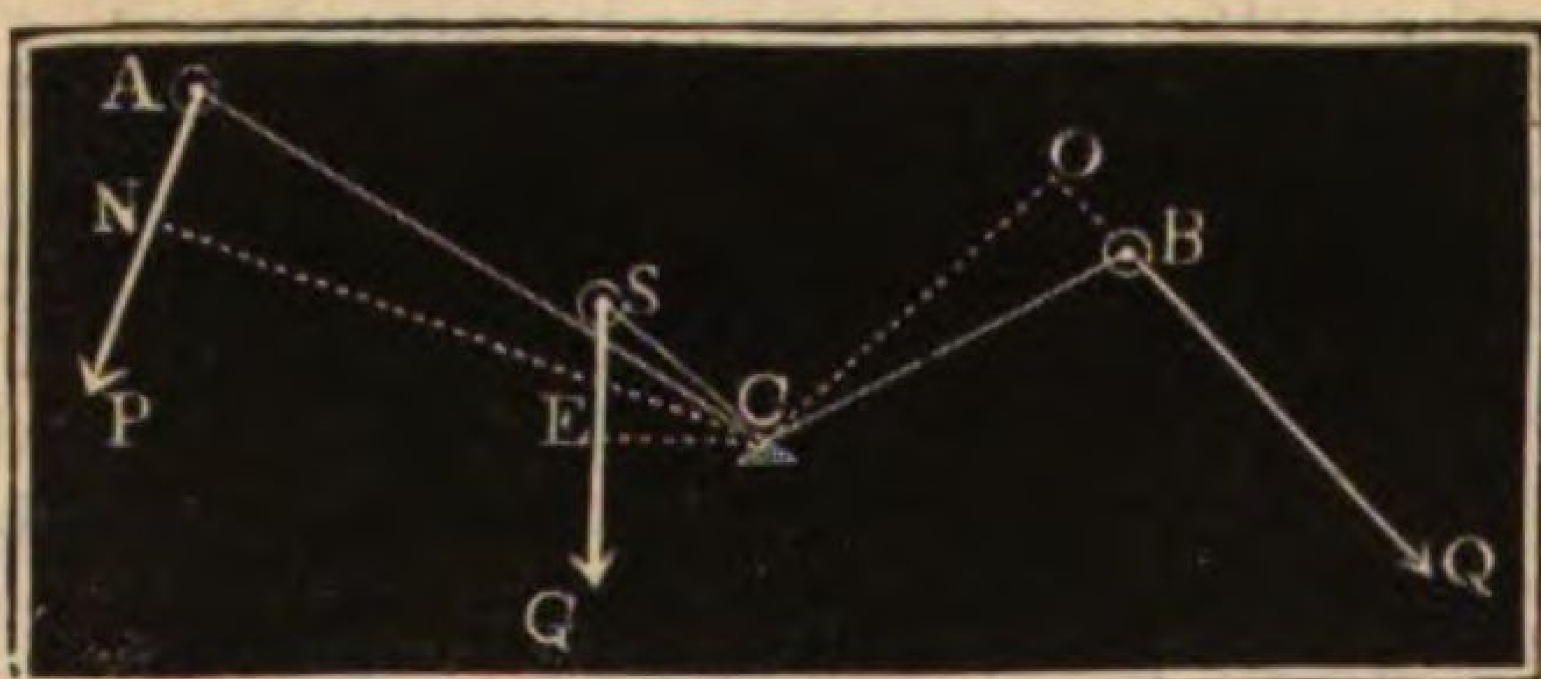
Fig. 155.



$R = Q - P$ und im zweiten $R = P - Q$.

Auch beim Winkelhebel ACB mit den Hebelarmen $CN = a$ und $CO = b$, Fig. 155, bleibt $P:Q = b:a$, nur ist hier der Druck im Stützpunkte gleich der Diagonale R desjenigen Parallelogrammes CP_1RQ_1, welches sich aus der Kraft P und Last Q und dem Winkel $P_1CQ_1 = PDQ = \alpha$, unter welchem die Richtungen derselben zusammenstoßen, construiren läßt.

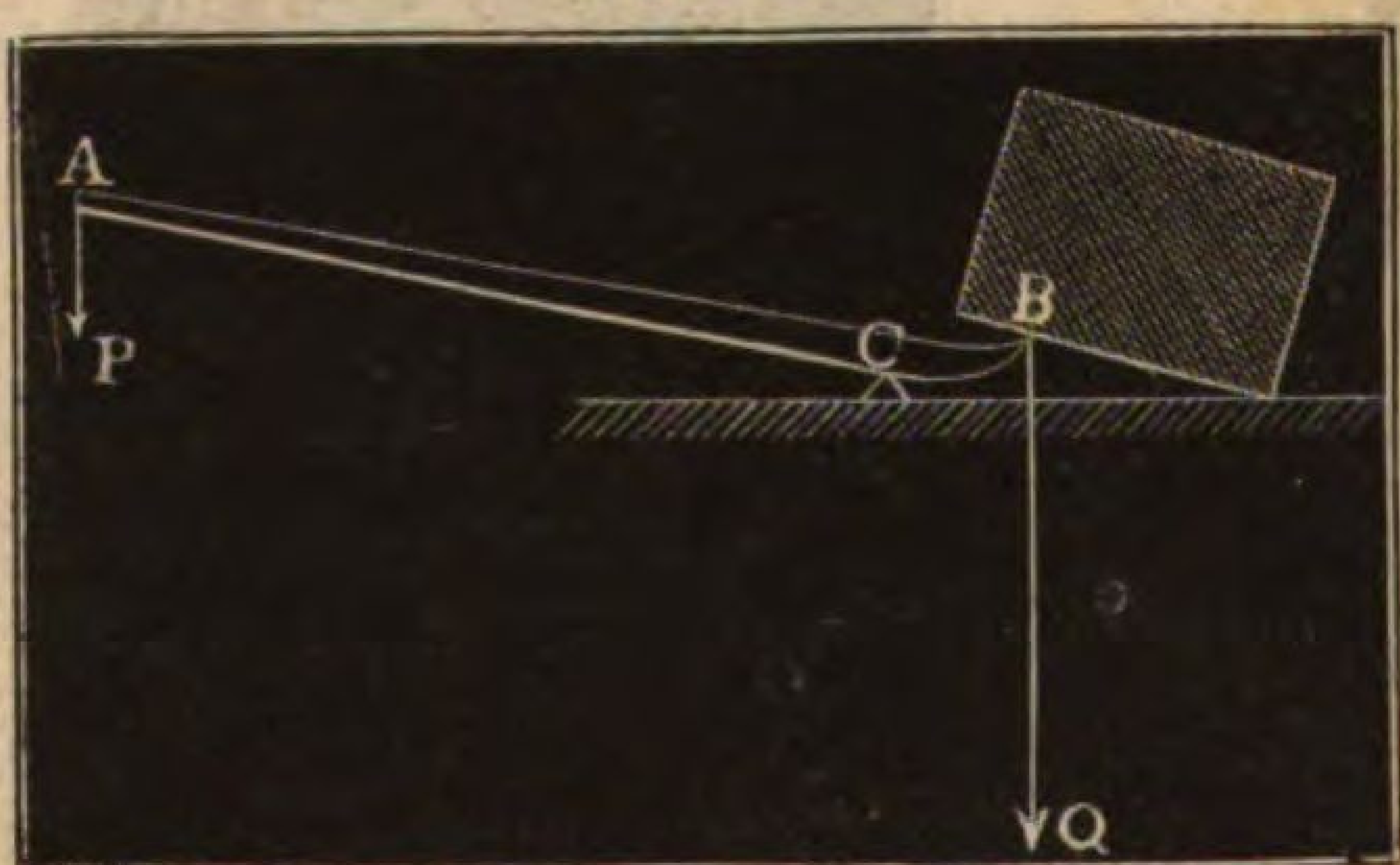
Fig. 156.



Ist G das Gewicht des Hebels und $CE = e$, Fig. 156, der Abstand des Drehpunktes C von der Vertikallinie SG durch den Schwerpunkt desselben, so hat man $Pa \pm Ge = Qb$ zu setzen und das Pluszeichen von G zu nehmen, wenn der Schwerpunkt auf der Seite der Kraft P liegt, das Minuszeichen aber, wenn er auf der Seite der Last Q sich befindet.

Anmerkung. Die Theorie des Hebels findet bei vielen Werkzeugen und Maschinen ihre Anwendung, namentlich bei den verschiedenen Arten von Waagen, bei den Hebeladen, Pumpenschwengeln, Schubkarren u. s. w. Ausführlich darüber handelt der zweite Theil.

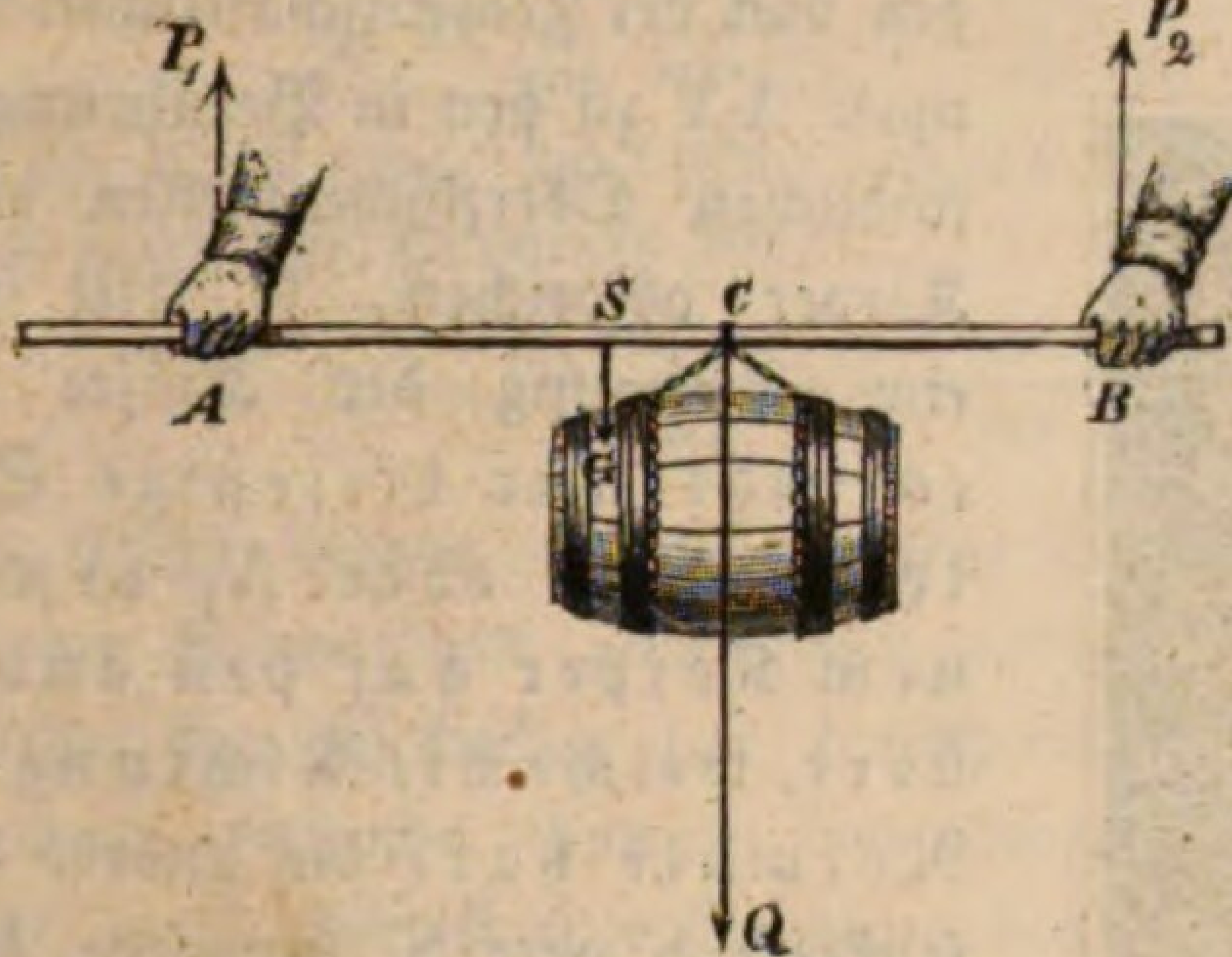
Fig. 157.



Beispiele. 1) Wenn man das Ende A einer Brechstange ACB, Fig. 157, mit einer Kraft P von 60 Pf. niederdrückt, und es ist der Hebelarm CA der Kraft 12mal so groß als der Hebelarm CB der Last, so wird diese, oder

vielmehr die in B ausgeübte Kraft Q, 12 mal so groß als P, also $Q = 12 . 60 = 720$ Pf. betragen. Hebel.

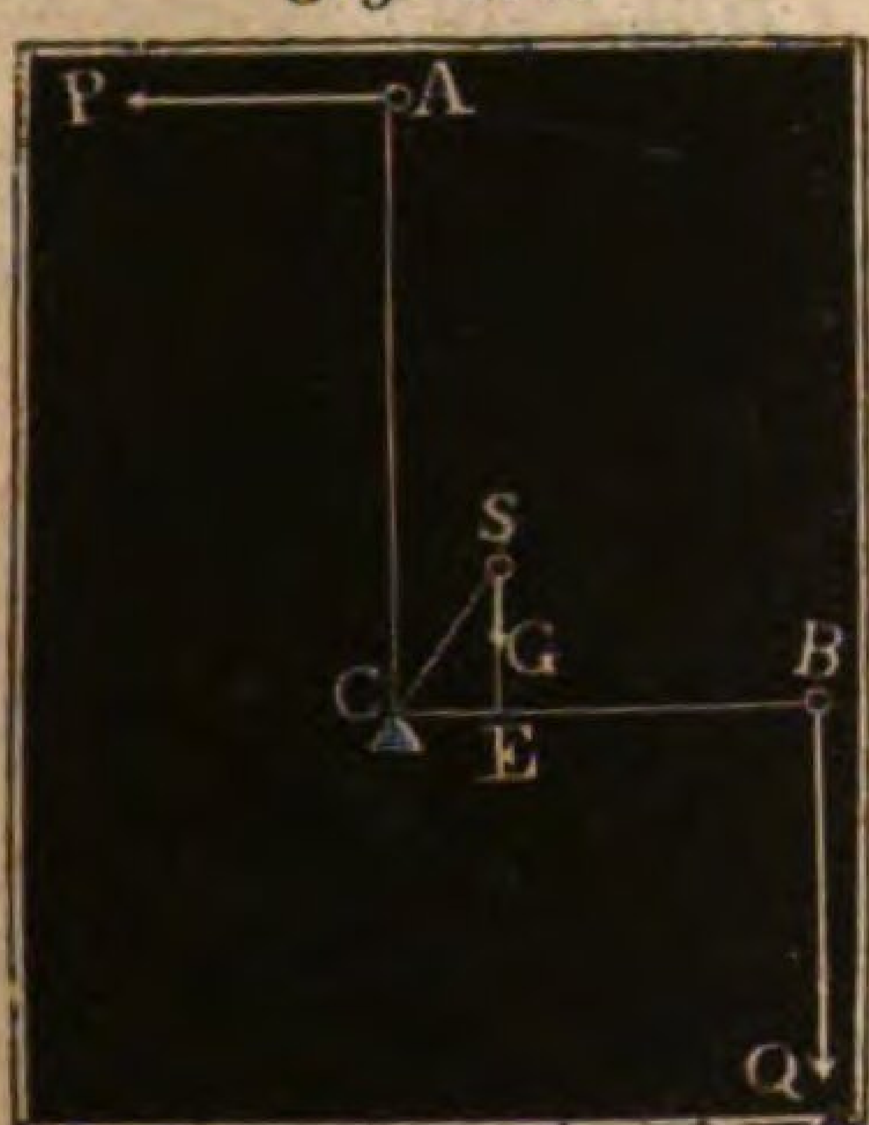
Fig. 158.



2) Wird eine an einer Stange hängende Last Q, Fig. 158, von zwei Arbeitern fortgetragen, von denen der eine in A und der andere in B angreift, so kann man ermitteln, wie viel Druck jeder der beiden Arbeiter auszuhalten hat. Es sei die Last $Q = 120$ Pf., das Gewicht der Stange $G = 12$ Pf., die Entfernung AB der beiden Angriffspunkte von einander $= 6$ Fuß, die Entfernung BC der Last von einem dieser Punkte $= 2\frac{1}{2}$ Fuß, die Entfernung des Schwerpunktes S der Stange von eben diesem Punkte, $BS = 3\frac{1}{2}$ Fuß. Sehen wir B als Stützpunkt an, so hat die Kraft P_1 in A den Lasten Q und G das Gleichgewicht zu halten; es ist also $P_1 . BA = Q . BC + G . BS$, d. i. $6 P_1 = 2{,}5 . 120 + 3{,}5 . 12 = 300 + 42 = 342$, daher $P_1 = \frac{342}{6} = 57$ Pf. Wird hingegen A als Stützpunkt angesehen, so ist zu setzen: $P_2 . AB = Q . AC + G . AS$, also in Zahlen, $6 P_2 = 3{,}5 . 120 + 2{,}5 . 12 = 420 + 30 = 450$, daher ist die Kraft des zweiten Arbeiters $P_2 = \frac{450}{6} = 75$ Pf.; auch ist, sehr richtig, die Summe der nach oben wirkenden Kräfte $P_1 + P_2 = 57 + 75 = 132$ Pf. so groß wie die Summe der nach unten wirkenden Kräfte $Q + G = 120 + 12 = 132$ Pf.

3) Bei einem 150 Pf. schweren Winkelhebel ACB, Fig. 159, ist die vertikal ziehende Last $Q = 650$ Pf. und ihr Hebelarm $CB = 4$ Fuß, der Hebelarm CA der Kraft P aber $= 6$ Fuß und der Hebelarm CE des Gewichtes $= 1$ Fuß, wie groß ist die zur Herstellung des Gleichgewichtes nöthige Kraft P und der Druck R im Zapfen? Es ist $CA . P = CB . Q + CE . G$, d. i. $6 P = 4 . 650 + 1 . 150 = 2750$, folglich die Kraft $P = \frac{2750}{6} = 458\frac{1}{3}$ Pf.; der Zapfendruck aber besteht aus der Vertikalkraft $Q + G = 650 + 150 = 800$ Pf., und der Horizontalgewalt $P = 458\frac{1}{3}$ Pf., ist also

Fig. 159.



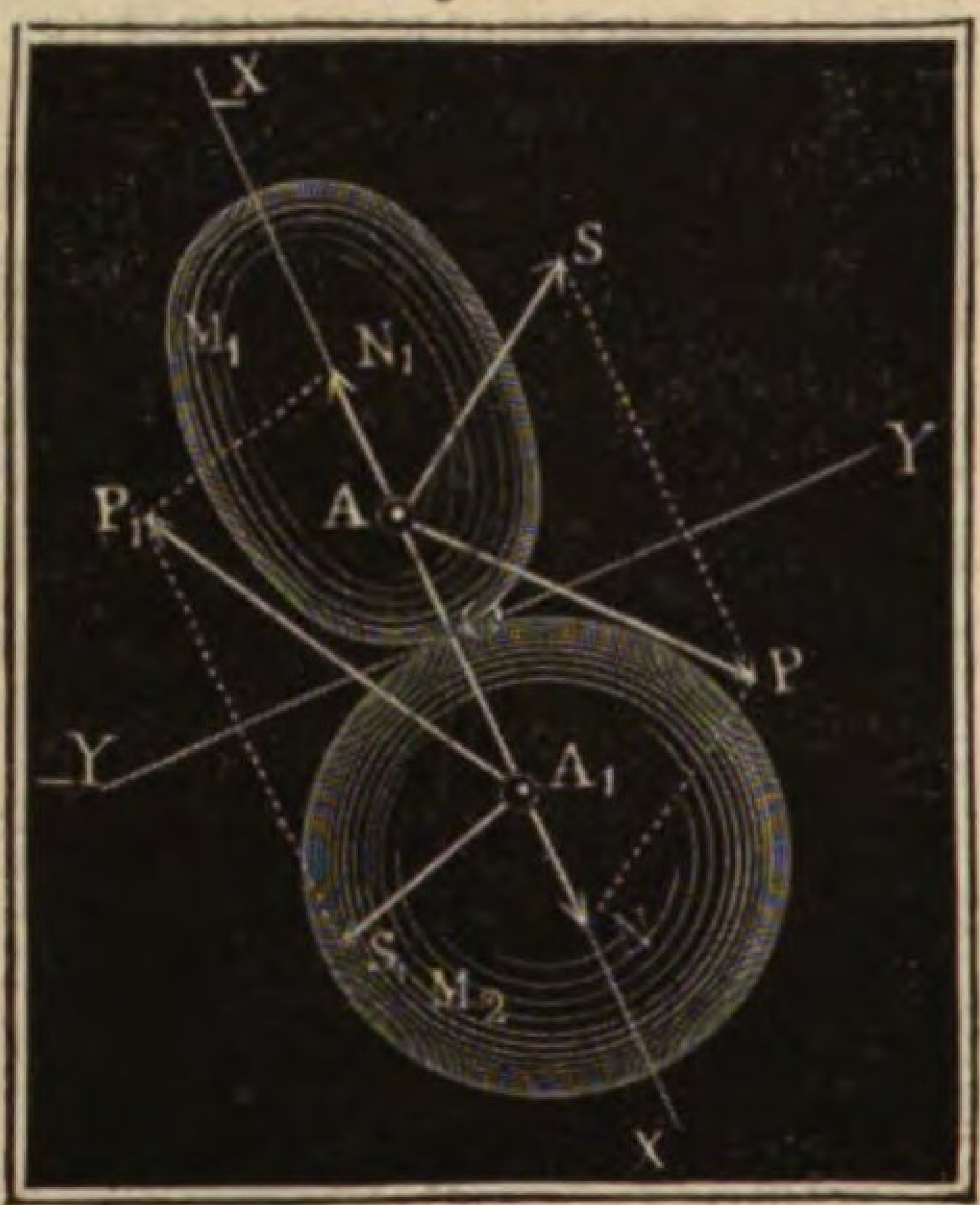
$$= R = \sqrt{(Q + G)^2 + P^2}$$
$$= \sqrt{(800)^2 + (458\tfrac{1}{3})^2}$$
$$= \sqrt{850070} = 922 \text{ Pf.}$$

§. 128. Das in §. 62 ausgesprochene Erfahrungsgesetz: „**Wirkung und Gegenwirkung sind einander gleich**," ist die Basis der Druck der Körper auf einander.

Druck der Körper auf einander.

ganzen Maschinenmechanik Es ist an diesem Orte nöthig, die Bedeutung desselben noch näher aus einander zu setzen. Wirken zwei Körper M_1 und M_2, Fig. 160, mit den Kräften P und P_1 auf einander, deren Richtungen von der gemeinschaftlichen Normale $\overline{XX}$ zu den in Berührung befindlichen Oberflächentheilen beider Körper abweichen, so tritt stets eine Zerlegung der Kräfte ein; es geht nur diejenige Seitenkraft N oder N_1 von einem Körper auf den andern über, welche die Richtung der Normale hat, die andere Seitenkraft S oder S_1 hingegen bleibt im Körper zurück und muß durch eine andere Kraft oder ein anderes Hinderniß aufgenommen werden, um die Körper im Gleichgewichte zu erhalten. Zwischen den normalen Seitenkräften N und N_1 aber findet, dem angeführten Principe zufolge, vollkommene Gleichheit Statt.

Fig. 160.



Weicht die Richtung der Kraft P um den Winkel $NAP = \alpha$ von der Normale AX und um den Winkel $SAP = \beta$ von der Richtung der zweiten Seitenkraft S ab, so hat man (§. 75)

$$N = \frac{P \sin.\beta}{\sin.(\alpha + \beta)},\ S = \frac{P \sin.\alpha}{\sin.(\alpha + \beta)}.$$

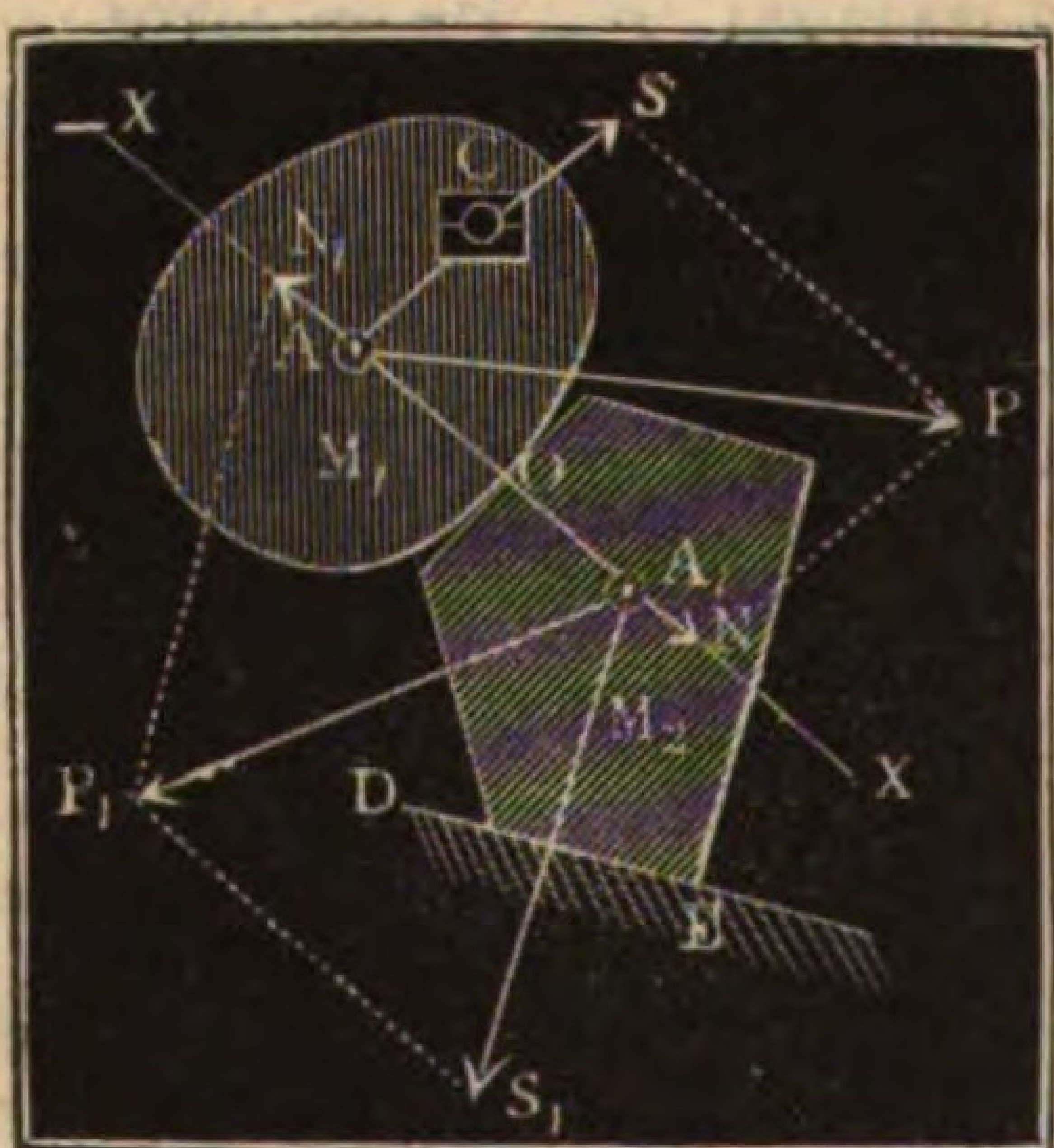
Bezeichnet man ebenso $N_1 A_1 P_1$ durch α_1 und $S_1 A_1 P_1$ durch β_1, so hat man auch

$$N_1 = \frac{P_1 \sin.\beta_1}{\sin.(\alpha_1 + \beta_1)} \text{ und } S_1 = \frac{P_1 \sin.\alpha_1}{\sin.(\alpha_1 + \beta_1)};$$

endlich wegen der Gleichheit $N = N_1$,

$$\frac{P \sin.\beta}{\sin.(\alpha + \beta)} = \frac{P_1 \sin.\beta_1}{\sin.(\alpha_1 + \beta_1)}.$$

Fig. 161.



Beispiel. Welche Kraftzerlegungen treten ein, wenn der durch ein Hinderniß DE aufgehaltene Körper M_2, Fig. 161, durch einen andern, um eine Axe C drehbaren Körper mit einer Kraft $P = 250$ Pf. gedrückt wird, die Richtungswinkel aber folgende sind: $PAN = \alpha = 35^0$, $PAS = \beta = 48^0$, $P_1 A_1 N_1 = \alpha_1 = 65^0$, $P_1 A_1 S_1 = \beta_1 = 50^0$. Aus der ersten Formel bestimmt sich der Normaldruck zwischen beiden Körpern:

Druck der Körper auf einander.

$$N = N_1 = \frac{P \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{250 \sin. 48^0}{\sin. 83^0} = 187,18 \text{ Pf.};$$

aus der zweiten folgt der Druck gegen die Axe oder den Zapfen C:

$$S = \frac{P \sin \alpha}{\sin.(\alpha + \beta)} = \frac{250 \sin. 35^0}{\sin. 83^0} = 144,47 \text{ Pf.};$$

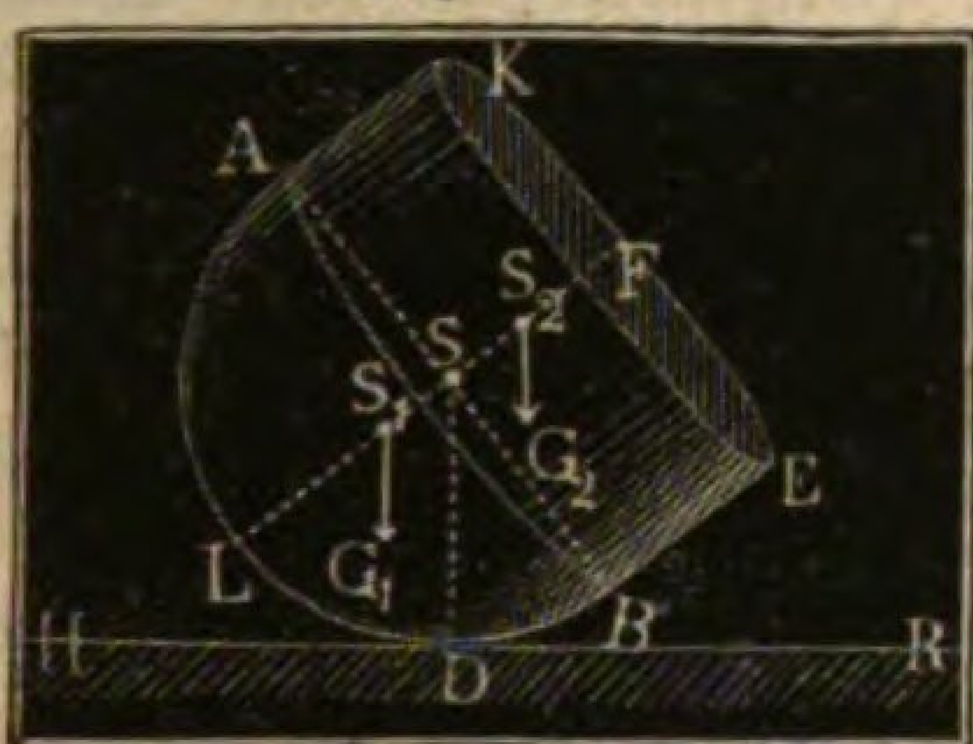
aus der Verbindung der dritten und vierten Gleichung folgt endlich der Seitendruck gegen das Hinderniß DE:

$$S_1 = \frac{N_1 \sin. \alpha_1}{\sin. \beta_1} = \frac{187,18 \sin. 65^0}{\sin. 50^0} = 221,46 \text{ Pf.}$$

§. 129. Wenn ein sich auf eine Horizontalebene stützender Körper außer der Schwerkraft von keiner andern Kraft getrieben wird, so besitzt derselbe kein Bestreben zur fortschreitenden Bewegung, weil das vertikal abwärts wirkende Gewicht von dieser Ebene vollständig aufgenommen wird; wohl aber ist eine Drehung des Körpers möglich. Ruht der Körper *ADBF*, Fig. 162, mit einem Punkte D auf der Horizontalebene HR, so bleibt derselbe in Ruhe, wenn sein Schwerpunkt S unterstützt ist, d. h. in der durch den Stützpunkt D gehenden Vertikallinie liegt. Stützt sich aber ein Körper in zwei Punkten gegen die horizontale Oberfläche eines anderen, so erfordert das Gleichgewicht desselben, daß die vertikale Schwerlinie die die beiden Stützpunkte verbindende Gerade durchschneide. Ruht endlich ein Körper in drei oder mehreren Punkten auf einer Horizontalebene, so besteht Gleichgewicht, wenn die den Schwerpunkt enthaltende Vertikallinie durch das Dreieck oder Polygon hindurchgeht, welches entsteht, wenn man die Stützpunkte durch gerade Linien mit einander verbindet.

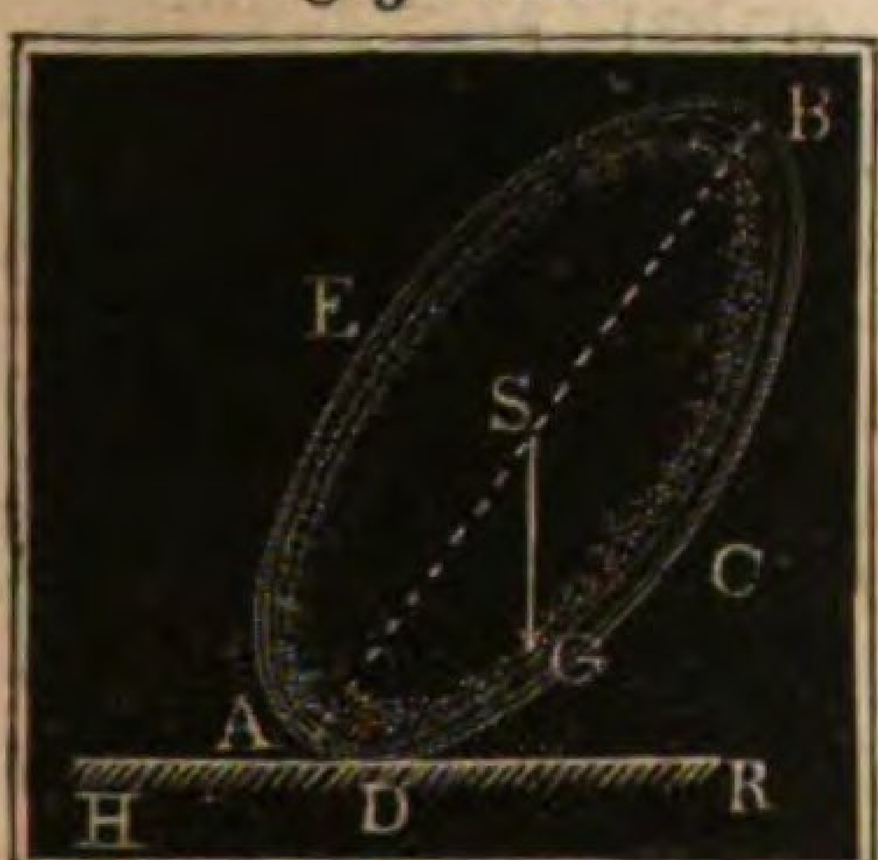
Stabilität.

Fig. 162.



Uebrigens sind auch bei den unterstützten Körpern **stabiles** und **labiles Gleichgewicht** von einander zu unterscheiden. Das Gewicht G eines Körpers AB, Fig. 163, zieht den Schwerpunkt S desselben abwärts; stellt sich nun dieser Kraft kein Hinderniß entgegen, so bringt sie in dem Körper eine Drehung hervor, die so weit fortgeht, bis der Schwerpunkt seinen tiefsten Ort einnimmt und der Körper in's Gleichgewicht kommt. Es läßt sich aber behaupten, daß das Gleichgewicht stabil ist, wenn der Schwerpunkt die möglich tiefste Lage (Fig. 164 f. f. S.), daß es nur labil ist, wenn er die höchste Lage ein-

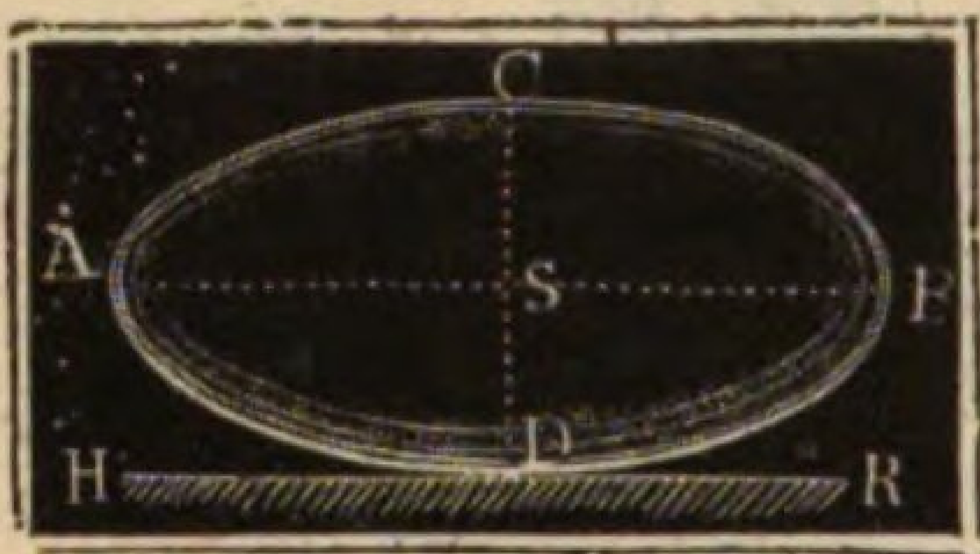
Fig. 163.



Stabilität. nimmt (Fig. 165), und daß es endlich ein indifferentes Gleichgewicht ist,

Fig. 165.

Fig. 164.



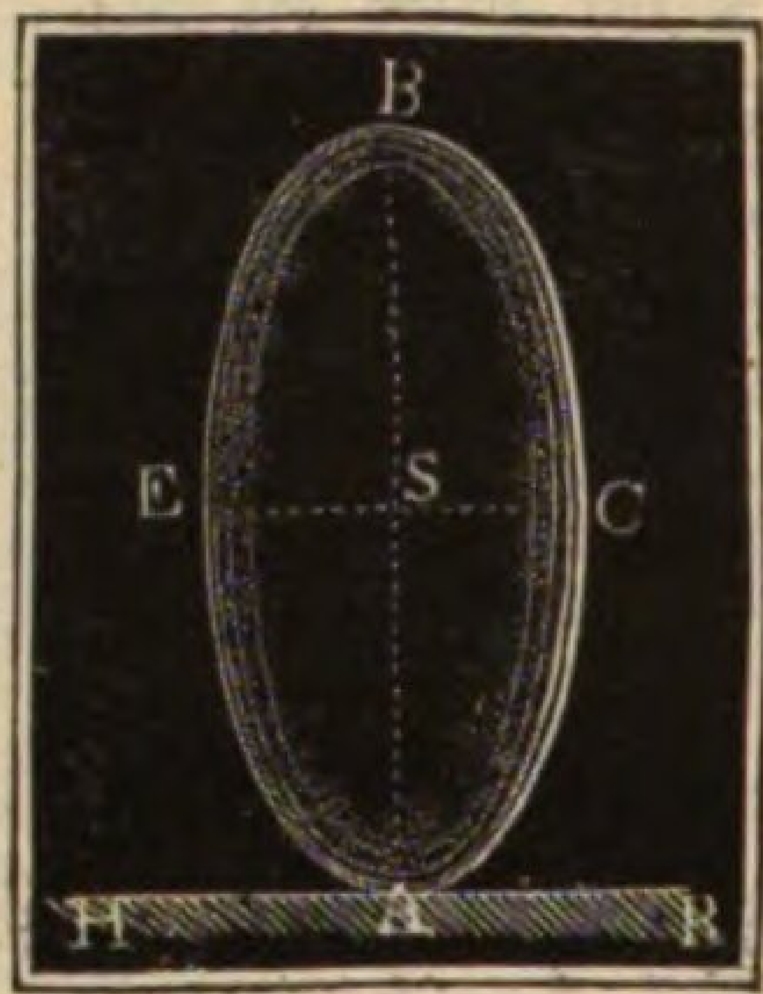
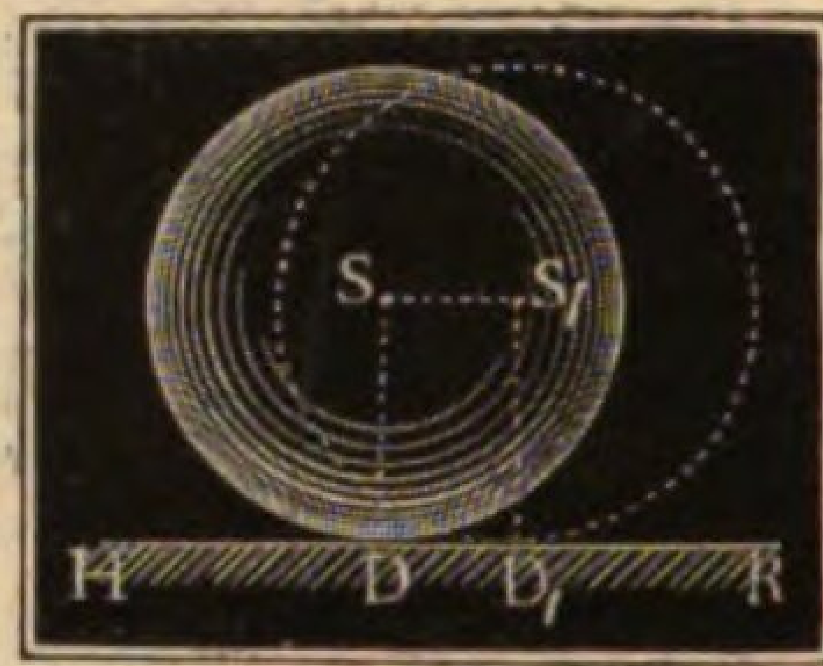


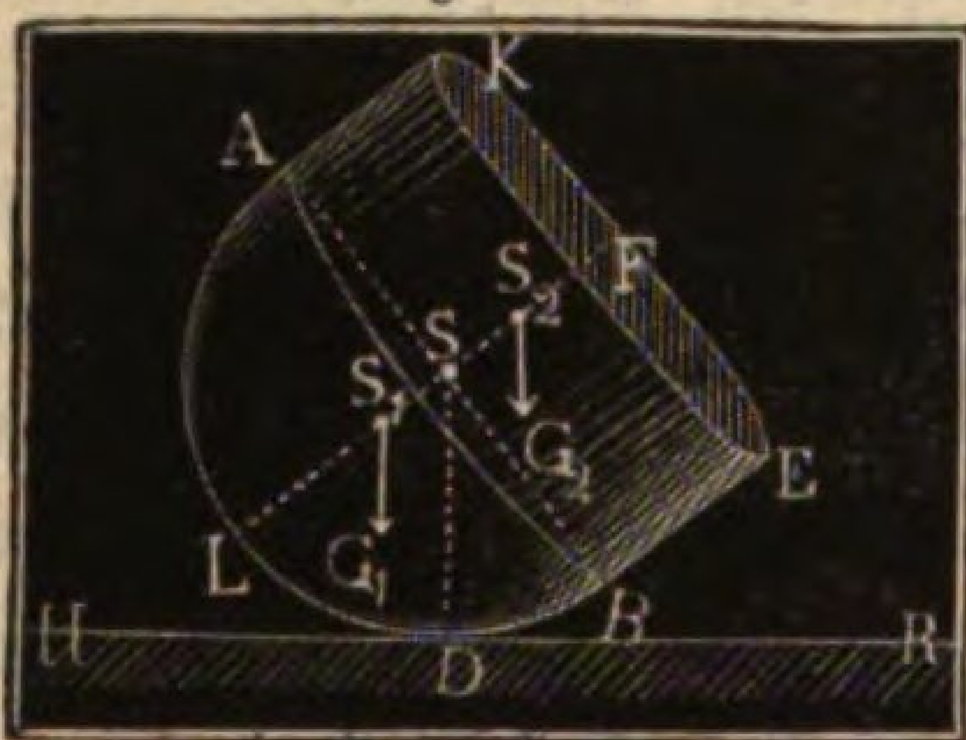
Fig. 166.



wenn der Schwerpunkt bei jeder Stellung des Körpers auf einerlei Höhe bleibt (Fig. 166).

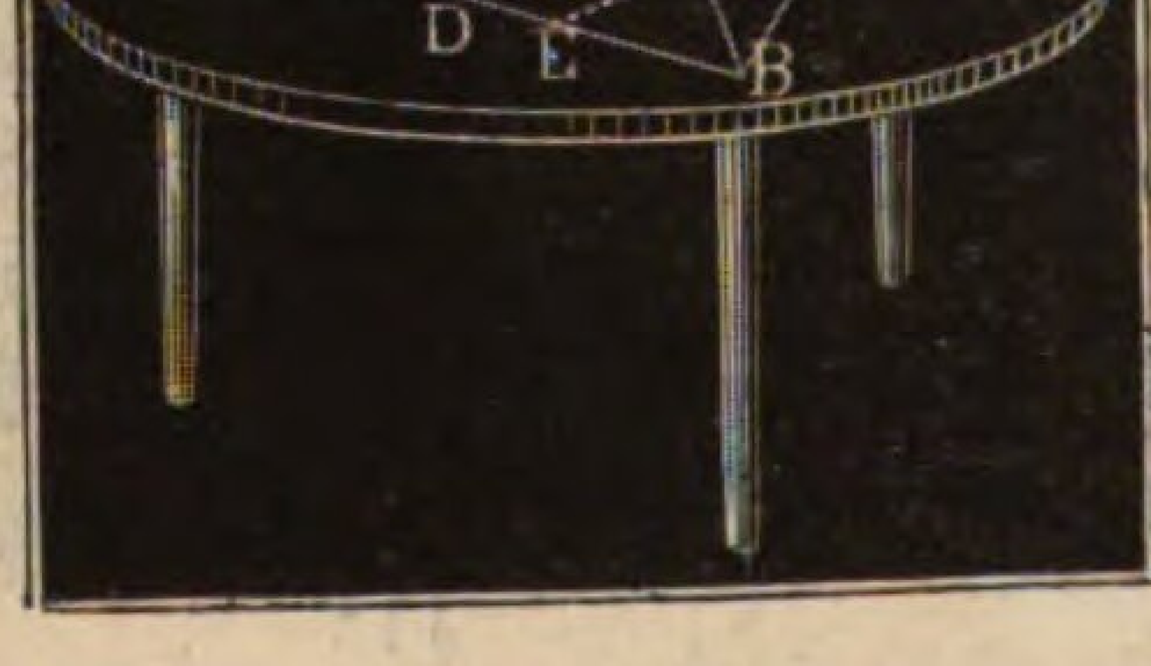
Beispiele: 1) Der homogene, aus einer Halbkugel und einem Cylinder bestehende Körper *ADBF*, Fig. 167, ruht auf einer Horizontalebene *HR*. Welche Höhe $SF = h$ muß der cylindrische Theil desselben haben, damit dieser Körper Gleichgewicht annehme? Der Halbmesser einer Kugel steht auf der entsprechenden Berührungsebene winkelrecht; nun ist aber die Horitalebene eine solche Ebene, folglich muß auch der Halbmesser *SD* auf der Horizontalebene rechtwinklig stehen und in ihm auch der Schwerpunkt des Körpers liegen. Die durch den Kugelmittelpunkt gehende Axe *FSL* des Körpers ist eine zweite Schwerlinie desselben, es ist daher der Mittelpunkt *S*, als Durchschnitt beider Schwerlinien, Schwerpunkt des Körpers. Setzen wie nun den Kugel- und Cylinderhalbmesser $SA = SB = r$ und die Cylinderhöhe $SF = BE = h$, so haben wir für das Volumen der Halbkugel: $V_1 = \frac{2}{3}\pi r^3$, für das Volumen des Cylinders $V_2 = \pi r^2 h$, für den Abstand des Kugelschwerpunktes $S_1 : SS_1 = \frac{3}{8} r$ und für den des Cylinderschwerpunktes $S_2 : SS_2 = \frac{1}{2} h$. Damit nun der Schwerpunkt des ganzen Körpers nach *S* falle, ist das Moment $\frac{2}{3}\pi r^3 . \frac{3}{8} r$ der Halbkugel gleichzusetzen dem Momente $\pi r^2 h . \frac{1}{2} h$ des Cylinders; hieraus aber ergiebt sich $h^2 = \frac{1}{2} r^2$, d. i. $h = r\sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}7071 . r$.

Fig. 167.



2) Der Druck, welchen jedes der drei Beine *A*, *B*, *C*, Fig. 168, eines beliebig belasteten Tisches auszuhalten hat, bestimmt sich auf folgende Weise. Es sei *S* Schwerpunkt des belasteten Tisches, und es seien *SE*, *CD* Perpendikel auf *AB*. Bezeichnen wir nun das Gewicht des ganzen Tisches durch *G* und den Druck in *C* durch *R*, so können wir, *AB* als Axe behandelnd, setzen: Moment von *R* = Moment von *G*,

Fig. 168.



d. i. $R \cdot CD = G \cdot SE$, und erhalten nun $R = \frac{SE}{CD} \cdot G = \frac{\triangle ABS}{\triangle ABC} \cdot G$; ebenso auch den Druck in $B = Q = \frac{\triangle ACS}{\triangle ABC} \cdot G$, und den in $A = P = \frac{\triangle BCS}{\triangle ABC} \cdot G$.

Stabilität.

§. 130. Beschäftigen wir uns mit dem Falle, wenn ein Körper mit einer ebenen Basis auf einer horizontalen Ebene ruht, etwas specieller. Ein solcher Körper besitzt Stabilität oder ist im stabilen Gleichgewichte, wenn sein Schwerpunkt unterstützt ist, d. h. wenn das den Schwerpunkt enthaltende Loth durch die Basis des Körpers hindurchgeht, weil in diesem Falle die durch das Gewicht des Körpers angeregte Drehung durch die Festigkeit desselben verhindert wird. Geht das Loth durch den Umfang der Basis, so befindet sich der Körper im labilen Gleichgewichte, und geht endlich dasselbe gar nicht durch die Basis, so findet gar kein Gleichgewicht Statt, der Körper dreht sich um eine Seite seines Umfanges und stürzt um. Das dreiseitige Prisma $ABCDE$, Fig. 169, ist

Fig. 169.

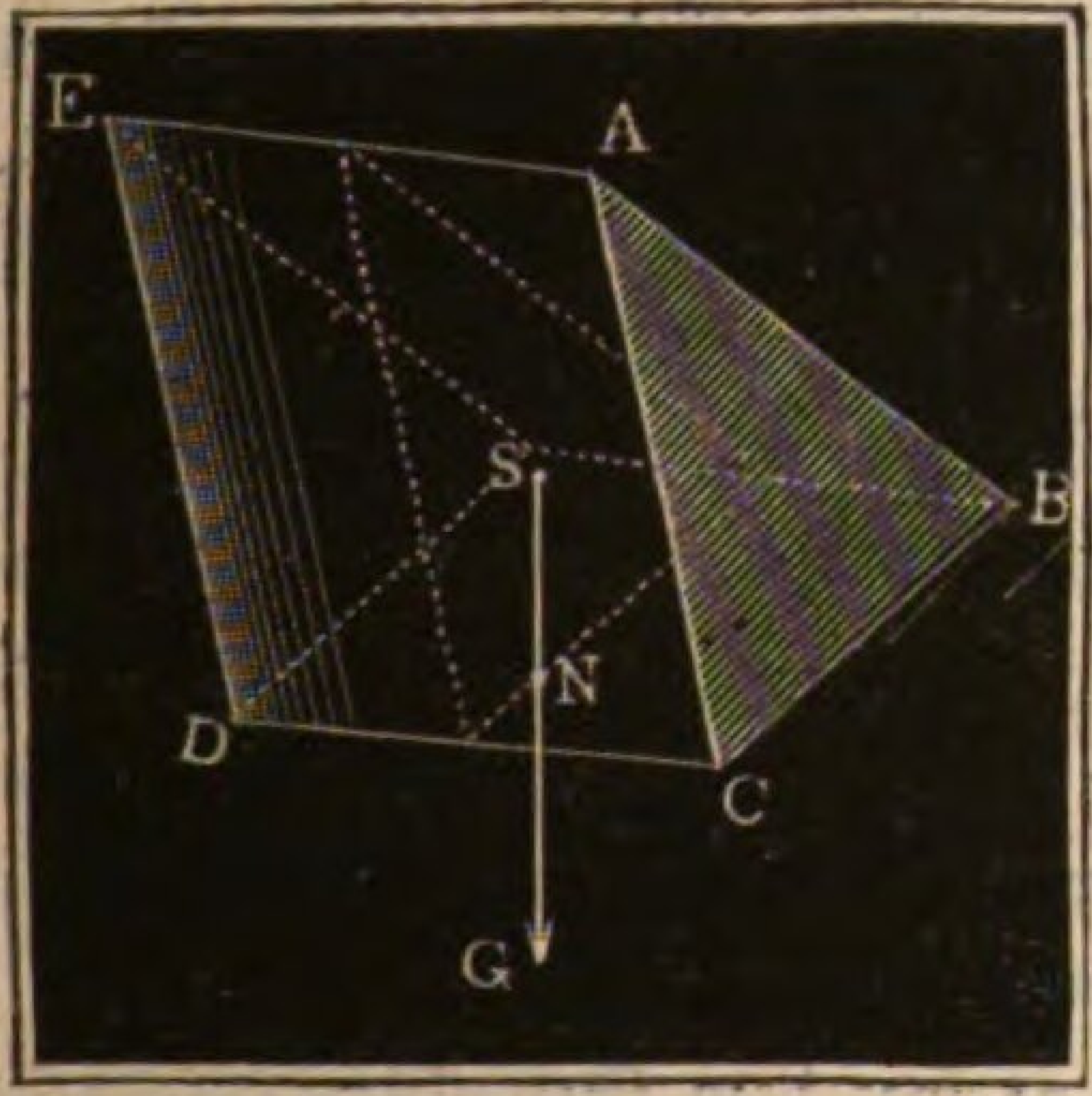
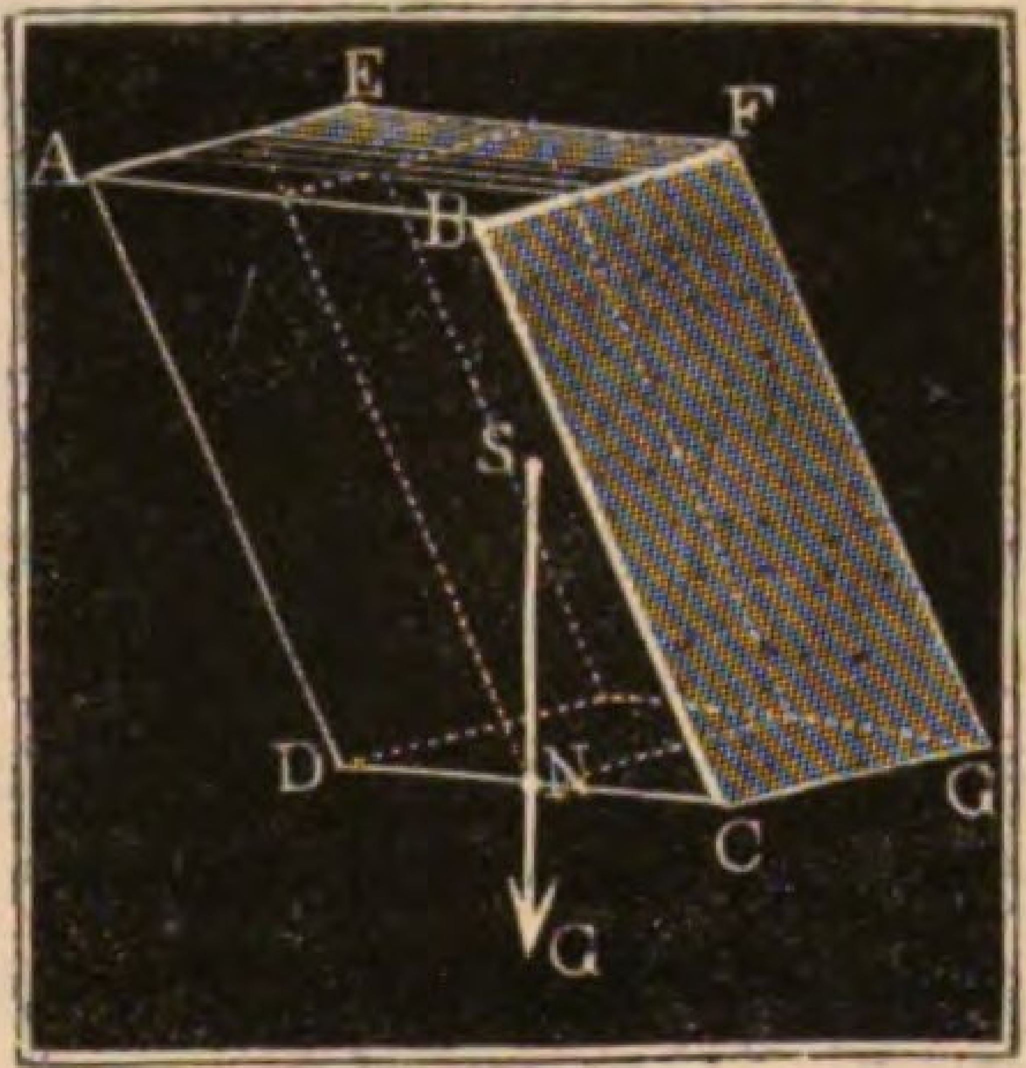
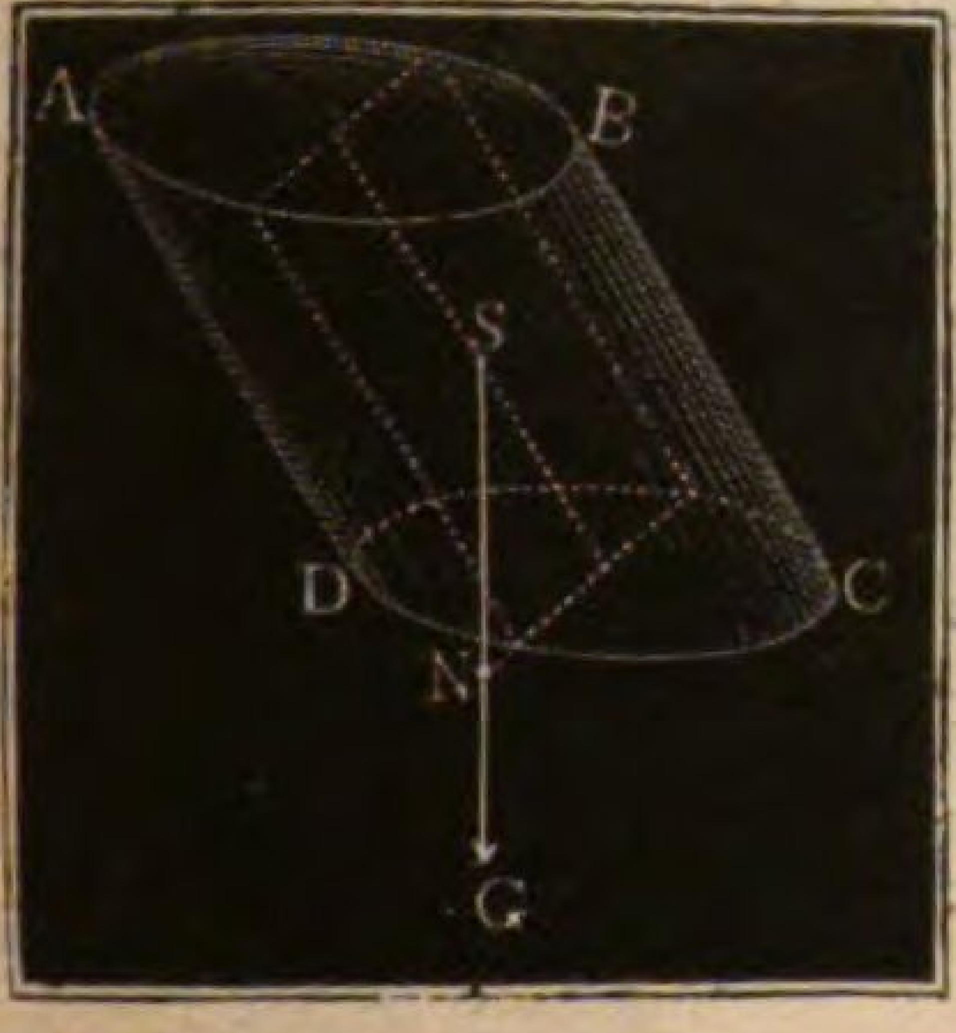


Fig. 170.



hiernach stabil, weil das Loth SG durch einen Punkt N der Basis hindurchgeht, das Parallelepiped $ABCG$, Fig. 170, ist im labilen Gleichgewichte, weil das Loth SG eine Seite CD der Basis durchschneidet, der Cylinder $ABCD$, Fig. 171, ist endlich ohne Stabilität, weil das Loth SG dessen Basis CD nicht durchschneidet.

Fig. 171.

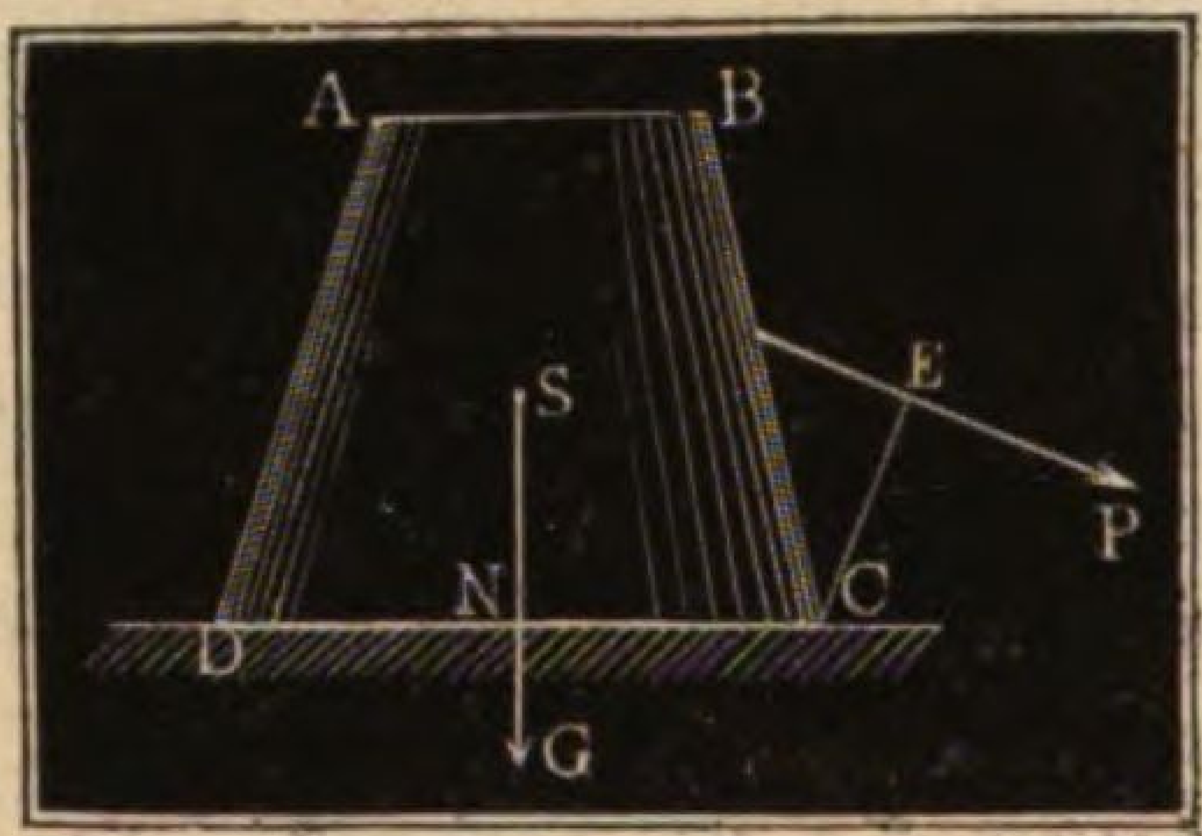


Stabilität oder Standfähigkeit (franz. stabilité, engl. stability) ist das Vermögen eines Körpers, durch sein Gewicht allein seine Stellung zu behaupten und einer Umdrehungsursache Widerstand

entgegenzusetzen. Kommt es darauf an, ein Maaß für die Stabilität eines Körpers auszuwählen, so muß unterschieden werden, ob nur auf eine Verrückung oder auf ein wirkliches Umstürzen Rücksicht genommen werden soll. Nehmen wir zunächst nur auf das erste Verhältniß Rücksicht.

Stabilitäts-formeln. §. 131. Eine nicht vertikal gerichtete Kraft P sucht einen Körper $ABCD$, Fig. 172, nicht allein umzustürzen, sondern auch fortzuschieben; nehmen wir indessen an, daß diesem Fortschieben, oder nach Befinden Fortziehen, ein Hinderniß entgegengesetzt sei, berücksichtigen wir also nur das Umdrehen um eine der Kanten C. Fällen wir von dieser Kante ein Perpendikel $CE = a$ gegen die Kraftrichtung und ein anderes Perpendikel $CN = x$ gegen das Loth SG durch den Schwerpunkt,

Fig. 172.



so haben wir es mit einem Winkelhebel ECN zu thun, für welchen gilt $Pa = Gx$, also $P = \frac{x}{a} G$; ist also die äußere Kraft P wenig größer als $\frac{xG}{a}$, so nimmt der Körper eine Drehung um C an und verliert also seine Stabilität. Es hängt hiernach seine Stabilität von dem Producte (Gx) aus dem Gewichte des Körpers und aus dem kürzesten Abstande zwischen einer Seite des Umfanges der Basis und dem Lothe durch den Schwerpunkt ab, es läßt sich also Gx als **Maaß der Stabilität** ansehen und deshalb auch schlechtweg Stabilität selbst nennen.

Man ersieht hieraus, daß die Stabilität mit dem Gewichte G und dem Abstande x gleichmäßig wächst, und schließt hiernach, daß unter übrigens gleichen Umständen eine doppelte, dreimal so schwere Mauer u. s. w. nicht mehr Standfähigkeit besitzt, als eine Mauer vom einfachen Gewichte und dem doppelten, dreifachen Abstande oder Hebelarme x u. s. w.

§. 132. 1) Von einem Parallelepipede $ABCF$, Fig. 173, von der Länge $AE = l$, Breite $AB = CD = b$ und Höhe $AD = BC = h$ ist das Gewicht $G = V\gamma = bhl\gamma$ und die Stabilität $S = G . KN = G . \frac{1}{2} CD = \frac{Gb}{2} = \frac{1}{2} b^2 hl\gamma$, insofern γ die Dichtigkeit der Masse des Parallelepipedes bezeichnet.

2) Bei einem aus zwei Parallelepipeden bestehenden Körper $ACFH$, Fig. 174, sind die Stabilitäten in Hinsicht auf die beiden Basiskanten C und E verschieden von einander. Sind die Höhen BC und $EF = h$

und h_1 und die Breiten CD und $DE = b$ und b_1, so hat man die Ge- Stabilitäts-formeln.

Fig. 173.

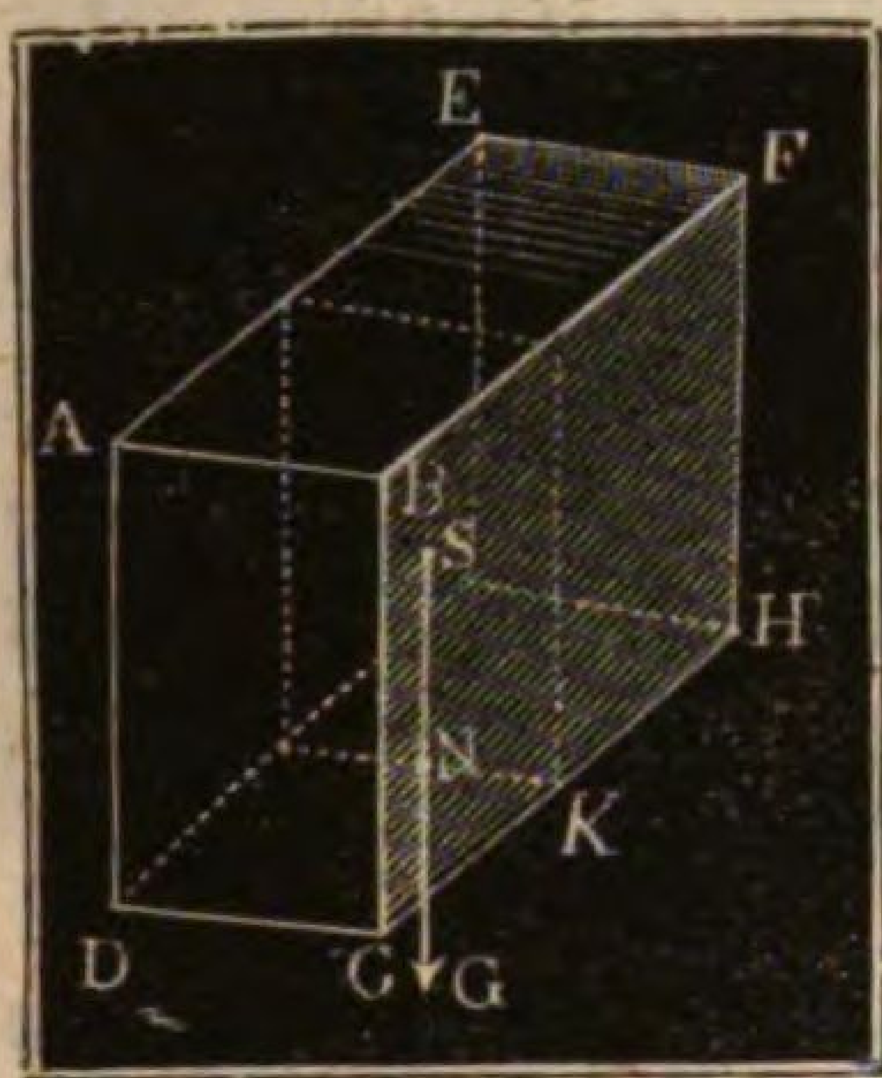
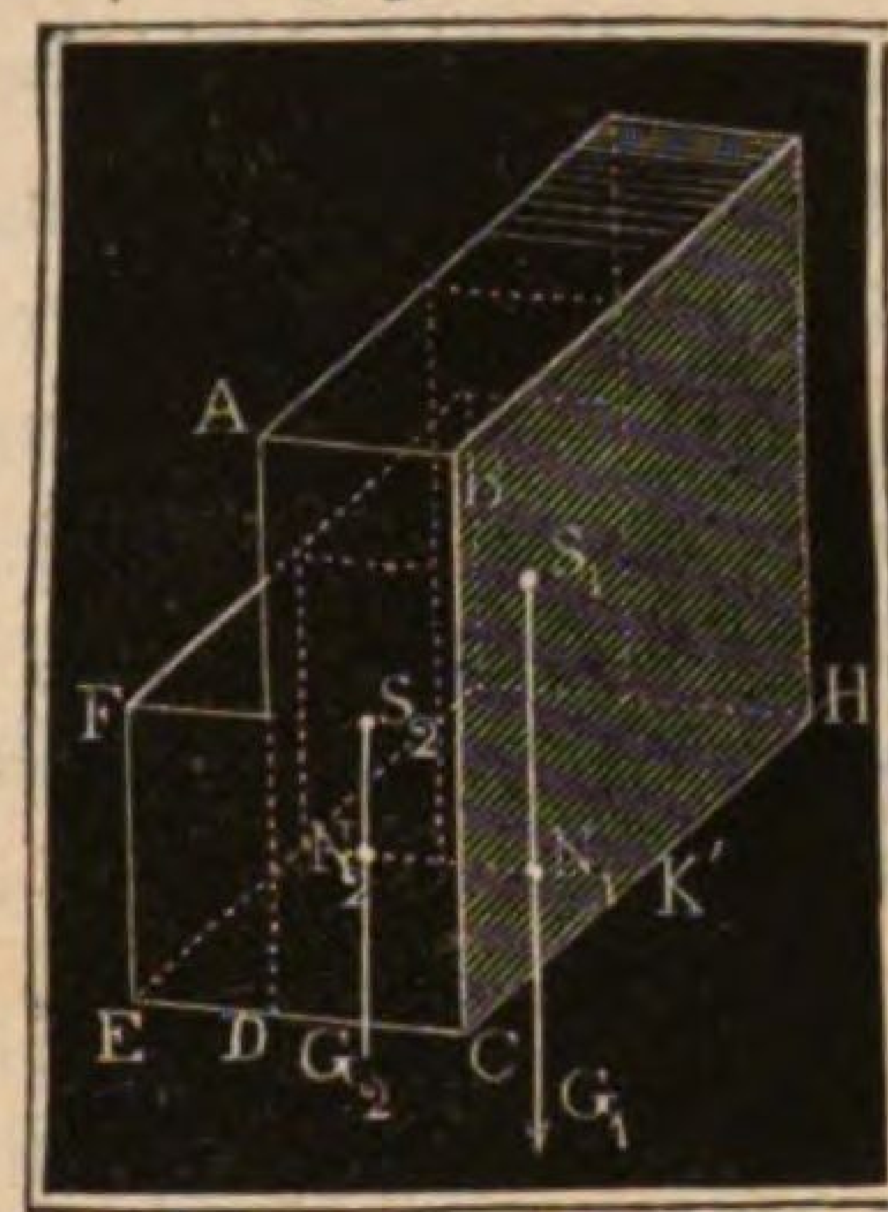


Fig. 174.



wichte der Theile G_1 und $G_2 = bhl\gamma$ und $b_1\, h_1\, l\gamma$; die Hebelarme in Beziehung auf C, $KN_1 = \frac{1}{2}b$ und $KN_2 = b + \frac{1}{2}\, b_1$, und in Beziehung auf E, $= b_1 + \frac{1}{2}b$ und $\frac{1}{2}b_1$; es sind demnach die Stabilitäten: erstens für eine Umdrehung um C,

$$S = \frac{1}{2}\, G_1 b + G_2 (b + \frac{1}{2}\, b_1), = (\frac{1}{2}\, b^2 h + b b_1 h_1 + \frac{1}{2}\, b_1^2 h_1)\, l\gamma,$$

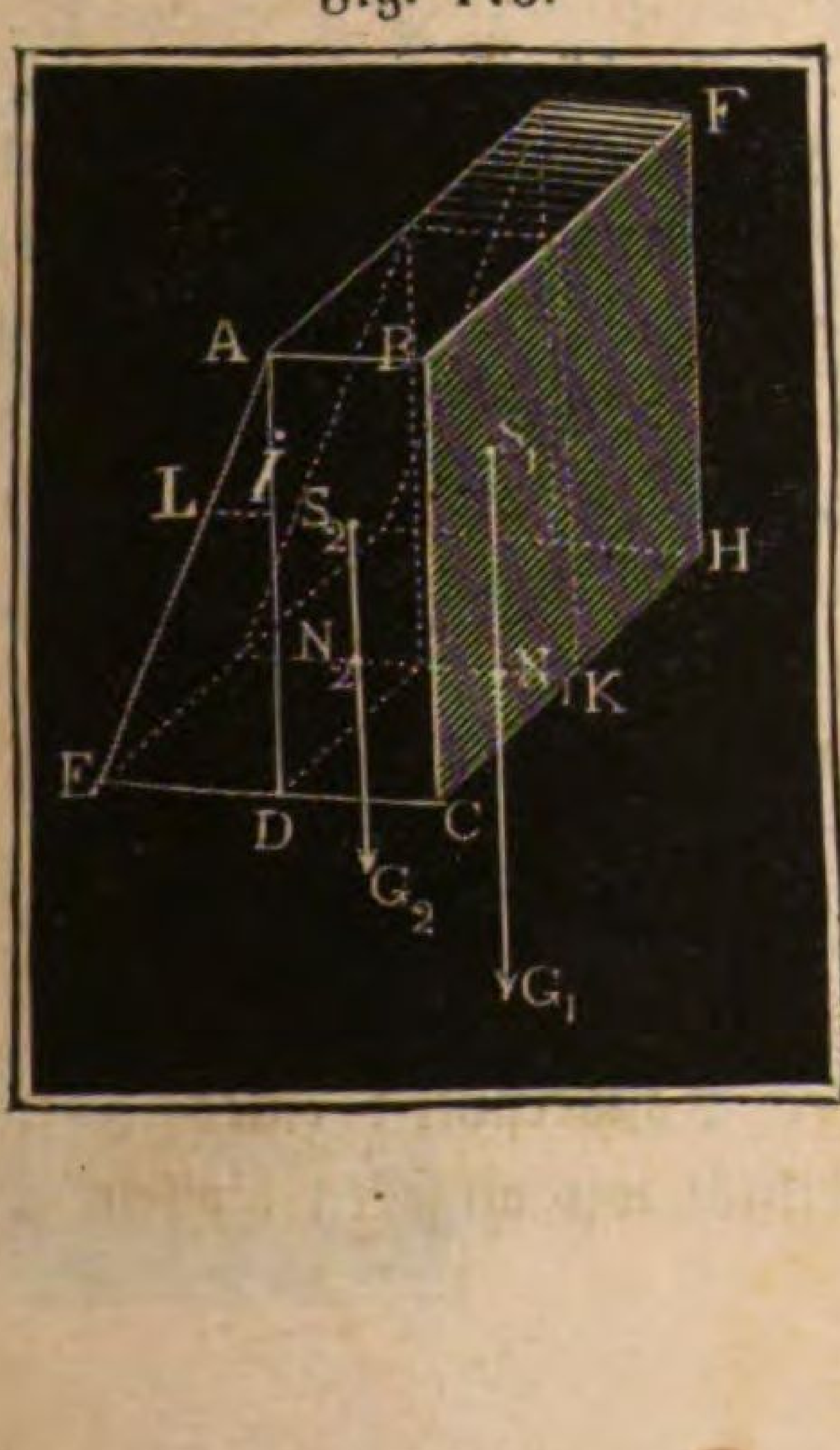
dagegen zweitens, in Beziehung auf E,

$$S_1 = G_1\, (b_1 + \frac{1}{2}b) + \frac{1}{2} G_2 b_1 = (\frac{1}{2} b_1^2 h_1 + b b_1 h + \frac{1}{2} b^2 h)\, l\gamma.$$

Die letztere Stabilität ist um $S_1 - S = (h - h_1)\, b b_1 l\gamma$ größer als die erstere; will man die Stabilität einer Mauer AC durch Banquets DF vergrößern, so sind diese demnach auf derjenigen Seite der Mauer anzubringen, wohin die Umdrehungskraft (Wind-, Wasser-, Erddruck u. s. w.) wirkt.

Von einer auf einer Seite geböschten Mauer $ABCEF$, Fig. 175, ergiebt sich folgende Stabilität. Es sei die obere Breite $AB = b$, die Höhe $BC = h$ und die Länge $CH = l$, die Böschung aber $= n$, d. h. auf $AI = 1$ Fuß Höhe; $IL = n$ Ausladung, also auf h Fuß: $ED = nh$. Das Gewicht des Parallelepipedes ACF ist $G_1 = bhl\gamma$, das des dreiseitigen Prisma's $ADE = G_2 = \frac{1}{2} nh.hl\gamma$, die Hebelarme für eine Umdrehung um E sind $= DE + \frac{1}{2}b = nh + \frac{1}{2}b$ und $\frac{2}{3}\, DE = \frac{2}{3}\, nh$; es ist folglich die Stabilität:

Fig: 175.



$$S = G_1\, (nh + \frac{1}{2}b) + \frac{2}{3}\, G_2 nh$$
$$= (\frac{1}{2}\, b^2 + nhb + \frac{1}{3} n^2 h^2)\, hl\gamma.$$

Stabilitäts-formeln.

Eine parallelepipedische Mauer von gleichem Volumen hat die Breite $b + \frac{1}{2}nh$, daher die Stabilität:

$$S_1 = \frac{1}{2}(b + \frac{1}{2}nh)^2 hl\gamma = (\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}nhb + \frac{1}{8}n^2h^2)\,hl\gamma;$$

ihre Stabilität ist daher um $S - S_1 = (b + \frac{5}{12}nh)\,.\,\frac{1}{2}nh^2l\gamma$ kleiner als die der geböschten Mauer.

Für eine auf der entgegengesetzten Seite geböschte Mauer ist die Stabilität $S_2 = (b^2 + nhb + \frac{1}{3}\,n^2h^2)\,.\,\frac{1}{2}hl\gamma$, demnach auch kleiner als S, und zwar um $S - S_2 = (b + \frac{1}{3}nh)\,.\,\frac{1}{2}nh^2l\gamma$, wiewohl um $S_2 - S_1 = \frac{1}{24}\,n^2h^3l\gamma$ größer als die Stabilität der parallelepipedischen Mauer.

Beispiel. Wie groß ist die Stabilität einer Bruchsteinmauer von 10 Fuß Höhe und $1\frac{1}{4}$ Fuß oberer Breite für jeden Fuß Länge bei $\frac{1}{5}$ füßiger Böschung an der Rückenseite? Das specifische Gewicht dieser Mauer (§. 58) = 2,4 angenommen, folgt die Dichtigkeit derselben $\gamma = 66\,.\,2{,}4 = 158{,}4$ Pf., nun ist $l = 1$, $h = 10$, $b = 1{,}25$ und $n = \frac{1}{5} = 0{,}2$; es folgt daher die gesuchte Stabilität $S = (\frac{1}{2}\cdot[1{,}25]^2 + 0{,}2\,.\,1{,}25\,.\,10 + \frac{1}{3}\,.\,[0{,}2]^2.10^2)\;10\,.\,1\,.\,158{,}4$
$= (0{,}78125 + 2{,}5 + 1{,}3333)\;1584 = 4{,}6146\,.\,1584 = 7309{,}5$ Fßpf.

Bei derselben Menge an Material und unter übrigens gleichen Umständen wäre die Stabilität einer parallelepipedischen Mauer:

$S_1 = (\frac{1}{2}\,.[1{,}25]^2 + \frac{1}{2}\,.\,0{,}2\,.\,1{,}25\,.\,10 + \frac{1}{8}\,.0{,}2^2\,.\,10^2)\,.\,1584$
$= (0{,}78125 + 1{,}25 + 0{,}5)\,.1584 = 2{,}531\,.\,1584 = 4010$ Fßpf.

Endlich dieselbe Mauer mit geböschter Vorderseite hätte die Stabilität:

$S_2 = (\frac{1}{2}\cdot[1{,}25]^2 + \frac{1}{2}\,.0{,}2\,.1{,}25\,.10 + \frac{1}{6}\cdot[0{,}2]^2\,.10)^2\,.1584$
$= (0{,}78125 + 1{,}25 + 0{,}666...)\,.\,1584 = 2{,}6979\,.\,1584 = 4273$ Fßpf.

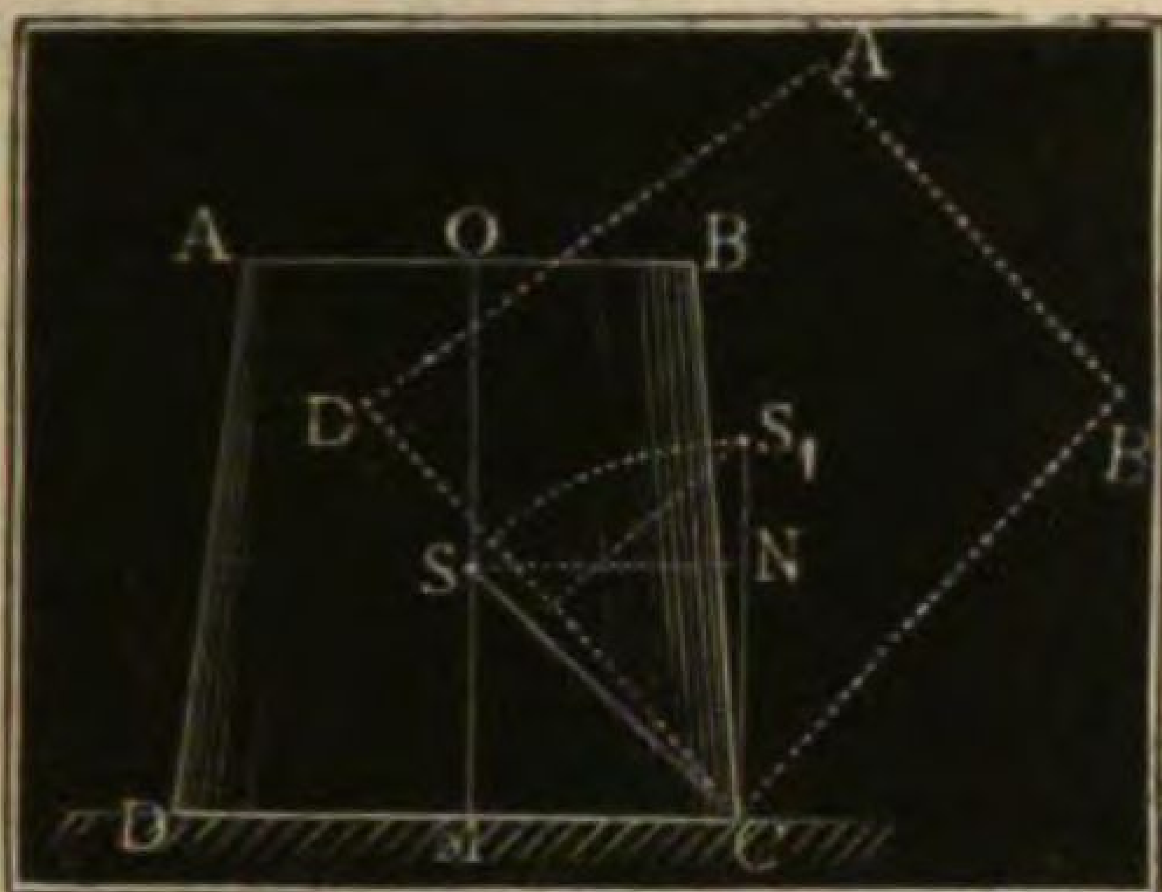
Anmerkung. Man ersieht aus dem Vorhergehenden, daß es eine Ersparung an Material gewährt, die Mauern zu böschen, oder sie mit Pfeilern zu versehen, ihnen Banquets zu geben, sie auf Plinten zu setzen u. s. w. Eine weitere Ausführung dieses Gegenstandes giebt der zweite Theil, wo vom Erddruck, von den Gewölben, Kettenbrücken u. s. w. gehandelt wird.

Dynamische Stabilität.

§. 133. Wir können von dem im letzten Paragraphen abgehandelten Maaße der Stabilität noch ein anderes, gewissermaßen dynamisches Maaß der Stabilität unterscheiden, indem wir die Wirkung berücksichtigen, welche zum Umstürzen des Körpers aufzuwenden ist. Nun ist die Leistung oder Arbeit einer Kraft gleich dem Producte aus Kraft und Weg, die Kraft eines schweren Körpers ist aber sein Gewicht G und der Weg gleich der Vertikalprojection des vom Schwerpunkte durchlaufenen Weges: wir können folglich als dynamisches Maaß der Stabilität eines Körpers das Product Gs annehmen, wenn s die Höhe ist, auf welche der Schwerpunkt des Körpers steigen muß, um den Körper aus seinem stabilen Zustande in einen labilen zu bringen.

Es sei C die Drehungsaxe und S der Schwerpunkt eines Körpers $ABCD$, Fig. 176, dessen dynamische Stabilität wir angeben wollen. Dre-

Fig. 176.



hen wir den Körper, so daß sein Schwerpunkt nach S_1, d. h. senkrecht über C kommt, so ist der Körper im labilen Gleichgewichte, denn wenn er nur noch wenig weiter gedreht wird, so gelangt er zum Umsturz. Ziehen wir die Horizontale SN, so schneidet diese die Höhe $NS_1 = s$ ab, auf welche der Schwerpunkt gestiegen ist, und aus welcher sich die Stabilität Gs ergiebt. Ist nun $CS = CS_1 = z$, $CM = SN = x$ und die Höhe $CN = MS = y$, so folgt der Weg $S_1N = s = z - y = \sqrt{x^2+y^2} - y$, und die Stabilität im letzteren Sinne: Dynamische Stabilität.

$$S = G\,(\sqrt{x^2+y^2} - y).$$

Ist der Körper ein Prisma mit symmetrisch trapezoidalem Querschnitt, wie Fig. 176 im Durchschnitt vorstellt, und sind die Dimensionen folgende: Länge $= l$, Höhe $MO = h$, untere Breite $CD = b_1$, obere Breite $AB = b_2$, so hat man $MS = y = \frac{b_1+2b_2}{b_1+b_2} \cdot \frac{h}{3}$ (§. 105) und

$$CM = x = \tfrac{1}{2}\,b_1, \text{ daher } CS = \sqrt{\left(\frac{b_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{b_1+2b_2}{b_1+b_2} \cdot \frac{h}{3}\right)^2},$$

und die dynamische Stabilität oder die zum Umstürzen dieses Körpers nöthige mechanische Arbeit:

$$S = G\left[\sqrt{\left(\frac{b_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{b_1+2b_2}{b_1+b_2} \cdot \frac{h}{3}\right)^2} - \frac{b_1+2b_2}{b_1+b_2} \cdot \frac{h}{3}\right]$$

Fig. 177.



Beispiel. Wie groß ist die dynamische Stabilität oder die mechanische Arbeit zum Umstürzen des Obelisken $ABCD$, Fig. 177, aus Granit, wenn dessen Höhe $h =$ 30 Fuß, obere Länge und Breite $l_1 = 1\tfrac{1}{2}$ und $b_1 =$ 1 Fuß und untere Länge und Breite $l_2 = 4$ Fuß. und $b_2 = 3\tfrac{1}{2}$ Fuß betragen? Das Volumen dieses Körpers ist (§. 115) $V = (2b_1\,l_1 + 2b_2\,l_2 + b_1\,l_2 + b_2\,l_1)\,\frac{h}{6}$

$= (2 \cdot \tfrac{3}{2} \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot \tfrac{7}{2} + 1 \cdot 4 + \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{7}{2}) \cdot \tfrac{30}{6}$
$= 40{,}25 \cdot 5 = 201{,}25$ Cubikfuß; wiegt nun ein Cubikfuß Granit $= 3 \cdot 66 = 198$ Pf, so ist das ganze Gewicht dieses Körpers: $G = 201{,}25 \cdot 198 = 39847{,}5$ Pf. Die Höhe des Schwerpunktes über der Basis ist

$$y = \frac{b_2l_2 + 3b_1l_1 + b_2l_1 + b_1l_2}{2b_2l_2 + 2b_1l_1 + b_2l_1 + b_1l_2} \cdot \frac{h}{2}$$

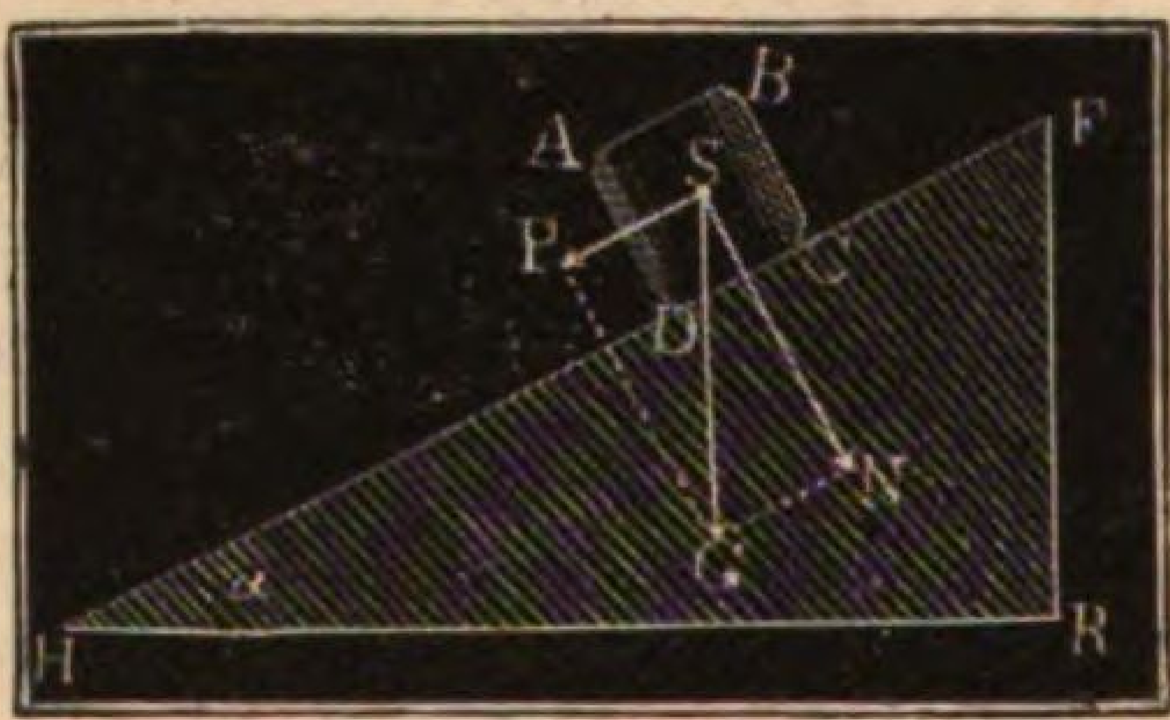
Dynamische Stabilität. $= \frac{4 \cdot 7/_2 + 3 \cdot 3/_2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 3/_2 \cdot 7/_2}{40,25} \cdot 30/_2 = \frac{27,75 \,.\, 15}{40,25} = 10,342$ Fuß. Eine Umdrehung um die längere Basiskante vorausgesetzt, ist der Horizontalabstand des Schwerpunktes von dieser Kante: $x = 1/_2\, b_2 = 1/_2 \cdot 7/_2 = 7/_4$ Fuß, daher die Entfernung des Schwerpunktes von der Axe:

$CS = z = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1,75)^2 + (10,342)^2} = \sqrt{110,002} = 10,489$; und die Höhe, auf welche der Schwerpunkt zu heben ist, um ein Umstürzen herbeizuführen: $s = z - y = 10,489 - 10,342 = 0,147$ Fuß, endlich die entsprechende Arbeit oder Stabilität: $Gs = 39847 \,.\, 0,147 = 5858$ Fßpf.

Anmerkung. Der Factor $s = \sqrt{x^2 + y^2} - y$ giebt für $y = o$, $s = x$, für $y = x$, $s = x\,(\sqrt{2} - 1) = 0,414\, x$, für $y = nx$ aber $s = (\sqrt{n^2+1} - n)x$ annähernd $= (n + \frac{1}{2n} - n)\, x = \frac{x}{2n}$, also für $y = 10x$, $s = \frac{x}{20}$, und für $y = \infty$, $s = \frac{x}{\infty} = o$; es ist also die dynamische Stabilität um so größer, je tiefer der Schwerpunkt liegt, und sie nähert sich immer mehr und mehr der Null, je höher der Schwerpunkt über der Basis liegt. Schlitten, Wagen und Schiffe u. s. w. sind deshalb so zu beladen, daß der Schwerpunkt des Ganzen möglichst tief, übrigens auch über die Mitte der Basis zu liegen kommt.

Theorie der schiefen Ebene. §. 134. Ein Körper AC, Fig. 178 auf einer **schiefen**, d. h. gegen den Horizont geneigten Ebene (franz. plan incliné, engl. inclined plane) kann zwei Bewegungen annehmen, er kann von der schiefen Ebene herabgleiten, er kann sich auch um eine seiner Basiskanten umdrehen und umstürzen. Ist der Körper sich selbst überlassen, so zerlegt sich das Gewicht G des Körpers in eine Kraft N normal und eine Kraft P parallel zur Basis; die erstere nimmt die schiefe Ebene vollkommen auf, die letztere aber treibt den Körper auf der Ebene abwärts. Setzen wir den Neigungswinkel FHR der schiefen Ebene gegen den Horizont $= \alpha$, so haben wir auch den Winkel $GSN = \alpha$, und daher den Normaldruck:

Fig. 178.



$$N = G \cos. \alpha,$$

sowie die Kraft zum Herabgleiten:

$$P = G \sin. \alpha.$$

Geht die vertikale Schwerlinie SG durch die Basis CD, wie Fig. 178, so kann nur eine gleitende Bewegung entstehen, geht aber, wie in Fig. 179, diese Schwerlinie außerhalb der Basis vorbei, so tritt auch noch ein …en ein, es ist also der Körper ohne Stabilität. Uebrigens hat ein

Körper AC auf der schiefen Ebene FH, Fig. 180, eine andere Stabilität Theorie der schiefen Ebene.

Fig. 179.

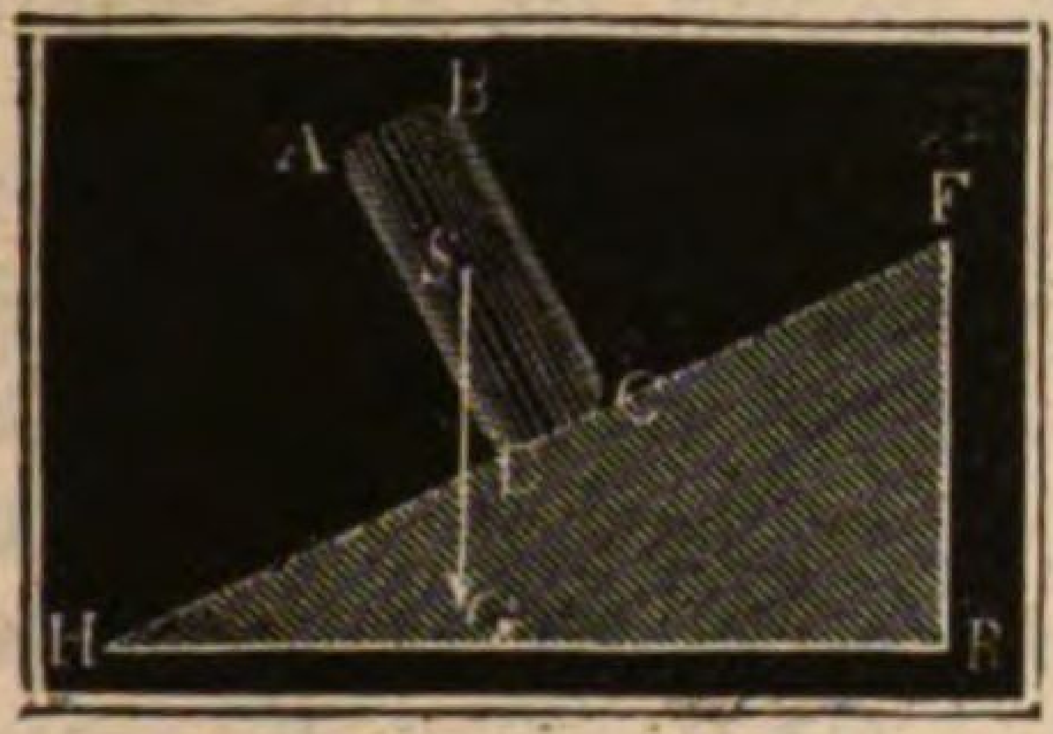
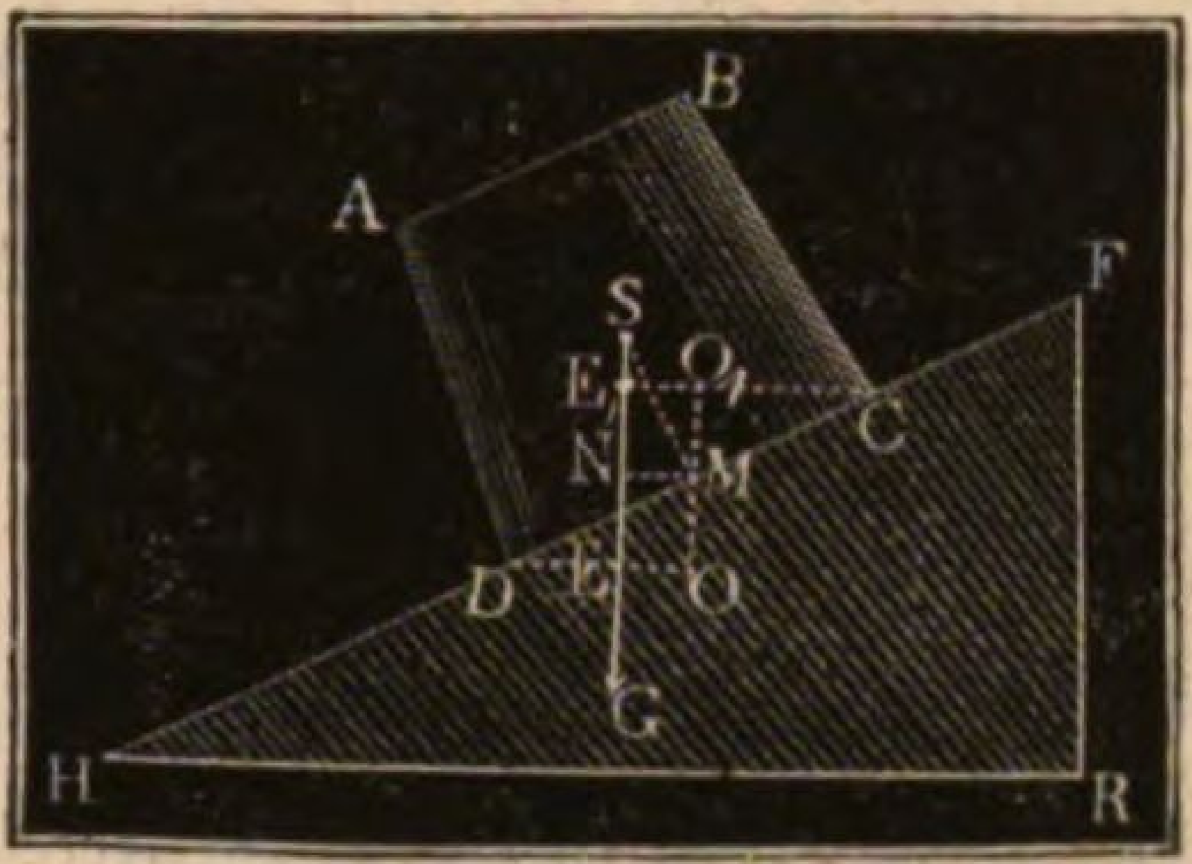


Fig. 180.



als auf der Horizontalebene. Sind $DM = x$ und $MS = y$ die rechtwinkeligen Coordinaten des Schwerpunktes S, so hat man den Hebelarm der Stabilität: $DE = DO - MN = x \cos. \alpha - y \sin. \alpha$, während er $= x$ ist, wenn der Körper auf der Horizontalebene steht. Da $x > x \cos. \alpha - y \sin. \alpha$ ist, so fällt die Stabilität in Beziehung auf die untere Kante D auf der schiefen Ebene kleiner aus, als auf der horizontalen Ebene; sie ist sogar Null für $x \cos. \alpha = y \sin. \alpha$, d. i. für $tang. a = \frac{x}{y}$. Wenn also der auf einer Horizontalebene mit der Stabilität Gx stehende Körper auf eine schiefe Ebene zu stehen kommt, deren Neigungswinkel α dem Ausdrucke $tang. \alpha = \frac{x}{y}$ entspricht, so verliert derselbe seine Stabilität. Auf der andern Seite kann aber auch ein Körper auf der schiefen Ebene zur Stabilität gelangen, die ihm mangelt, wenn er auf der Horizontalebene steht. Für eine Drehung um die obere Kante C ist der Hebelarm $CE_1 = CO_1 + MN = x_1 \cos. \alpha + y \sin. \alpha$, während er beim Stande auf der Horizontalebene $= CM = x_1$ ist. Ist nun x_1 negativ, so hat der Körper keine Stabilität, so lange er auf der Horizontalebene steht, ruht er aber auf einer geneigten Ebene, für deren Neigungswinkel $tang. \alpha > \frac{x_1}{y}$ ist, so wird der Körper stabil.

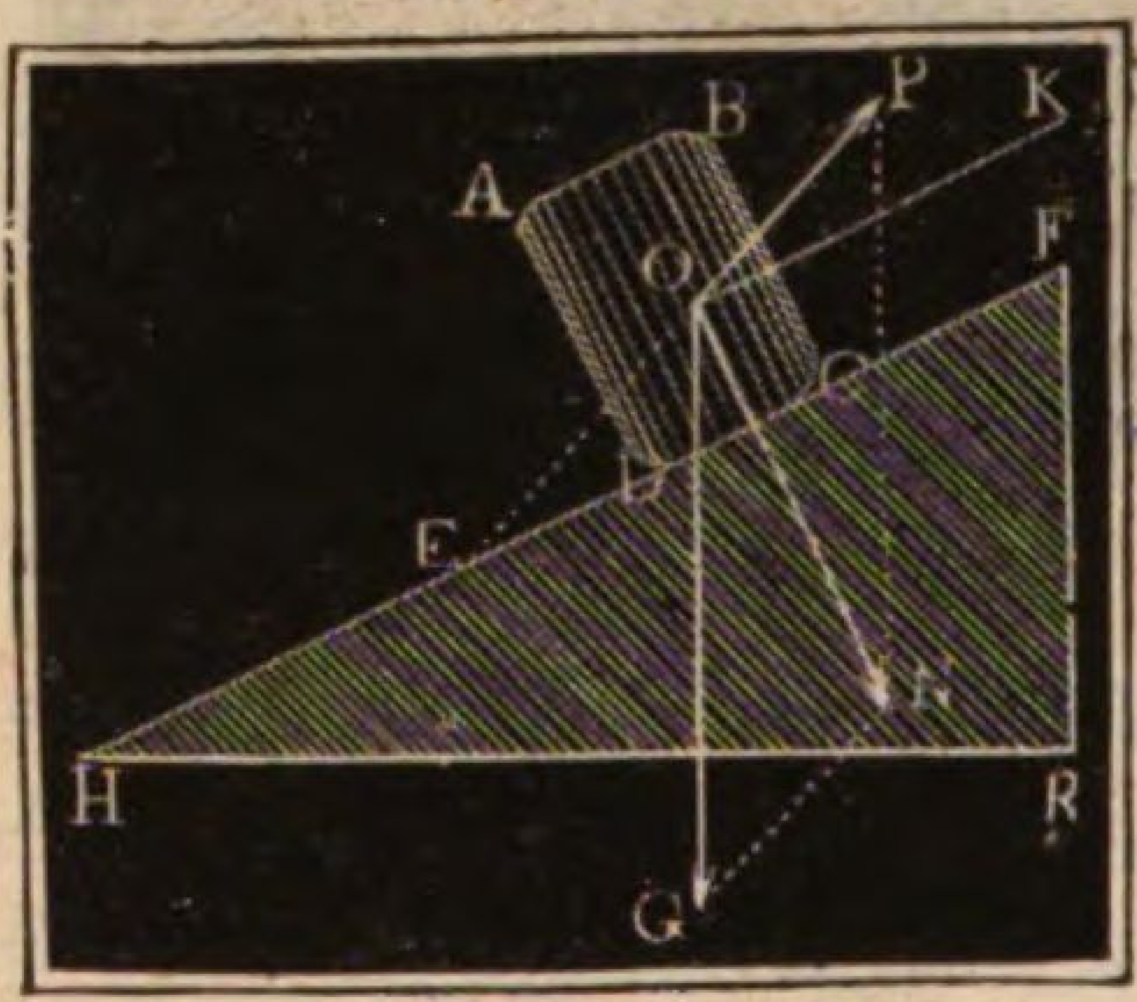
Wirkt außer der Schwerkraft noch eine andere Kraft P auf den Körper $ABCD$, Fig. 181 f. f. S., so behält derselbe seine Stabilität, wenn die Mittelkraft N aus dem Gewichte G des Körpers und aus der Kraft P eine Richtung hat, welche die Basis CD des Körpers durchschneidet.

Beispiel. Bei den Obelisken im Beispiele des vorigen Paragraphen ist $x = \frac{7}{4}$ Fuß und $y = 10,342$ Fuß, es verliert folglich derselbe seine Stabilität, wenn er auf eine schiefe Ebene zu stehen kommt, für deren Neigungswinkel ist: $tang. \alpha = \frac{7}{4 . 10,342} = \frac{7000}{41368} = 0,16922$, deren Neigung folglich $\alpha = 9^0,36'$ beträgt.

Theorie der schiefen Ebene.

§. 135. Da die schiefe Ebene nur denjenigen Druck in sich aufnimmt, welcher winkelrecht gegen sie gerichtet ist, so bestimmt sich die Kraft P, welche nöthig ist, um einen übrigens vor dem Umstürzen geschützten Körper auf der schiefen Ebene zu erhalten, indem man die Bedingung festsetzt, daß die aus P und G hervorgehende Mittelkraft N, Fig. 181, winkelrecht zur schiefen Ebene stehe. Der Theorie des Parallelogrammes der Kräfte zufolge hat man $\frac{P}{G} = \frac{sin.\,ONP}{sin.\,PON}$, nun ist aber der Winkel PNO = Winkel $GON = FHR = \alpha$ und der Winkel $PON = POK + KON = \beta + 90^0$, insofern man den Winkel $PEF = POK$, unter welchem die Kraftrichtung von der schiefen Ebene abweicht, mit β bezeichnet; man erhält daher

Fig. 181.



$$\frac{P}{G} = \frac{sin.\,\alpha}{sin.\,(90 + \beta)}, \text{ d. i. } \frac{P}{G} = \frac{sin.\,\alpha}{cos.\,\beta},$$

also die Kraft, welche den Körper auf der schiefen Ebene erhält:

$$P = \frac{G\,sin.\,\alpha}{cos.\,\beta}.$$

Für den Normaldruck N ist

$$\frac{N}{G} = \frac{sin.\,OGN}{sin.\,ONG}, \text{ aber Winkel } OGN = 90^0 - (\alpha + \beta) \text{ und}$$

$ONG = PON = 90 + \beta$, daher folgt

$$\frac{N}{G} = \frac{sin.\,[90^0 - (\alpha + \beta)]}{sin.\,(90^0 + \beta)} = \frac{cos.\,(\alpha + \beta)}{cos.\,\beta},$$

und der Normaldruck gegen die schiefe Ebene

$$N = \frac{G\,cos.\,(\alpha + \beta)}{cos.\,\beta}.$$

Geht die Kraft P mit der schiefen Ebene parallel, so ist $\beta = 0$ und $cos.\,\beta = 1$, daher

$$P = G\,sin.\,\alpha \text{ und } N = G\,cos.\,\alpha.$$

Wirkt die Kraft P vertikal, so ist $\alpha + \beta = 90^0$, daher

$$cos.\,\beta = sin.\,\alpha,\ cos.\,(\alpha + \beta) = 0 \text{ und}$$

$P = G$ und $N = 0$, dann hat also die schiefe Ebene keinen Einfluß auf den Körper.

Wirkt endlich die Kraft horizontal, so ist $\beta = -\alpha$ und $cos.\,\beta = cos.\,\alpha$, daher

$$P = \frac{G\,sin.\,\alpha}{cos.\,\alpha} = G\ tang.\,\alpha;\ N = \frac{G\,cos.\,0}{cos.\,\alpha} = \frac{G}{cos.\,\alpha}.$$

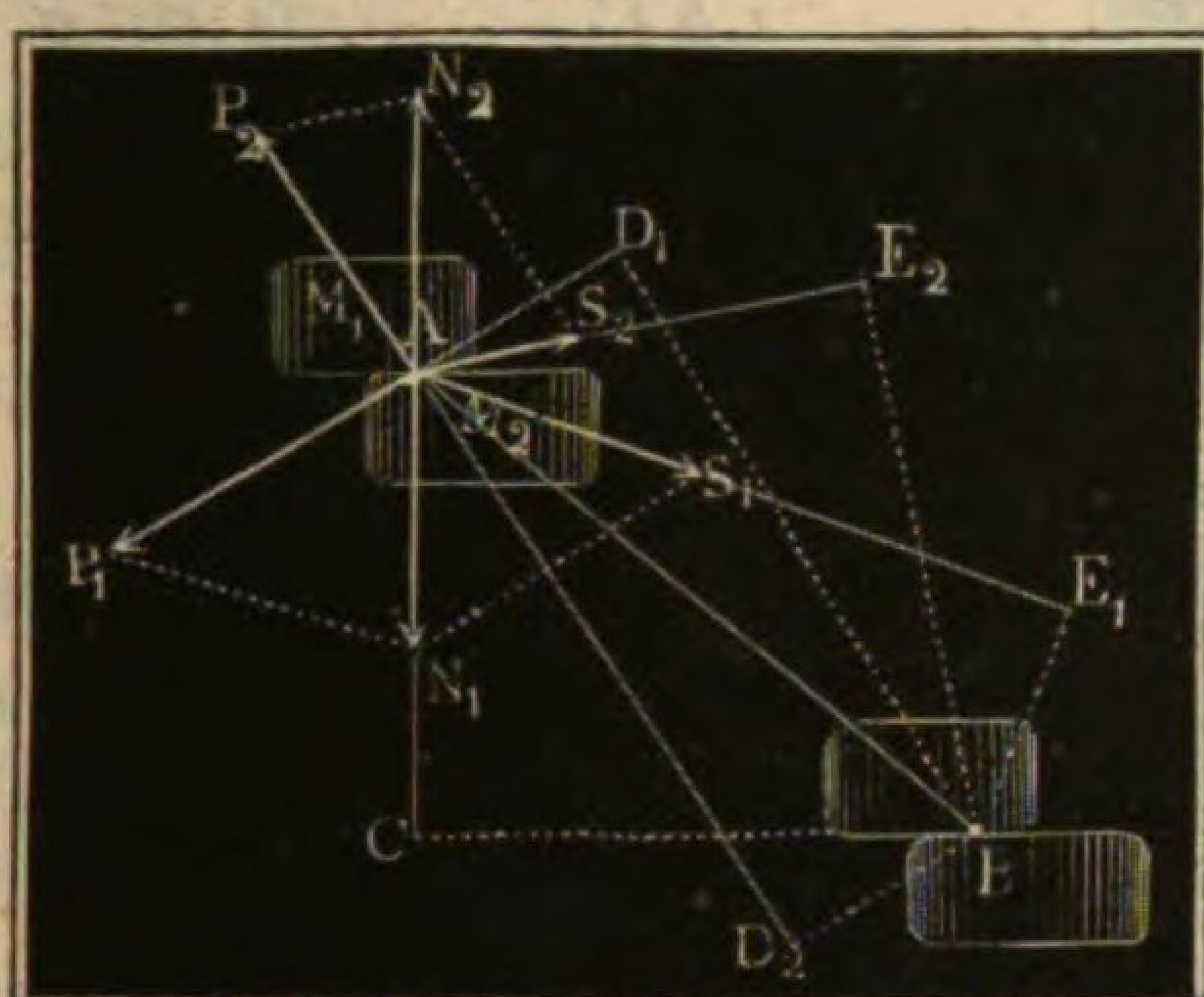
Beispiel. Um einen Körper von 500 Pf. auf einer schiefen Ebene von 50° Neigung gegen den Horizont zu erhalten, wird eine Kraft aufgewendet, deren Richtung 75° mit dem Horizonte einschließt, wie groß ist diese Kraft und wie stark drückt der Körper gegen die schiefe Ebene? Die Kraft ist

$P = \frac{500\, sin.\, 50^0}{cos. (75-50)} = \frac{500\, sin.\, 50}{cos.\, 25} = 422{,}6$ Pf., der Druck gegen die Ebene:

$N = \frac{500\, .\, cos.\, .\, 75^0}{cos.\, 25} = 142{,}8$ Pf.

§. 136. Bringt man das in §. 128 näher auseinandergesetzte Princip von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung mit dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten (§. 80 und §. 93) in Verbindung, so stellt sich folgende Regel heraus: Halten zwei Körper, M_1 und M_2, Fig. 182, einander Gleichgewicht, so ist für eine endliche geradlinige und auch für eine unendlich kleine krummlinige Bewegung des Druck- oder Berührungspunktes A die Summe der mechanischen Arbeiten von den Kräften des einen Körpers gleich der Summe der mechanischen Arbeiten von den Kräften des andern Körpers. Sind P_1 und S_1 die Kräfte des einen Körpers, P_2 und S_2 die des andern, so entsprechen denselben bei einer Verrückung des Berührungspunktes von A nach B die Wege AD_1, AE_1, AD_2 und AE_2, und es ist nach dem oben ausgesprochenen Gesetze: Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

Fig. 182.



$$P_1\, .\, AD_1 + S_1\, .\, AE_1 = P_2\, .\, AD_2 + S_2\, .\, AE_2.$$

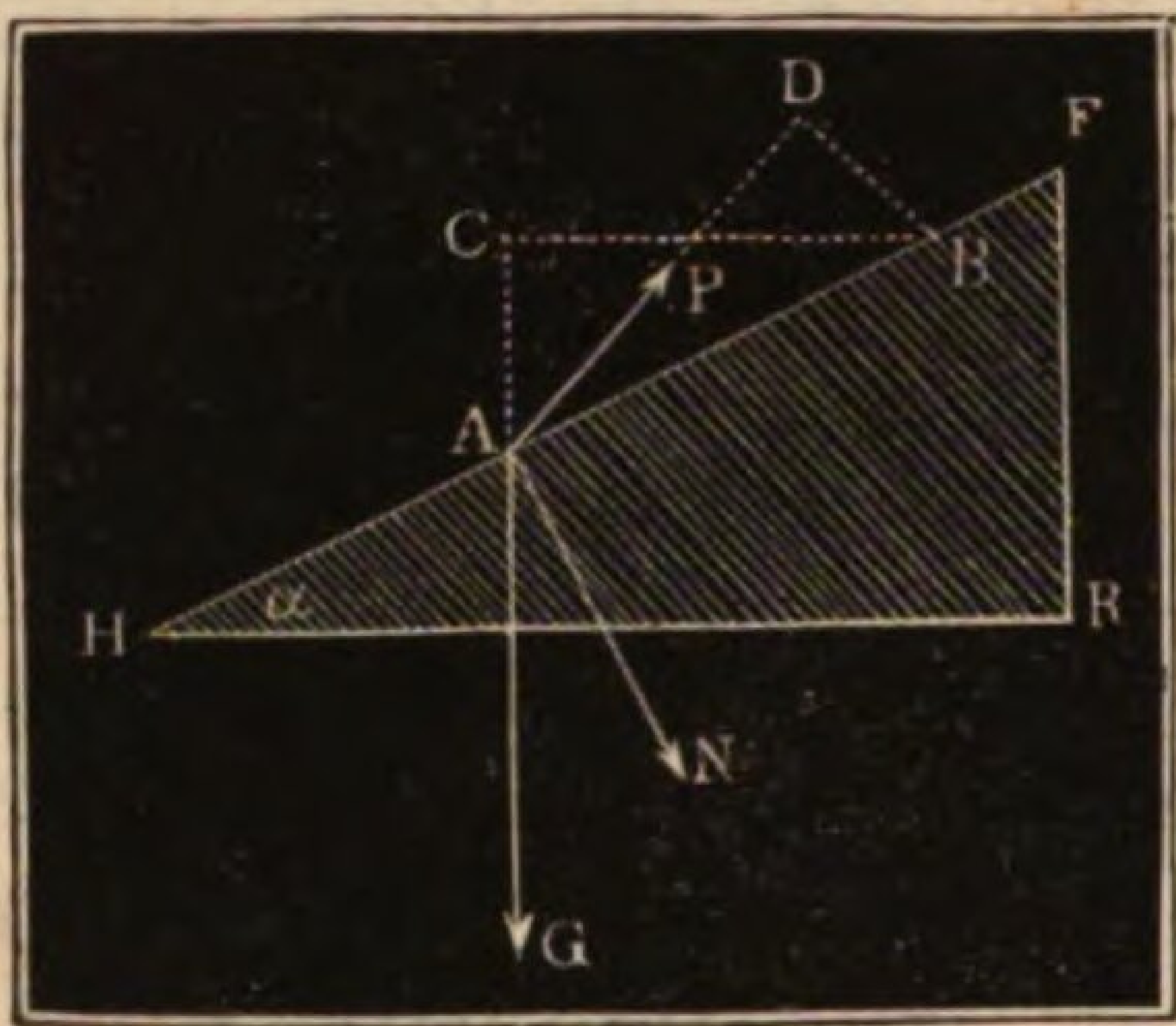
Die Richtigkeit dieses Satzes läßt sich auf folgende Weise darthun. Da die Normaldrücke N_1 und N_2 einander gleich sind, so findet auch Gleichheit zwischen ihren Arbeiten $N_1\, .\, AC$ und $N_2\, .\, AC$ Statt, nur mit dem Unterschiede, daß die Arbeit der einen Kraft positiv und die der andern negativ ist. Nun hat man aber nach dem Früheren die Arbeit $N_1\, .\, AC$ der Mittelkraft N_1 gleich der Summe $P_1\, .\, AD_1 + S_1\, .\, AE_1$ der Arbeiten ihrer Componenten P_1 und S_1, und ebenso $N_2\, .\, AC = P_2 . AD_2 + S_2 . AE_2$; es ist daher auch $P_1 . AD_1 + S_1 . AE_1 = P_2 . AD_2 + S_2 . AE_2$.

Die Anwendung des so allgemeiner gemachten Principes der virtuellen Geschwindigkeiten gewährt bei statischen Untersuchungen oft große Vortheile, indem durch sie die Entwickelung algebraischer Ausdrücke sehr vereinfacht wird. Verrückt man z. B. einen Körper A auf der schiefen

Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

Ebene FH, Fig. 183, um den Weg AB, so ist der entsprechende Weg seines Gewichtes G, $= AC = AB \sin. ABC = AB . \sin. FHR = AB . \sin. \alpha$, dagegen der Weg der Kraft P, $= AD = AB . \cos. BAD = AB . \cos. \beta$ und endlich der Weg der Normalkraft $N = o$; nun ist aber die Arbeit von N gleich der Arbeit von G plus Arbeit von P, man hat daher zu setzen:

Fig. 183.



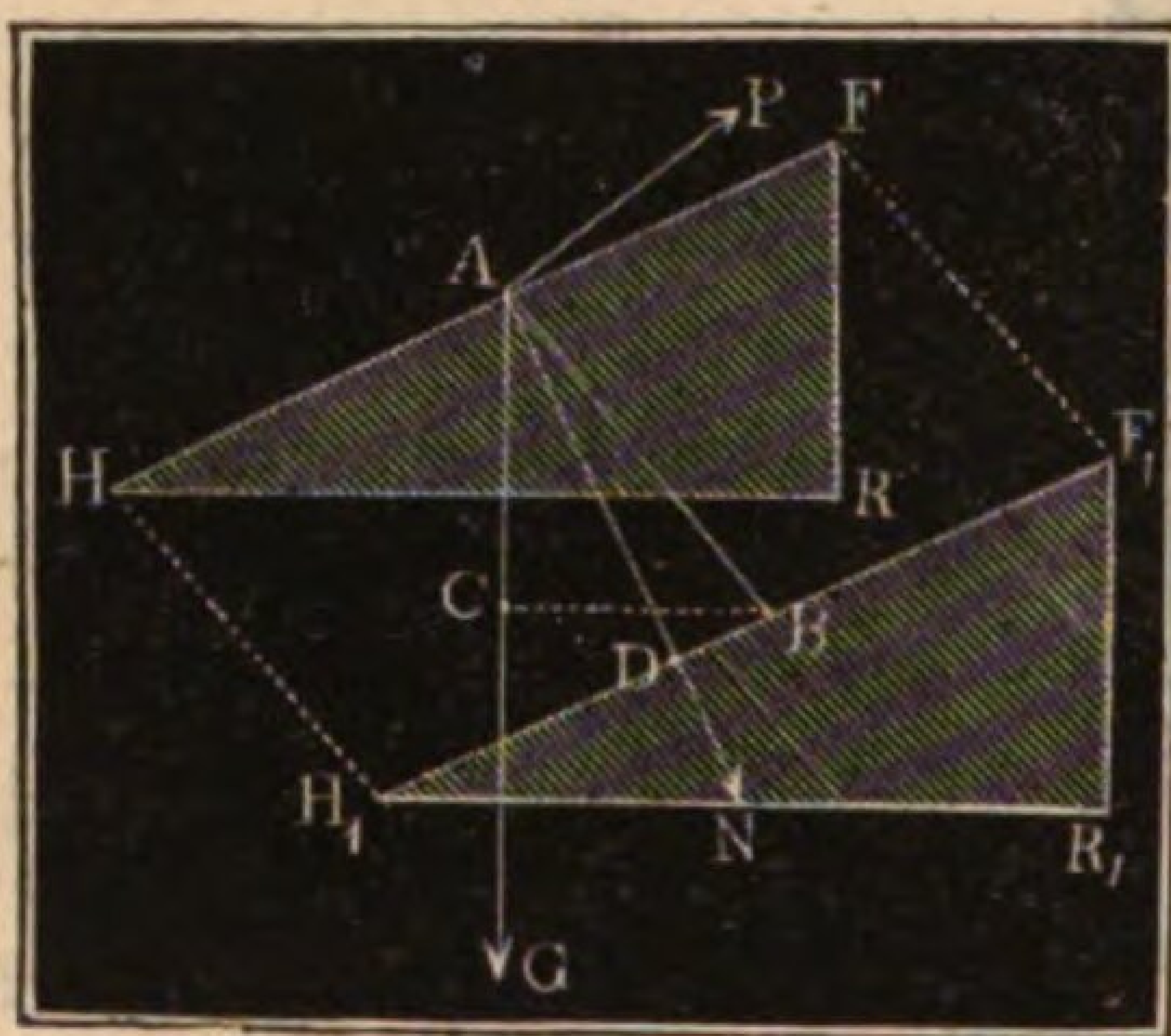
$$N . o = - G . AC + P . AD,$$

und findet so

$$P = \frac{AC}{AD} . G = \frac{G \sin. \alpha}{\cos. \beta},$$

ganz in Uebereinstimmung mit dem vorigen Paragraphen.

Fig. 184.



Um dagegen den Normaldruck N zu finden, rücken wir die schiefe Ebene HF, Fig. 184, um einen beliebigen Weg AB rechtwinklig gegen die Kraftrichtung AP fort, bestimmen die entsprechenden Wege der Kräfte und setzen wieder: Arbeit von N gleich Arbeit von G plus Arbeit von P. Der Weg von N ist

$AD = AB \cos. BAD = AB \cos. \beta$,

der Weg von G ist $AC = AB \cos. BAC = AB \cos. (\alpha + \beta)$ und der Weg von P ist $= o$, daher Arbeit

$N . AD = G . AC + P . o$, und daher $N = \frac{G . AC}{AD} = G . \frac{\cos. (\alpha + \beta)}{\cos. \beta}$,

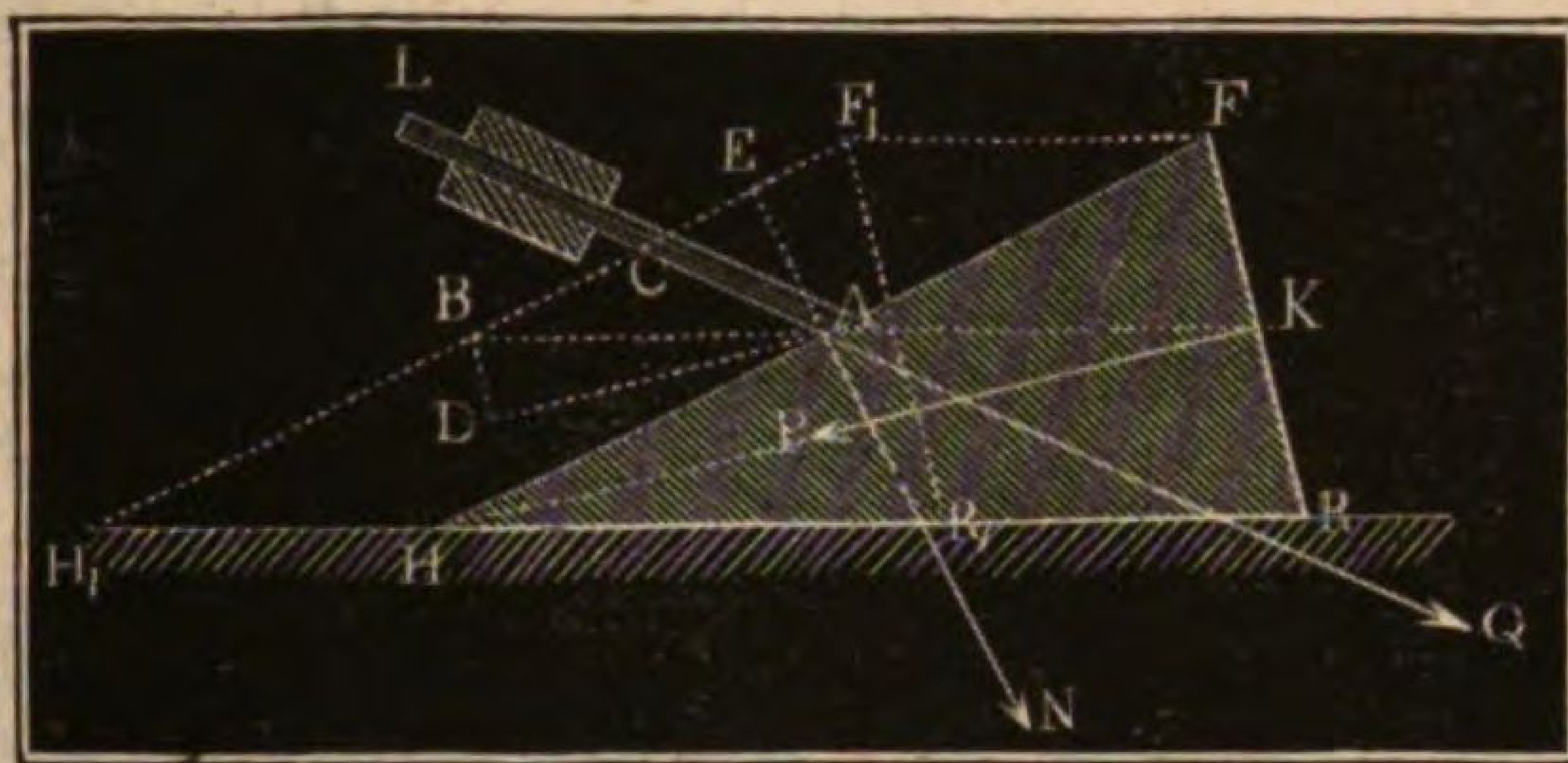
wie im vorigen Paragraphen ebenfalls gefunden wurde.

Theorie des Keiles.

§. 137. Sehr einfach entwickelt sich hiernach die Theorie des Keiles. Der **Keil** (franz. coin, engl. wedge) ist eine durch ein dreiseitiges Prisma FHR, Fig. 185, gebildete, bewegliche schiefe Ebene. In der Regel wirkt die Kraft $KP = P$ rechtwinklig auf den **Rücken** FR des Keiles und hält einer andern Kraft oder Last $AQ = Q$, welche gegen die eine Seitenfläche FH desselben drückt, das Gleichgewicht. Ist der die **Schärfe** des Keiles messende Winkel $FHR = \alpha$, ferner der Winkel, um welchen die Kraftrichtung KP oder AD von der Seitenfläche FH abweicht, also $FHK = HAD$, $= \delta$, und endlich der Winkel LAH, um den die Richtung der Last Q von eben dieser Seitenfläche abweicht, $= \beta$,

so ergeben sich die Wege, die beim Verrücken des Keiles aus der Lage FHR in die Lage $F_1H_1R_1$ zurückgelegt werden, auf folgende Weise. Der Theorie des Keiles.

Fig. 185.



Weg des Keiles ist $AB = FF_1 = HH_1$ und der Weg der Kraft ist $= AD = AB \cos. BAD = AB \cos. (BAH - DAH) = AB \cos. (\alpha - \delta)$, ferner der Weg der Stange AL oder Last ist $AC = \frac{AB \sin ABC}{\sin. ACB} = \frac{AB \sin. \alpha}{\sin. HAC}$ $= \frac{AB \sin. \alpha}{\sin. \beta}$ und der gleichzeitige Weg des Normaldruckes N zwischen dem Keile und dem Stangenfuße $= AE = AB \sin. \alpha$.

Bei dem Fortrücken des Keiles um den Weg AB verrichtet der Normaldruck N die Arbeit $N . AE = N . AB \sin. \alpha$, die Kraft aber die Arbeit $P . AD = P . AB \cos. (\alpha - \delta)$ und die Last die Arbeit $Q . AC$ $= Q . AB \frac{\sin. \alpha}{\sin. \beta}$; es ist daher

$N . AB \sin. \alpha = P . AB \cos. (\alpha - \delta)$, d. i. $N \sin. \alpha = P \cos. (\alpha - \delta)$,

so wie auch $N . AB \sin. \alpha = Q . AB \frac{\sin. \alpha}{\sin. \beta}$, d. i. $N \sin. \alpha = Q \frac{\sin. \alpha}{\sin. \beta}$,

und es ergiebt sich aus diesen Gleichungen die gesuchte Gleichung zwischen Kraft und Last:

$$P \cos. (\alpha - \delta) = \frac{Q \sin. \alpha}{\sin. \beta}, \text{ oder}$$

$$P = \frac{Q \sin. \alpha}{\sin. \beta \cos. (\alpha - \delta)},$$

wie sich allerdings auf dem Wege der Kraftzerlegung ebenfalls finden läßt.

Geht die Kraftrichtung parallel zur Basis oder Seitenfläche HR, so ist $\delta = \alpha$, daher $P = \frac{Q \sin. \alpha}{\sin. \beta}$, und ist noch die Lastrichtung winkelrecht zur Seitenfläche FH, also $\beta = 90^0$, so folgt $P = Q \sin. \alpha$.

Theorie des Keiles. Beispiel. Die Schärfe $FHR = \alpha$ eines Keiles betrage 25°, die Kraft sei parallel zur Basis HR gerichtet, es sei also $\delta = \alpha$, und die Last Q wirke winkelrecht zur Seitenfläche FH, also β sei $= 90°$, in welchem Verhältnisse stehen Kraft und Last zu einander? Es ist $P = Q \sin. \alpha$, also $\frac{P}{Q} = \sin. 25° = 0{,}4226$. Für eine Last Q von 130 Pf. stellt sich hiernach die Kraft $P = 130 . 0{,}4226. = 54{,}938$ Pf. heraus. Um die Last oder Stange einen Fuß fortzuschieben, muß der Keil den Weg $AB = \frac{AC}{\sin. \alpha} = \frac{1}{0{,}4226} = 2{,}3662$ Fuß zurücklegen.

Anmerkung. Die Theorien des Hebels, der schiefen Ebene und des Keiles finden eine weitere Entwicklung im fünften Kapitel, wo der Einfluß der Reibung in Betracht gezogen wird.

Viertes Kapitel.

Gleichgewicht an den Seilmaschinen.

Seilmaschine. §. 138. Wir haben seither angenommen, daß die Körper, auf welche Kräfte wirken, in Folge dieser Einwirkung ihre Form nicht verändern, beschäftigen wir uns dagegen jetzt mit dem Gleichgewichte solcher Körper, welche durch die kleinsten Kräfte Formveränderungen erleiden. Jene Körper heißen starre, steife Körper (franz. corps rigides, engl. rigid bodies), diese hingegen biegsame (franz. corps flexibles, engl. flexible bodies). Es giebt zwar keine vollkommen biegsamen Körper, allein viele von ihnen, wie z. B. Schnüre, Seile, Riemen u. s. w., und in gewisser Beziehung auch Ketten, erfordern zum Umbiegen so wenig Kraft, daß man sie in manchen Fällen als vollkommen biegsam ansehen kann. Solche, übrigens auch noch ausdehnbare Körper sind der Gegenstand der folgenden Untersuchung.

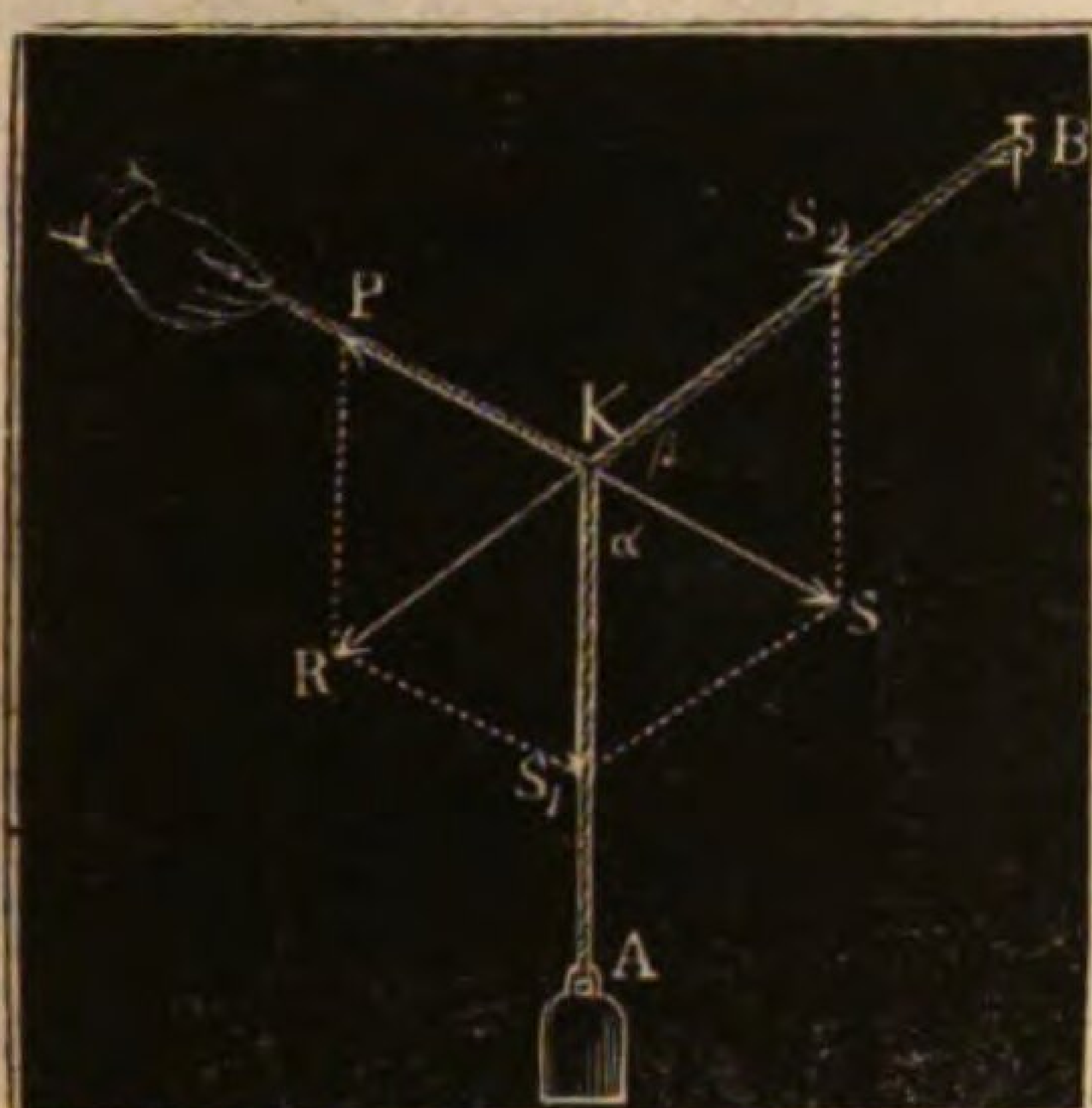
Wir verstehen in der Folge unter einer Seilmaschine (franz. machine funiculaire, engl. machine of strings) ein Seil oder eine Verbindung von Seilen (das Wort Seil im allgemeinen Sinne genommen), welche von Kräften angespannt wird, und beschäftigen uns in diesem Kapitel mit der Theorie des Gleichgewichtes dieser Maschinen. Derjenige Punkt einer Seilmaschine, wo eine Kraft angreift und deshalb das Seil einen Winkel bildet oder eine Richtungsveränderung erleidet, heißt ein Knoten (franz. noeud, engl. knot). Derselbe ist entweder fest (franz. fixe, engl. fixed), oder beweglich (franz. coulant, engl. moveable). Spannung (franz. und engl. tension) ist die Kraft, welche ein gespanntes Seil in der Richtung seiner Axe fortpflanzt. Die Spannungen an

den Enden eines geraden Seiles oder Seilstückes sind gleich und entgegengesetzt (§. 83); auch kann das gerade Seil andere Kräfte als die in der Axenrichtung wirkende Spannung nicht fortpflanzen, weil es sich sonst biegen müßte, also nicht gerade bleiben könnte.

§. 139. Gleichgewicht einer Seilmaschine findet Statt, wenn in jedem Knoten derselben Gleichgewicht vorhanden ist. Lernen wir daher zunächst die Verhältnisse des Gleichgewichts an einem Knoten kennen. Knoten.

In einem Knoten K, welchen ein Seilstück AKB, Fig. 186, bildet, findet Gleichgewicht Statt, wenn die sich aus den Seilspannungen $KS_1 = S_1$ und $KS_2 = S_2$ ergebende Mittelkraft $KS = S$ gleich und entgegengesetzt gerichtet ist der im Knoten angreifenden Kraft P, denn die Seilspannungen S_1 und S_2 bringen im Knoten K dieselben Wirkungen hervor wie ihnen gleiche und gleichgerichtete Kräfte, und drei Kräfte halten sich das Gleichgewicht, wenn die eine von ihnen gleich ist und entgegengesetzt wirkt der Mittelkraft aus den beiden anderen (§. 75).

Fig. 186.



Ebenso ist aber auch die Mittelkraft R aus der Kraft P und der einen Spannung S_1 gleich und entgegengesetzt gerichtet der zweiten Seilspannung S_2 u. s. w. Jedenfalls läßt sich diese Gleichung dazu benutzen, zwei Bestimmungsstücke, z. B. eine Seilspannung oder Seilrichtung, zu ermitteln. Ist z. B. die Kraft P, die Spannung S_1 und der Winkel $AKP = 180 - AKS = 180^0 - \alpha$ zwischen beiden gegeben, so hat man für die zweite Spannung:

$$S_2 = \sqrt{P^2 + S_1^2 - 2\,PS_1\,cos.\,\alpha}$$

und für ihre Richtung oder Abweichung $BKS = \beta$ von KS:

$$sin.\,\beta = \frac{S_1\,sin.\,\alpha}{S_2}.$$

Beispiel. Wenn das Seil AKB, Fig. 186, am Ende B aufgehangen, am Ende A aber durch ein Gewicht $G = 135$ Pf. und in der Mitte K durch eine Kraft $P = 109$ Pf., welche unter einem Neigungswinkel von 25 Grad aufwärts zieht, angespannt wird, so ist die Frage nach der Richtung und Spannung des Seilstückes KB. Die Größe der gesuchten Spannung ist:

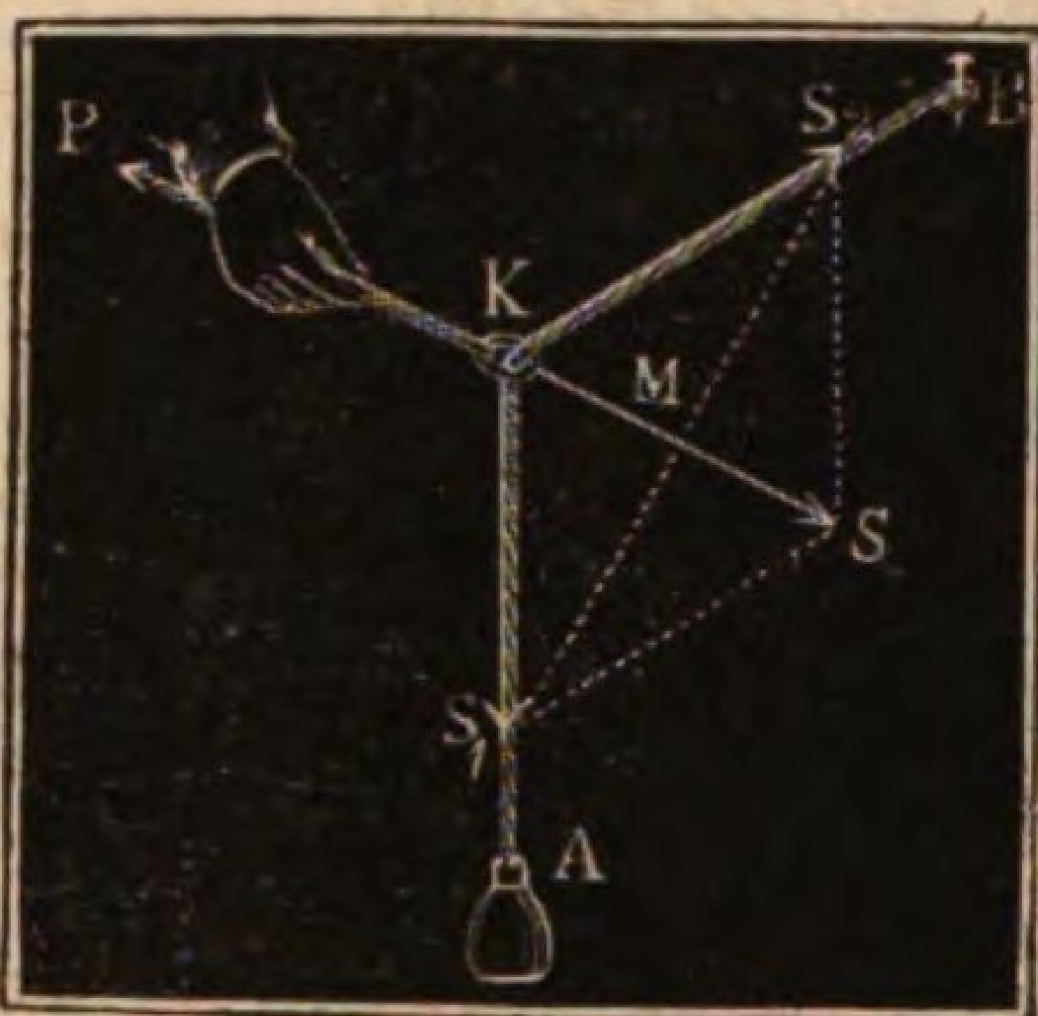
$$S_2 = \sqrt{109^2 + 135^2 - 2.109.135\,cos.\,(90^0 - 25^0)}$$
$$= \sqrt{11881 + 18225 - 29430\,.\,cos.\,65^0} = \sqrt{17618,3} = 132,92 \text{ Pf.}$$

Für den Winkel β ist $sin.\,\beta = \frac{S_1\,sin.\,\alpha}{S_2} = \frac{135\,.\,sin.\,65^0}{132,92}$, $Log.\,sin.\,\beta = 0,964017 - 1$,

Knoten. daher $\beta = 67°, 0'$, und die Neigung des Seilstückes KB gegen den Horizont $= \alpha + \beta - 90° = 65° + 67° - 90° = 42°$.

§. 140. Ist der Knoten K ein **loser** oder **beweglicher**, wirkt z. B. die Kraft P mittels eines Ringes auf das durchgezogene Seil AKB, Fig. 187, so ist zwar wieder die Mittelkraft S aus den Seilspannungen S_1 und S_2 gleich und entgegengesetzt gerichtet der Kraft P am Ringe; außerdem sind aber noch die Seilspannungen unter sich gleich, denn zieht man das Seil um einen gewissen Weg s in dem Ringe fort, so legt jede der Spannungen S_1 und S_2 den Weg s, die Kraft P aber den Weg Null zurück; es ist folglich, vollkommene Biegsamkeit vorausgesetzt, die Arbeit $P.0 = S_1.s - S_2.s$, d. i. $S_1 s = S_2 s$ und $S_1 = S_2$.

Fig. 187.



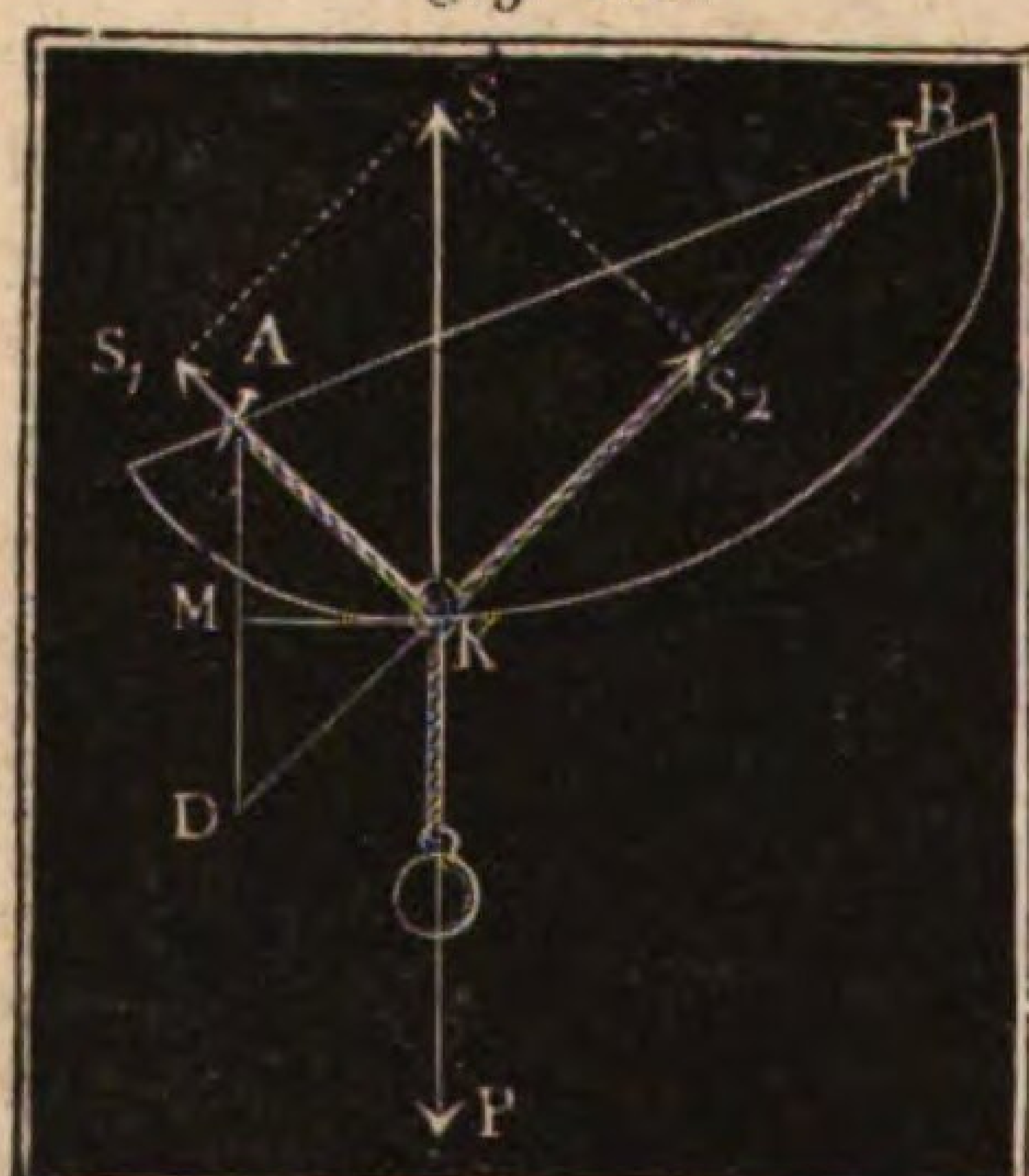
Aus dieser Gleichheit der Spannungen folgt wieder die Gleichheit der Winkel AKS und BKS, unter welchen die Richtung der Mittelkraft S von den Seilrichtungen abweicht; setzen wir diese Winkel $= \alpha$, so giebt die Auflösung des Rhombus KS_1SS_2:

$$S = P = 2 S_1 \cos.\alpha \text{, und umgekehrt}$$

$$S_1 = S_2 = \frac{P}{2 \cos.\alpha}.$$

Sind A und B, Fig. 188, feste Punkte eines Seiles AKB von gegebener Länge $(2a)$ mit einem beweglichen Knoten K, so findet man den Ort dieses Knotens, wenn man eine Ellipse construirt, deren Brennpunkt A und B sind und deren große Axe der Seillänge $2a$ gleich ist, und hierauf eine Tangente an diese Curve winkelrecht zur gegebenen Kraftrichtung legt: der sich ergebende Berührungspunkt ist der Ort des Knotens, weil bei der Ellipse die Normale KS mit den Fahrstrahlen KA und KB gleiche Winkel einschließt, gerade so wie die Mittelkraft S mit den Seilspannungen S_1 und S_2.

Fig. 188.

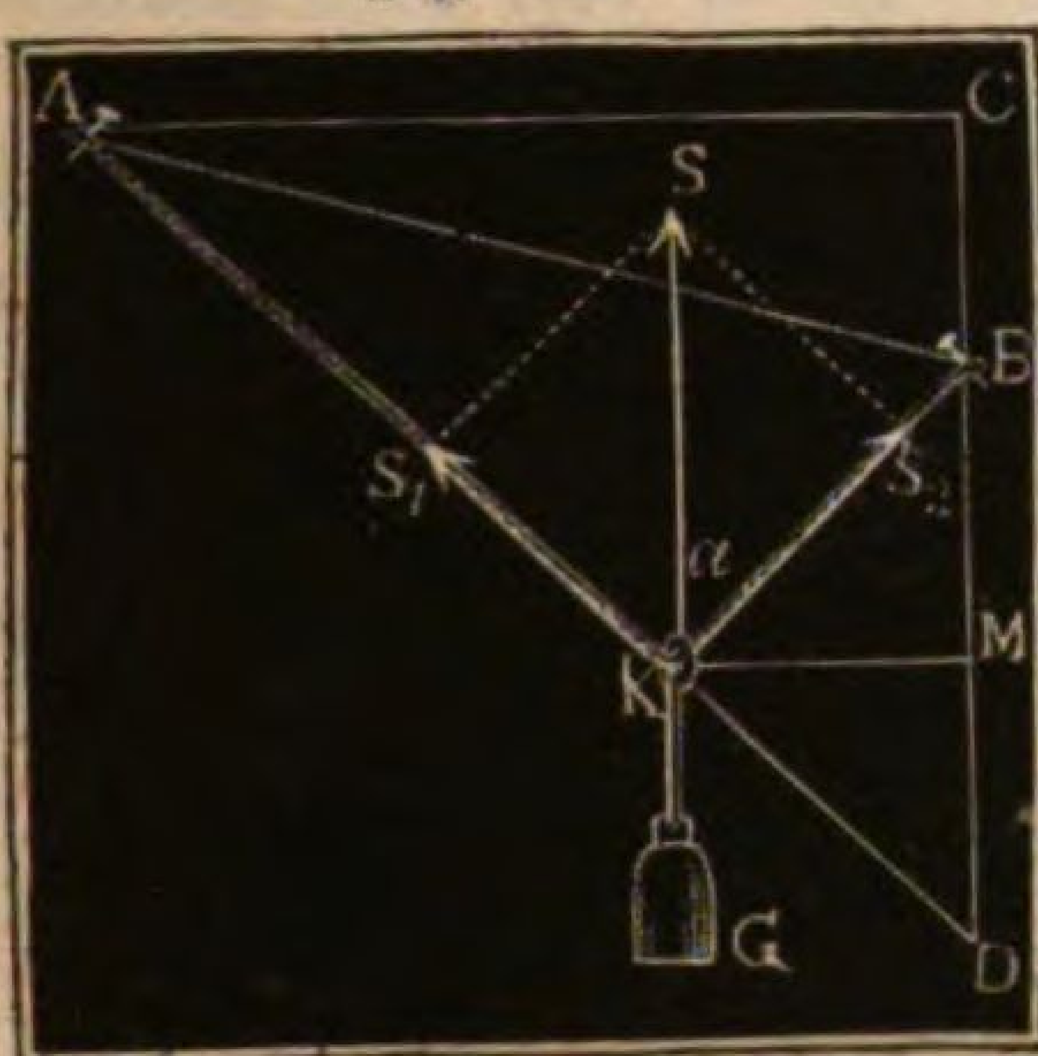


Zieht man AD parallel zur gegebenen Kraftrichtung, macht BD gleich der gegebenen Seillänge, halbirt AD in M und errichtet hierauf das Perpendikel MK, so erhält man ohne Ellipsenconstruction den Ort des Knotens K ebenfalls, denn da dann Winkel AKM = Winkel DKM

und $AK = DK$ ist, so folgt auch Winkel AKS = Winkel BKS und $AK + KB = DK + KB = DB$. Knoten.

Beispiel. Zwischen den Punkten A und B, Fig. 189, ist ein Seil von 9 Fuß Länge durch ein mittels eines Ringes angehängtes Gewicht G von 170 Pf. ausgespannt; die Horizontalentfernung AC beider Punkte ist $6\frac{1}{2}$ Fuß und der Vertikalabstand $CB = 2$ Fuß; man sucht den Ort des Knotens und die Seilspannungen und Seilrichtungen. Aus der Länge $AD = 9$ Fuß als Hypotenuse und der Horizontalen $AC = 6\frac{1}{2}$ Fuß folgt die Vertikale $CD = \sqrt{9^2 - 6{,}5^2}$, $= \sqrt{81 - 42{,}25} = \sqrt{38{,}75} = 6{,}225$ Fß.; und hieraus die Basis BD des gleichschenkligen Dreieckes BDK, $= CD - CB = 6{,}225 - 2 = 4{,}225$ Fß. Die Aehnlichkeit der Dreiecke DKM und DAC giebt nun $DK = BK$

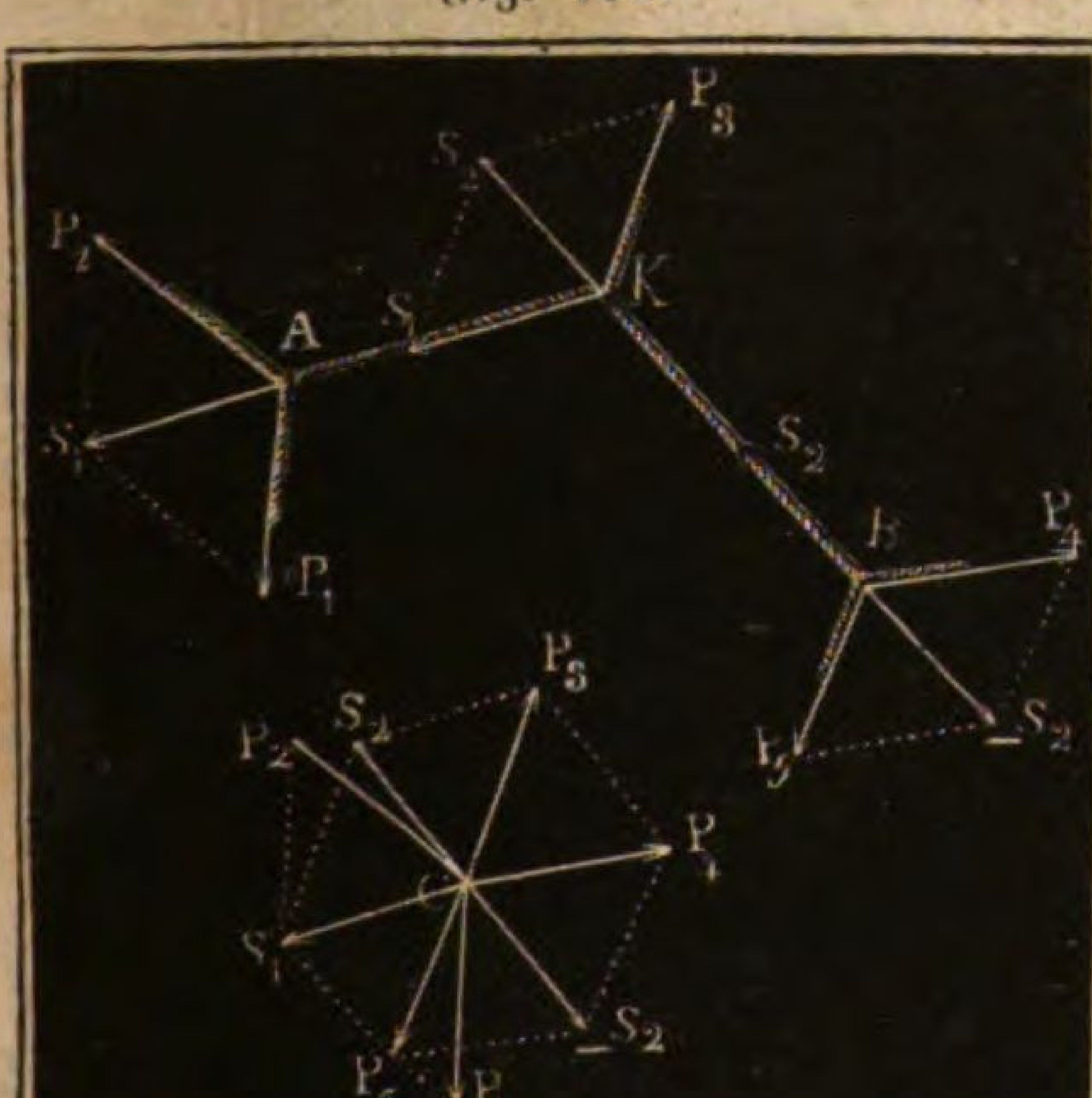
Fig. 189.



$= \frac{DM}{DC} \cdot DA = \frac{4{,}225 \,.\, 9}{2 \,.\, 6{,}225} = 3{,}054$ Fß.; hieraus folgt $AK = 9 - 3{,}054 = 5{,}946$ Fß und für den Winkel α, um welchen die Seilstücke von der Vertikalen abweichen: $cos.\,\alpha = \frac{BM}{BK} = \frac{2{,}1125}{3{,}054} = 0{,}6917$, daher $\alpha = 46^0, 14'$, und endlich die Spannung der Seile $S_1 = S_2 = \frac{G}{2\ cos.\,\alpha} = \frac{170}{2 . 0{,}6917} = 122{,}9$ Pf.

§. 141. Die Verhältnisse des Gleichgewichtes an einem **Seilpolygone**, d. i. an einem angespannten Seile, welches an verschiedenen Punkten von Kräften ergriffen wird, sind in Uebereinstimmung mit den Verhältnissen des Gleichgewichtes von Kräften, welche in einem Punkte angreifen. Es sei AKB, Fig. 190, ein von den Kräften P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 angespanntes Seil, P_1 und P_2 greifen in A, P_3 in K und P_4 und P_5 in B an. Setzen wir die Spannung des Seilstückes $AK = S_1$ und die des Stückes $BK = S_2$, so erhalten wir S_1 als Mittelkraft von den in A angreifenden Kräften P_1 und P_2, und tragen wir den Angriffspunkt A dieser Spannung von A auf K, so erhalten wir wieder S_2 als Mittelkraft von S_1 und P_3 oder von P_1, P_2 und P_3; Seilpolygon.

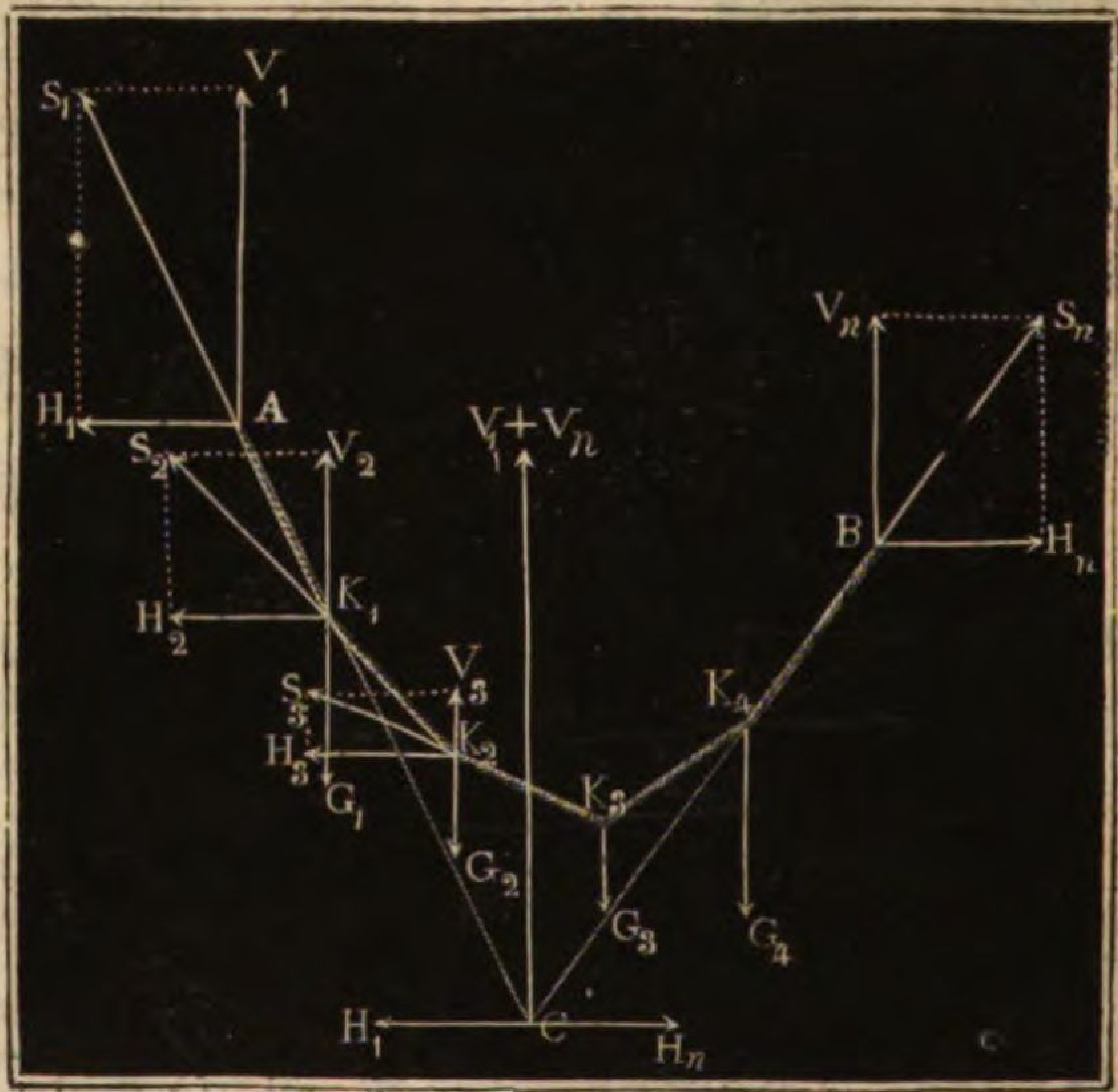
Fig. 190.



Seilpolygon. transportiren wir endlich den Angriffspunkt der Kraft S_2 von K nach B, so erhalten wir in S_2, P_4 und P_5, oder, da S_2 Mittelkraft von P_1, P_2 und P_3 ist, auch in P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 ein sich das Gleichgewicht haltendes Kräftesystem. Wir können hiernach behaupten: *wenn gewisse Kräfte P_1, P_2, P_3 u. s. w. ein Seilpolygon im Gleichgewichte erhalten, so werden sie sich auch selbst das Gleichgewicht halten, wenn man sie bei unveränderter Richtung und Größe in einem einzigen Punkte, z. B. in C, angreifen läßt.*

Wird das Seil $AK_1K_2\ldots B$, Fig. 191, in den Knoten K_1, K_2 durch Gewichte G_1, G_2 . . . angespannt, und werden die Endpunkte A und B

Fig. 191.



durch die Vertikalkräfte V_1 und V_n und die Horizontalkräfte H_1 und H_n gespannt, so ist die Summe der Vertikalkräfte: $V_1 + V_n - (G_1 + G_2 + G_3 + \ldots)$ und die Summe der Horizontalkräfte: $H_1 - H_n$. Der Gleichgewichtszustand fordert aber beide Summen = Null; es ist daher

1) $V_1 + V_n = G_1 + G_2 + G_3 + \ldots$ und

2) $H_1 = H_n$; d. h.

bei einem durch Gewichte angespannten Seilpolygone ist die Summe der Vertikalkräfte oder Vertikalspannungen in den End- oder Aufhängepunkten gleich der Summe der angehängten Gewichte, und es ist die Horizontalspan-

nung des einen Endes gleich und entgegengesetzt gerichtet der Horizontalspannung im andern Endpunkte. Seilpolygon.

Verlängert man die Richtungen der Spannungen S_1 und S_n in den Endpunkten A und B bis zu ihrem Durchschnitte C und versetzt man die Angriffspunkte dieser Spannungen nach diesem Punkte, so erhält man eine einzige Kraft $P = V_1 + V_n$, weil sich die Horizontalkräfte H_1 und H_n aufheben. Da diese Kraft der Summe $G_1 + G_2 + G_3 + \ldots$ von den angehängten Gewichten das Gleichgewicht hält, so muß der Angriffs- oder Schwerpunkt dieser Gewichte in der Richtung derselben, d. i. in der durch C gehenden Vertikallinie, enthalten sein.

§. 142. Aus der Spannung S_1 des ersten Seilstückes AK_1 und dessen Neigungs- oder Fallwinkel $S_1AH_1 = \alpha_1$ folgt die Vertikalspannung $V_1 = S_1 \sin. \alpha_1$ und die Horizontalspannung $H_1 = S_1 \cos. \alpha_1$. Transportirt man nun den Angriffspunkt dieser Kräfte von A nach dem ersten Knoten K_1, so kommt zu diesen Spannungen das vertikal abwärts ziehende Gewicht G_1, und es wird nun für das folgende Seilstück K_1K_2 die Vertikalspannung $V_2 = V_1 - G_1 = S_1 \sin. \alpha_1 - G_1$, wogegen die Horizontalspannung unverändert $H_2 = H_1 = H$ bleibt. Beide Kräfte geben vereinigt die Axenspannung des zweiten Seilstückes: $S_2 = \sqrt{V_2^2 + H^2}$ und die Neigung α_2 desselben durch die Formel

$$tang. \alpha_2 = \frac{V_2}{H} = \frac{S_1 \sin. \alpha_1 - G_1}{S_1 \cos. \alpha_1}, \text{ d. i.}$$

$$tang. \alpha_2 = tang. \alpha_1 - \frac{G_1}{H}.$$

Trägt man den Angriffspunkt der Kräfte V_2 und H_2 von K_1 nach K_2, so erhält man in dem hinzukommenden Gewichte G_2 noch eine neue Vertikalkraft, und es entsteht so die Vertikalkraft des dritten Seilstückes:

$$V_3 = V_2 - G_2 = V_1 - (G_1 + G_2) = S_1 \sin. \alpha_1 - (G_1 + G_2),$$

während die Horizontalkraft $H_3 = H$ bleibt. Die Gesammtspannung dieses dritten Seilstückes ist mithin

$S_3 = \sqrt{V_3^2 + H^2}$, und für den Neigungswinkel α_3 desselben hat man

$$tang. \alpha_3 = \frac{V_3}{H} = \frac{S_1 \sin. \alpha_1 - (G_1 + G_2)}{S_1 \cos. \alpha_1}, \text{ d. i.}$$

$$tang. \alpha_3 = tang. \alpha_1 - \frac{G_1 + G_2}{H}.$$

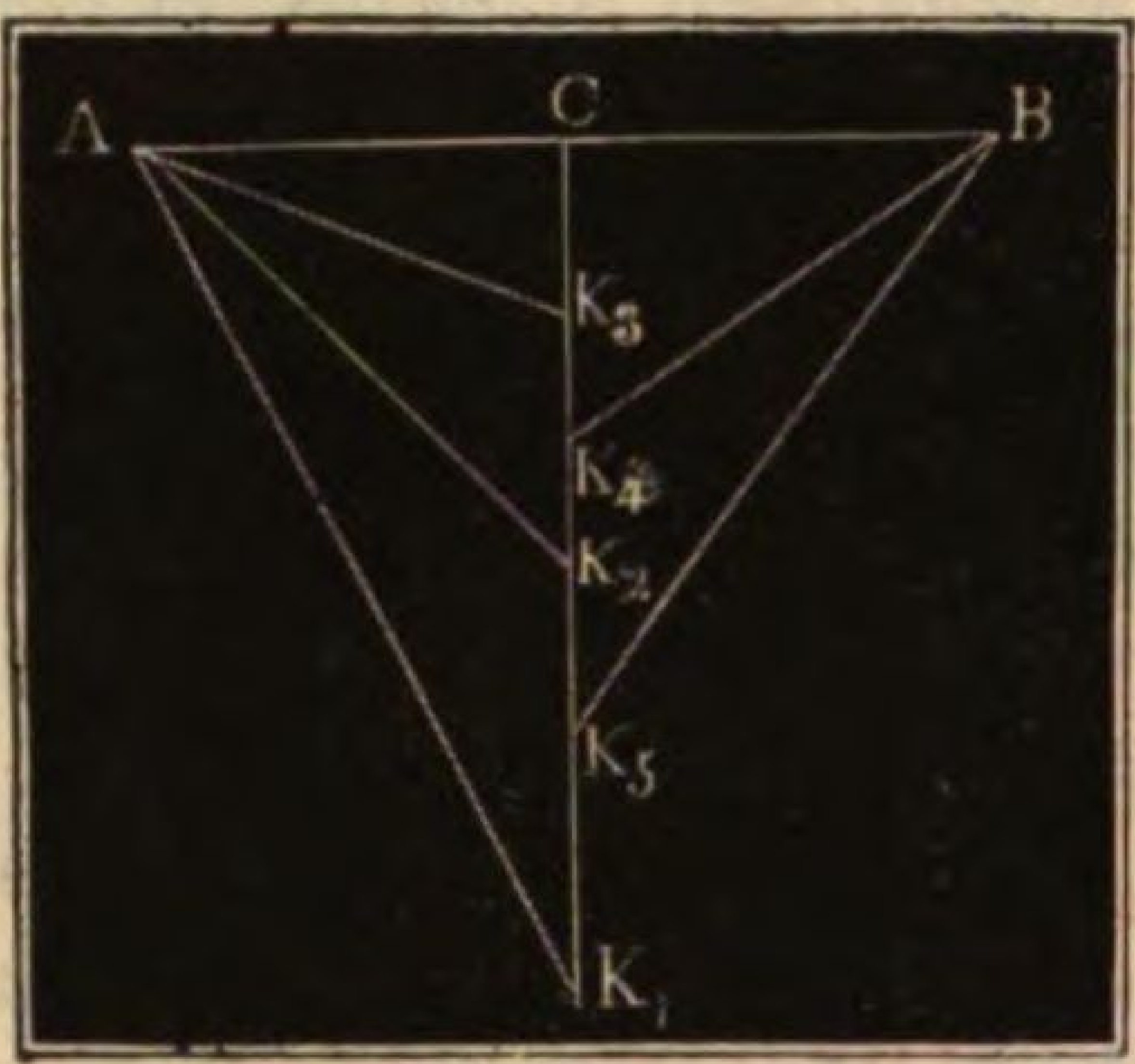
Für den Neigungswinkel des vierten Seilstückes ist

$$tang. \alpha_4 = tang. \alpha_1 - \frac{G_1 + G_2 + G_3}{H} \text{ u. s. w.}$$

Uebrigens lassen sich die Spannungen S_1, S_2, S_3 u. s. w., sowie die Neigungswinkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ u. s. w. der einzelnen Seiltrümmer leicht geometrisch darstellen. Machen wir die Horizontale $CA = CB$,

Seilpolygon. Fig. 192, = der Horizontalspannung H und die Vertikale CK_1 = der Vertikalspannung V_1 im Aufhängepunkte A, so giebt die Hypotenuse AK_1 die Totalspannung S_1 und der Winkel CAK_1 auch ihre Neigung gegen den Horizont an; tragen wir nun noch die Gewichte G_1, G_2, G_3 u. s. w. als Theile K_1K_2, K_2K_3 u. s. w. auf CK auf und ziehen die Transversalen AK_2, AK_3 u. s. w., so erhalten wir in ihnen die Spannungen der folgenden Seilstücke und durch die Winkel K_2AC, K_3AC u. s. w. auch die Neigungswinkel α_2, α_3 u. s. w. dieser Seilstücke.

Fig. 192.



§. 143. Aus den Untersuchungen im vorigen Paragraphen stellt sich als Gesetz für das Gleichgewicht durch Gewichte gespannter Seile heraus:

1) die Horizontalspannung ist an allen Stellen des Seiles eine und dieselbe, nämlich

$$H = S_1 \cos.\alpha_1 = S_n \cos.\alpha_n;$$

2) Die Vertikalspannung an irgend einer Stelle ist gleich der Vertikalspannung am darüber befindlichen Ende minus der Summe der darüberhängenden Gewichte, also

$$V_m = V_1 - (G_1 + G_2 + \dots G_{m-1}).$$

Kennt man den Winkel α_1 und die Horizontalspannung H, so erhält man die Vertikalspannung am Ende A: $V_1 = H.\,tang.\alpha_1$ und demnach die am Ende B: $V_n = (G_1 + G_2 + \dots + G_n) - V_1$.

Sind hingegen die Neigungswinkel α_1 und α_n an beiden Aufhängepunkten A und B bekannt, so ergeben sich die Horizontal- und Vertikalspannungen zugleich; es ist nämlich $\frac{V_n}{V_1} = \frac{tang.\alpha_n}{tang.\alpha_1}$ und daher

$$V_n = \frac{V_1\, tang.\alpha_n}{tang.\alpha_1}.$$

Da man noch $V_1 + V_n = G_1 + G_2 + \dots$, d. i.

$$\left(\frac{tang.\alpha_1 + tang.\alpha_n}{tang.\alpha_1}\right) V_1 = G_1 + G_2 \dots$$ hat, so folgt:

$$V_1 = \frac{(G_1 + G_2 + \dots)\, tang.\alpha_1}{tang.\alpha_1 + tang.\alpha_n} = (G_1 + G_2 + \dots)\frac{sin.\alpha_1\ cos.\alpha_n}{sin.(\alpha_1 + \alpha_n)}$$

$$V_n = \frac{(G_1 + G_2 + \dots)\, tang.\alpha_n}{tang.\alpha_1 + tang.\alpha_n} = (G_1 + G_2 + \dots)\frac{sin.\alpha_n\ cos.\alpha_1}{sin.(\alpha_1 + \alpha_n)},$$

und hieraus $H = V_1\, cotg.\alpha_1 = V_n\, cotg.\alpha_n = (G_1 + G_2 + \dots)\frac{cos.\alpha_1\, cos.\alpha_n}{sin.(\alpha_1 + \alpha_n)}$.

Haben die beiden Seilenden einerlei Neigung, ist also $\alpha_n = \alpha_1$, so hat man $V_1 = V_n = \frac{G_1 + G_2 + \ldots + G_n}{2}$; dann trägt also das eine Ende A eben soviel wie das andere Ende B. Seilpolygon.

Aus dem untersten Gewichte G_m und den Neigungswinkeln α_m und α_{m+1} der untersten Seilstücke ergiebt sich die Horizontalspannung durch die Formel:

$$H = \frac{G_m \cos. \alpha_m \,.\, \cos. \alpha_{m+1}}{\sin. (\alpha_m + \alpha_{m+1})},$$

und hiernach folgen die Vertikalspannungen dieser Seilstücke:

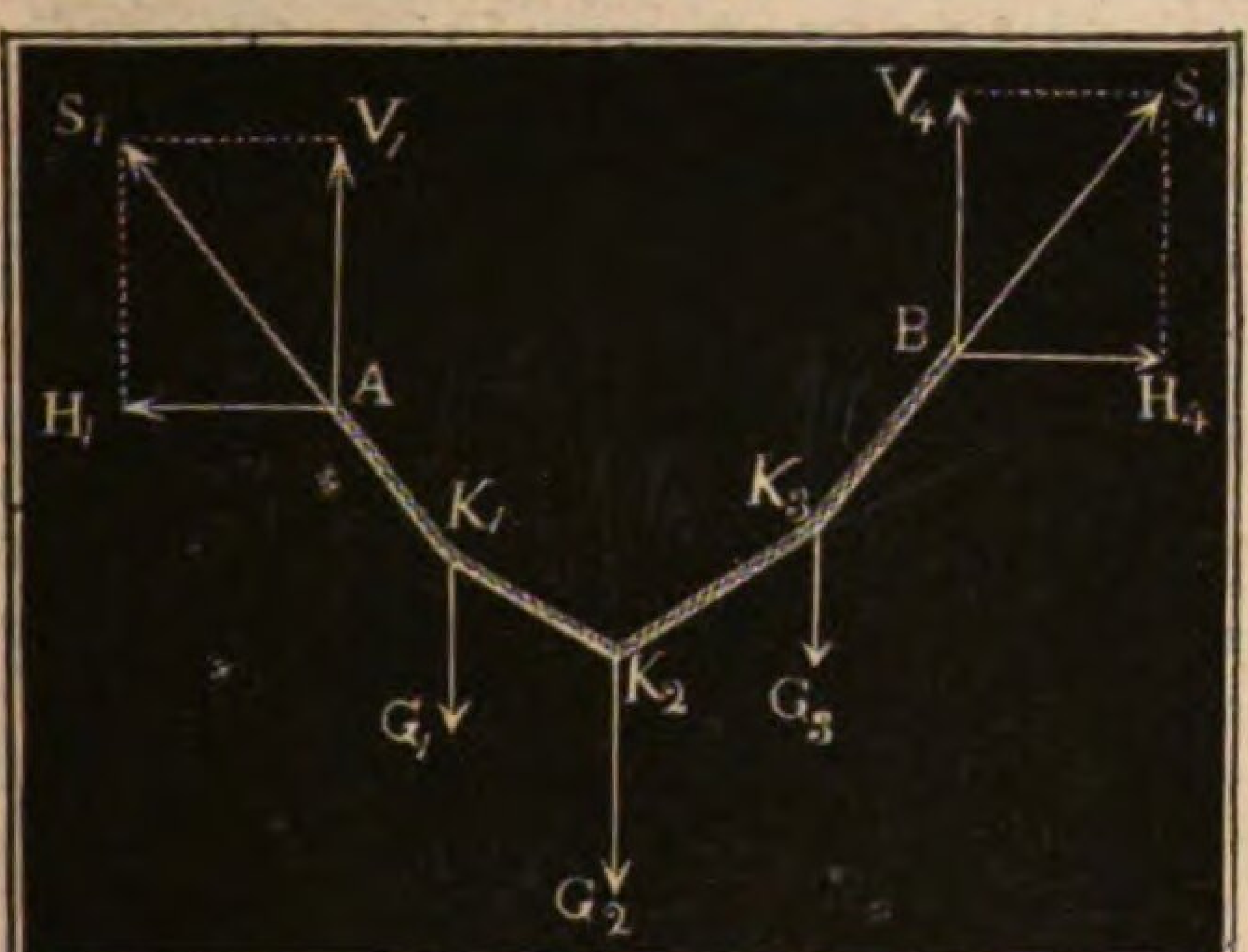
$$V_m = H \operatorname{tang.} \alpha_m, \text{ und}$$

$$V_{m+1} = H \operatorname{tang.} \alpha_{m+1}.$$

Uebrigens gelten diese Gesetze auch für durch Parallelkräfte angespannte Seilpolygone überhaupt, wenn man statt der Vertikalen die Kraftrichtungen einführt.

Beispiel. Das Seilpolygon $AK_1K_2K_3B$, Fig. 193, ist durch drei Gewichte $G_1 = 20$, $G_2 = 30$ und $G_3 = 16$ Pf., sowie durch die Horizontalkraft $H_1 = 25$ Pf. gespannt, man sucht die Axenspannungen und Neigungswinkel der Seiten unter der Voraussetzung, daß die Seilenden in A und B einerlei Neigung haben. Die Vertikalspannungen in beiden Enden sind hier gleich, nämlich $V_1 = V_4 = \frac{G_1 + G_2 + G_3}{2} = \frac{20 + 30 + 16}{2} = 33$ Pf., die Vertikalspannung des zweiten Seilstückes ist dagegen: $V_2 = V_1 - G_1 = 33 - 20 = 13$ Pf., und

Fig. 193.

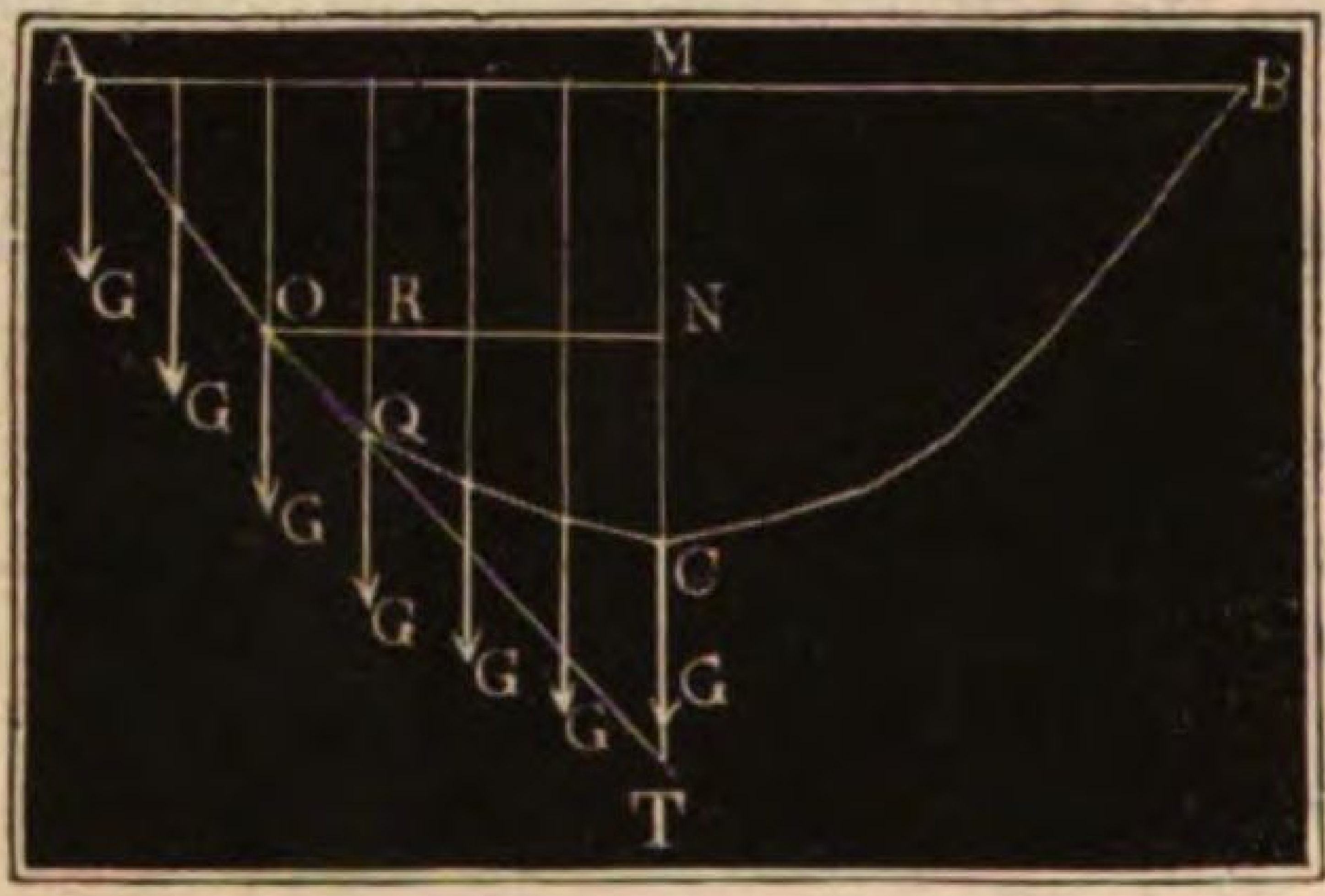


die des dritten $V_3 = V_4 - G_3$ (oder $G_1 + G_2 - V_1$) $= 33 - 16 = 17$ Pf.; die Neigungswinkel α_1 und α_4 der Seilenden sind bestimmt durch $\operatorname{tang.} \alpha_1 = \operatorname{tang.} \alpha_4 = \frac{V_1}{H} = \frac{33}{25} = 1{,}32$, die der zweiten und dritten Seilstücke aber durch $\operatorname{tang.} \alpha_2 = \operatorname{tang.} \alpha_1 - \frac{G_1}{H} = 1{,}32 - \frac{20}{25} = 0{,}52$ und $\operatorname{tang.} \alpha_3 = \operatorname{tang.} \alpha_4 - \frac{G_3}{H} = 1{,}32 - \frac{16}{25} = 0{,}68$; es ist hiernach $\alpha_1 = \alpha_4 = 52^0{,}51'$; $\alpha_2 = 27^0\,28'$, $\alpha_3 = 34^0{,}13'$; endlich die Axenspannungen sind $S_1 = S_4 = \sqrt{V_1^2 + H^2} = \sqrt{33^2 + 25^2} = \sqrt{1714} = 41{,}40$ Pf., $S_2 = \sqrt{V_2^2 + H^2} = \sqrt{13^2 + 25^2} = \sqrt{794} = 28{,}18$ Pf. und $S_3 = \sqrt{V_3^2 + H^2} = \sqrt{17^2 + 25^2} = 30{,}23$ Pf.

Parabel als Kettenlinie.

§. 144. Setzen wir jetzt voraus, daß das Seil ACB, Fig. 194, durch lauter gleiche, in gleichen Horizontalabständen aufgehängte Gewichte G_1, G_2 u. s. w. gespannt sei. Bezeichnen wir den Horizontalabstand AM zwischen dem Aufhängepunkte A und dem tiefsten Punkte C durch b, den Vertikalabstand CM aber durch a; setzen wir ferner für einen andern Punkt O des Seilpolygones die gleichliegenden Coordinaten $ON = y$ und $CN = x$. Ist nun die Vertikalspannung in $A = V$, so folgt die in $O = \frac{y}{b} \cdot V$, und daher für den Neigungswinkel $NOT = ROQ = \varphi$ des Seilstückes OQ gegen den Horizont: $tang.\, \varphi = \frac{y}{b} \cdot \frac{V}{H}$, wo H die constante Horizontalspannung ausdrückt.

Fig. 194.



Es ist hiernach $QR = OR \,.\, tang.\, \varphi = OR \,.\, \frac{y}{b} \cdot \frac{V}{H}$ der Höhenabstand zweier benachbarten Eckpunkte des Seilpolygones. Setzen wir y der Reihe nach OR, $2\,OR$, $3\,OR$ u. s. w., so giebt nun die letzte Gleichung die entsprechenden Höhenabstände des ersten, zweiten, dritten Eckpunktes u. s. w., von unten nach oben gezählt; und addiren wir endlich alle diese Werthe, deren Anzahl $= m$ sein möge, so erhalten wir die Höhe CN des Punktes O über dem Fußpunkte C. Es ist nämlich:

$$x = CN = \frac{V}{H} \cdot \frac{OR}{b} (OR + 2\,OR + 3\,OR + \ldots + m \,.\, OR)$$

$$= \frac{V}{H} \cdot \frac{\overline{OR}^2}{b} (1 + 2 + 3 + \ldots + m) = \frac{V}{H} \cdot \frac{m(m+1)}{1 \,.\, 2} \cdot \frac{\overline{OR}^2}{b},$$

der Theorie der arithmetischen Reihen zufolge.

Endlich $OR = \frac{y}{m}$ gesetzt, erhält man:

$$x = \frac{V}{H} \cdot \frac{m\,(m+1)}{2\,m^2} \cdot \frac{y^2}{b}.$$

Ist die Zahl der Gewichte sehr groß, so kann $m + 1 = m$ angenommen werden, weshalb man erhält:

$$x = \frac{V}{H} \cdot \frac{y^2}{2b}.$$

Parabel als Kettenlinie.

Für $x = a$ ist $y = b$, daher hat man auch:

$$a = \frac{V}{H} \cdot \frac{b}{2}, \text{ und hiernach einfacher:}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{y^2}{b^2}, \text{ welche Gleichung nur der Parabel zukommt.}$$

Wird also ein übrigens gewichtsloses Seil durch unendlich viele, in gleichen Horizontalabständen angreifende Gewichte gespannt, so geht das Seilpolygon in eine **Parabel** über.

Für den Neigungswinkel φ hat man hiernach:

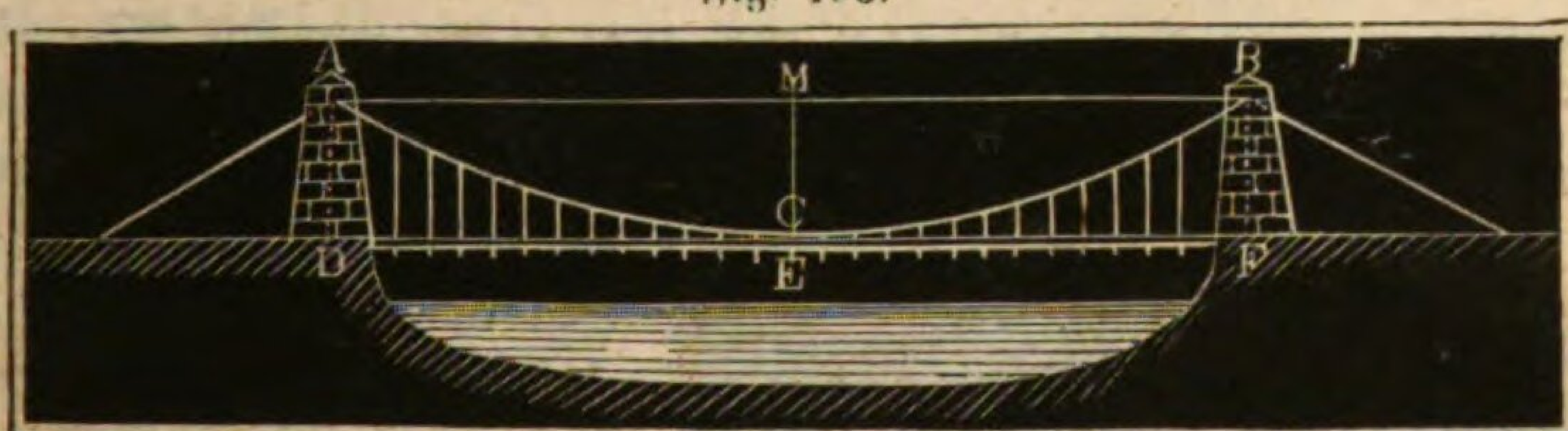
$$tang.\ \varphi = \frac{y}{b} \cdot \frac{2a}{b} = 2y \cdot \frac{a}{b^2} = 2y \cdot \frac{x}{y^2} = \frac{2x}{y}, \text{ sowie}$$

$$tang.\ \alpha = \frac{2a}{b} \cdot$$

Es schneidet also die Tangente OT die Abscissenaxe so, daß $CT = CN$ = Abscisse x ist.

Wären die Ketten und Hängeisen einer Kettenbrücke $ADFB$, Fig. 195,

Fig. 195.



gewichtslos, oder leicht genug in Hinsicht auf das nur zu berücksichtigende Gewicht der belasteten Brücke DEF, so würde die Kette ACB eine Parabel bilden.

Beispiel. Es sei die ganze Belastung der Kettenbrücke in Fig. 195 = 320000 Pf., die Spannweite $AB = 2b = 150$ Fuß und die Bogenhöhe $CM = a = 15$ Fuß, man sucht die Spannungen und übrigen Verhältnisse der Kette. Die Neigung der Kettenenden gegen den Horizont ist bestimmt durch die Formel: $tang.\ \alpha = \frac{2a}{b} = \frac{30}{75} = \frac{2}{5} = 0{,}4$, es ist also dieselbe $\alpha = 21^\circ{,}48'$. Die Vertikalspannung an jedem Aufhängepunkte ist $V_1 = \frac{1}{2}$ Gewicht = 160000 Pf.; die Horizontalspannung $H = V_1\ cotg.\ \alpha = 160000 \cdot \frac{1}{0{,}4} = 400000$ Pf., endlich die Gesammtspannung an einem Ende:

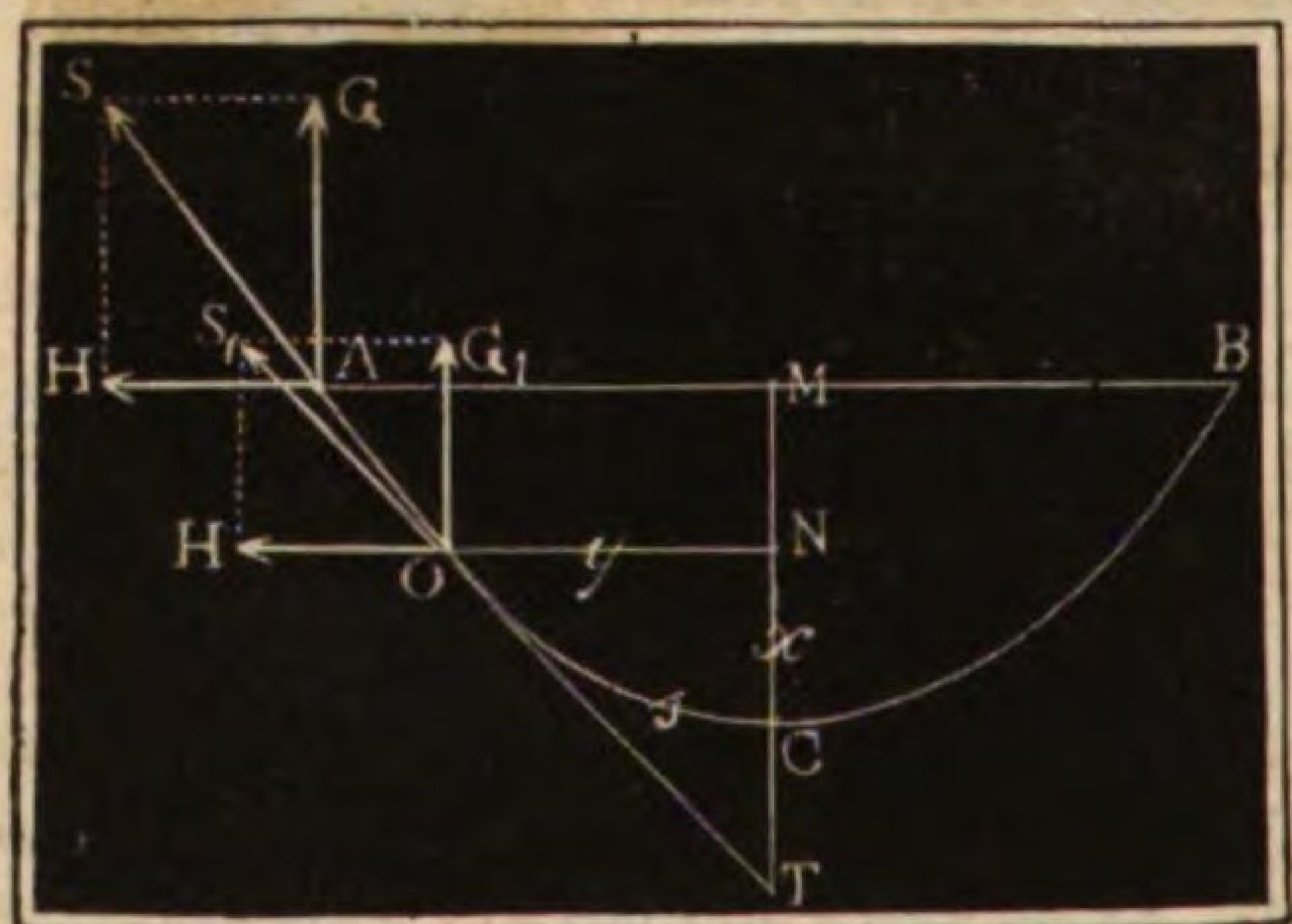
$$S = \sqrt{V^2 + H^2} = V\sqrt{1 + cotg.\ \alpha^2} = 160000 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{0{,}4}\right)^2}$$

$$= 160000\ \sqrt{\frac{29}{4}} = 80000\ \sqrt{29} = 430813 \text{ Pf.}$$

Kettenlinie. §. 145. Wird ein an zwei Punkten aufgehängtes vollkommen biegsames und unausdehnbares Seil, oder eine aus kurzen Gliedern bestehende Kette, durch das eigene Gewicht gespannt, so bildet die Axe derselben eine krumme Linie, die den Namen **Kettenlinie** (franz. chaînette, engl. catenary) erhalten hat. Die unvollkommen elastischen und ausdehnbaren Schnüre, Seile, Bänder, Ketten u. s. w., wie sie im praktischen Leben vorkommen, geben krumme Linien, welche sich der Kettenlinie nur annähern, meist aber als solche behandelt werden können. Nach dem Vorhergehenden ist die Horizontalspannung der Kettenlinie an allen Punkten gleich stark, dagegen die Vertikalspannung gleich der Vertikalspannung im darüber befindlichen Aufhängepunkte minus Gewicht des darüber befindlichen Kettenstückes. Da die Spannung im Scheitel, wo die Kettenlinie horizontal ist, sich vernullt, also die Vertikalspannung im Aufhängepunkte gleich ist dem Gewichte der Kette vom Aufhängepunkte bis zum Scheitel, so ist die Vertikalspannung an jeder Stelle auch gleich dem Gewichte des darunter befindlichen Seil- oder Kettenstückes.

Sind gleich lange Stücke der Kette gleich schwer, so entsteht die sogenannte **gemeine Kettenlinie**, von welcher hier nur die Rede ist. Wiegt ein Seil- oder Kettenstück von 1 Fuß Länge γ, und ist der den Coordinaten $CM = a$ und $MA = b$, Fig. 196, entsprechende Bogen $AOC = l$, so hat man das Gewicht des Kettenstückes $AOC = l\gamma$; ist dagegen die Länge des den Coordinaten $CN = x$ und $NO = y$ angehörigen Bogens $= s$, so hat man für das Gewicht dieses Bogens $= s\gamma$. Setzen wir endlich die Länge eines gleichartigen Kettenstückes, dessen Gewicht gleich ist der Horizontalspannung H, $= c$, so haben wir noch $H = c\gamma$ und daher für die Neigungswinkel α und φ in den Punkten A und O:

Fig. 196.



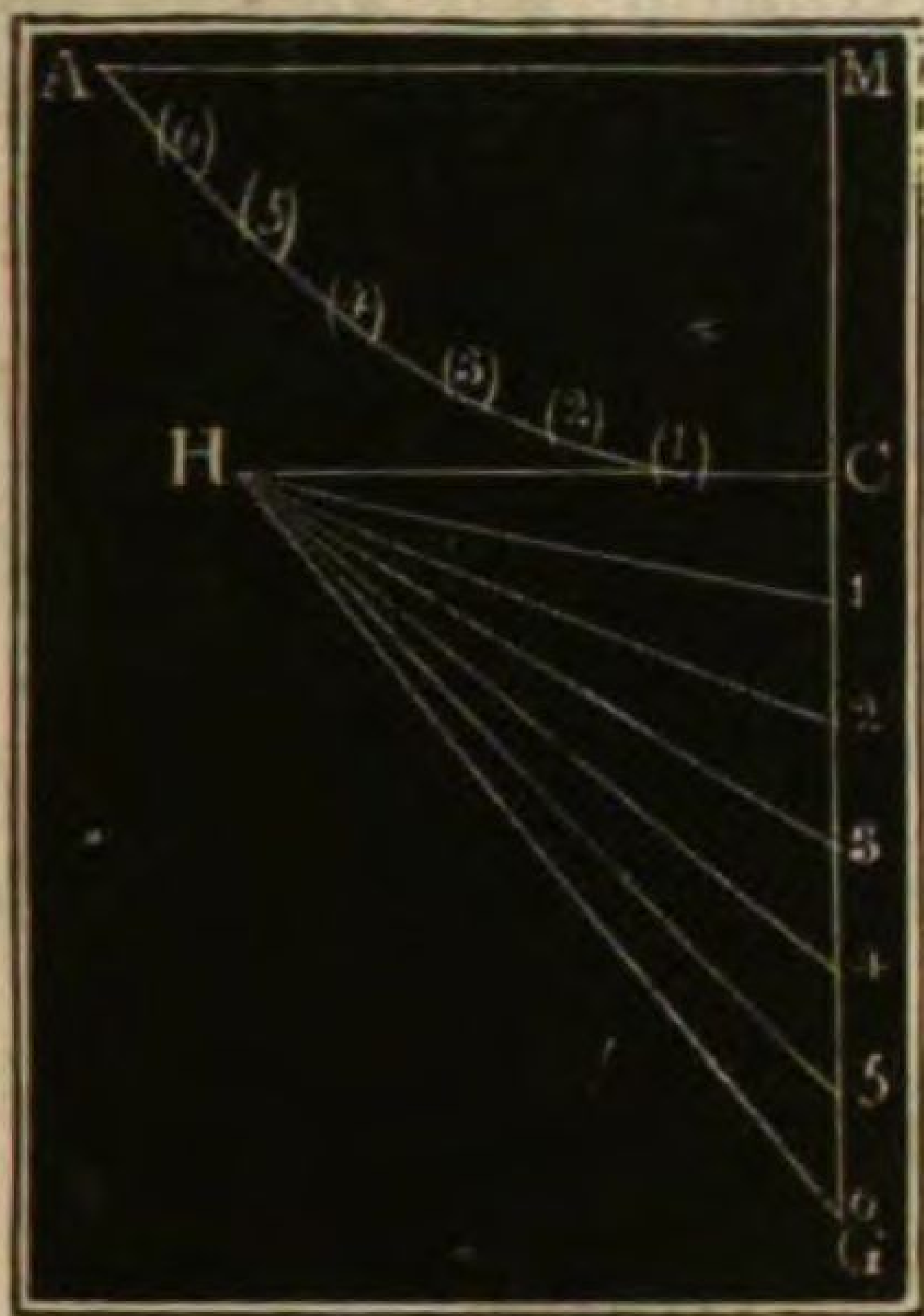
$$tang. \alpha = tang. SAH = \frac{G}{H} = \frac{l\gamma}{c\gamma} = \frac{l}{c} \text{ und}$$

$$tang. \varphi = tang. NOT = \frac{s\gamma}{c\gamma} = \frac{s}{c}.$$

§. 146. Macht man die Horizontale CH, Fig. 197, $=$ der Länge c des die Horizontalspannung messenden Kettenstückes und CG gleich der

Länge l des Kettenbogens von der einen Seite, so bekommt man, in Uebereinstimmung mit §. 142, in der Hypotenuse GH das Maaß und die Richtung der Speilspannung im Aufhängepunkte A, denn es ist Kettenlinie.

Fig. 197.



$$tang\ CHG = \frac{CG}{CH} = \frac{l}{c} \text{ und}$$

$$\overline{GH} = \sqrt{\overline{CG}^2 + \overline{CH}^2} = \sqrt{l^2 + c^2},$$

oder $S = \sqrt{G^2 + H^2} = \sqrt{l^2 + c^2} \cdot \gamma$
$= \overline{GH} \cdot \gamma$.

Theilt man nun CG in gleiche Theile und zieht von H nach den Theilpunkten 1, 2, 3 u. s. w. gerade Linien, so geben diese die Maaße und Richtungen der Spannungen derjenigen Punkte in der Kettenlinie an, welche man erhält, indem man die Länge des Kettenbogens AC in ebenso viel gleiche Theile theilt. So giebt z. B. die Linie $H3$ das Maaß und die Richtung der Spannung oder die Tangente im Theilpunkte (3) des Bogens AC an, weil in diesem Punkte die Vertikalspannung $= C3 . \gamma$ ist, während die Horizontalspannung unverändert $= c . \gamma$ bleibt, also für diesen Punkt $tang.\ \varphi = \frac{C3 . \gamma}{c\gamma} = \frac{C3}{CH}$ ist, wie die Figur auch wirklich giebt.

Diese Eigenthümlichkeit der Kettenlinie läßt sich benutzen, um diese Curve annähernd genau mechanisch zu construiren. Nachdem man die gegebene Länge CG des zu construirenden Kettenlinienbogens in sehr viele gleiche Theile getheilt, die die Horizontalspannung messende Linie $CH = c$ aufgetragen und die Transversalen $H1$, $H2$, $H3$ u. s. w. gezogen hat, trage man auf CH einen Theil $C1$ des Kettenbogens auf, ziehe nun durch den erhaltenen Theilpunkt (1) mit der Transversalen $H1$ eine Parallele und schneide von ihr wieder einen Theil (12) ab; ebenso ziehe man durch den erhaltenen Endpunkt (2) eine Parallele zur Transversalen $H2$ und schneide von ihr (23) gleich einem Bogentheile ab; jetzt ziehe man durch den neuen Endpunkt (3) eine Parallele zu $H3$, mache (34) wieder gleich einem Bogenstück und fahre auf diese Weise fort. Wir erhalten zwar so ein Polygon ($C\,1\,2\,3\,4 \ldots$), da wir indessen dessen Seiten sehr klein angenommen haben, so können wir es als eine Curve betrachten oder dazu leicht die Curve finden, indem wir die Mittelpunkte der kleinen Seiten ($C1$), (12), (23) u. s. w. durch einen Zug verbinden.

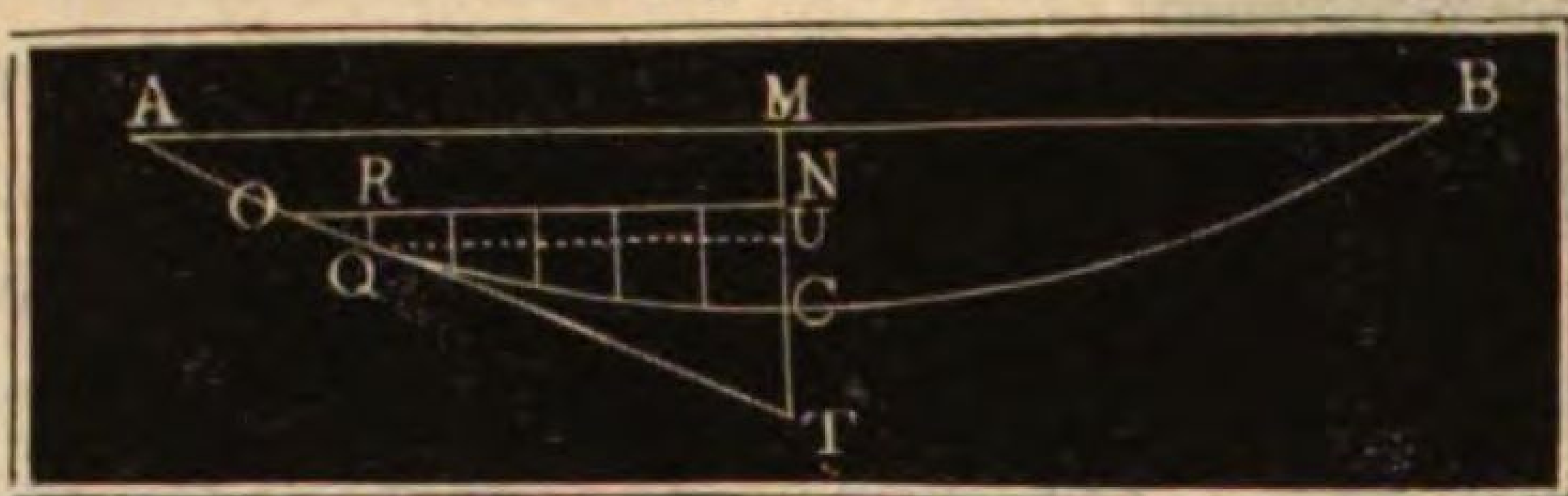
Durch Aufhängen einer feingegliederten Kette an einer senkrechten Wand

Kettenlinie. läßt sich für praktische Bedürfnisse oft genau genug eine Kettenlinie ebenfalls finden, welche gewissen Bedingungen z. B. einer gegebenen Bogenweite und Bogenhöhe, oder einer gegebenen Bogenweite und Bogenlänge u. s. w. entspricht.

§. 147. In vielen Fällen, und namentlich auch bei Anwendungen in der Architektur und in dem Maschinenwesen, ist die Horizontalspannung der Kettenlinie sehr groß und deshalb ihre Bogenhöhe klein gegen die Weite. Unter dieser Voraussetzung ermittelt sich eine Gleichung dieser Curve auf folgende Weise.

Bezeichnet s die Länge, x die Abscisse CN und y die Ordinate NO eines sehr gedrückten Bogens CO, Fig. 198, so können wir der beigefüg-

Fig. 198.



ten Anmerkung zu Folge annähernd

$$s = \left[1 + \tfrac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right] y,$$

und daher die Vertikalspannung in einem Punkte O eines niedrigen Kettenlinienbogens

$$V = \left[1 + \tfrac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right] y\gamma,$$

und für den Tangentenwinkel $TON = \varphi$ desselben

$$tang.\,\varphi = \frac{s}{c} = \left[1 + \tfrac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right] \frac{y}{c} \text{ setzen.}$$

Theilen wir die Ordinate y in m gleiche Theile, so finden wir das einem solchen Theile OR entsprechende Stück $RQ = NU$ der Abscisse x, indem wir setzen $RQ = OR\,.\,tang.\,\varphi = OR\,.\,\frac{y}{c}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right]$.

Da x klein sein soll gegen y, so ist annähernd $RQ = OR\,.\,\frac{y}{c}$. Setzt man nun $OR = \frac{y}{m}$ und successiv für y : $\frac{y}{m}, \frac{2y}{m}, \frac{3y}{m}$ u. s. w., so bekommt man nach und nach sämmtliche Theile von x, deren Summe nun $x = \frac{y^2}{cm^2}(1 + 2 + 3 + \ldots + m) = \frac{y^2}{cm^2}\,.\,\frac{m(m+1)}{2}$ (§. 144) $= \frac{y^2}{2c}$ ist und wieder der Gleichung der Parabel entspricht.

Gehen wir aber noch genauer, setzen wir in $QR = OR \cdot \frac{y}{c}\left[1+\frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right]$, statt x den letztgefundenen Werth $\frac{y^2}{2c}$ ein, so erhalten wir Kettenlinie.

$$QR = OR \cdot \frac{y}{c}\left(1+\frac{1}{6}\cdot\frac{y^2}{c^2}\right) = \frac{OR}{c}\left(y+\frac{1}{6}\cdot\frac{y^3}{c^2}\right).$$

Nehmen wir nun wieder nach einander $y = \frac{y}{m}, \frac{2y}{m}, \frac{3y}{m}$ u. s. w. und setzen wir statt OR ebenfalls $\frac{y}{m}$, so finden wir sämmtliche Theile von x, und die Summe selbst:

$$x = \frac{y}{cm}\left[\frac{y}{m}(1+2+3+\ldots+m)+\frac{1}{6c^2}\cdot\left(\frac{y}{m}\right)^3(1^3+2^3+3^3+\ldots+m^3)\right].$$

Für eine sehr große Anzahl von Gliedern ist aber die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis $m = \frac{m^2}{2}$ und die Summe ihrer Cuben $= \frac{m^4}{4}$ (s. »Ingenieur, Seite 144«), es ist demnach

$$x = \frac{y}{c}\left(\frac{y}{2}+\frac{1}{6c^2}\cdot\frac{y^3}{4}\right), \text{ d. i.}$$

$$1)\ x = \frac{y^2}{2c}+\frac{y^4}{24c^3} = \frac{y^2}{2c}\left[1+\frac{1}{12}\cdot\left(\frac{y}{c}\right)^2\right],$$ die Gleichung einer stark gespannten Kettenlinie.

Durch Umkehrung folgt

$$y^2 = 2cx - \frac{y^4}{12c^2} = 2cx - \frac{4c^2x^2}{12c^2} = 2cx - \frac{x^2}{3}, \text{ daher}$$

$$2)\ y = \sqrt{2cx - \frac{x^2}{3}}, \text{ oder annähernd } y = \sqrt{2cx}\left(1-\frac{x}{12c}\right).$$

Das Maaß der Horizontalspannung ergiebt sich ferner

$$c = \frac{y^2}{2x}+\frac{y^4}{2x \cdot 12c^2} = \frac{y^2}{2x}+\frac{y^4}{24x}\cdot\frac{4x^2}{y^4}, \text{ d. i.}$$

$$3)\ c = \frac{y^2}{2x}+\frac{x}{6}.$$

Der Tangentenwinkel φ wird bestimmt durch

$$tang.\ \varphi = \frac{y}{c}\left[1+\frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right] = \frac{y\left[1+\frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right]}{\frac{y^2}{2x}\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right]}$$

$$= \frac{2x}{y}\left[1+\frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right]\left[1-\frac{1}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right], \text{ d. i.}$$

Kettenlinie. 4) $tang.\ \varphi = \frac{2x}{y}\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right]$.

Hierzu ist endlich noch die Rectificationsformel:

5) $s = y\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right] = y\left[1 + \frac{1}{6}\left(\frac{y}{c}\right)^2\right]$ zu setzen.

Beispiele. 1) Für eine Spannweite $2b = 16$ Fuß und Bogenhöhe $a = 2\frac{1}{2}$ Fuß ist die Länge $2l = 16 . \left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{2{,}5}{8}\right)^2\right] = 16 + 16 . 0{,}065$ $= 17{,}04$ Fuß, ferner die Länge des die Horizontalspannung messenden Kettenstückes: $c = \frac{b^2}{2a} + \frac{a}{6} = \frac{64}{5} + \frac{5}{12} = 12{,}8 + 0{,}417 = 13{,}217$ Fuß; die Tangente des Aufhängewinkels: $tang.\ \alpha = \frac{2a}{b}\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{a}{b}\right)^2\right] = \frac{5}{8} \cdot \left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{5}{16}\right)^2\right]$ $= \frac{5 . 1{,}03255}{8} = 0{,}6453\ldots$, der Aufhängewinkel selbst aber $\alpha = 32^0, 50'$.
2) Eine Kette von 10 Fuß Länge und $9\frac{1}{2}$ Fuß Spannweite hat die Bogenhöhe $a = \sqrt{\frac{3}{2}(l-b)b} = \sqrt{\frac{3}{2}\,\frac{(10-9\frac{1}{2}) . 9\frac{1}{2}}{2}\,\frac{9\frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{19}{16}} = \sqrt{\frac{57}{32}}$ $= \sqrt{1{,}7812} = 1{,}335$ Fuß, und das Maaß der Horizontalspannung

$$c = \frac{b^2}{2a} + \frac{a}{6} = \frac{4{,}75^2}{2 . 1{,}335} + \frac{1{,}335}{6} = 8{,}673 \text{ Fuß.}$$

3) Wenn eine 30 Fuß lange und 8 Pfund schwere Schnur mit einer Kraft von 20 Pf. so viel wie möglich horizontal ausgespannt wird, so ist die Vertikalspannung $V = \frac{1}{2}\,G = 4$ Pf., die Horizontalkraft $H = \sqrt{S^2 - V^2} = \sqrt{20^2 - 4^2} = \sqrt{384}$ $= 19{,}596$ Pf., die Tangente des Aufhängewinkels: $tang.\ \varphi = \frac{V}{H} = \frac{4}{19{,}596}$ $= 0{,}20412$, der Winkel φ selbst $= 11^0{,}32'$; das Maaß der Horizontalspannung $c = \frac{H}{\gamma} = H : \frac{8}{30} = \frac{30}{8}\,H = 73{,}485$ Fuß, die Spannweite $2b$ ist $= 2l\left[1 - \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{l}{c}\right)^2\right] = 30 . \left[1 - \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{15}{73{,}48}\right)^2\right] = 30 - 0{,}208$ $= 29{,}792$ Fuß und die Bogenhöhe $a = \sqrt{\frac{3}{2}b(l-b)} = \sqrt{\frac{3}{2}\,\frac{29{,}792 . 0{,}208}{2 . 2}}$ $= \sqrt{29{,}792 . 0{,}078} = 1{,}524$ Fuß.

Anmerkung 1. Man findet aus dem Halbmesser $CA = CB = CD = r$ und der Ordinate $AM = y$ eines Kreisbogens AB Fig. 199 a. f. S., die Ordinate $AN = BN = y_1$ des halben Bogens $AD = BD$, wenn man setzt

$$\overline{AB}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = \overline{AM}^2 + (CB - CM)^2$$
$$= \overline{AM}^2 + (CB - \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{AM}^2})^2 = 2\,CA^2 - 2CA\sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{AM}^2}, \text{ d. i.}$$
$$4y_1^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - y^2}.$$

Es ist hiernach $y_1 = \sqrt{\frac{r^2 - r\sqrt{r^2 - y^2}}{2}}$, oder annähernd, wenn y klein ist gegen r,

$$y_1 = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left[r^2 - r\left(r - \frac{y^2}{2r} - \frac{y^4}{8r^3}\right)\right]} = \sqrt{\frac{y^2}{4}\left(1 + \frac{y^2}{4r^2}\right)}$$
$$= \frac{y}{2}\left(1 + \frac{y^2}{8r^2}\right).$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formel findet man die Ordinate des Viertelbogens Kettenlinie.

$$y_2 = \frac{y_1}{2}\left(1 + \frac{y_1^2}{8r^2}\right) = \frac{y}{4}\left(1 + \frac{y^2}{8r^2}\right)\left(1 + \tfrac{1}{4}\cdot\frac{y^2}{8r^2}\right),$$

ferner die des Achtelbogens

$$y_3 = \frac{y_2}{2}\left(1 + \frac{y_2^2}{8r^2}\right) = \frac{y}{8}\left(1 + \frac{y^2}{8r^2}\right)\left(1 + \tfrac{1}{4}\cdot\frac{y^2}{8r^2}\right)\left(1 + (\tfrac{1}{4})^2\frac{y^2}{8r^2}\right)$$

$$= \frac{y}{8}\left(1 + [1 + \tfrac{1}{4} + (\tfrac{1}{4})^2]\frac{y^2}{8r^2}\right).$$

Da die Ordinaten sehr kleiner Bögen den Bögen gleichgesetzt werden können, so erhalten wir hiernach den Bogen AB annähernd.

$$s = 8 \cdot y_3 = y\left(1 + [1 + \tfrac{1}{4} + (\tfrac{1}{4})^2]\frac{y^2}{8r^2}\right), \text{ oder genauer}$$

$$= y\left(1 + [1 + \tfrac{1}{4} + (\tfrac{1}{4})^2 + (\tfrac{1}{4})^3 + \ldots]\frac{y^2}{8r^2}\right).$$

Aber $1 + \frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^2 + (\frac{1}{4})^3 + \ldots$ ist (nach Ingen. S. 138) $= \frac{1}{1 - \frac{1}{4}}$ $= \frac{4}{3}$, daher folgt denn

$$s = \left(1 + \frac{y^2}{6r^2}\right) y;$$

oder wenn man statt r die Abscisse $BM = x$ einführt, und $2rx = y^2$ setzt

$$s = \left[1 + \tfrac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right] y.$$

Diese Formel ist nicht bloß für Kreisbögen, sondern für alle gedrückte Curvenbögen anzuwenden.

Fig. 199.

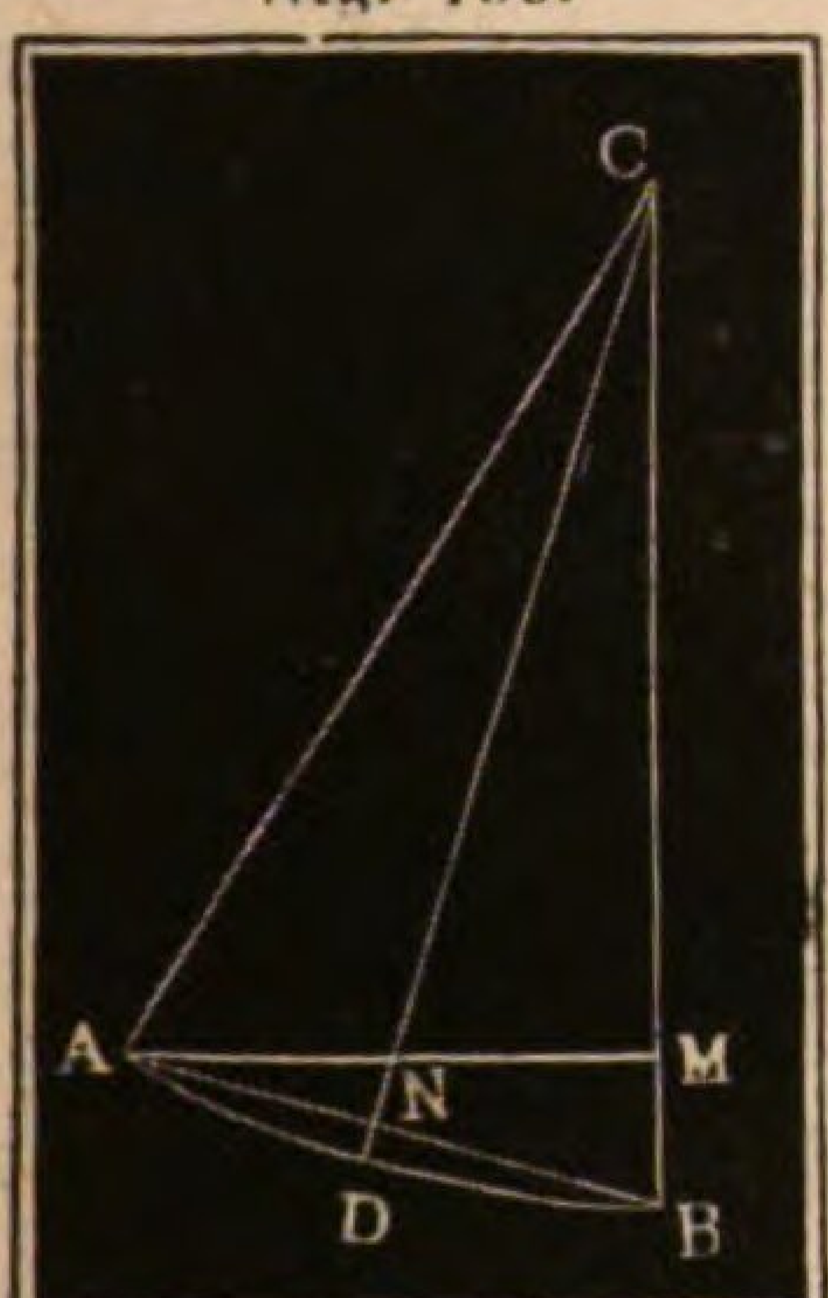
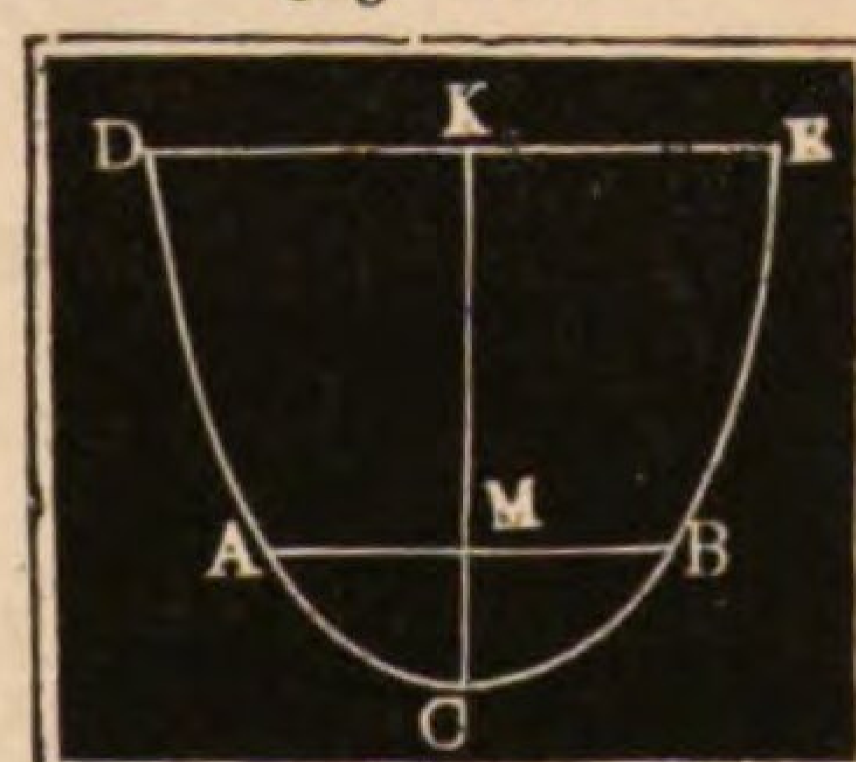


Fig. 200.



Anmerkung 2. Vergleicht man die gefundene Gleichung

$$y = \sqrt{2cx - \frac{x^2}{3}} \text{ mit der Gleichung}$$

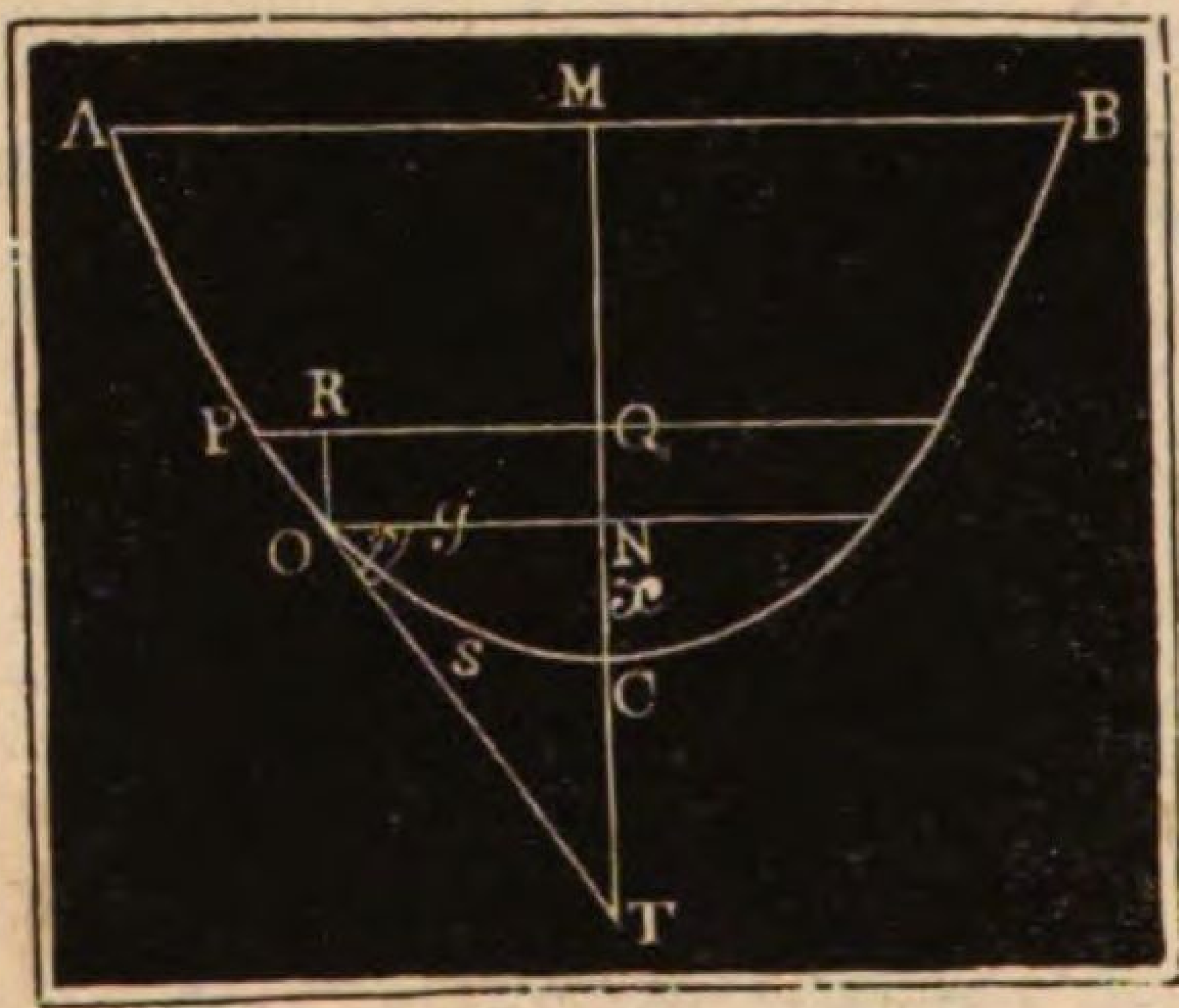
$$y = \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2}$$ einer Ellipse (S. Ingen. S. 237), so findet man $\frac{b^2}{a} = c$ und $\frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{3}$, folglich $a = 3c$ und $b = a\sqrt{\frac{1}{3}} = c\sqrt{3}$.

Es läßt sich also eine stark gespannte Kettenlinie als ein Bogen ACB, Fig. 200, einer Ellipse ansehen, deren große Halbaxen $KC = a = 3c$ und kleine Halbaxe $KD = KE = b = c\sqrt{3}$ ist.

Kettenlinie. §. 148*). Die vollständige Gleichung einer gemeinen Kettenlinie läßt sich mittels des höheren Calculs auf folgende Weise finden.

Nach §. 145 ist für den Aufhängewinkel $TON = \varphi$, Fig. 201, welchen die Berührungslinie OT eines Punktes O der Ketterlinie ACB mit der horizontalen Ordinate ON einschließt, wenn der Bogen CO durch s bezeichnet und die Horizontalspannung $= c\gamma$ gesetzt wird,

Fig. 201.



$$tang. \varphi = \frac{s}{c}.$$

Nun ist aber φ auch gleich dem Winkel OPR, welchen ein Bogenelement $OP = ds$ mit einem Elemente $PR = dy$ der Ordinate $ON = y$ einschließt, und

$$tang. OPR = \frac{OR}{PR} = \frac{dx}{dy},$$

da OR als ein Element dx der Ordinate $CN = x$ anzusehen ist; demnach folgt denn $\frac{dx}{dy} = \frac{s}{c}$, oder $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{c^2}{s^2}$. Auch ist $ds^2 = dx^2 + dy^2$, also $dy^2 = ds^2 - dx^2$, und daher

$$\frac{ds^2 - dx^2}{dx^2} = \frac{c^2}{s^2}.$$

Durch weitere Umformung ergiebt sich

$$dx^2 (s^2 + c^2) = s^2 ds^2, \text{ oder } dx = \frac{s\,ds}{\sqrt{s^2 + c^2}}.$$

Setzt man $s^2 + c^2 = u$, so erhält man $2s\,ds = du$, und

$$dx = \frac{\frac{1}{2} du}{u^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} du;$$

und durch Integration folgt nun (nach Art. 13 der analyt. Hülfslehren):

$$x = \frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + Const. = \sqrt{u} + Const.$$
$$= \sqrt{s^2 + c^2} + Const.,$$

endlich, da x und s zugleich Null sind, also $0 = \sqrt{c^2} + Const.$, d. i. $Const. = -c$ ist:

1) $x = \sqrt{s^2 + c^2} - c$; so wie umgekehrt

$$s = \sqrt{(x + c)^2 - c^2} = \sqrt{2cx + x^2}, \text{ und}$$

$$c = \frac{s^2 - x^2}{2x}.$$

Beispiel. Wenn eine 10 Fuß lange und 30 Pfund schwere Kette ACB so aufgehangen wird, daß die Bogenhöhe $CM = 4$ Fuß beträgt, so hat man Kettenlinie.

$$\gamma = {}^{30}/_{10} = 3 \text{ Pf.}$$

$$c = \frac{s^2 - x^2}{2x} = \frac{s^2 - 4^2}{8} = {}^9/_8 \text{ und daher}$$

die Horizontalspannung $H = c\gamma = 3 \cdot {}^9/_8 = 3^3/_8$ Pfund.

§. 149*). So wie wir im vorigen Paragraphen durch Entfernung von dy auf eine Gleichung zwischen dem Bogen s und der Abscisse gestoßen sind, eben so können wir nun durch Eliminirung von dx eine Gleichung zwischen dem Bogen s und der Ordinate y finden. Man setzt zu diesem Zwecke in der Gleichung

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{c^2}{s^2}, \; dx^2 = ds^2 - dy^2,$$

und erhält so die Gleichung

$$\frac{s^2}{c^2} = \frac{ds^2 - dy^2}{dy^2}, \text{ oder } dy^2\,(s^2 + c^2) = c^2\,ds^2, \text{ also}$$

$$dy = \frac{c\,ds}{\sqrt{s^2 + c^2}}.$$

Dividirt man im Zähler und Nenner durch c und setzt $\frac{s}{c} = v$, so erhält man

$$dy = c \cdot \frac{d\left(\frac{s}{c}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{s}{c}\right)^2}} = \frac{c\,dv}{\sqrt{1 + v^2}},$$

und es liefert nun die Formel XIV. im Art. 20 der analytischen Hülfslehren das entsprechende Integral

$$y = c\int\frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = c \cdot Log.nat.\,(v + \sqrt{1+v^2}), \text{ d. i.}$$

$$2) \quad y = c\,Log.nat.\left(\frac{s + \sqrt{s^2 + c^2}}{c}\right).$$

Setzt man in dieser Formel $s = \sqrt{2cx + x^2}$, so erhält man die eigentliche Coordinatengleichung der gemeinen Kettenlinie

$$3) \quad y = c \cdot Log.\,nat.\left(\frac{c + x + \sqrt{2cx + x^2}}{c}\right),$$

eliminirt man aber c, so ergiebt sich die Gleichung

$$4) \quad y = \frac{s^2 - x^2}{2x}\,Log.\,nat.\left(\frac{s+x}{s-x}\right).$$

Endlich folgt aber durch Umkehrung von 2. und 3.:

$$5) \quad s = \left(e^{\frac{y}{c}} - e^{-\frac{y}{c}}\right) \cdot \frac{c}{2} \text{ und}$$

Kettenlinie. 6) $x = \left[\frac{1}{2}\left(e^{\frac{y}{c}} + e^{-\frac{y}{c}}\right) - 1 \right] c,$

und es bezeichnet e die Grundzahl 2,71828.. des natürlichen Logarithmensystemes (s. Art. 14 der analytischen Hülfslehren).

Beispiel. Zwei zusammengehörige Coordinaten einer Kettenlinie sind $x = 2$ Fuß und $y = 3$ Fuß, man sucht die Horizontalspannung c dieser Curve? Annähernd ist nach No. 3 des Paragraphen 47, $c = \frac{y^2}{2x} + \frac{x}{6} = \frac{9}{4} + \frac{2}{6} = 2{,}58.$

Nach No. 3 dieses Paragraphen ist aber genau $y = c\,Ln\left(\frac{c + x + \sqrt{2cx + x^2}}{c}\right)$, d. i. $3 = c\,Ln\left(\frac{c + 2 + \sqrt{4c + 4}}{c}\right)$. Hierin $c = 2{,}58$ gesetzt, bekommt man den Fehler $f = 3 - 2{,}58\,Ln\left(\frac{4{,}58 + 2\sqrt{3{,}58}}{2{,}58}\right) = 3 - 2{,}58\ Ln\left(\frac{8{,}3642}{2{,}58}\right)$ $= 3 - 3{,}035 = -0{,}035$; nimmt man aber $c = 2{,}53$, so erhält man den Fehler $f_1 = 3 - 2{,}53\,Ln\left(\frac{4{,}53 + 2\sqrt{3{,}53}}{2{,}53}\right) = 3 - 2{,}53\ Ln\left(\frac{8{,}2876}{2{,}53}\right)$ $= 3 - 3{,}002 = -0{,}002$. Um nun den wahren Werth von c zu finden, setzen wir nach einer bekannten Regel (s. Ingenieur, Seite 129),

$$\frac{c - 2{,}58}{c - 2{,}53} = \frac{f}{f_1} = \frac{0{,}035}{0{,}002} = 17{,}5,$$ auf diese Weise folgt

$$16{,}5 \,.\, c = 17{,}5 \,.\, 2{,}53 - 2{,}58 = 41{,}69,$$ daher

$$c = \frac{41{,}69}{16{,}5} = 2{,}527 \text{ Fuß}.$$

Anmerkung. Sehr einfach lassen sich s, x und y durch den Aufhängewinkel φ ausdrücken; es ist nämlich nach dem Vorstehenden

$$s = c\ tang.\ \varphi = \frac{c\ sin.\ \varphi}{cos.\ \varphi},$$ ferner

$$x = c\,(\sqrt{1 + tang.\ \varphi^2} - 1) = \frac{c\ (1 - cos.\ \varphi)}{cos.\ \varphi}$$ und

$$y = c\ Log.\ nat.\ (tang.\ \varphi + \sqrt{1 + tang.\ \varphi^2}) = c\ Log.\ nat.\ \left(\frac{1 + sin.\,\varphi}{cos.\ \varphi}\right).$$

Mittels dieser Formeln kann man die Bogen- und Coordinatenlängen für verschiedene Neigungs- oder Aufhängewinkel berechnen, und es läßt sich hierzu leicht eine zweckmäßige Tabelle, wie im Ingenieur S. 399, anfertigen. Hierbei hat man nur eine einzige Kettenlinie, am besten diejenige, bei welcher das Maaß c der Horizontalspannung $= 1$ ist, zu Grunde zu legen; für eine andere Kettenlinie, welche der Horizontalspannung c entspricht, findet man dann s, x und y, indem man die durch die Tabelle angegebenen Werthe von s, x und y mit c multiplicirt.

Rolle. §. 150. Seile, Riemen u. s. w. sind auch die gewöhnlichsten Mittel, wodurch Kräfte auf Rollen und Radwellen übergetragen werden. Von den Theorien dieser beiden Vorrichtungen möge deshalb hier noch das Allgemeinste, soviel es ohne Berücksichtigung der Reibung und Steifigkeit möglich ist, entwickelt werden.

Eine **Rolle** (franz. poulie, engl. pulley) ist eine um eine Axe dreh- Rolle.
bare kreisförmige Scheibe *ABC*, Fig. 202 und Fig. 203, um deren

Fig. 202.

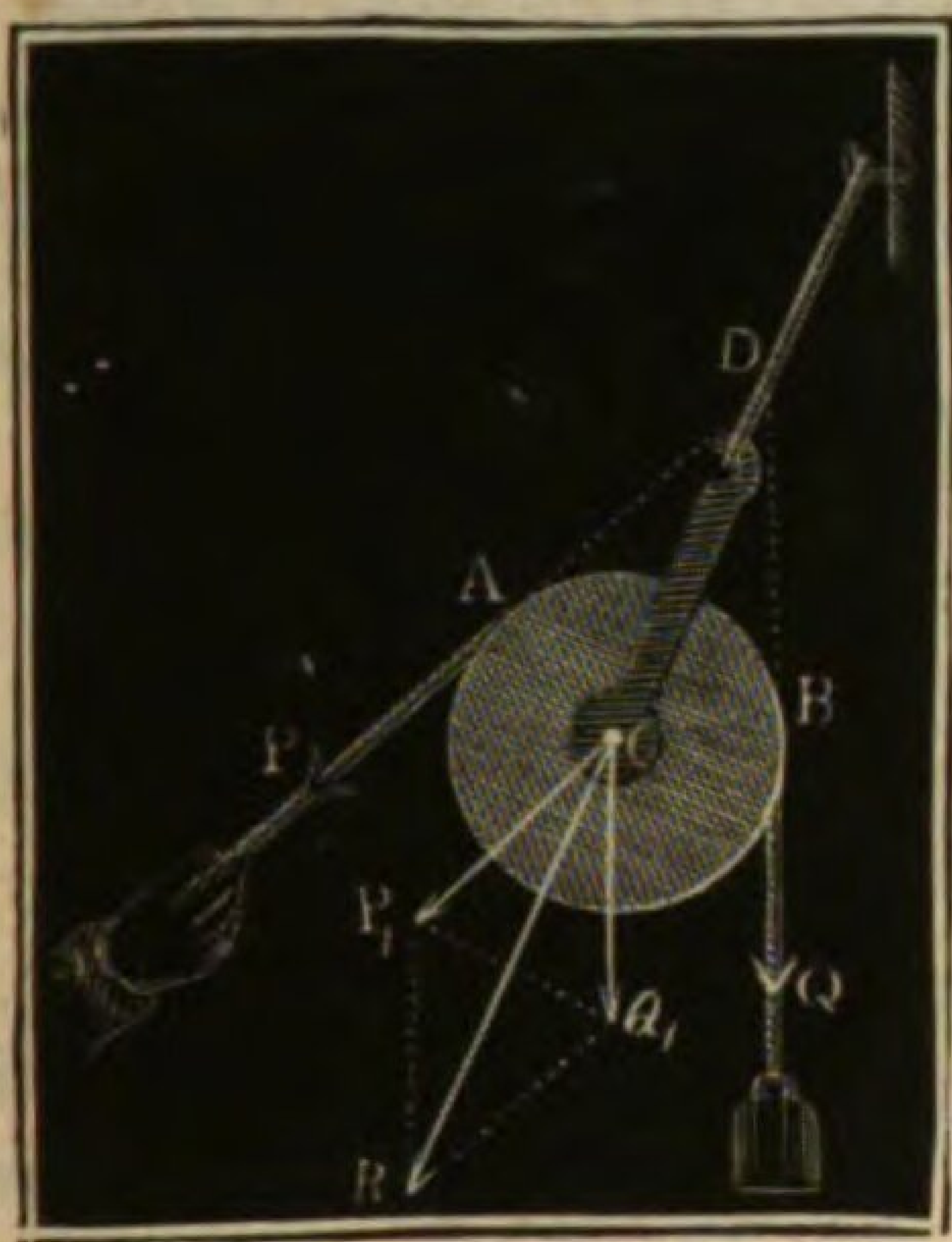
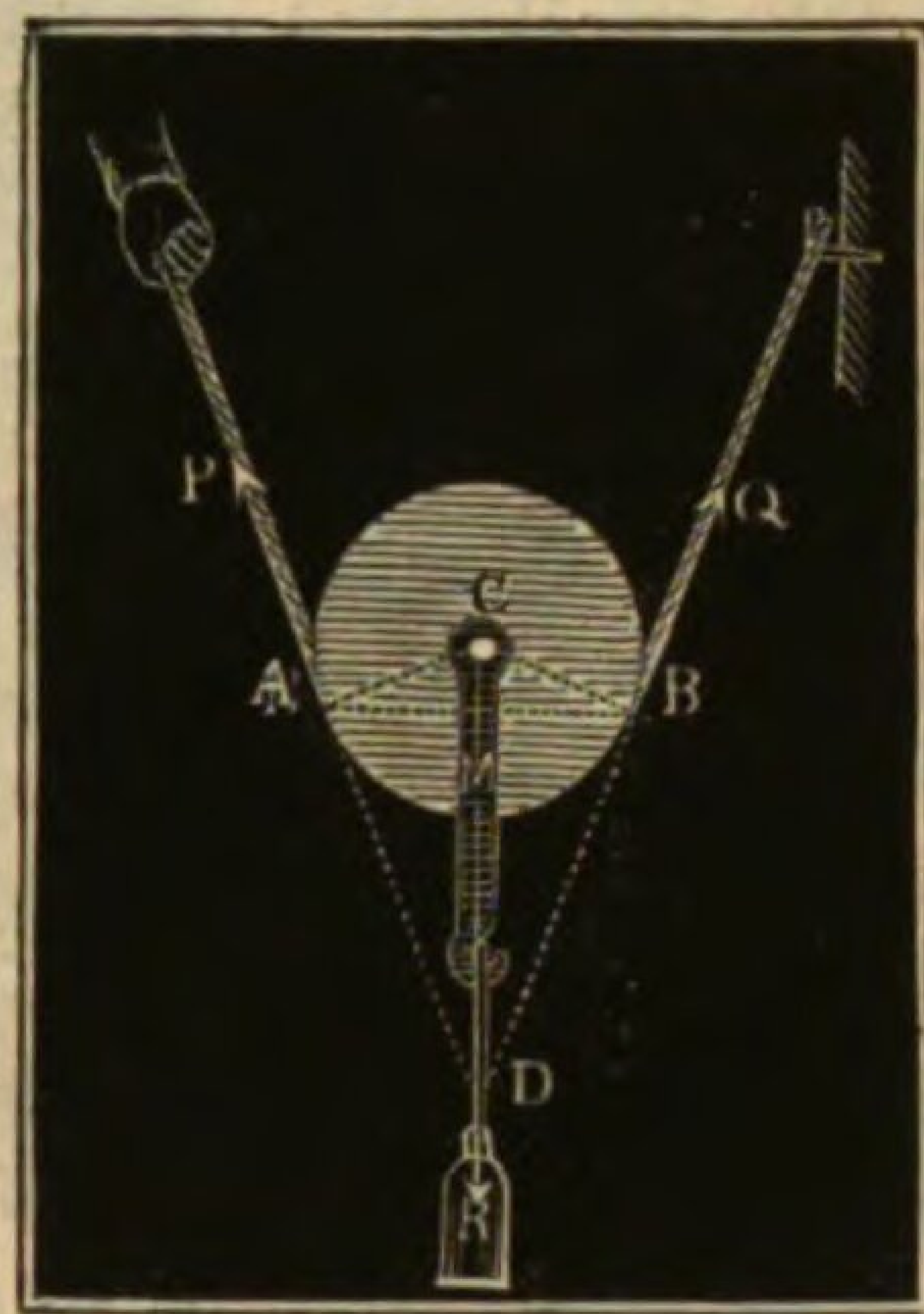


Fig. 203.



Umfang ein Seil liegt, dessen Enden durch Kräfte *P* und *Q* angespannt werden. Bei einer **festen Rolle** (franz. p. fixe, engl. fixed p.) ist das Gehäuse oder Lager (franz. chape, engl. block), worin ihre Axen oder Zapfen ruhen, unbeweglich, bei einer **losen Rolle** (franz. p. mobile, engl. moveable p., hingegen ist das Zapfengehäuse beweglich.

Im Gleichgewichtszustande einer jeden Rolle sind die Kräfte *P* und *Q* an den Seilenden gleich groß, denn jede Rolle ist ein gleicharmiger Winkelhebel, den man erhält, wenn man von der Axe *C* Perpendikel *CA* und *CB* auf die Kräfte- oder Seilrichtungen *DP* und *DQ* fällt. Auch ist klar, daß die Kräfte *P* und *Q* bei irgend einer Drehung um *C* einerlei Weg, nämlich $r\varphi$, zurücklegen, wenn r den Halbmesser $CA = CB$ und φ^0 den Umdrehungswinkel bezeichnet, und daß sich auch hieraus auf die Gleichheit zwischen *P* und *Q* schließen läßt. Aus den Kräften *P* und *Q* entspringt aber eine vom Zapfenlager aufzunehmende Mittelkraft $CR = R$, die von dem Winkel $ADB = \alpha$, unter welchem die Seilrichtungen zusammenstoßen, abhängig ist und sich als Diagonale des aus *P* und α zu construirenden Rhombus CP_1RQ_1, $R = 2\,P\,cos.\,\frac{\alpha}{2}$ ergiebt.

§. 151. Bei der festen Rolle, Fig. 202, besteht die Kraft *Q* an einem Seilende in der zu überwindenden oder zu hebenden Last, es ist daher hier **Kraft gleich Last**, und es bewirkt die Anwendung dieser Rolle nichts weiter als eine Richtungsveränderung. Bei der losen Rolle, Fig. 203, hingegen wirkt die Last *R* an dem hakenförmigen Ende des Zapfenlagers,

Rolle. während das eine Seilende an einem unbeweglichen Gegenstande befestigt ist; hier ist also die Kraft $P = \frac{R}{2 \cos. \frac{\alpha}{2}}$ zu setzen. Bezeichnen wir die Sehne AMB, welche dem mit Seil bedeckten Bogen entspricht, durch a und den Halbmesser $CA = CB$, wie vorhin durch r, so ist $a = 2\ AM = 2 . CA \cos. CAM = 2 CA \cos. ADM = 2\ r \cos. \frac{\alpha}{2}$, es läßt sich daher $\frac{r}{a} = \frac{1}{2 \cos. \frac{\alpha}{2}}$ und ebenso $\frac{P}{R} = \frac{r}{a}$ setzen. Diesem nach verhält sich also bei der losen Rolle die Kraft zur Last, wie der Halbmesser der Rolle zur Sehne des Seilbogens.

Fig. 204.



Ist $a = 2r$, bedeckt also das Seil einen Halbkreis, Fig. 204, so fällt die Kraft am kleinsten, nämlich $P = \frac{1}{2} R$ aus; ist $a = r$, also 60^0 von der Rolle mit Seil bedeckt, so hat man $P = R$. Je kleiner nun a ausfällt, desto größer wird P, und für ein unendlich kleines a, d. h. für eine unendlich kleine Seilbedeckung ist die Kraft P unendlich groß. Bei den Wegen tritt ein umgekehrtes Verhältniß ein; ist s der Weg von P, welcher einem Wege h von R entspricht, so hat man $Ps = Rh$, daher $\frac{s}{h} = \frac{a}{r}$.

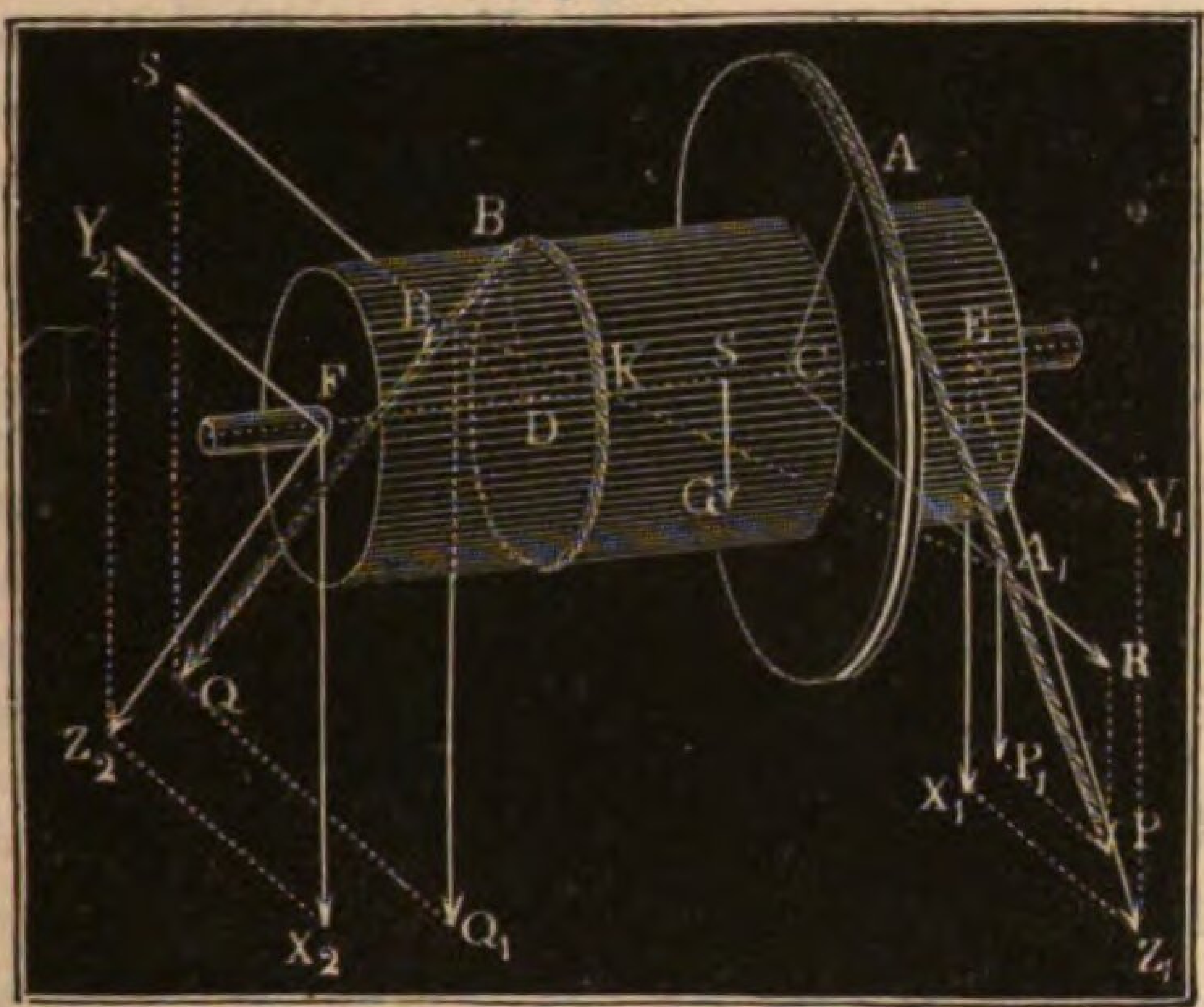
Die lose Rolle ist also ein Mittel zur Kraftveränderung; es läßt sich durch dieselbe z. B. eine gegebene Last durch eine kleinere Kraft heben; in dem Verhältnisse aber, um welches man an Kraft gewinnt, verliert man an Weg.

Anmerkung. Von der Zusammensetzung der Rollen zu Rollen- und Flaschenzügen, sowie von dem Einflusse der Reibung und des Steifigkeitswiderstandes wird später ausführlich gehandelt werden.

Radwelle. §. 152. Die Radwelle (franz. roue sur l'arbre, engl. wheel and axle) ist eine feste um eine gemeinschaftliche Axe drehbare Verbindung, $ABFE$, Fig. 205 (a. f. S.), von zwei festen Rollen oder Rädern. Das kleinere von diesen Rädern heißt Welle (franz. arbre, engl. axle), das größere aber Rad (franz. roue, engl. wheel). Die runden Enden E und F, womit die Vorrichtung aufruht, heißen Zapfen (franz. tourillons, engl. trunnions). Die Umdrehungsaxe einer Radwelle ist entweder horizontal, oder vertikal — oder schief. Hier soll zunächst nur von derjenigen Rad-

welle die Rede sein, welche sich um eine horizontale Axe dreht; auch Radwelle.
wollen wir hier voraussetzen, daß die Kräfte P und Q oder Kraft P und Last Q an den Enden vollkommen biegsamer Seile wirken, die um die Umfänge des Rades und der Welle gelegt sind. Die zu beantwortenden Fragen sind: in welchem Verhältnisse stehen Kraft P und Last Q zu einander, und welche Drücke haben die Zapfenlager bei E und F aufzunehmen?

Fig. 205.



Denken wir uns durch die Axe CD eine Horizontalebene gelegt und die Angriffspunkte A und B der Kraft P und Last Q in diese Ebene versetzt, denken wir uns also die Kräfte P und Q in A_1 und B_1 angreifend. Sind die Winkel AA_1C und BB_1D, welche beide Kräfte mit dem Horizonte einschließen, $= \alpha$ und β, so lassen sich diese Kräfte durch die Horizontalkräfte $R = P\, cos.\, \alpha$, $S = Q\, cos.\, \beta$ und durch die Vertikalkräfte $P_1 = P\, sin.\, \alpha$ und $Q_1 = Q\, sin.\, \beta$ ersetzen. Die Horizontalkräfte sind nach der Axe gerichtet, können in C und D angreifend angenommen und deshalb von der Axe vollkommen aufgenommen werden. Die Vertikalkräfte P_1 und Q_1 hingegen suchen die Radwelle um die Axe zu drehen. Ist K der Durchschnitt zwischen der die Angriffspunkte A_1 und B_1 verbindenden Linie mit der Axe CD, so sind KA_1 und KB_1 die Hebelarme von P_1 und Q_1, und es ist Gleichgewicht um K und also auch um CD, wenn

$$P_1 . KA_1 = Q_1 . KB_1, \text{ oder, da } \frac{KA_1}{KB_1} = \frac{CA_1}{DB_1}, \text{ wenn}$$

$$P_1 . CA_1 = Q_1 . DB_1, \text{ oder, da } \frac{P_1}{P} = \frac{CA}{CA_1} \text{ und}$$

$$\frac{Q_1}{Q} = \frac{DB}{DB_1} \text{ ist,}$$

$$\frac{P.CA}{CA_1} . CA_1 = \frac{Q.DB}{DB_1} . DB_1, \text{ d. i.}$$

$$P.CA = Q.DB, \text{ oder } Pa = Qb,$$

wo a und b die Hebelarme der Kraft und Last oder die Halbmesser des Rades und der Welle bezeichnen. Bei einer **Radwelle ist also, wie**

Radwelle. bei jedem Hebel, das statische Kraftmoment gleich dem statischen Lastmomente.

§. 153. Die Kräfte P_1 und Q_1 erzeugen in K einen Vertikaldruck $P_1 + Q_1$, zu dem sich noch das im Schwerpunkte S angreifende Gewicht G der ganzen Radwelle gesellt. Beide Zapfenlager E und F haben also den Vertikaldruck $P_1 + Q_1 + G = P sin. \alpha + Q sin. \beta + G$ auszuhalten. Setzen wir die ganze Länge der Radwelle, von Zapfen E zu Zapfen F gemessen, $= l$, die Theile $EC = l_1$, $CD = l_2$, $DF = l_3$, also $l = l_1 + l_2 + l_3$ und die Entfernungen ES und FS des Schwerpunktes S von den Lagern $= d_1$ und $= d_2$, also auch $l = d_1 + d_2$, so bekommen wir, da noch

$$\frac{DK}{DC} = \frac{P_1}{P_1+Q_1}, \text{ also } DK = \frac{P_1 l_2}{P_1+Q_1}$$

ist, für den Vertikaldruck X_1 im Zapfen E:

$$X_1 . EF = G . FS + (P_1 + Q_1) FK,$$

$$X_1 = \frac{G d_2 + (P_1 + Q_1)\left(l_3 + \frac{P_1}{P_1+Q_1} \cdot l_2\right)}{l}, \text{ d. i.}$$

$$X_1 = \frac{G d_2 + (P_1 + Q_1) l_3 + P_1 l_2}{l}.$$

Dagegen für den Vertikaldruck X_2 im Zapfen F:

$$X_2 . EF = G . ES + (P_1 + Q_1) EK, \text{ d. i.}$$

$$X_2 = \frac{G d_1 + (P_1 + Q_1)\left(l_1 + \frac{Q_1}{P_1+Q_1} \cdot l_2\right)}{l}, \text{ d. i.}$$

$$X_2 = \frac{G d_1 + (P_1 + Q_1) l_1 + Q_1 l_2}{l}.$$

Was noch die Horizontalkräfte R und S betrifft, so haben diese in Beziehung auf F die Momente $R . FC = R(l_2 + l_3)$ und $S . FD = S . l_3$, und in Beziehung auf E: $S . ED = S(l_1 + l_2)$ und $R . EC = R l_1$; setzen wir daher die von ihnen hervorgebrachten Horizontaldrücke auf die Zapfen E und $F = Y_1$ und Y_2, so erhalten wir:

$$Y_1 . FE = R . FC - S . FD, \text{ also}$$

$$Y_1 = \frac{R(l_2 + l_3) - S l_3}{l}, \text{ und}$$

$$Y_2 . FE = S . ED - R . EC, \text{ also}$$

$$Y_2 = \frac{S(l_1 + l_2) - R l_1}{l}.$$

Aus X_1 und Y_1 folgt der gesammte Zapfendruck in E:

$Z_1 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2}$, und ebenso aus X_2 und Y_2 derselbe in F:

$Z_2 = \sqrt{X_2^2 + Y_2^2}$.

Sind endlich noch φ und ψ die Winkel, welche die Richtungen dieser Drücke mit dem Horizonte bilden, so hat man Radwelle.

$$tang.\ \varphi = \frac{X_1}{Y_1} \text{ und } tang.\ \psi = \frac{X_2}{Y_2}.$$

Beispiel. Die Last Q einer Radwelle zieht senkrecht nieder und beträgt 365 Pf.; der Halbmesser des Rades: a ist $= 1^3/_4$ Fuß; der Halbmesser der Welle: $b = {}^3/_4$ Fuß; das Gewicht der leeren Radwelle beträgt 200 Pf; ihr Schwerpunkt steht von den Zapfenlagen E und F um $d_1 = 1^1/_2$ und $d_2 = 2^1/_2$ Fuß ab, das Radmittel ist um $l_1 = {}^3/_4$ Fuß vom Zapfen E und die Vertikalebene, in welcher die Last wirkt, ist um $l_3 = 2$ Fuß vom Zapfen F entfernt; wenn nun die zur Herstellung des Gleichgewichtes nöthige Kraft P am Rade, unter einem Winkel α von 50 Grad vom Horizonte abweichend, niederzieht, wie groß wird dieselbe ausfallen und welches werden die Zapfendrücke sein? Es ist $Q = 365$, $\beta = 90^0$, folglich $Q_1 = Q\ sin.\ \beta = Q$ und $S = Q\ cos.\ \beta = 0$, ferner P unbekannt und $\alpha = 50^0$, daher $P_1 = P\ sin.\ \alpha = 0{,}7660\ .\ P$ und $R = P\ cos.\ \alpha = 0{,}6428\ .\ P$; nun ist aber $a = 1^3/_4 = {}^7/_4$ und $b = {}^3/_4$, es folgt daher $P = \frac{b}{a} Q = {}^3/_7 . 365 = 156{,}4$ Pf., $P_1 = 119{,}8$ und $R = 100{,}5$.

Weil ferner $G = 200$, $d_1 = {}^3/_2$, $d_2 = {}^5/_2$, $l_1 = {}^3/_4$, $l_3 = 2$, $l = {}^3/_2 + {}^5/_2 = 4$, und $l_2 = l - (l_1 + l_3) = 4 - {}^{11}/_4 = {}^5/_4$, so ergiebt sich der Vertikaldruck in E:

$$X_1 = \frac{200 . {}^5/_2 + (365 + 119{,}8) . 2 + 119{,}8 . {}^5/_4}{4} = \frac{1619{,}35}{4} = 404{,}8 \text{ Pf.};$$

der Vertikaldruck in F:

$$X_2 = \frac{200 . {}^3/_2 + (365 + 119{,}8) . {}^3/_4 + 365 . {}^5/_4}{4} = \frac{1119{,}85}{4} = 280{,}0 \text{ Pf.}$$

Diese beiden Kräfte geben zusammen, wie sehr recht,

$$X_1 + X_2 = Q + G + P_1 = 684{,}8 \text{ Pf.}$$

Die Horizontalkraft im Zapfen E ist:

$$Y_1 = \frac{100{,}5 . ({}^5/_4 + 2) - 0 . 2}{4} = 81{,}7 \text{ Pf. und die in } F:$$

$$Y_2 = \frac{0 . ({}^5/_4 + {}^3/_4) - 100{,}5 . {}^3/_4}{4} = -18{,}8 \text{ Pf.};$$

die Summe dieser Kräfte ist richtig $= R + S = 100{,}5$ Pf.

Der Zapfendruck in E ist unter dem Winkel φ gegen den Horizont gerichtet, für welchen man hat:

$$tang.\ \varphi = \frac{X_1}{Y_1} = \frac{404{,}8}{81{,}7},\ Log.\ tang.\ \varphi = 0{,}69502,\ \varphi = 78^0,35'.$$

Der Druck selbst ist: $Z_1 = \frac{X_1}{sin.\ \varphi} = 413{,}0$ Pf.

Im Zapfen F ist hingegen für die Neigung ψ des Zapfendruckes:

$$tang.\ \psi = \frac{X_2}{Y_2} = \frac{280{,}0}{18{,}8},\ Log.\ tang.\ \psi = 1{,}17300,\ \psi = 86^0,9',5;$$

und dieser Druck selbst: $Z_2 = \frac{Y_2}{cos.\ \psi} = 280{,}6$ Pf.

Fünftes Kapitel.

Die Widerstände der Reibung und Steifigkeit.

Reibung. §. 154. Wir haben seither angenommen (§. 128), daß zwei Körper nur durch Kräfte winkelrecht zur gemeinschaftlichen Berührungsebene auf einander wirken können. Wären diese Körper vollkommen starr und ihre Oberflächen an den Stellen der Berührung vollkommen mathematische, d. h. auch nicht von den kleinsten ungesetzmäßigen Erhabenheiten und Vertiefungen unterbrochen, so würde dieses Gesetz auch durch die Erfahrung vollkommen bestätigt werden; weil aber jeder materielle Körper einen gewissen Grad von Elasticität, oder nach Befinden Weichheit, besitzt, und weil die Oberfläche eines jeden Körpers, selbst wenn sie polirt oder in hohem Grade geglättet ist, noch kleine Erhöhungen und Vertiefungen hat und in Folge der Porosität der Materie kein Continuum bildet, so findet bei der gegenseitigen Wirkung zweier sich berührenden Körper auch immer ein gegenseitiges Eindrücken und Eingreifen der Theile an der Berührungsstelle Statt, wodurch sich ein Zusammenhang zwischen beiden Körpern bildet, der nur durch eine besondere Kraft, deren Richtung in die Berührungsebene selbst fällt, aufgehoben werden kann.

Dieser, durch das Eindringen und Ineinandergreifen der sich berührenden Körper hervorgebrachte Zusammenhang und der daraus entspringende, in der Berührungsebene wirkende Widerstand ist es, welcher den Namen Reibung (franz. frottement, engl. friction) erhalten hat. Die Reibung tritt bei der Bewegung der Körper als eine passive Kraft oder als Widerstand (Reibungswiderstand) auf, weil sie nur Bewegungen verhindert oder hemmt, dieselben aber nie erzeugt oder befördert. Sie läßt sich bei Untersuchungen in der Mechanik als eine Kraft einführen, die jeder Bewegung, deren Richtung in die Ebene der Berührung beider Körper fällt, entgegenwirkt. In welcher Richtung man auch einen auf einer horizontalen oder geneigten Ebene ruhenden Körper fortbewegt, immer wird die Reibung in der Richtung der Bewegung entgegenwirken, sie wird z. B. dem Hinabsinken auf der schiefen Ebene ebenso viel hinderlich sein als dem Hinaufgleiten auf derselben. Bei einem im Gleichgewichtszustande befindlichen Kräftesysteme erzeugt der kleinste Zusatz an Kraft Bewegung, so lange die Reibung außer Spiel bleibt; influirt aber dieselbe, so ist zur Störung des Gleichgewichtes ein größerer, von der Reibung abhängiger Zusatz an Kraft nöthig.

§. 155. Während der Ueberwindung der Reibung werden die in Berührung gekommenen Theile zusammengedrückt, die vorstehenden Theile umgebogen, nach Befinden abgerissen, abgebrochen u. s. w. Es hängt deshalb die Reibung nicht nur von der Rauhigkeit oder Glätte der reibenden Flächen, sondern auch von der materiellen Beschaffenheit der Körper selbst ab. Härtere Metalle geben z. B. meist weniger Reibung als weichere. Uebrigens lassen sich über die Abhängigkeit der Reibung von den natürlichen Eigenschaften der Körper a priori keine allgemeinen Regeln aufstellen; es ist vielmehr nöthig, mit Körpern von verschiedenen Materien Reibungsversuche anzustellen, um daraus die unter anderen Verhältnissen stattfindenden Reibungen zwischen Körpern von denselben Materien ermitteln zu können. Reibung.

Einen besonderen Einfluß auf die Reibung und auf das daraus hervorgehende Abreiben und Abnutzen der sich berührenden Körper üben die Schmieren (franz. les enduits, engl. the ungents) aus, mit denen man die sich reibenden Flächen bestreicht. Durch die ganz- oder halbflüssigen Schmiermittel, wie Oel, Unschlitt, Fett, Seife u. s. w., werden die Poren der Körper ausgefüllt und andere Rauhheiten vermindert, und überhaupt das tiefere Eindringen der Körper in einander verhindert, weshalb sie meist eine bedeutende Verminderung der Reibung herbeiführen.

Uebrigens ist die Reibung nicht mit der Adhäsion, d. h. mit demjenigen Zusammenhängen zweier Körper zu verwechseln, welches eintritt, wenn Körper in vielen Punkten in Berührung kommen und ein gegenseitiger Druck nicht stattfindet. Die Adhäsion wächst mit der Größe der Berührungsfläche und ist vom Drucke unabhängig, während bei der Reibung das Gegentheil statt hat. Bei kleinen Pressungen tritt sie in Beziehung auf die Reibung bedeutend hervor, sind aber die Pressungen groß, so ist sie nur ein kleiner Theil der Reibung und in der Regel ganz zu vernachlässigen. Schmieren, wie überhaupt alle flüssigen Körper, vermehren die Adhäsion, weil sie eine größere Anzahl von Berührungspunkten herstellen.

§. 156. Man unterscheidet zwei Arten der Reibung von einander, nämlich die gleitende und rollende oder wälzende. Die gleitende Reibung (franz. f. de glissement, engl. f. of sliding) ist derjenige Reibungswiderstand, welcher sich herausstellt, wenn sich ein Körper gleitend, d. h. so bewegt, daß alle Punkte desselben parallele Linien beschreiben. Die rollende oder wälzende Reibung (franz. f. de roulement, engl. f. of rolling) hingegen ist derjenige Widerstand, welcher beim Wälzen, d. h. bei derjenigen Bewegung eines Körpers entsteht, wo sich jeder Punkt progressiv und drehend zugleich bewegt und der Berührungspunkt auf dem bewegten Körper einen ebenso großen Weg zurück- Reibungsarten.

Reibungsarten. legt als auf dem ruhenden Körper. Ein gegen die Ebene HR sich stützender Körper M, Fig. 206, geht z. B. gleitend über die Ebene hin und hat somit gleitende Reibung zu überwinden, wenn alle Punkte desselben, wie A, B, C u. s. w., die parallelen Wege AA_1, BB_1, CC_1 u. s. w.

Fig. 206.

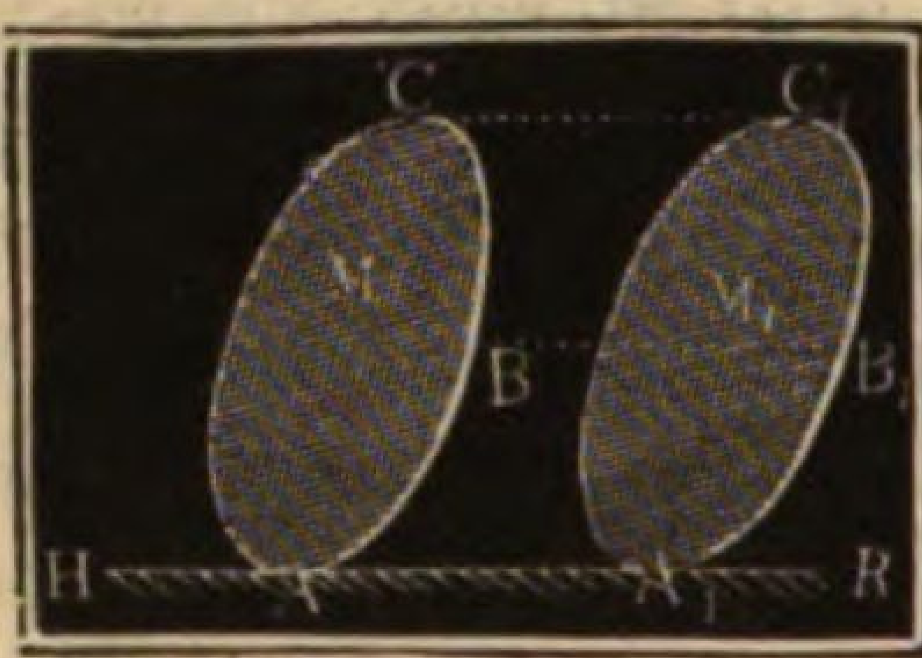
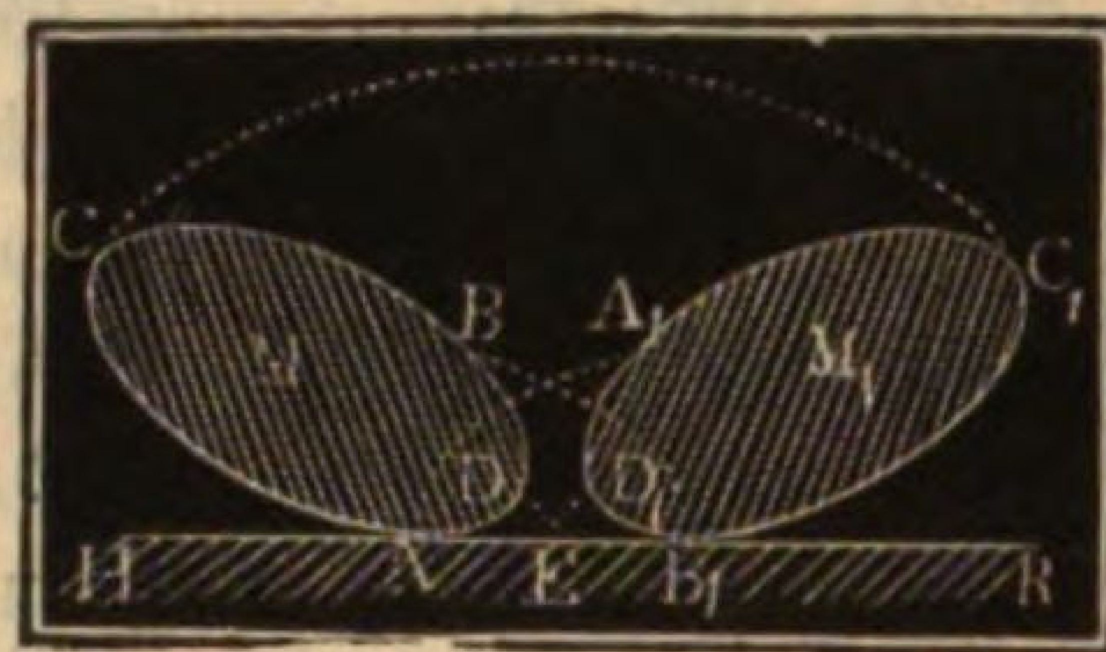


Fig. 207.



zurücklegen und deshalb immer nur dieselben Punkte des bewegten Körpers mit anderen der Unterlage in Berührung kommen. Der Körper M, Fig. 207, rollt oder wälzt sich dagegen auf der Ebene HR und hat dabei wälzende Reibung zu überwinden, wenn sich die Punkte A, B u. s. w. seiner Oberfläche so bewegen, daß Weg AB_1 = Weg $AB = A_1B_1$, ebenso Weg AD = Weg AE, Weg $B_1E = B_1D_1$ u. s. w. ist.

Eine besondere Art der gleitenden Reibung ist die Zapfenreibung, welche entsteht, wenn sich ein cylindrischer Zapfen in seinem Lager herumdreht. Man unterscheidet aber zweierlei Zapfen, liegende und stehende. Der liegende Zapfen (franz. tourillon, engl. axle, auch gudgeon) reibt sich an seinem Umfange oder Mantel, indem nach und nach andere Punkte desselben immer mit denselben Punkten des Lagers oder der Pfanne in Berührung kommen. Der stehende Zapfen (franz. und engl. pivot) hingegen drückt mit seiner kreisförmigen Basis gegen das Lager, während die Punkte der letzteren in concentrischen Kreisen herumgehen.

Besondere Reibungen entstehen noch, wenn ein Körper über einer Schneide oscillirt, wie z. B. beim Waagebalken, oder wenn ein schwingender Körper in einer Spitze aufliegt, wie z. B. die Magnetnadel.

Endlich unterscheidet man noch die Reibung der Ruhe (franz. f. de repos, engl. f. of quiescence), welche zu überwinden ist, wenn ein ruhender Körper in Bewegung gesetzt wird, von Reibung der Bewegung (franz. f. de mouvement, engl. f. of motion), welche sich der Fortsetzung einer Bewegung entgegensetzt.

Reibungsgesetze. §. 157. Die allgemeinen Gesetze, welchen die Reibung unterworfen ist, sind folgende:

1) Die Reibung ist proportional dem Normaldrucke zwischen den sich reibenden Körpern. Wenn man einen Körper jetzt noch einmal so stark gegen seine Unterlage drückt als vorher, so fällt die Reibung auch noch einmal so groß aus; der dreifache Druck giebt auch eine dreifache

Reibung u. s. w. Wenn dieses Gesetz bei kleinen Drücken Abweichungen von den Beobachtungen giebt, so hat man diese dem hier verhältnißmäßig größeren Einflusse der Adhäsion beizumessen. Reibungsgesetze.

2) Die Reibung ist **unabhängig** von der Größe der **Reibungs- oder Berührungsflächen**. Je größer die Reibungsflächen sind, desto größer ist zwar die Zahl der sich reibenden Theile, allein desto kleiner ist auch der Druck und deshalb auch die Reibung eines jeden Theiles; die Summe der Reibungen aller Theile ist deshalb bei einer größeren Fläche dieselbe wie bei einer kleineren, insofern der Druck und die übrigen Verhältnisse dieselben sind. Sind die Seitenflächen eines parallelepipedischen Ziegelsteines von gleicher materieller Beschaffenheit, so ist die Kraft zum Fortschieben desselben auf einer horizontalen Ebene dieselbe, man mag ihn mit der kleinsten oder mit der mittleren oder mit der größten Seitenfläche aufruhen lassen. Bei sehr großen Seitenflächen und kleinen Drücken scheint diese Regel wegen des Einflusses der Adhäsion eine Ausnahme zu erleiden.

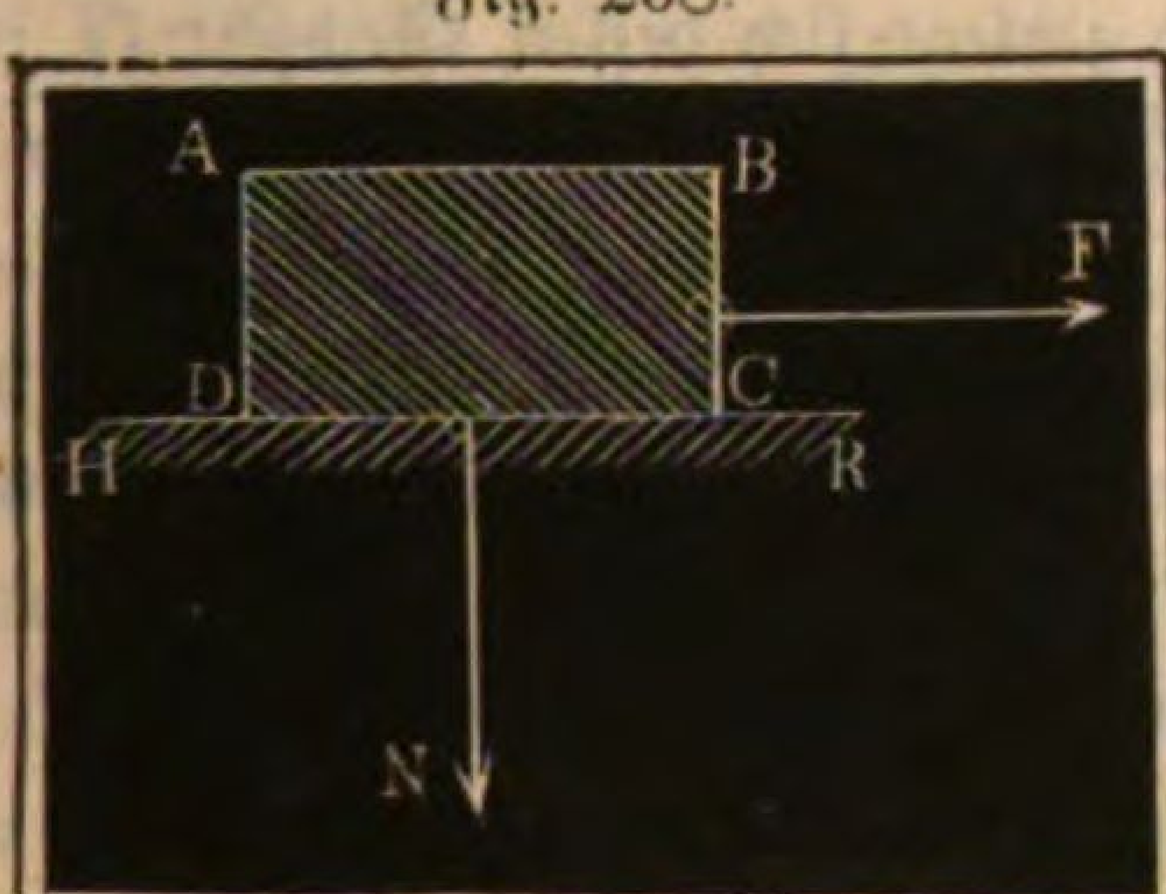
3) Die Reibung der Ruhe ist zwar meist größer als die der Bewegung, letztere aber ist von der Geschwindigkeit nicht abhängig; sie ist bei großen Geschwindigkeiten dieselbe wie bei kleinen Geschwindigkeiten.

4) Die Reibung eingeschmierter Flächen ist in der Regel kleiner als die uneingeschmierter und hängt weniger von den sich reibenden Körpern als von der Schmiere selbst ab.

5) Die drehende oder Zapfenreibung ist kleiner als die gemeine gleitende oder schiebende Reibung; die wälzende Reibung ist in den meisten Fällen so klein, daß sie in Rücksicht auf die gleitende Reibung überhaupt nicht in Betracht kommt.

§. 158. Aus dem ersten der im vorigen §. aufgeführten Gesetze läßt sich zunächst Folgendes ableiten. Ein Körper AC, Fig 208, drücke gegen seine Unterlage ein Mal mit der Kraft N und erfordere zum Fortziehen, d. h. zur Ueberwindung seiner Reibung, die Kraft F, und ein zweites Mal mit der Kraft N_1 und mache dann die Kraft F_1 nothwendig, um aus der Ruhe in Bewegung überzugehen. Nach dem Vorigen ist nun Reibungscoefficient.

Fig. 208.



$$\frac{F}{F_1} = \frac{N}{N_1}, \text{ und daher } F = \frac{F_1}{N_1} \cdot N.$$

Hat man durch einen Versuch die einem gewissen Drucke N_1 entsprechende Reibung F_1 gefunden, so findet

Reibungs-coefficient.

man hiernach, wenn die sich reibenden Körper und die übrigen Umstände dieselben sind, die einem andern Drucke N entsprechende Reibung F, indem man diesen Druck durch das Verhältniß $\left(\frac{F_1}{N_1}\right)$ zwischen den der ersten Beobachtung entsprechenden Werthen F_1 und N_1 multiplicirt.

Dieses Verhältniß der Reibung zum Drucke oder die Reibung für den Druck = Eins, z. B. 1 Pfund, heißt der Reibungscoefficient (franz. coëfficient du frottement, engl. coefficieut of friction) und soll in der Folge immer durch φ ausgedrückt werden, weshalb sich allgemein $F = \varphi . N$ setzen läßt.

Der Reibungscoefficient ist bei verschiedenen Materien und verschiedenen Zuständen der Reibung verschieden und muß deshalb durch besonders hierzu angestellte Versuche ermittelt werden.

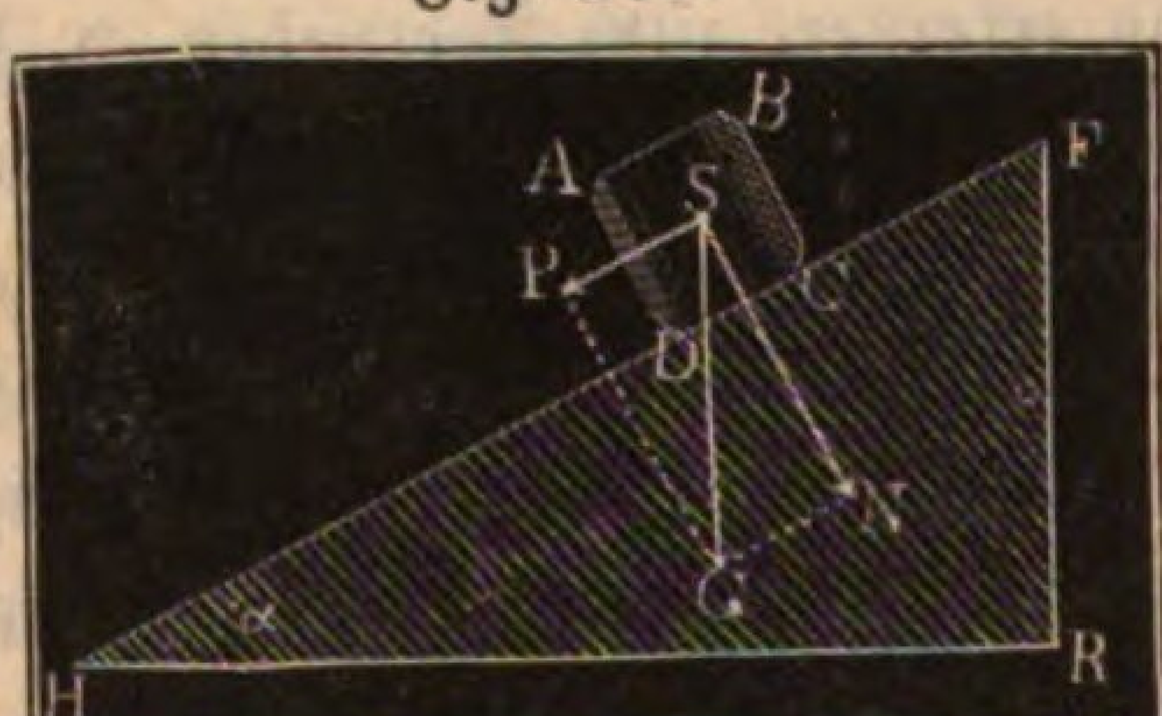
Wird der Körper AC um den Weg s auf der Unterlage fortgezogen, so hat man die Arbeit Fs zu verrichten; es ist also die von der Reibung beanspruchte mechanische Arbeit φNs gleich Product aus Reibungscoefficient, Normaldruck und Weg in der Berührungsebene. Ist die Unterlage ebenfalls beweglich, so hat man unter s den relativen Weg des Körpers zu verstehen.

Beispiele. 1) Wenn bei einem Drucke von 260 Pf. die Reibung 91 Pfund beträgt, so ist der entsprechende Reibungscoefficient $\varphi = {}^{91}/_{260} = {}^{7}/_{20} = 0{,}35$. 2) Um einen 500 Pf. schweren Schlitten auf einer horizontalen und sehr glatten Schneebahn fortzuziehen, ist bei einem Reibungscoefficienten $\varphi = 0{,}04$ die nöthige Kraft $F = 0{,}04 . 500 = 20$ Pf. 3) Wenn der Reibungscoefficient einer auf dem Straßenpflaster fortgezogenen Schleife 0,45 und die Belastung dieser 500 Pf. beträgt, so ist die erforderliche Arbeit, um diese Schleife 480 Fß. fortzuziehen, $\varphi Ns = 0{,}45 . 500 . 480 = 108000$ Fßpf.

Reibungswinkel und Reibungskegel.

§. 159. Liegt ein Körper AC, Fig. 209, auf einer schiefen Ebene FH, deren Neigungswinkel $FHR = \alpha$ ist, so zerlegt sich dessen Gewicht G in den Normaldruck $N = G \cos. \alpha$ und in die Parallelkraft $P = G \sin. \alpha$. Aus der ersteren Kraft entspringt nun die Reibung $F = \varphi\, G \cos. \alpha$, welche jeder Bewegung auf der Ebene entgegenwirkt, weshalb die Kraft zum Hinaufschieben auf der Ebene $= F + P = \varphi G \cos \alpha + G \sin. \alpha = (\sin. \alpha + \varphi \cos. \alpha)\, G$, dagegen die Kraft zum Hinabschieben $= F - P = (\varphi \cos. \alpha - \sin. \alpha)\, G$ ausfällt. Die letztere Kraft ist Null, d. h. der Körper erhält sich durch seine Reibung auf der

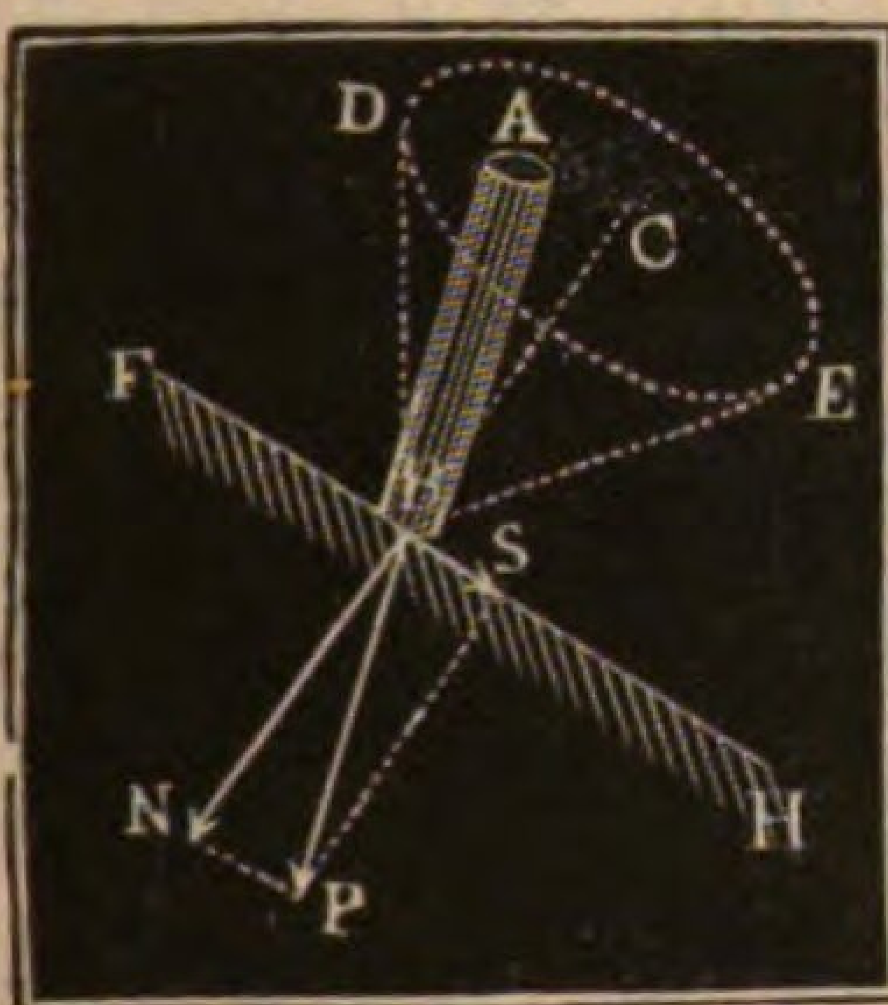
Fig. 209.



schiefen Ebene, wenn $sin.\alpha = \varphi cos.\alpha$, d. i. wenn $tang.\alpha = \varphi$ ist. So lange die schiefe Ebene einen Neigungswinkel α hat, dessen Tangente kleiner als φ ist, so lange bleibt der Körper auf der schiefen Ebene in Ruhe, ist aber die Tangente des Neigungswinkels wenig größer als φ, so gleitet der Körper auf der schiefen Ebene herab. Man nennt diesen Winkel, d. i. denjenigen, dessen Tangente dem Reibungscoefficienten gleich ist, Reibungs- auch Ruhewinkel (franz. angle du frottement, engl. angle of friction, angle of resistance). Es ergiebt sich hiernach durch Beobachtung des Reibungswinkels ϱ der Reibungscoefficient (für die Reibung der Ruhe), wenn man setzt $\varphi = tang.\ \varrho$. Reibungswinkel und Reibungskegel.

In Folge der Reibung nimmt die Oberfläche FH, Fig. 210, eines Körpers nicht nur den Normaldruck N eines andern Körpers AB, sondern auch dessen schiefen Druck P auf, wenn nur die Abweichung $NBP = \alpha$ der Richtung dieses Druckes von der Normale BN nicht den Reibungswinkel überschreitet, denn da die Kraft P den Normaldruck $BN = P.\ cos.\ \alpha$ und den Seiten- oder Tangentialdruck $BS = S = P\ sin.\ \alpha$ giebt und aus dem Normaldrucke $P\ cos.\ \alpha$ die jeder Bewegung in der Ebene FH entgegenwirkende Reibung $\varphi P cos.\alpha$ entsteht, so wird S eine Bewegung nicht hervorbringen können, also im Gleichgewicht bleiben, so lange $\varphi\ P\ cos.\ \alpha > P\ sin.\alpha$ oder $\varphi\ cos.\alpha > sin.\alpha$, d. i. $tang.\alpha < \varphi$ oder $\alpha < \varrho$ ist. Dreht man den Ruhewinkel $CBD = \varrho$ um die Normale CB, so beschreibt er einen Kegel, den man Reibungskegel (franz. cone de fr., engl. cone of resistance) nennen kann. Der Reibungskegel umschließt alle diejenigen Kraftrichtungen, bei welchen eine vollständige Aufnahme des schiefen Druckes stattfindet.

Fig. 210.

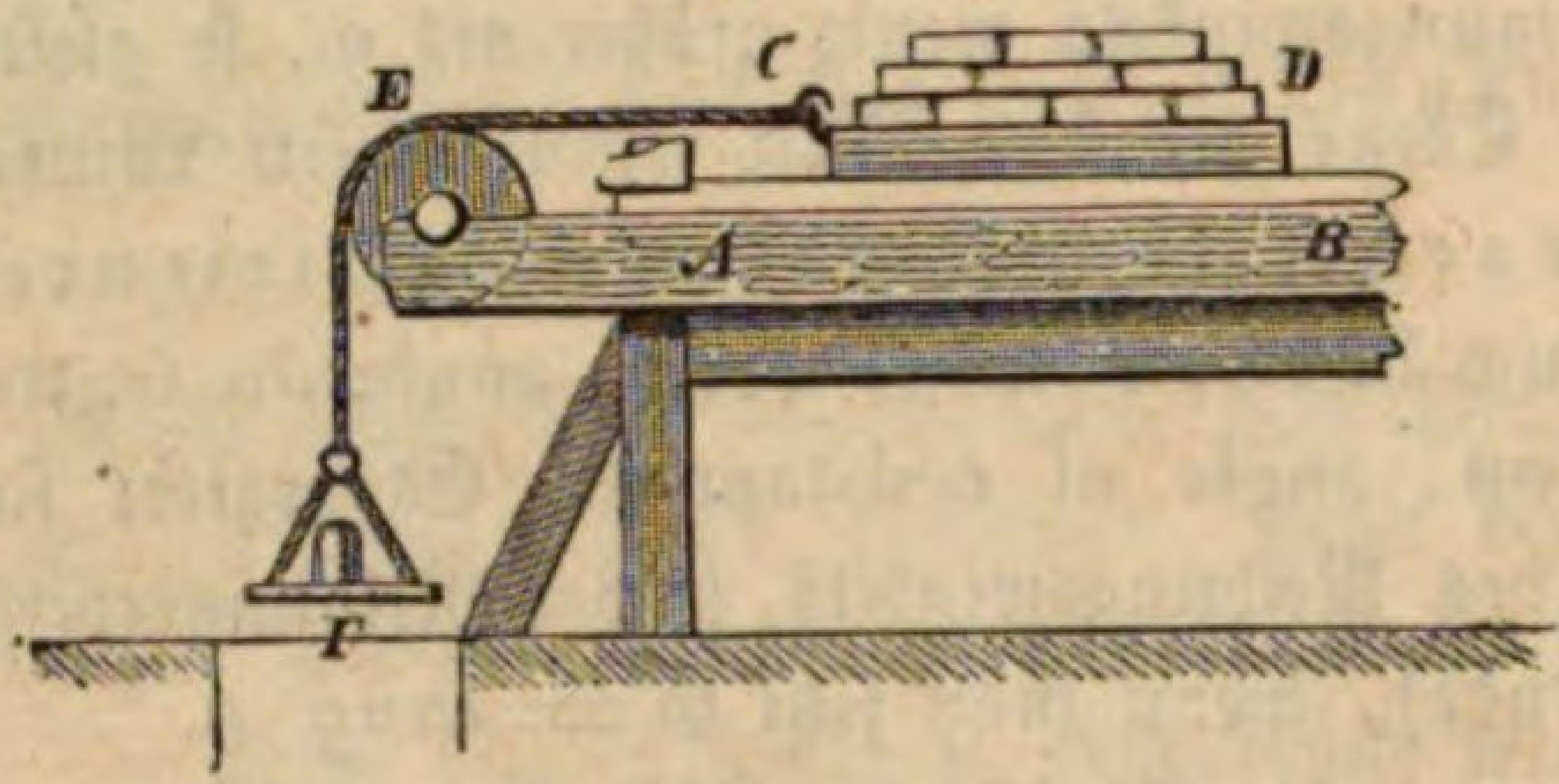


Beispiel. Um einen gefüllten und 200 Pf. schweren Kübel auf einer unter 50 Grad ansteigenden Holzbahn hinaufzuziehen, ist bei einem Reibungscoefficienten $\varphi = 0{,}48$ die nöthige Kraft: $P = (\varphi\ cos.\ \alpha + sin.\ \alpha)\ G = (0{,}48\ cos.\ 50^\circ + sin.\ 50^\circ).200 = (0{,}308 + 0{,}766).200 = 215$ Pf., um ihn hinunterzulassen, oder sein Hinuntergeben zu verhindern, ist dagegen die erforderliche Kraft $P = (\varphi\ cos.\ \alpha - sin.\ \alpha)\ G = -(sin.\ 50^\circ - 0{,}48.cos.\ 50^\circ)\ .\ 200$
$= -(0{,}766 - 0{,}308).200 = -\ 91{,}5$ Pf.

§ 160. Versuche über die Reibung sind von Vielen angestellt worden; am ausgedehntesten und im größten Maaßstabe ausgeführt sind aber die Versuche von Coulomb und Morin. Beide wendeten zur Erforschung der Reibungscoefficienten für die gleitende Bewegung einen auf einer horizontalen Bahn fortgleitenden Schlitten an, der durch ein über eine feste Reibungsversuche.

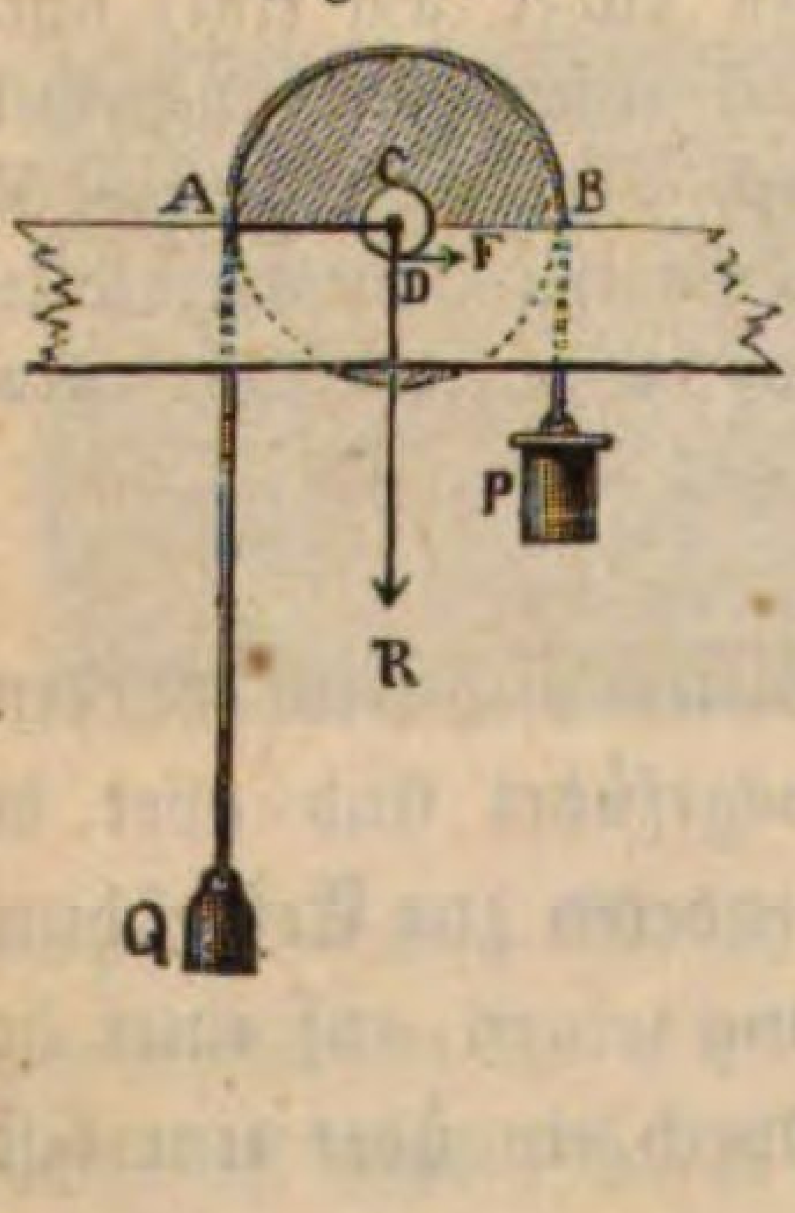
Reibungsversuche. Rolle weggelegtes und durch Gewichte angespanntes Seil fortgezogen wurde, wie in Fig. 211, wo AB die Bahn, CD den Schlitten, E die Rolle und F das sinkende Gewicht vorstellt, zu ersehen ist. Um die Reibungscoefficienten für verschiedene Materien zu erhalten, wurden nicht nur die Schlittenläufe, sondern die die Unterlage bildenden Balken mit möglichst abgeglätteten Schienen aus den zu untersuchenden Substanzen, wie Holz, Eisen u. s. w., bekleidet. Die Coefficienten für die Reibung der Ruhe ergaben sich aus dem Gewichte, welches nöthig war, um den Schlitten aus der Ruhe in Bewegung zu setzen, und die Coefficienten für die Reibung der Bewegung ließen sich mit Hülfe der Zeit t berechnen, welche der Schlitten brauchte, um einen gewissen Weg s zu durchlaufen. Ist G das Gewicht des Schlittens und P das Gewicht zum Fortziehen desselben, so hat man die Reibung $= \varphi G$, die bewegende Kraft $= P - \varphi G$ und die Masse $M = \frac{P+G}{g}$, es folgt daher nach §. 65 die Acceleration der entstehenden gleichförmig beschleunigten Bewegung: $p = \frac{P-\varphi G}{P+G} g$, und, durch Umkehrung, der Reibungscoefficient $\varphi = \frac{P}{G} - \frac{P+G}{G} \cdot \frac{p}{g}$. Es ist aber noch $s = \frac{1}{2} p t^2$ (§. 11), daher $p = \frac{2s}{t^2}$ und $\varphi = \frac{P}{G} - \frac{P+G}{G} \cdot \frac{2s}{gt^2}$.

Fig. 211.



Zur Ausmittelung der Reibungscoefficienten für die Zapfenreibung wurde eine feste Rolle ACB, Fig. 212, mit einem umgelegten und durch Gewichte P und Q angespannten Seile angewendet. Aus der Summe $P+Q$ der Gewichte ergab sich der Druck, und aus der Differenz $P-Q$ die Kraft am Umfang der Rolle, welche der Reibung $F = \varphi (P+Q)$ am Umfang des Zapfens das Gleichgewicht hält; ist nun $CA = a$ der Rollenhalbmesser und $CD = r$ der Zapfenhalbmesser, so hat man wegen der Gleichheit der statischen Momente $(P - Q)\, a = Fr = \varphi (P+Q)\, r$, und daher für die Reibung der Ruhe: $\varphi = \frac{P-Q}{P+Q} \cdot \frac{a}{r}$, dagegen für die

Fig. 212.



der Bewegung, wenn das Gewicht P in der Zeit t um s sinkt, und Q ebenso viel steigt: $\varphi = \left(\frac{P-Q}{P+Q} - \frac{2s}{gt^2}\right)\frac{a}{r}$. Reibungsversuche.

Anmerkung. Vor Coulomb hatten sich schon Amontons, Camus, Bülffinger, Muschenbroek, Ferguson, Vince u. A. mit der Reibung beschäftigt und Versuche über die Reibung angestellt. Die Ergebnisse aller dieser Untersuchungen haben jedoch für die Praxis wenig Werth, weil sie in zu kleinem Maaßstabe angestellt worden sind. Denselben Mangel haben selbst noch die Versuche von Ximenes, welche mit denen von Coulomb fast gleichzeitig angestellt wurden. Die Ergebnisse des Ximenes findet man in dem Werke »Teoria e Pratica delle resistenze de' solidi ne' loro attriti, Pisa 1782«. Die Versuche Coulomb's sind ausführlich beschrieben in dem Werke: »Théorie des machines simples etc. par Coulomb. Nouv. édit. 1821. Einen Auszug hiervon findet man in der Preisschrift von Metternich »vom Widerstande der Reibung, Frankfurt und Mainz 1789.« Die neuesten Versuche über die Reibung wurden von Rennie und Morin angestellt. Rennie wendete bei seinen Versuchen theils einen Schlitten auf horizontaler Bahn, theils auch eine schiefe Ebene an, von welcher er die Körper herabgleiten ließ und wobei er aus dem Reibungswinkel auf die Größe der Reibung schloß. Die Versuche Rennie's erstrecken sich auf mannichfaltige, in der Technik vorkommende Stoffe, als Eis, Tuch, Leder, Holz, Steine und Metalle; sie liefern auch wichtige Ergebnisse über die Abnutzung der Körper, allein der Apparat und die Art der Ausführung dieser Versuche lassen eine hinreichende Sicherheit, wie sie zumal die Versuche Morin's erreicht zu haben scheinen, nicht erwarten. Eine deutsche Bearbeitung der Rennie'schen Versuche liefert der 17. Band (1832) der Wiener Jahrbücher des K. K. polytechnischen Institutes, auch der 34. Band (1829) von Dingler's polytechnischem Journal. Die ausgedehntesten und einen hohen Grad von Sicherheit versprechenden Versuche sind von Morin zur Ausführung gebracht worden, obgleich nicht abgeleugnet werden kann, daß sie einige Zweifel und Unsicherheiten übrig, und noch dies und jenes zu wünschen lassen. Es ist hier nicht der Ort, die Methoden und Apparate bei diesen Versuchen zu beschreiben, wir können hier nur auf Morin's Schriften: »Nouvelles Expériences sur le frottement« u. s. w. verweisen. Eine vortreffliche Bearbeitung des Artikels »Reibung« und eine ziemlich ausführliche Beschreibung aller Versuche über die Reibung, namentlich auch der Morin'schen, giebt Brix in den Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleißes in Preußen, 16. und 17. Jahrgang, Berlin 1837 und 1838.

§. 161. Folgende Tabellen enthalten eine gedrängte Zusammenstellung der im Praktischen vorzüglich brauchbaren Coefficienten der gleitenden Reibung. Reibungstafeln.

Reibungstafeln.

Tafel I.

Reibungscoefficienten der Ruhe.

Namen der sich reibenden Körper.		Zustand der Flächen und Natur der Schmieren. Trocken.	Mit Wasser benetzt.	Mit Olivenöl.	Schweineschmalz.	Talg.	Trockene Seife.	Polirt und fettig.	Fettig und benetzt.
Holz auf Holz	kleinster,	0,30	0,65	—	—	0,14	0,22	0,30	—
	mittlerer,	0,50	0,68	—	0,21	0,19	0,36	0,35	—
	größter Werth.	0,70	0,71	—	—	0,25	0,44	0,40	—
Metall auf Metall	kleinster,	0,15	—	0,11					
	mittlerer,	0,18	—	0,12	0,10	0,11	—	0,15	—
	größter Werth.	0,24	—	0,16					
Holz auf Metall		0,60	0,65	0,10	0,12	0,12	—	0,10	—
Hanf in Seilen, Zöpfen oder Gurten auf Holz	kleinster,	0,50							
	mittlerer,	0,63	0,87						
	größter Werth	0,80							
Dickes Sohlenleder zu Liderungen auf Holz od. Gußeisen	hochkantig,	0,43	0,62	0,12	—	—	—	—	0,27
	flach . .	0,62	0,80	0,13					
Schwarze Lederriemen über Trommeln	von Holz	0,47							
	von Metall.	0,54	—	—	—	—	—	0,28	0,38
Steine oder Ziegel auf Steinen oder Ziegeln, glatt bearbeitet	kleinster,	0,67							
	größter Werth.	0,75							
Steine u. Schmiedeeisen.	kleinster,	0,42							
	größter Werth.	0,49							
Hirnholz auf Steinen		0,64							

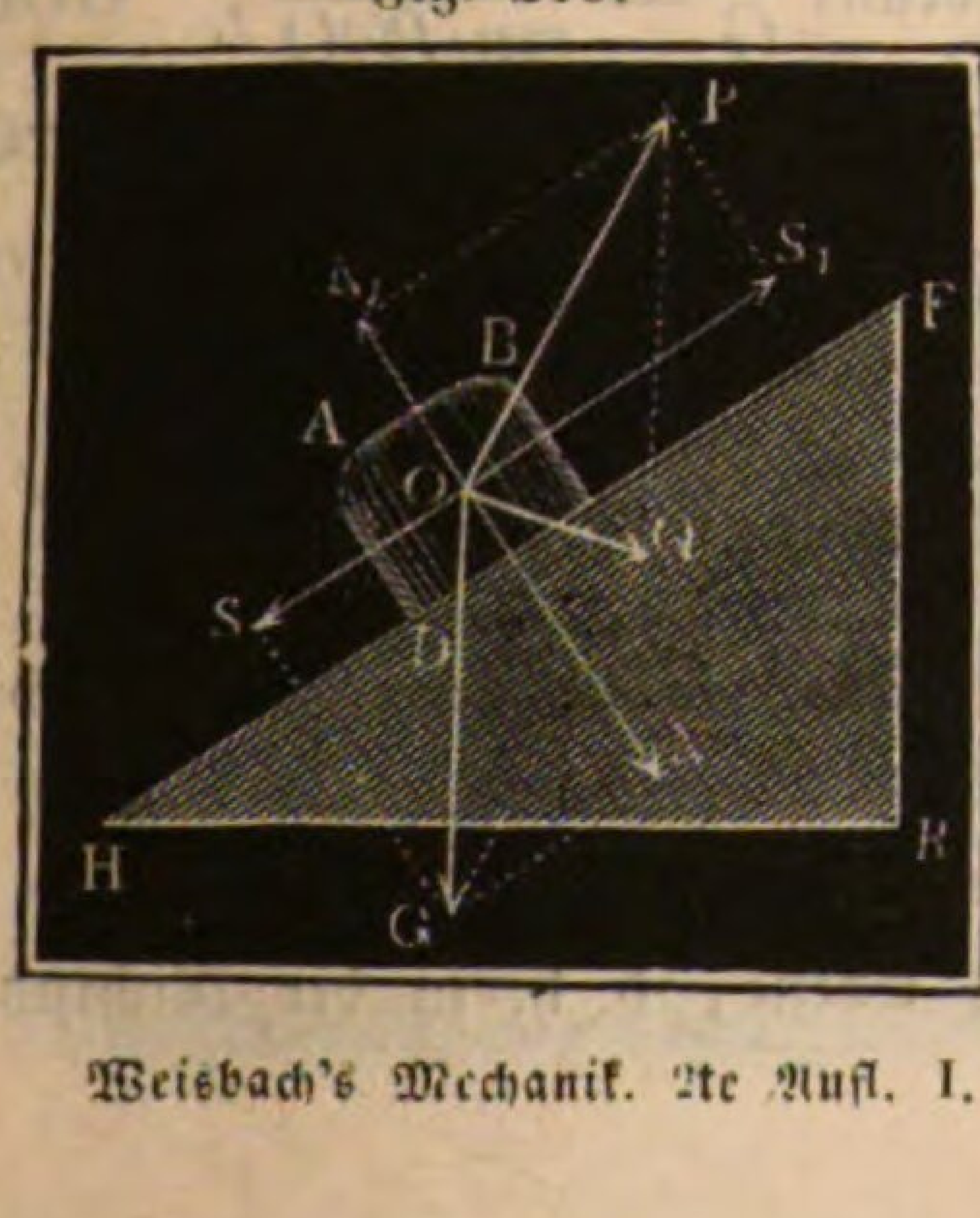
Tafel II. Reibungstafeln.

Reibungscoefficienten der Bewegung.

Namen der sich reibenden Körper.		Zustand der Flächen und Art der Schmieren. Trocken.	Mit Wasser	Olivenöl.	Schweineschmalz.	Talg.	Schweinefett und Graphit.	Reine Wagenschmiere.	Trockne Seife.	Fettig.
Holz auf Holz	kleinster,	0,20	—	—	0,06	0,06	—	—	0,14	0,08
	mittlerer,	0,36	0,25	—	0,07	0,07	—	—	0,15	0,12
	größter Werth.	0,48	—	—	0,07	0,08	—	—	0,16	0,15
Metall auf Metall	kleinster,	0,15	—	0,06	0,07	0,07	0,06	0,12	—	0,11
	mittlerer,	0,18	0,31	0,07	0,09	0,09	0,08	0,15	0,20	0,13
	größter Werth.	0,24	—	0,08	0,11	0,11	0,09	0,17	—	0,17
Holz auf Metall	kleinster,	0,20	—	0,05	0,07	0,06	—	—	—	0,10
	mittlerer,	0,42	0,24	0,06	0,07	0,08	0,08	0,10	0,20	0,14
	größter Werth.	0,62	—	0,08	0,08	0,10	—	—	—	0,16
Hanfseile, Zöpfe u. s. w.	auf Holz	0,45	0,33							
	auf Eisen	—	—	0,15	—	0,19				
Sohlenleder, flach auf Holz od. Metall	roh,	0,54	0,36	0,16	—	0,20				
	geklopft,	0,30	—							
	fettig	—	0,25							
Desgl. hochkantig, für Kolbenliderung	trocken	0,34	0,31	0,14	—	0,14				
	fettig	—	0,24							

Anmerkung. Vollständigere Tabellen der Reibungscoefficienten enthält der »Ingenieur, Seite 403 u. f. w.« Die Reibungscoefficienten lockerer Massen u. s. w. werden im zweiten Theile, bei der Theorie des Erddruckes, mitgetheilt.

Fig. 213.



§. 162. Die Theorie der gleitenden Reibung findet ihre vorzüglichste Anwendung bei der Untersuchung des Gleichgewichtes von einem Körper AC auf der schiefen Ebene FH, Fig. 213. Ist, in Uebereinstimmung mit §. 135, $FHR = \alpha$ der Neigungswinkel der schiefen Ebene, und $POS_1 = \beta$ der Winkel, welchen die Kraft P mit der schiefen Ebene einschließt, so hat man die aus dem Gewichte G des Schiefe Ebene.

Schiefe Ebene.

Körpers entspringende Normalkraft $N = G\cos.\alpha$, dagegen die Kraft zum Herabgleiten $= S = G\sin.\alpha$, ferner die Kraft N_1, mit welcher P den Körper von der Ebene abzuziehen sucht, $= P\sin.\beta$, und die Kraft S_1, mit welcher sie den Körper auf der Ebene hinaufzieht $= P\cos.\beta$. Der übrig bleibende Normaldruck ist $N - N_1 = G\cos.\alpha - P\sin.\beta$, folglich die Reibung $F = \varphi\,(G\cos.\alpha - P\sin.\beta)$. Kommt es darauf an, die Kraft P zum Hinaufziehen des Körpers auf der schiefen Ebene zu finden, so ist die Reibung zu überwinden, es muß also sein: $S_1 = S + F$, d. i.

$$P\cos.\beta = G\sin.\alpha + \varphi\,(G\cos.\alpha - P\sin.\beta).$$

Soll aber die Kraft bestimmt werden, welche den Körper am Herabgleiten hindert, so kommt die Reibung der Kraft zu Hülfe, es ist also $S_1 + F = S$, d. i. $P\cos.\beta + \varphi\,(G\cos.\alpha - P\sin.\beta) = G\sin.\alpha$.

Hiernach bestimmt sich die Kraft

für den ersten Fall: $P = \dfrac{\sin.\alpha + \varphi\cos.\alpha}{\cos.\beta + \varphi\sin\beta} \cdot G$,

und für den zweiten: $P = \dfrac{\sin.\alpha - \varphi\cos.\alpha}{\cos.\beta - \varphi\sin.\beta} \cdot G$.

Führt man den Reibungswinkel ϱ ein, indem man $\varphi = tang.\,\varrho = \dfrac{\sin.\varrho}{\cos.\varrho}$ setzt, so erhält man $P = \dfrac{\sin.\alpha.\cos\varrho \pm \cos.\alpha.\sin.\varrho}{\cos.\beta.\cos.\varrho \pm \sin.\beta.\sin.\varrho} \cdot G$,

oder, nach bekannten Sätzen der Trigonometrie: $P = \dfrac{\sin.\,(\alpha \pm \varrho)}{\cos.\,(\beta \mp \varrho)} \cdot G$,

und es gelten die oberen Zeichen, wenn es darauf ankommt, Bewegung hervorzubringen, dagegen die unteren, wenn Bewegung zu verhindern ist.

Die letzte Formel findet man auch durch eine einfache Anwendung des Kräfteparallelogrammes. Da ein Körper noch diejenige Kraft eines anderen Körpers aufnimmt, welche um den Reibungswinkel ϱ von der Normale seiner Oberfläche abweicht (§. 159), so findet in dem vorliegenden Falle Gleichgewicht statt, wenn die Mittelkraft $OQ = Q$ aus den Kräften P und G mit der Normale ON den Winkel $NOQ = \varrho$ einschließt. Setzt man nun in der allgemeinen Formel $\dfrac{P}{G} = \dfrac{\sin.GOQ}{\sin.POQ}$, $GOQ = GON + NOQ = \alpha + \varrho$, und $POQ = POS_1 + S_1OQ = \beta + 90^0 - \varrho$, so erhält man $\dfrac{P}{G} = \dfrac{\sin.(\alpha+\varrho)}{\sin.(\beta - \varrho + 90^0)} = \dfrac{\sin.(\alpha+\varrho)}{\cos.(\beta - \varrho)}$, und für einen negativen Werth von ϱ:

$\dfrac{P}{G} = \dfrac{\sin.(\alpha - \varrho)}{\cos.(\beta + \varrho)}$, ganz in Uebereinstimmung mit dem Obigen.

Ruht der Körper auf einer Horizontalebene, so ist $\alpha = o$, daher die Kraft zum Fortschieben $P = \dfrac{\varphi G}{\cos.\beta + \varphi\sin.\beta} = \dfrac{G\sin.\varrho}{\cos.(\beta - \varrho)}$.

Wirkt die Kraft parallel zur schiefen Ebene, d. h. in der Richtung

ihrer Falllinie, so hat man $\beta = o$, und daher $P = (sin.\,\alpha \pm \varphi\, cos.\,\alpha)\, G$, $= \frac{sin.\,(\alpha \pm \varrho)}{cos.\,\varrho} \,.\, G$. (Vergl. §. 159). Wirkt endlich die Kraft horizontal, so hat man $\beta = -\alpha$; $cos.\,\beta = cos.\,\alpha$ und $sin.\,\beta = -sin.\,\alpha$, daher Schiefe Ebene.

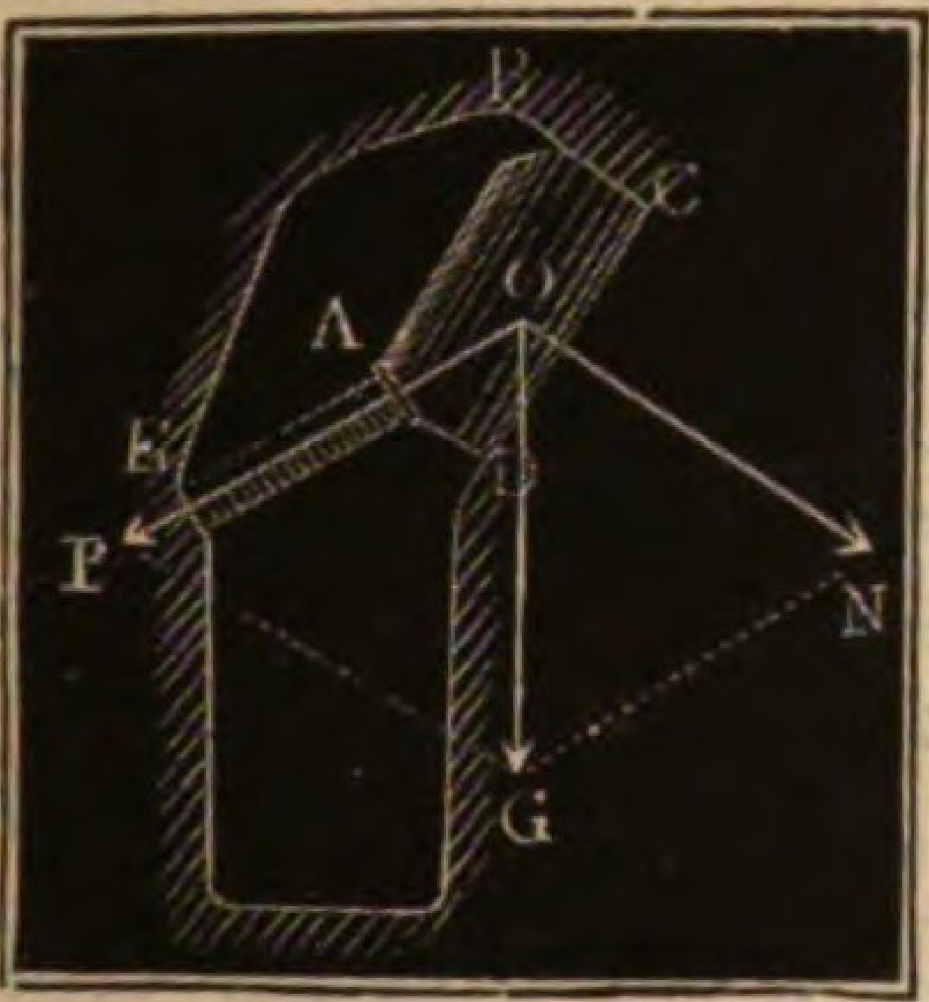
$$P = \frac{sin.\alpha \pm \varphi cos.\alpha}{cos.\alpha \mp \varphi sin.\alpha} \,.\, G = \frac{tang.\,\alpha \pm \varphi}{1 \mp \varphi tang.\alpha} \,.\, G,$$

d. i. $P = tang.\,(\alpha \pm \varrho)\, G$.

Uebrigens ist die Kraft zum Hinaufschieben am kleinsten, wenn der Nenner $cos.\,(\beta - \varrho)$ am größten, nämlich $= 1$, also $\beta - \varrho = o$, d. i. $\beta = \varrho$. Wenn also die Kraftrichtung um den Reibungswinkel von der schiefen Ebene abweicht, so ist die Kraft selbst am kleinsten und $= sin.\,(\alpha + \varrho)\,.\,G$.

Beispiel. Welchen Arendruck hat die Spreize AE, Fig. 214, auszuhalten, wenn dieselbe einen Felsblock (eine Wand) $ABCD$ vom Gewichte $G = 5000$ Pf. von dem Herabgleiten von einer schiefen Ebene CD (dem Liegenden) abhalten soll, vorausgesetzt, daß die Neigung der Spreize gegen den Horizont 35°, die der schiefen Ebene CD aber 50° und der Reibungscoefficient $\varphi = 0{,}75$ beträgt? Es ist hier $G = 5000$, $\alpha = 50°$, $\beta = 35° - 50° = -15°$ und $\varphi = 0{,}75$, daher giebt die Formel

Fig. 214.

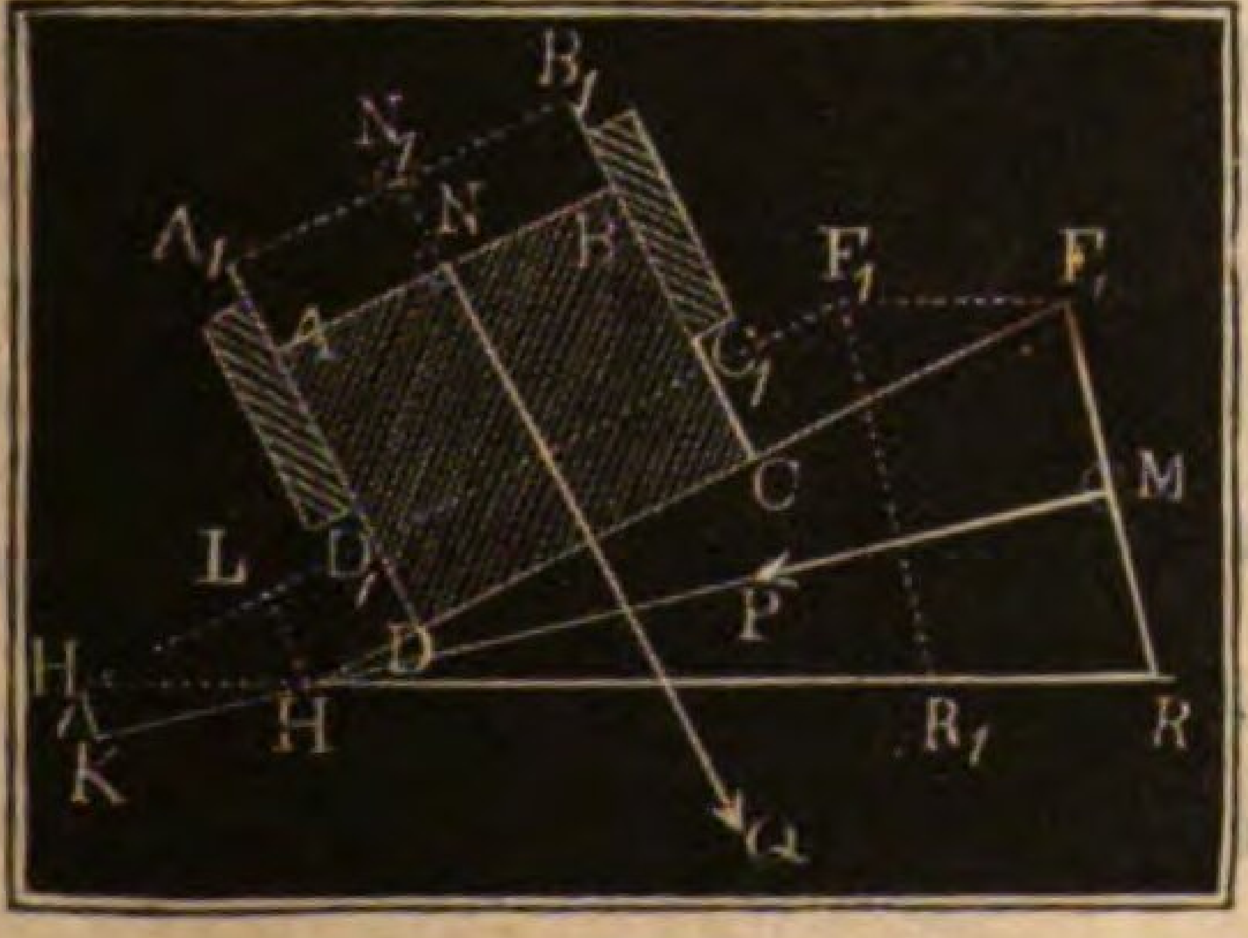


$$P = \frac{sin.\,\alpha - \varphi cos.\alpha}{cos.\beta - \varphi sin.\beta} \,.\, G$$
$$= \frac{sin.\,50° - 0{,}75\, cos.\,50°}{cos.\,15° + 0{,}75\, sin.\,15°} \,.\, 5000$$
$$= \frac{0{,}766 - 0{,}482}{0{,}966 + 0{,}194} \,.\, 5000 = \frac{1420}{1{,}160} = 1224 \text{ Pf.}$$

Wäre die Spreize horizontal, so hätte man $\beta = -50°$, und $tang.\,\varrho = 0{,}75$, daher $\varrho = 36°, 52'$, endlich $P = G\, tang.\,(\alpha - \varrho) = 5000\, tang.\,(50 - 36°, 52')$ $= 5000\, tang.\, 13°, 8' = 5000\,.\,0{,}2333 = 1166$ Pf. Um dieselbe Wand durch eine horizontale Kraft auf dem Liegenden hinaufzuschieben, ist unter übrigens gleichen Umständen die Kraft $P = G\, tang.\,(\alpha + \varrho) = 5000\, tang.\, 86°, 52'$ $= 5000\,.\,18{,}2676 = 91338$ Pf. nöthig.

§. 163. Bei dem Keile hat die Reibung einen bedeutenden Einfluß auf die statischen Verhältnisse. Es bilde der Durchschnitt des Keiles ein gleichschenkliges Dreieck FHR, Fig. 215, mit der Schärfe $FHR = \alpha$; es wirke die Kraft P rechtwinkelig auf den Rücken und die Last Q rechtwinkelig auf die Seite FH des Keiles. Rückt man diesen Keil auf der Basis HR um den Weg $s = FF_1$ $= HH_1 = RR_1$ fort, so steigt die Last Q um den Weg $CC_1 = DD_1$ $= HL = HH_1\,.\,sin.\,HH_1L =$ $s\, sin.\,\alpha$, und es legt die Kraft den Keil.

Fig. 215.



Schiefe Ebene. Weg $HK = HH_1 \, . \, cos. \, H_1 HK = s \, cos. \, \frac{\alpha}{2}$ zurück; ohne Rücksicht auf Reibung ist daher nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten $P . HK = Q . DD_1$, d. i. $Ps \, cos. \, \frac{\alpha}{2} = Q s \, sin. \, \alpha$, daher $P = \frac{Q \, sin. \, \alpha}{cos. \, \frac{\alpha}{2}}$

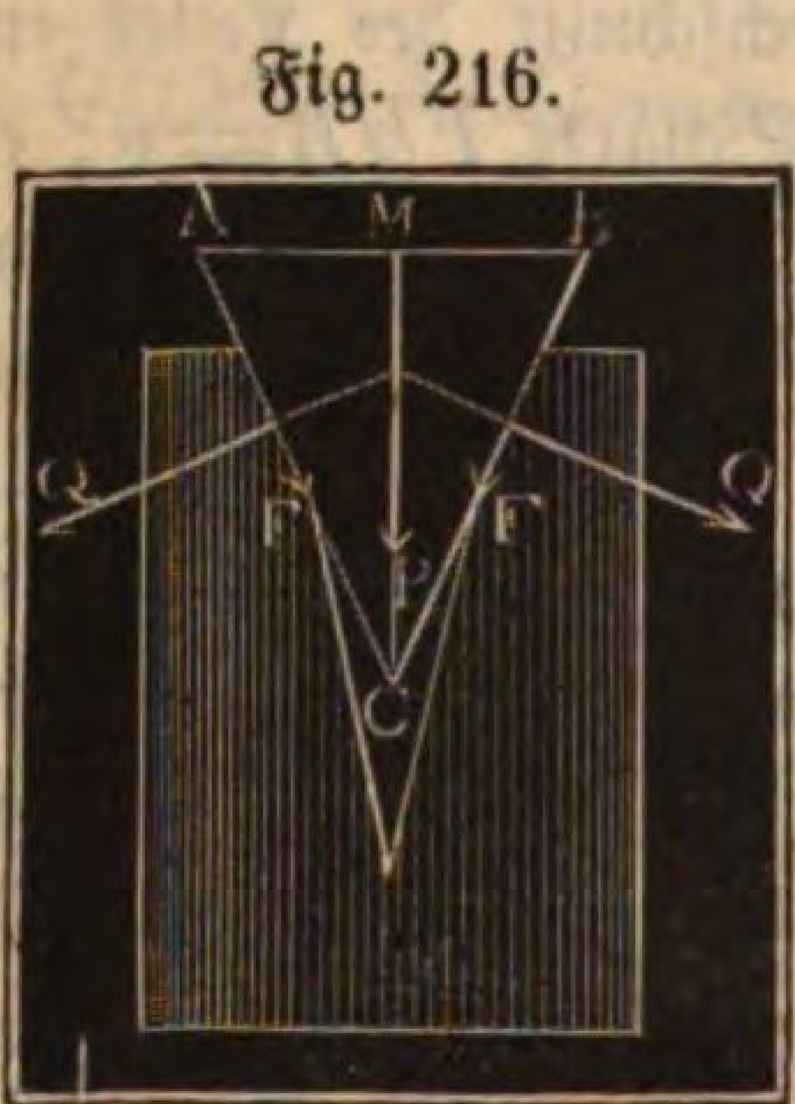
$$= \frac{2 Q \, sin. \, \frac{\alpha}{2} \, cos. \, \frac{\alpha}{2}}{cos. \, \frac{\alpha}{2}} = 2 Q \, sin. \, \frac{\alpha}{2},$$

was auch aus der Formel in §. 137 folgt, wenn man in ihr $sin. \, \beta = 1$, und $cos. \, (\alpha - \delta) = cos. \, \frac{\alpha}{2}$ setzt.

Es treten nun aber drei Reibungen ein, nämlich die Reibungen auf den Seitenflächen HF und HR, und die Reibung des die Last ausmachenden Körpers $ABCD$ in seiner Leitung. Da die Kraftrichtung von beiden Seiten des Keiles gleich viel abweicht, so ist auch der Druck gegen beide gleich, nämlich $= Q$, und die daraus entspringende Reibung $= \varphi Q$. Der Weg dieser Reibungen ist aber verschieden. Für die Reibung auf HR ist er $= HH_1 = s$, für die auf HF aber $= H_1 L = s \, cos. \, \alpha$; demnach sind die Arbeiten beider Reibungen $= \varphi Q s + \varphi Q s \, cos. \, \alpha$ $= \varphi Q s \, (1 + cos. \, \alpha) = 2 \varphi Q s \left(cos. \, \frac{\alpha}{2} \right)^2$. Endlich drückt die Reibung zwischen CD und FH den Körper $ABCD$ rechtwinkelig gegen seine Führung und erzeugt daselbst die Reibung $\varphi_1 . \varphi Q$, wofern φ_1 den Reibungscoefficienten für Bewegung in der Führung oder Leitung bezeichnet. Diese Reibung hat aber mit der Last Q einerlei Weg $DD_1 = s \, sin. \, \alpha$; es entspricht daher derselben die Arbeit $\varphi_1 \varphi Q s \, sin. \alpha$. Um nun die äußerste Grenze des Gleichgewichtszustandes zu finden, setzen wir die Arbeit der Kraft P gleich der Arbeit der Last Q plus Arbeiten der Reibungen, also

$$P s \, cos. \, \frac{\alpha}{2} = Q s \, sin. \, \alpha + 2 Q \varphi s \left(cos. \, \frac{\alpha}{2} \right)^2 + \varphi \varphi_1 Q s \, sin. \, \alpha,$$

Fig. 216.



und erhalten so die Kraft

$$P = 2Q \left(sin. \, \frac{\alpha}{2} + \varphi cos. \, \frac{\alpha}{2} + \varphi \varphi_1 \, sin. \, \frac{\alpha}{2} \right).$$

Bei einem Keile ABC, Fig. 216, wie er zum Zerspalten und Zerdrücken der Körper gebraucht wird, ist die dem Normaldruck Q gegen die Seiten AC und BC entsprechende Kraft auf den Rücken $P = 2Q \left(sin. \, \frac{\alpha}{2} + \varphi \, cos. \frac{\alpha}{2} \right)$, wie sich ergiebt, wenn man die Summe der vertikalen Seitenkräfte von Q und $F = \varphi Q$, d. i.

$2\,V_1 = 2Q\,sin.\,\frac{\alpha}{2}$ und $2\,V_2 = 2\varphi\,Q\,cos.\,\frac{\alpha}{2}$, der Kraft P gleichsetzt.

Beispiel. Es sei die Last Q des in Fig. 215. abgebildeten Keiles = 650 Pf., die Schärfe des Keiles: $\alpha = 25^0$, und der Reibungscoefficient $\varphi_1 = \varphi = 0{,}36$. Man sucht die Arbeit, welche nöthig ist, die Last Q um $1/2$ Fuß fortzubewegen. Die Kraft ist $P = 2 \,.\, 650\ [sin.\ 12\tfrac{1}{2}^0 + 0{,}36\ cos.\ 12\tfrac{1}{2}^0 + (0{,}36)^2\ sin.\ 12\tfrac{1}{2}^0]$
$= 1300 \,.\, (0{,}2164 + 0{,}36 \,.\, 0{,}9763 + 0{,}1296 \,.\, 0{,}2164)$
$= 1300 \,.\, (0{,}2164 + 0{,}3515 + 0{,}0281) = 1300 \,.\, 0{,}5960 = 774{,}8$ Pf.
Dem Lastwege $CC_1 = 1/2$ Fuß entspricht der Kraftweg $HK = s = \frac{CC_1}{sin.\,\alpha} \,.\, cos\,\frac{\alpha}{2}$
$= \frac{CC_1}{2 sin.\,\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{4 \,.\, 0{,}2164} = 1{,}155$ Fuß; es ist demnach die gesuchte mechanische Leistung $Ps = 774{,}8 \,.\, 1{,}155 = 895$ Fußpf. Ohne Rücksicht auf Reibung wäre sie nur $650 \,.\, 1/2 = 325$ Fußpf. In Folge der Reibung wird also die aufzuwendende Arbeit beinahe verdreifacht.

§. 164. Bei Zapfen ist nur die Reibung der Bewegung von Wichtigkeit, weshalb auch nur über diese Beobachtungsresultate vorliegen. Zapfenreibung.

Tafel III.

Coefficienten der Zapfenreibung, nach Morin.

Angabe der sich reibenden Körper.	Zustand der Reibungsflächen u. Gattung der Schmieren.							
	Trocken oder wenig fettig.	Fettig und mit Wasser benetzt.	Geschmiert und mit Wasser benetzt.	Oel, Talg oder Schweinefett. Auf gewöhnliche Art.	Oel, Talg oder Schweinefett. Gut unterhalten.	Sehr weiche u. gereinigte Wagenschmiere.	Schweineschmalz mit Graphit.	Fettig.
Glockengut auf Glockengut	—	—	—	0,097	—	—	—	—
Gußeisen auf Glockengut	—	—	—	—	0,049			
Schmiedeeisen auf Glockengut	0,251	1,189	—	0,075	0,054	0,090	0,111	—
Schmiedeeisen auf Gußeisen	—	—	—	0,075	0,054	—	—	—
Gußeisen auf Gußeisen	—	0,137	0,079	0,075	0,054	—	—	0,137
Gußeisen auf Glockengut	0,194	0,161	—	0,075	0,054	0,065	—	0,166
Schmiedeeisen auf Guajakholz	0,188	—	—	0,125				
Gußeisen auf Guajakholz	0,185	—	—	0,100	0,092	—	0,109	0,140
Guajak auf Gußeisen.	—	—	—	0,116	—	—	—	0,153
Guajak auf Guajak.	—	—	—	—	0,070			

Aus dieser Tabelle ist folgendes für die Praxis sehr richtige Verhältniß zu entnehmen: bei Zapfen aus Schmiede- oder Gußeisen, laufend in La-

Zapfenreibung. gern aus Gußeisen oder Glockengut (Messing), geschmiert mit Oel, Talg oder Schweineschmalz, ist der Reibungscoefficient:

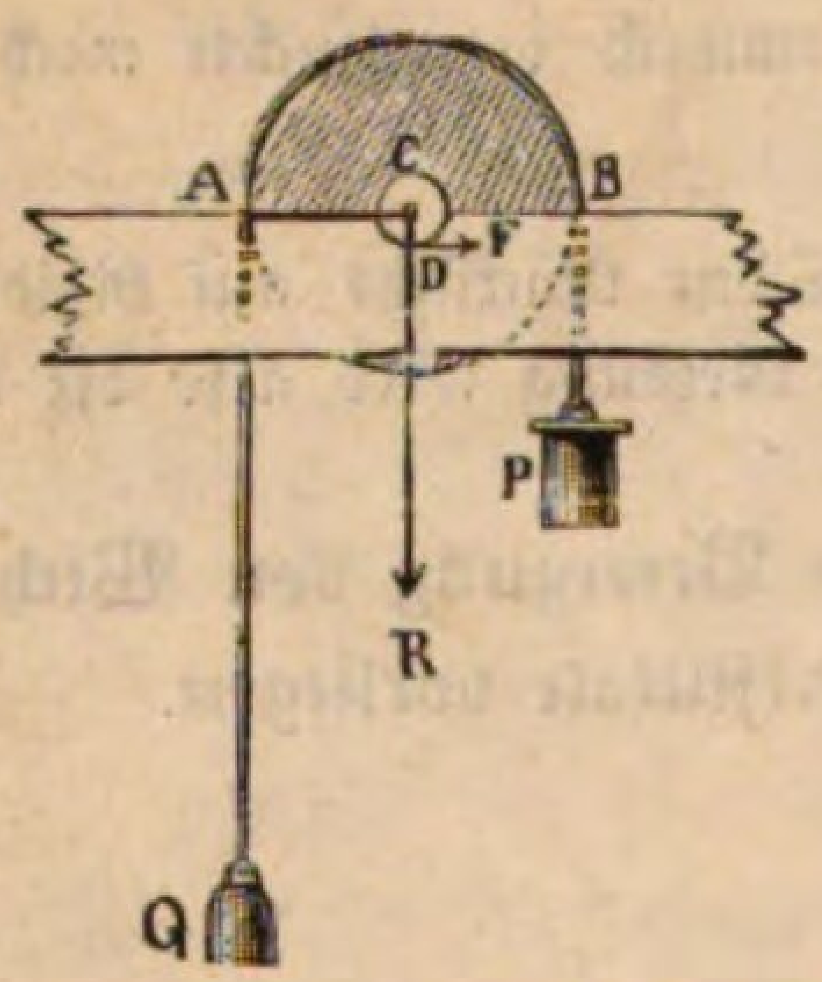
bei ununterbrochener guter Unterhaltung $= 0,054$,

bei gewöhnlicher Abwartung $= 0,070$ bis $0,080$.

Die von Coulomb gefundenen Werthe weichen hiervon zum Theil ab.

§. 165. Kennt man den Druck R zwischen einem Zapfen und seinem Lager, und ist noch der Halbmesser r des Zapfens, Fig. 217, gegeben, so läßt sich die Arbeit, welche die Zapfenreibung bei jeder Umdrehung des Zapfens in Anspruch nimmt, leicht ermitteln. Die Reibung F ist $= \varphi R$, der ihr entsprechende Weg aber der Umfang $2\pi r$ des Zapfens; es folgt daher die bei einer Umdrehung durch die Reibung verlorengehende mechanische Leistung $= \varphi R . 2\pi r = 2\pi\varphi R r$. Macht der Zapfen in einer Minute u Umdrehungen, so ist die in jeder Secunde verbrauchte Arbeit

Fig. 217.

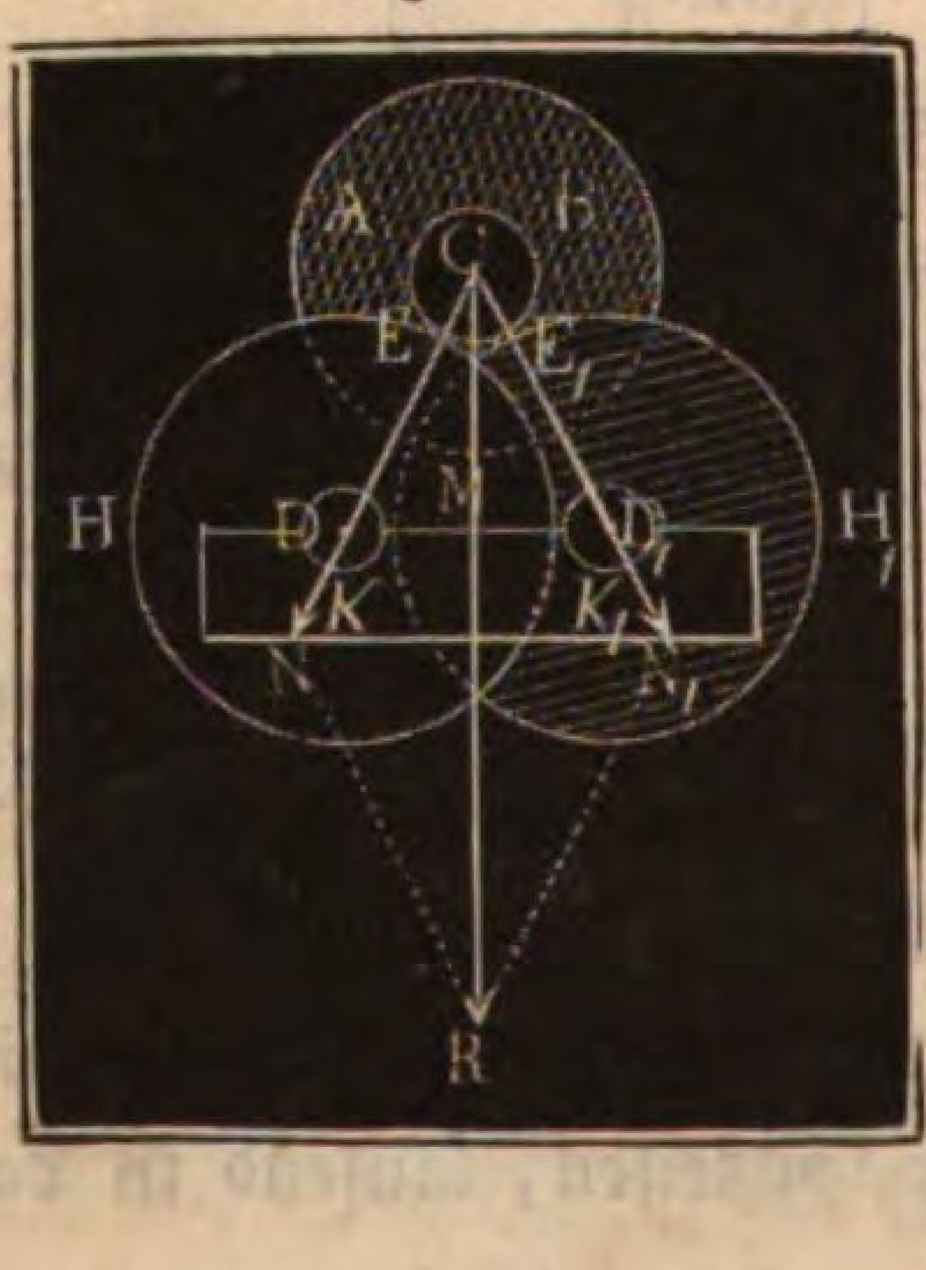


$$= 2\pi\varphi R r . \frac{u}{60} = \frac{\pi u \varphi R r}{30} = 0,105 . u \varphi R r.$$

Die Arbeit der Reibung wächst also mit dem Zapfendrucke, dem Zapfenhalbmesser und der Umdrehungszahl gleichmäßig. Es ist daher eine praktische Regel, bei rotirenden Maschinen den Zapfendruck nicht unnöthig durch große Gewichte zu erhöhen, die Zapfen nur so stark zu machen, als die Festigkeit auf die Dauer es verlangt, und endlich auch nicht sehr viel Umdrehungen in einer Minute zuzulassen, wenigstens dann nicht, wenn es nicht andere Verhältnisse erfordern.

Durch Anwendung von Frictionsrädern, die man statt der Zapfenlager anwendet, wird die Arbeit der Reibung vermindert. In Fig. 218 ist AB eine Welle, die mit ihrem Zapfen CEE_1 auf den Umfängen EH, E_1H_1 dicht hinter einander liegender und um D und D_1 drehbarer Räder (Frictionsräder) ruht. Aus dem gegebenen Drucke R der Welle folgen die Pressungen $N = N_1 = \frac{R}{2 \cos. \frac{\alpha}{2}}$, wofern α den Winkel DCD_1 bezeichnet, welchen die Central- oder Drucklinien CD und CD_1 zwischen sich einschließen. Vermöge der wälzenden Reibung zwischen dem Zapfen C und den Rad-

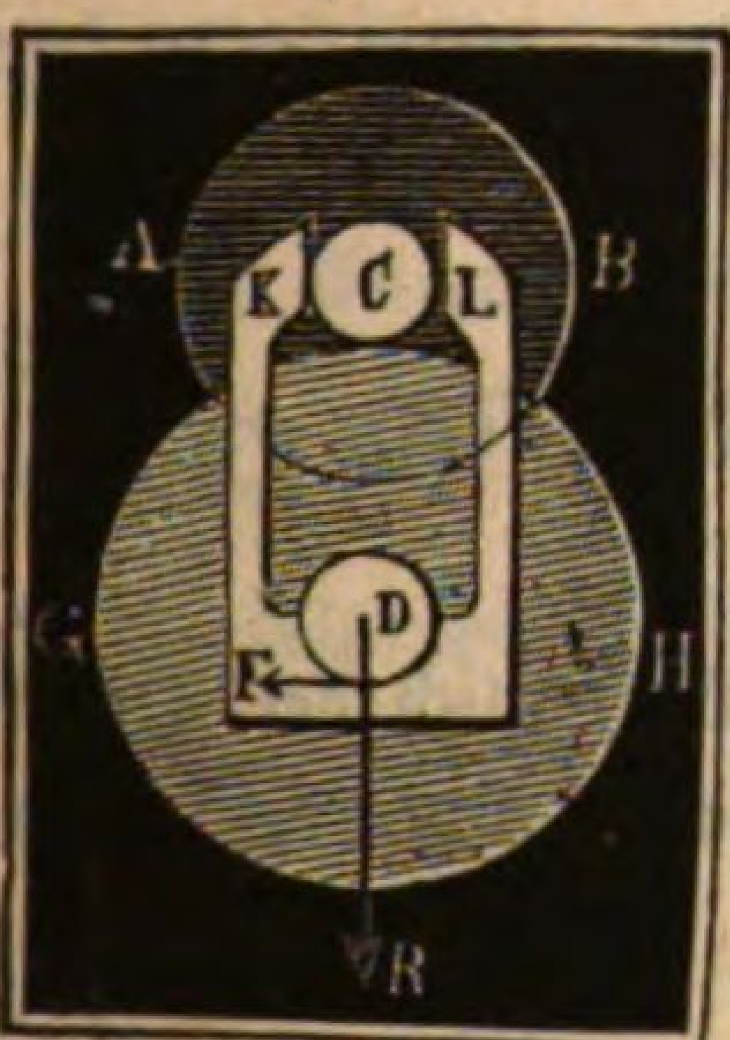
Fig. 218.



umfängen laufen die Räder mit diesem Zapfen um, und es entstehen in den Lagern von D und D_1 die Reibungen φN und φN_1, die zusammen $= \frac{\varphi R}{\cos. \frac{\alpha}{2}}$ betragen. Werden nun die Radhalbmesser $DE = D_1 E_1$ durch a_1 und die Zapfenhalbmesser $DK = D_1 K_1$ durch r_1 bezeichnet, so erhalten wir die Kraft am Umfange der Räder oder auch am Umfange des auf diesen liegenden Zapfens C, welche zur Ueberwindung von $\frac{\varphi R}{\cos. \frac{\alpha}{2}}$ nöthig ist: $F_1 = \frac{r_1}{a_1} \cdot \frac{\varphi R}{\cos. \frac{\alpha}{2}}$, während dieselbe $= \varphi R$ beträgt, wenn der Zapfen C unmittelbar in einer Pfanne ruht. Wenn man die Gewichte der Frictionsräder unberücksichtigt läßt, so ist folglich die Arbeit der Reibung bei Anwendung von diesen Rädern $= \frac{r_1}{a_1 \cos. \frac{\alpha}{2}}$ mal so groß, als ohne dieselben. Zapfenreibung.

Stellt man dem Zapfendruck R ein einziges Frictionsrad GH, Fig. 219, entgegen und verhindert man die zufälligen, übrigens nicht zu beachtenden Seitenkräfte durch feste Backen K und L, so fällt $\alpha = o$, $\cos. \frac{\alpha}{2} = 1$ und obiges Verhältniß $= \frac{r_1}{a_1}$ aus.

Fig. 219.

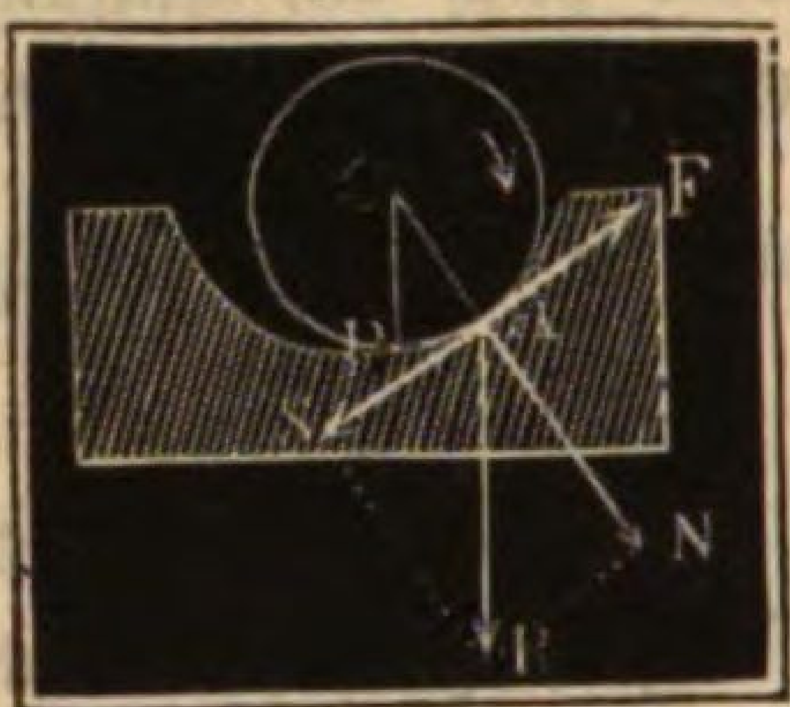


Beispiel. Ein Kunstrad wiegt 30000 Pf., der Halbmesser a seines Umfanges ist 16 Fuß und sein Zapfenhalbmesser $r = 5$ Zoll, wie groß ist die Kraft am Umfange des Rades, um die Zapfenreibung zu überwinden, um es also leer in einer gleichförmigen Bewegung zu erhalten, und wie groß ist der entsprechende Arbeitsaufwand, wenn es in einer Minute 5 Umdrehungen macht? Den Reibungscoefficienten φ können wir hier $= 0{,}075$ annehmen, weshalb die Reibung $\varphi R = 0{,}075 \; 30000 = 2250$ Pf. beträgt. Da der Radhalbmesser $\frac{16 \,.\, 12}{5} = \frac{192}{5} = 38{,}4$ mal so groß ist, als der Zapfenhalbmesser oder Hebelarm der Reibung, so ist die auf den Radumfang reducirte Zapfenreibung $= \frac{\varphi R}{38{,}4} = \frac{2250}{38{,}4} = 58{,}59$ Pf. Der Zapfenumfang ist $\frac{2 \,.\, 5 \,.\, \pi}{12} = 2{,}618$ Fuß; folglich der Weg der Reibung in einer Secunde $= \frac{2{,}618 \,.\, 5}{60} = 0{,}2182$ Fß., und die Arbeit der Reibung während einer Secunde $= 0{,}2182 \,.\, \varphi R = 0{,}2182 \,.\, 2250 = 491$ Fußpf. Lägen die Zapfen dieses Rades auf Frictionsrädern, deren Halbmesser nur 5mal so groß sind als die

Zapfenreibung. Halbmesser ihrer Zapfen, wäre also $\frac{r_1}{a_1} = \frac{1}{5}$, so würde die Kraft am Radumfange nur $\frac{1}{5} \,.\, 58{,}59 = 11{,}72$ Pfd. und die von der Reibung consumirte Arbeit nur $\frac{491}{5} = 98{,}2$ Fußpfd. betragen.

§. 166. Die Reibung bei einem ausgelaufenen Zapfen ACB, Fig. 220, welcher nur in einem Punkte A auf sein Lager drückt, ist kleiner als die bei einem neuen, noch in allen Punkten des Lagers aufruhenden Zapfen. Findet keine Umdrehung statt, so drückt der Zapfen in dem Punkte B, wo die Richtung des Mitteldruckes R hindurchgeht; tritt aber Umdrehung nach der Richtung AB ein, so wird der Zapfen vermöge seiner Reibung im Zapfenlager so weit in die Höhe steigen, bis sich die Kraft S zum Herabgleiten mit der Reibung F in's Gleichgewicht setzt.

Fig. 220.



Der Mitteldruck R zerlegt sich in eine Normalkraft N und in eine Tangentialkraft S, N geht auf das Lager über und erzeugt die tangential wirkende Reibung $F = \varphi N$, S aber setzt sich mit F in's Gleichgewicht; es ist also $S = \varphi N$. Nach dem pythagorischen Lehrsatze ist $R^2 = N^2 + S^2$, daher hier $R^2 = (1 + \varphi^2)\, N^2$, umgekehrt der Normaldruck $N = \frac{R}{\sqrt{1+\varphi^2}}$ und die Reibung $F = \frac{\varphi R}{\sqrt{1+\varphi^2}}$, oder, wenn man den Reibungswinkel ϱ einführt, also $\varphi = tang.\ \varrho$ setzt,

$$F = \frac{tang.\ \varrho}{\sqrt{1 + tang.\ \varrho^2}} \,.\, R = tang.\ \varrho\ cos.\ \varrho\ R = R \sin.\ \varrho.$$

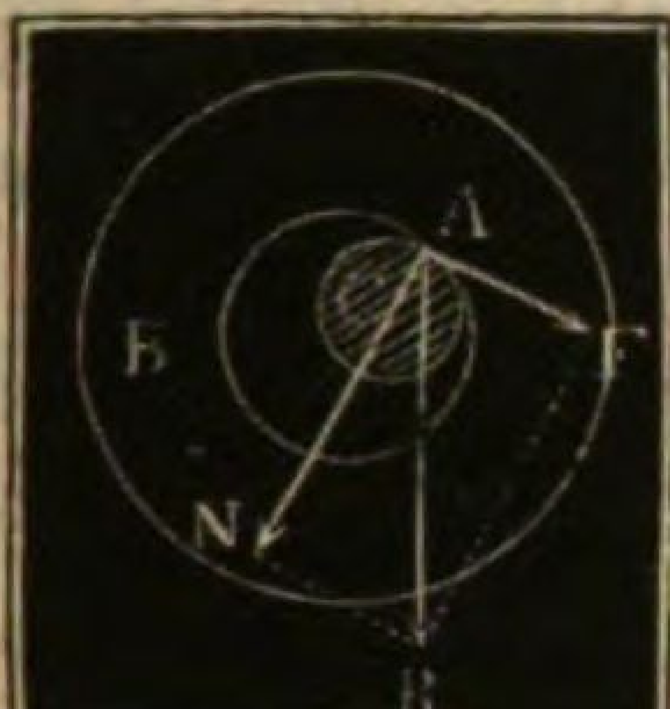
Wenn der Zapfen anfängt sich zu bewegen, so rückt folglich der Druckpunkt B um den Reibungswinkel $ACB = \varrho$ im Lager nach der entgegengesetzten Richtung fort.

Fände das Fortrücken nicht statt, so wäre $F = \varphi R = R\ tang.\ \varrho = \frac{R \sin.\varrho}{cos.\ \varrho}$; es ist folglich die Reibung nach dem Fortrücken $cos.\ \varrho$ mal so groß, als die vor dem Fortrücken. In der Regel ist $\varphi = tang.\ \varrho$ noch nicht $\frac{1}{10}$ und $cos.\ \varrho > 0{,}995$, also die Differenz noch nicht $\frac{5}{1000} = \frac{1}{200}$; man hat daher in den gewöhnlichen Fällen der Anwendung auf den Einfluß dieses Fortrückens nichts zu geben.

Läuft das Rad AB mit einer Nabe oder einem Auge, Fig. 221 (auf folg. Seite), um eine feste Axe AC, so ist die Reibung dieselbe, als wenn sich die Axen in Pfannen bewegen, nur ist bei einem ausgelaufenen Auge

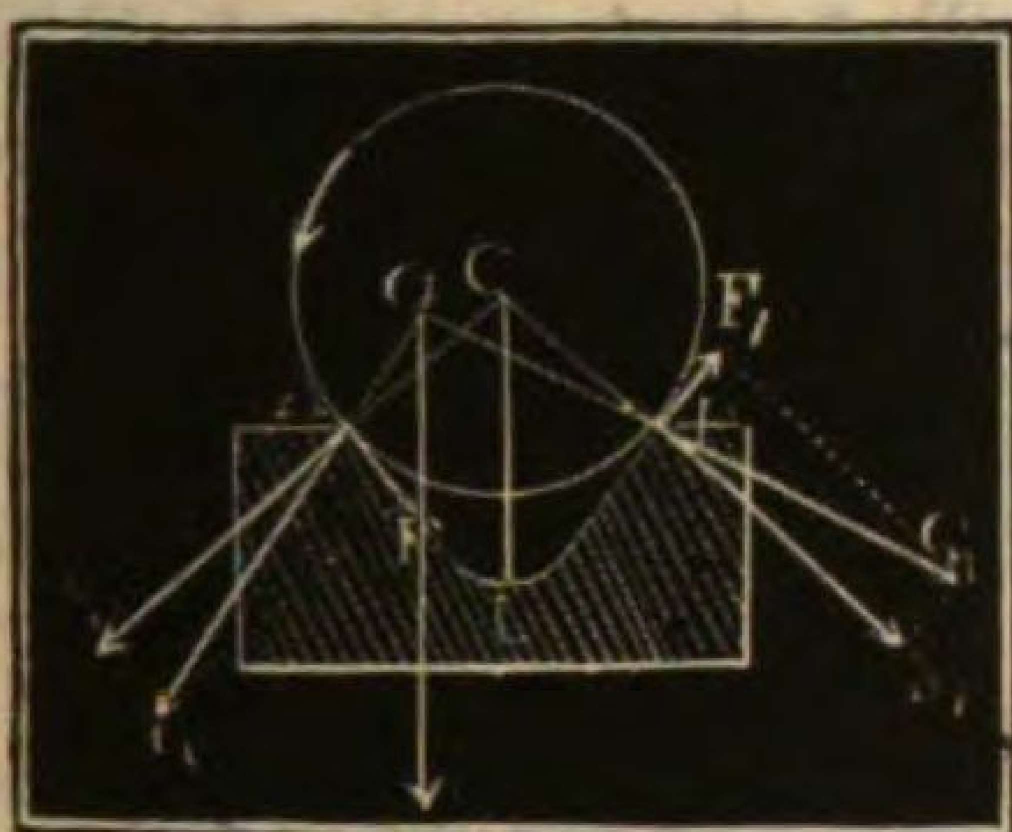
der Hebelarm der Reibung nicht der Halbmesser des festen Zapfens, sondern der des Auges. Zapfenreibung.

Fig. 221.



§. 167. Legt man den Zapfen in prismatische Lager, so erhält man größere Drücke und deshalb auch mehr Reibung als bei einem runden Lager. Ist das Lager ADB, Fig. 222, dreiseitig, so liegt der Zapfen in zwei Punkten A und B auf, und es ist an jedem derselben Reibung zu überwinden. Der Mitteldruck R zerlegt sich in zwei Seitenkräfte Q und Q_1, und jede dieser giebt einen Normaldruck N und N_1 und eine der Reibung $F = \varphi N$ und $F_1 = \varphi N_1$ gleiche Tangentialkraft. Dem vorigen §. zufolge lassen sich aber diese Reibungen auch $= Q \sin.\varrho$ und $= Q_1 \sin.\varrho$ setzen; man hat daher für die Gesammtreibung $= (Q + Q_1) \sin.\varrho$. Die Kräfte Q und Q_1 ergeben sich durch Auflösung eines aus Q und Q_1 gebildeten Kräfteparallelogrammes mit Hülfe des Mitteldruckes R, des Reibungswinkels ϱ und des Winkels $ACB = 2\alpha$, welcher dem im Lager liegenden Bogen AB entspricht. Es ist $QOR = ACD - CAO = \alpha - \varrho$, $Q_1OR = BCD + CBO = \alpha + \varrho$, endlich $QOQ_1 = \alpha - \varrho + \alpha + \varrho = 2\alpha$.

Fig. 222.



Die Anwendung der Formeln in §. 75 giebt nun

$$Q_1 = \frac{\sin.(\alpha - \varrho)}{\sin. 2\alpha} \cdot R \text{ und } Q = \frac{\sin.(\alpha + \varrho)}{\sin. 2\alpha} \cdot R;$$

daher folgt die gesuchte Reibung

$$F + F_1 = (Q + Q_1) \sin.\varrho = (\sin.[\alpha - \varrho] + \sin.[\alpha + \varrho]) \frac{R \sin.\varrho}{\sin. 2\alpha}.$$

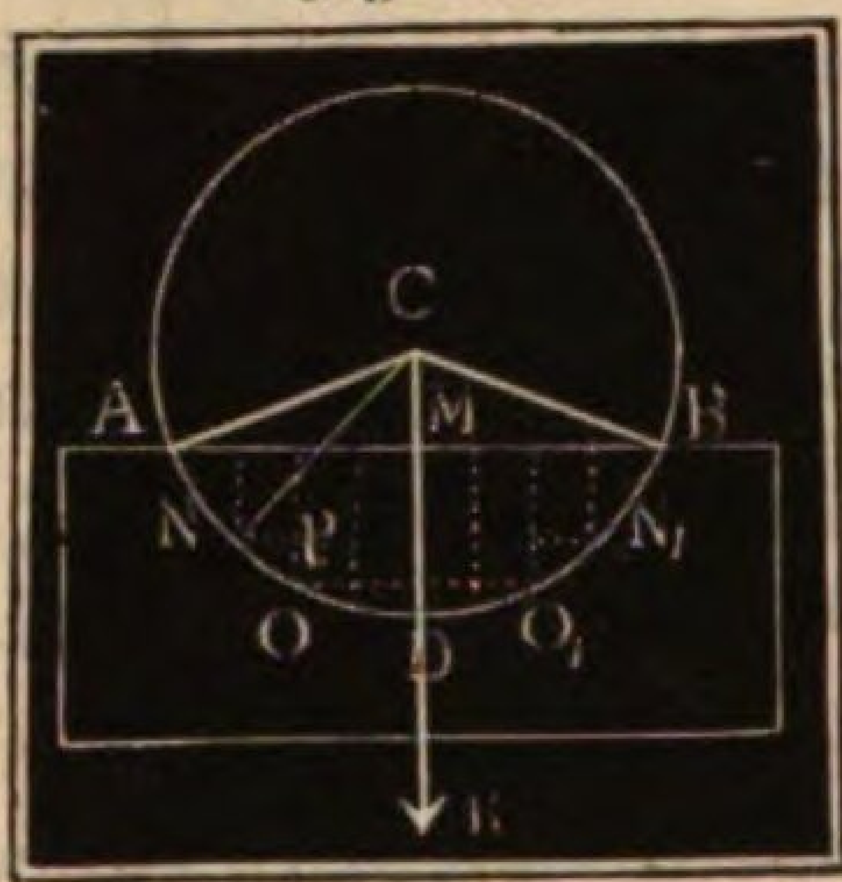
Aber $\sin.(\alpha - \varrho) + \sin.(\alpha + \varrho)$ ist, der analytischen Trigonometrie zufolge, $= 2 \sin.\alpha \cos.\varrho$ und $\sin. 2\alpha = 2 \sin.\alpha \cos.\alpha$, es ergiebt sich daher

$$F + F_1 = \frac{2 \sin.\alpha\, R \sin.\varrho \cos.\varrho}{2 \sin.\alpha \cos.\alpha} = \frac{R \sin. 2\varrho}{2 \cos.\alpha},$$ wofür sich wegen der Kleinheit von ϱ auch $\frac{R \sin.\varrho}{\cos.\alpha}$ setzen läßt. Die Reibung bei Anwendung des dreiseitigen Zapfenlagers ist hiernach $\frac{1}{\cos.\alpha}$ mal so groß, als die beim cylindrischen Lager. Ist z. B. $ADB = 60^0$, also $ACB = 180^0 - 60^0 = 120^0$ und $ACD = \alpha = 60^0$, so hat man $\frac{1}{\cos. 60^0} = 2$ mal so viel Reibung, als bei einem runden Lager.

Zapfenreibung.

§. 168. Mit Hülfe der letzten Formel läßt sich nun auch die Reibung in einem neuen runden Zapfenlager finden, worin der Zapfen an allen Stellen noch aufliegt. Es sei ADB in Fig. 223 ein solches Lager. Theilen wir den Bogen ADB, in welchem sich Zapfen und Lager berühren, in viele Theile, wie AN, NO u. s. w., welche gleichen Projectionen in der Sehne AB entsprechen, und nehmen wir an, daß jeder dieser Theile gleich viel vom ganzen Drucke R, nämlich $= \frac{R}{n}$, wobei n die Anzahl der Theile bezeichnet, vom Zapfen auf das Lager übertrage. Nach dem vorigen §. ist die Reibung für zwei gegenüberliegende Theile NO und $N_1O_1 = \frac{R}{n} \cdot \frac{sin.\,2\varrho}{cos.\,NCD}$. Aber $cos.\,NCD$ ist auch $= cos.\,ONP = \frac{NP}{NO}$, wofern NP die Projection des Theiles NO repräsentirt, und $NP = \frac{\text{Sehne}\,AB}{n}$; es folgt daher jene den Theilen NO und N_1O_1 entsprechende Reibung $= \frac{R\,sin.\,2\varrho}{n} \cdot \frac{n\,.\,NO}{\text{Sehne}} = \frac{R\,sin.\,2\varrho}{\text{Sehne}}\,.\,NO$. Um nun die Reibung für den ganzen Bogen ADB zu finden, hat man statt NO den Bogen $AD = \frac{1}{2}\,ADB$ einzuführen, weil die Summe aller Reibungen gleich ist $\frac{R\,sin.\,2\varrho}{\text{Sehne}}$ mal Summe aller Bogentheile, es folgt also die Reibung in einem neuen Zapfenlager: $F = R\,sin.\,2\varrho\,.\,\frac{\text{Bogen}\,AD}{\text{Sehne}\,AB}$, oder, wenn wir den Centriwinkel ACB, welcher dem im Lager liegenden Bogen entspricht $= 2\,\alpha^0$, also Sehne $AB = 2\,AC\,.\,sin.\,\alpha$ setzen:

Fig. 223.



$$F = \frac{R\,sin.\,2\,\varrho}{2} \cdot \frac{\alpha}{sin.\,\alpha}, \text{ oder } sin.\,2\,\varrho = 2\,sin.\,\varrho$$

angenommen, annähernd

$$F = R\,sin.\,\varrho\,.\,\frac{\alpha}{sin.\,\alpha}.$$

Hiernach ist die anfängliche Reibung um so größer, je tiefer der Zapfen in seinem Lager liegt. Umfaßt z. B. das Zapfenlager den halben Zapfenumfang, ist also $\alpha = \frac{1}{2}\,\pi$ und sonach $sin.\,\alpha = 1$, so hat man $F = \frac{\pi}{2}\,.\,R\,sin.\,\varrho$, also $\frac{\pi}{2} = 1{,}57$ mal so groß, als beim ausgelaufenen Zapfenlager. Bei einem Zapfen, welcher nicht tief im Lager ruht, ist α

klein, daher $sin. \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{6} = \alpha \left(1 - \frac{\alpha^2}{6}\right)$ zu setzen, weshalb folgt Poncelet's Theorem.

$F = \left(1 + \frac{\alpha^2}{6}\right) R \, sin. \varrho$ oder $= R \, sin. \varrho$, wenn α sehr klein ist.

§. 169*). Der Zapfendruck R ergiebt sich in der Regel als Mittelkraft von zwei rechtwinkelig gegen einander gerichteten Kräften P und Q, ist also $= \sqrt{P^2 + Q^2}$. Insofern man ihn nur zur Bestimmung der Reibung $\varphi R = \varphi \sqrt{P^2 + Q^2}$ bedarf, kann man sich mit einem Näherungswerth von ihm begnügen, theils weil schon der Coefficient φ niemals so sicher bestimmt werden kann und von so sehr vielen Zufälligkeiten mit abhängt, theils auch, weil das ganze Product oder die Reibung φR meist nur ein kleiner Theil ist von den übrigen Kräften an der in Zapfenlagern ruhenden Maschine, wie Hebel, Rolle, Radwelle u. s. w. Der Lehrsatz, welcher einen Näherungsausdruck von $\sqrt{P^2 + Q^2}$ zu finden lehrt, ist unter dem Namen »das Poncelet'sche Theorem« bekannt, und läßt sich auf folgende Weise entwickeln.

$$\sqrt{P^2 + Q^2} = P \sqrt{1 + \left(\frac{Q}{P}\right)^2} = P \sqrt{1 + x^2}, \text{ wobei } x = \frac{Q}{P},$$

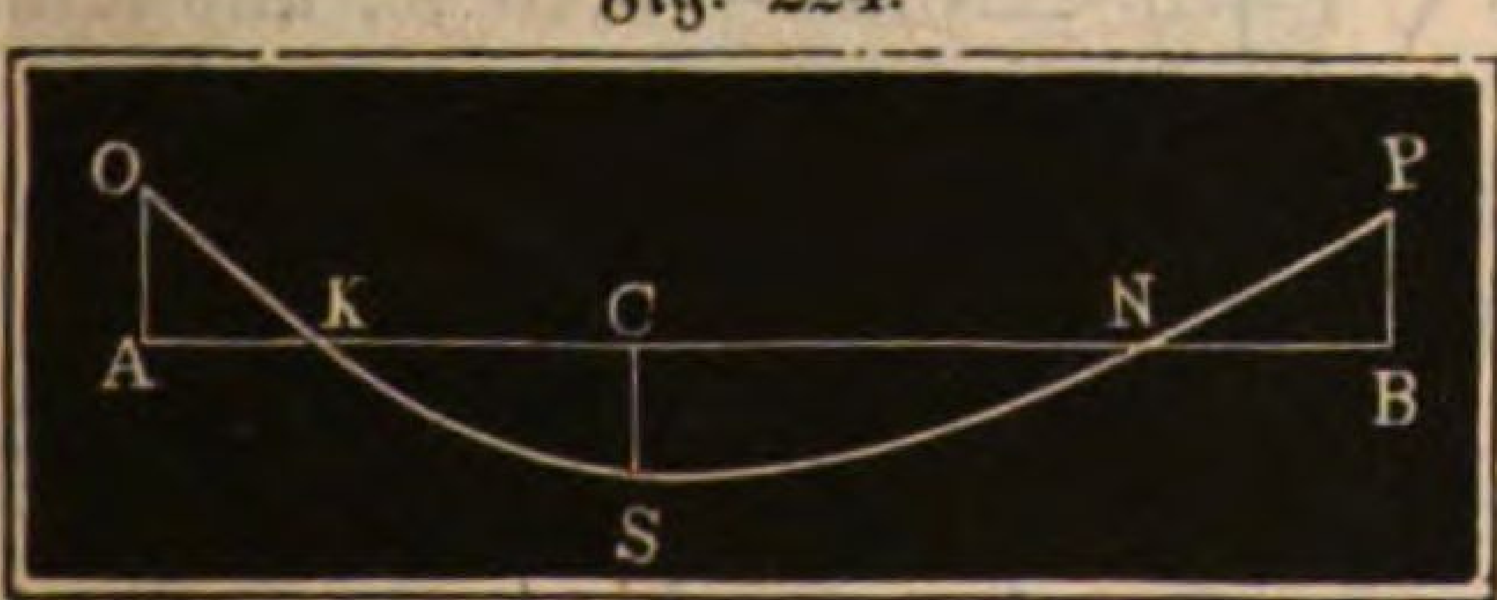
und vorausgesetzt wird, daß Q die kleinere Kraft, also x ein ächter Bruch ist. Setzen wir nun

$\sqrt{1 + x^2} = \mu + \nu x$, und bestimmen wir die Coefficienten μ und ν gewissen Forderungen entsprechend. Der relative Fehler ist

$$y = \frac{\sqrt{1 + x^2} - \mu - \nu x}{\sqrt{1 + x^2}} = 1 - \frac{\mu + \nu x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Dieser Gleichung entspricht eine Curve OSP, Fig. 224, welche für die Abscisse $x = 0$, die Ordinate $AO = y = 1 - \mu$, und für die Abscisse $AB = 1$, die Ordinate

Fig. 224.



$$BP = y = 1 - \frac{\mu + \nu}{\sqrt{2}}$$

hat, welche ferner in zwei Punkten K und N durch die Abscissenaxe geht, und bei S ihren größten Abstand CS von dieser Axe erreicht. Setzen wir $y = 0$, also $\sqrt{1 + x^2} = \mu + \nu x$, und lösen wir diese Gleichung in Beziehung auf x auf, so erhalten wir in

$x = \frac{\mu\nu \mp \sqrt{\mu^2 + \nu^2 - 1}}{1 - \nu^2}$ die Abscissen AK und AN der Durchschnitts-

Poncelet's Theorem.

punkte K und N, und also auch diejenigen Werthe, bei welchen der Fehler Null ausfällt.

Um aber die Abscisse AC des größten negativen Fehlers CS zu finden, setzen wir das Differenzialverhältniß

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\mu + \nu x)(1 + x^2)^{-1/2} x - \nu (1 + x^2)^{1/2}}{1 + x^2} = \text{Null}$$

(s. Art. 9 der analytischen Hülfslehren).

Dieser Forderung wird entsprochen, indem man

$$(\mu + \nu x)(1 + x^2)^{-1/2} x = \nu (1 + x^2)^{1/2}, \text{ oder}$$

$$(\mu + \nu x)\, x = \nu (1 + x^2), \text{ d. i. } x = \frac{\nu}{\mu} \text{ setzt.}$$

Hiernach giebt also die Abscisse $AC = \frac{\nu}{\mu}$ die größte negative Ordinate

$$CS = 1 - \frac{\mu + \nu \cdot \frac{\nu}{\mu}}{\sqrt{1 + \frac{\nu^2}{\mu^2}}} = -\left(\frac{\mu^2 + \nu^2}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}} - 1\right) = -(\sqrt{\mu^2 + \nu^2} - 1).$$

Um nun weder einen großen positiven noch einen großen negativen Fehler zu begehen, setzen wir die drei Ordinaten $AO = 1 - \mu$, $BP = 1 - \frac{\mu + \nu}{\sqrt{2}}$ und $CS = \sqrt{\mu^2 + \nu^2} - 1$ einander gleich, und bestimmen hiernach die Coefficienten. Es ist hiernach

$$\mu = \frac{\mu + \nu}{\sqrt{2}}, \text{ d. i. } \nu = (\sqrt{2} - 1)\,\mu = 0{,}414\,\mu \text{ und}$$

$$2 - \mu = \sqrt{\mu^2 + \nu^2}, \text{ d. i. } 2 = \mu\,(1 + \sqrt{1 + 0{,}414^2}),$$

folglich

$$\mu = \frac{2}{1 + \sqrt{1{,}1714}} = 0{,}96, \quad \nu = 0{,}414 \,.\, 0{,}96 = 0{,}40.$$

Wir können also annähernd $\sqrt{1 + x^2} = 0{,}96 + 0{,}40 \,.\, x$, und ebenso die Mittelkraft

$$R = 0{,}96\, P + 0{,}40\, Q$$

setzen, und wissen, daß wir dadurch höchstens den Fehler

$\pm y = 1 - \mu = 1 - 0{,}96 = 0{,}04 =$ vier Procent des wahren Werthes begehen.

Diese Bestimmung setzt voraus, daß wir wissen, welche von den Kräften die größere ist; ist uns dies nicht bekannt, so können wir $\sqrt{1 + x^2} = \mu(1 + x)$ annehmen und bekommen so

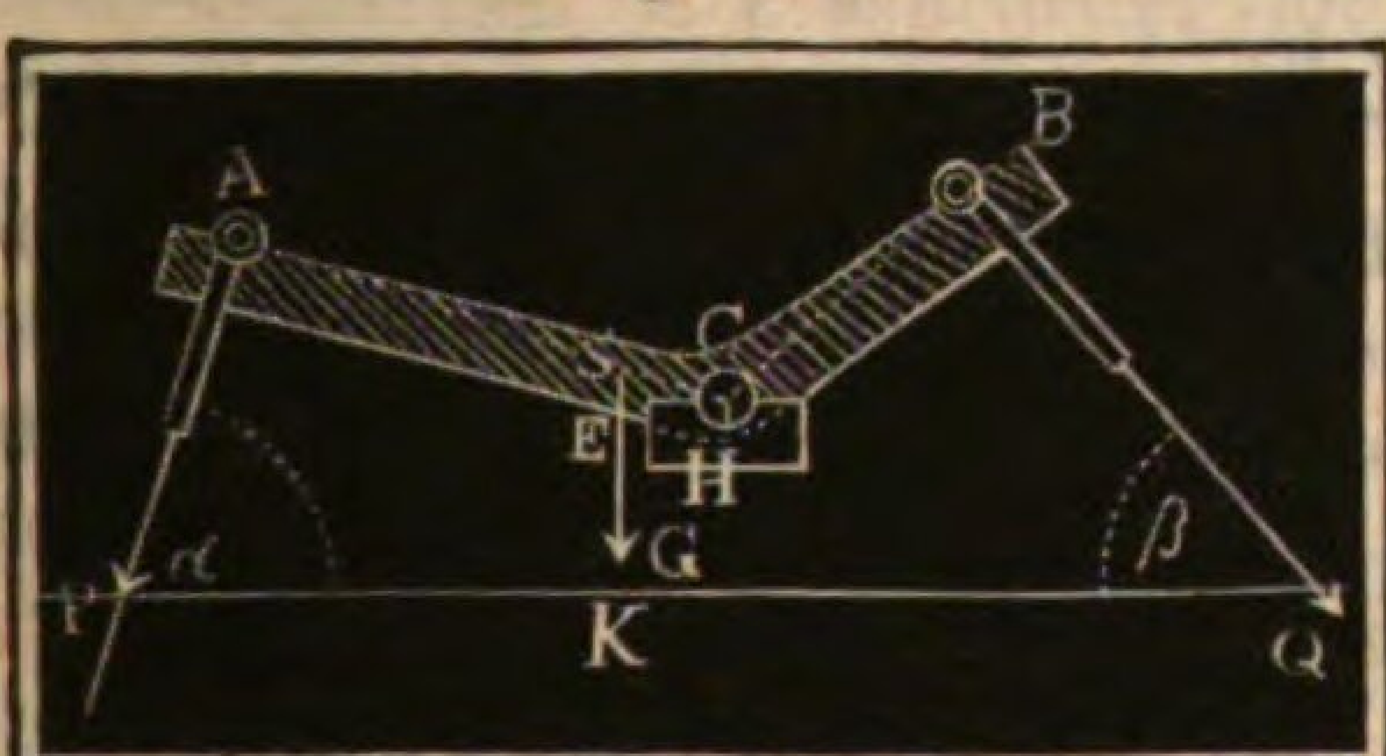
$$y = 1 - \frac{\mu(1 + x)}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Hier giebt nicht nur die Grenze $x=o$ den Fehler $=1-\mu$, sondern auch Poncelet's Theorem.
die Grenze $x=\infty$ denselben $=1-\frac{\mu x}{x}=1-\mu$; setzen wir aber $x=\frac{v}{\mu}=1$, so bekommen wir den größten negativen Fehler $=-\left(\frac{2\mu}{\sqrt{2}}-1\right)=-(\mu\sqrt{2}-1)$, und es ergiebt sich durch Gleichsetzen dieser Fehler: $1-\mu=\mu\sqrt{2}-1$, also $\mu=\frac{2}{1+\sqrt{2}}=\frac{2}{2,414}$ $=\frac{1}{1,212}=0,825$, wofür 0,83 gesetzt wird. In dem Falle also, wo man nicht weiß, welche von den Kräften die größere ist, läßt sich setzen: $R=0,83\,(P+Q)$, und man erhält dabei den größten Fehler $\pm y=1-0,83$ $=0,17$ Procent $=\frac{1}{6}$ des wahren Werthes.

Weiß man endlich, daß x nicht über 0,2 ist, so läßt man richtiger x ganz außer Acht, und schreibt $\sqrt{P^2+Q^2}=P$, ist aber x über 0,2, so ist ebenfalls richtiger $\sqrt{P^2+Q^2}=0,888\,P+0,490\,.\,Q$; in beiden Fällen ist nämlich der größte Fehler ungefähr zwei Procent *).

§. 170. Die im Obigen entwickelte Theorie der Reibung findet beim materiellen Hebel, bei der Radwelle und anderen Maschinen ihre Anwendung. Handeln wir zunächst vom Hebel, und nehmen wir im Winkelhebel ACB, Fig. 225, gleich den allgemeinsten Fall vor. Bezeichnen wir Hebel.

Fig. 225.



wie früher (§. 127.) den Hebelarm CA der Kraft P durch a, den Hebelarm CB der Last Q durch b, und den Zapfenhalbmesser CH durch r, setzen wir das Gewicht des Hebels $=G$, den Hebelarm CE desselben $=s$ und die Winkel APK und BQK, um welche die Kraftrichtungen vom Horizonte abweichen, $=\alpha$ und β. Die Kraft P giebt den Vertikaldruck $P\,sin.\,\alpha$, und die Last denselben $=Q\,sin.\,\beta$; es ist daher der gesammte Vertikaldruck $V=G+P sin.\,\alpha+Q\,sin.\,\beta$. Die Kraft P giebt auch noch den Horizontaldruck $P cos.\,\alpha$ und die Last einen Gegendruck $Q\,cos.\,\beta$; es bleibt daher als Horizontaldruck $H=P cos.\,\alpha-Q cos.\,\beta$ übrig, und es läßt sich nun der Totaldruck im Zapfen

*) Polytechnische Mittheilungen. Band 1.

Hebel. $R = \mu V + \nu H = \mu(G + P sin.\alpha + Q sin.\beta) + \nu(P cos.\alpha - Q cos.\beta)$ setzen, wobei aber der zweite Theil $\nu(P cos.\alpha - Q cos.\beta)$ nie negativ zu nehmen, und deshalb in dem Falle, wenn $Q cos.\beta > P cos.\alpha$ ist, das Zeichen zu ändern oder vielmehr $P cos.\alpha$ von $Q cos.\beta$ zu subtrahiren ist. Um nun denjenigen Werth der Kraft zu finden, welcher dem labilen Gleichgewichte entspricht, so daß beim kleinsten Zusatz Bewegung eintritt, setzen wir statisches Kraftmoment gleich statisches Lastmoment plus oder minus Moment des Gewichtes der Maschine (§. 127) plus Moment der Reibung, also

$$Pa = Qb \pm Gs + \varphi Rr$$
$$= Qb \pm Gs + \varphi(\mu V + \nu H)r, \text{ woraus folgt}$$
$$P = \frac{Qb \pm Gs + \varphi[\mu(G + Q sin.\beta) \mp \nu Q cos.\beta]r}{a - \mu\varphi r sin.\alpha \mp \nu\varphi r cos.\alpha}.$$

Wirken P und Q vertikal, so ist einfach $R = P + Q + G$, daher $Pa = Qb \pm Gs + \varphi(P + Q + G)r$. Ist der Hebel einarmig, so wirken P und Q einander entgegen, dann ist also $R = P - Q + G$ und deshalb auch die Reibung kleiner. Uebrigens muß R stets positiv in Rechnung kommen, weil die Reibung φR nur Bewegung verhindert, aber nicht erzeugt. Man sieht auch hiernach, daß ein einarmiger Hebel mechanisch vollkommener ist, als ein doppelarmiger Hebel.

Beispiel. Sind die Hebelarme bei dem in Fig. 225. abgebildeten Winkelhebel: $a = 6$ Fuß, $b = 4$ Fuß, $s = 1/2$ Fuß und $r = 1\,1/2$ Zoll, die Neigungswinkel $\alpha = 70^\circ$, $\beta = 50^\circ$, ist ferner die Last $Q = 5600$ Pf. und das Gewicht G des Hebels $= 900$ Pf., so ist die Kraft zur Herstellung des labilen Gleichgewichtes folgende. Ohne Rücksicht auf Reibung ist $Pa + Gs = Qb$, daher $P = \frac{Qb - Gs}{a} = \frac{5600.4 - 900.\frac{1}{2}}{6} = 3658$ Pf. Setzen wir $\mu = 0{,}96$ und $\nu = 0{,}40$, so bekommen wir $\mu\,(G + Q sin.\beta) = 0{,}96\,(900 + 5600\, sin.50^\circ) = 4982$ Pf, $\nu Q cos.\beta = 0{,}40.5600.cos.50^\circ = 1440$ Pf.; $\mu sin.\alpha = 0{,}96.sin.70^\circ = 0{,}902$, $\nu cos.\alpha = 0{,}40.cos.70^\circ = 0{,}137$. Es ist leicht einzusehen, daß hier $P cos.\alpha$ kleiner als $Q cos.\beta$ ist, denn da annähernd $P = 3658$ ausfällt, so hat man $P cos.\alpha = 1251$ Pf., wogegen $Q cos\,\beta = 3600$ Pf. beträgt; deshalb nehmen wir denn auch für $\nu Q cos.\beta$ und $\nu\varphi r cos.\alpha$ das untere Zeichen und setzen $P = \frac{5600.4 - 900.\frac{1}{2} + \varphi r(4982 + 1440)}{6 - \varphi r(0{,}902 - 0{,}173)}$. Nehmen wir nun noch den Reibungscoefficienten $\varphi = 0{,}075$, so erhalten wir $\varphi r = 0{,}075 \cdot \frac{3}{24} = 0{,}009375$ und die gesuchte Kraft $P = \frac{22400 - 450 + 60}{6 - 0{,}00683} = \frac{22010}{5{,}9932} = 3673$ Pf. Uebrigens ist hier der Vertikaldruck, wenn man die ohne Rücksicht auf Reibung bestimmte Kraft $P = 3658$ Pf. einführt: $V = 3658\, sin\, 70^\circ + 5600\, sin\, 50^\circ + 900 = 3437 + 4290 + 900 = 8627$ Pf., dagegen der Horizontaldruck

$$H = 5600\, cos.\, 50 - 3658\, cos\, 70 = 3600 - 1251 = 2349 \text{ Pf.}$$

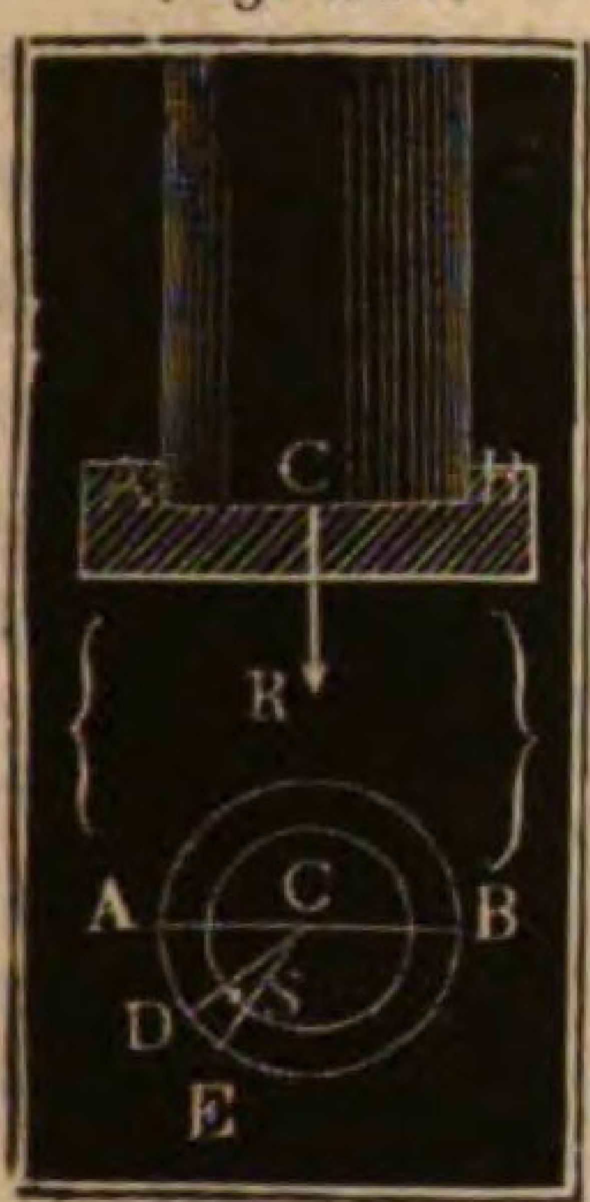
Hier ist $H > 0{,}2\, V$, daher ist richtiger

$$R = 0{,}888 \,.\, H + 0{,}490\, V = 0{,}888 \,.\, 8627 + 0{,}490 \,.\, 2349 = 8811$$

zu setzen, und es folgt so das Moment der Reibung $= \varphi r R = 0{,}009375 . 8811 = 82{,}6$ Fußpf., und endlich die Kraft $P = \frac{22400 - 450 + 82{,}6}{6} = 3672$ Pf., welcher Werth vom obigen wenig abweicht.

§. 171. Findet bei einer Radwelle ein Druck in der Richtung der Axe statt, wie es z. B. bei stehenden Wellen wegen des Gewichtes derselben jedesmal der Fall ist, so giebt es noch eine Reibung auf der Basis des einen Zapfens. Weil hier in allen Punkten Druck zwischen dem Zapfen und der Pfanne vorhanden ist, so steht diese Reibung der einfachen gleitenden näher, als der seither betrachteten Zapfenreibung und man hat deshalb für diese die in Tab. II. (S. 209) aufgeführten Reibungscoefficienten einzuführen. Um die Arbeit dieser Reibung zu finden, muß man den mittleren Weg kennen, den die Basis *AB*, Fig. 226, eines solchen stehenden Zapfens bei einer Umdrehung zurücklegt. Nehmen wir an, daß der Druck *R* auf der ganzen Fläche gleichförmig vertheilt sei, setzen wir also voraus, daß gleich großen Theilen der Basis gleiche Reibungen zukommen. Theilen wir nun die Basis durch Halbmesser *CD, CE* u. s. w. in lauter gleiche Sectoren oder Dreiecke, wie *DCE*, so entsprechen diesen nicht nur gleiche Reibungen, sondern auch gleiche Momente, es ist daher nur das Reibungsmoment von einem dieser Dreiecke zu finden. Die Reibungen eines solchen Dreiecks lassen sich aber als Parallelkräfte ansehen, da sie alle tangential, d. i. winkelrecht zum Radius *CD* wirken; und da nun der Schwerpunkt eines Körpers oder einer Fläche nichts weiter als der Angriffspunkt der Mittelkraft von, in diesem Körper oder der Fläche gleichmäßig vertheilten Parallelkräften ist, so ist demnach auch hier der Schwerpunkt *S* des Sectors oder Dreiecks *DCE* der Angriffspunkt von der aus sämmtlichen Reibungen desselben entspringenden Mittelkraft. Ist nun der Druck auf diesen Sector $= \frac{R}{n}$ und der Halbmesser $CD = CE$ der Basis $= r$, so folgt (nach §. 104) das statische Moment der Reibung dieses Sectors $= CS . \frac{\varphi R}{n} = \frac{2}{3} r . \frac{\varphi R}{n}$, und endlich das statische Moment der vollständigen Zapfenreibung $= n . \frac{2}{3} r \frac{\varphi R}{n} = \frac{2}{3} \varphi R r$.

Fig. 226.

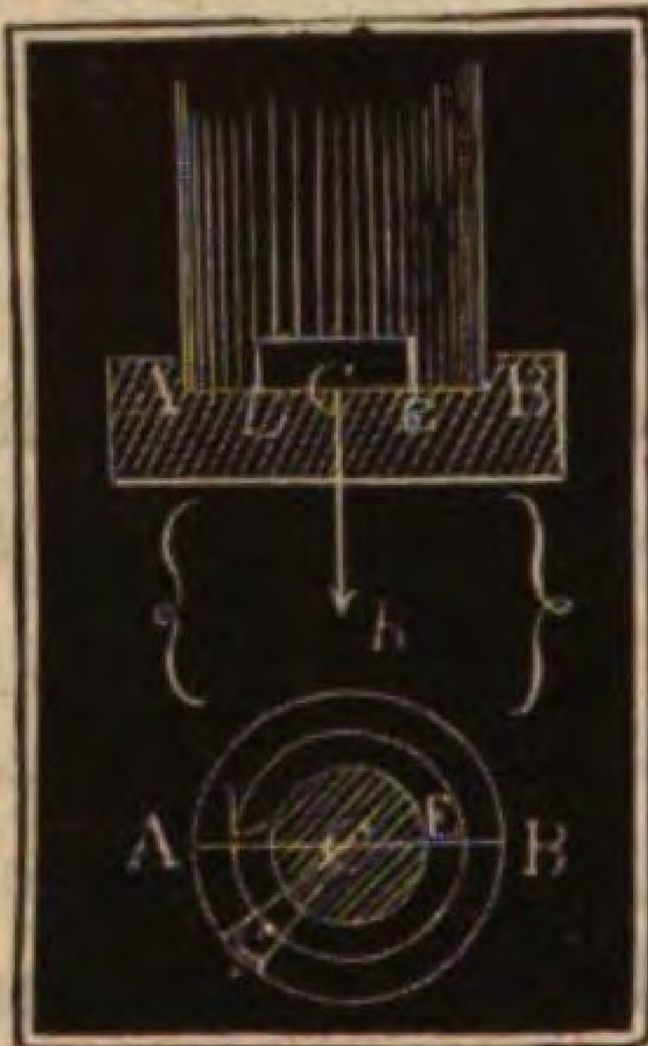


Zuweilen ist die sich reibende Fläche ein Ring *ABED*, Fig. 227 a. f. S. Sind die Halbmesser desselben $CA = r_1$ und $CD = r_2$, so hat man es mit der Bestimmung des Schwerpunktes *S* von einem Ringstücke zu thun, und erhält deshalb nach §. 109 den Hebelarm

Stiftreibung.

Stiftreibung.

Fig. 227.



$CS = \frac{2}{3} \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}$, daher das Moment der Reibung $= \frac{2}{3} \varphi R \left(\frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}\right)$. Führt man den mittleren Halbmesser $\frac{r_1 + r_2}{2} = r$ und die Breite des Ringes $r_1 - r_2 = b$ ein, so erhält man dieses Moment der Reibung auch $= \varphi R \left(r + \frac{b^2}{12 r}\right)$.

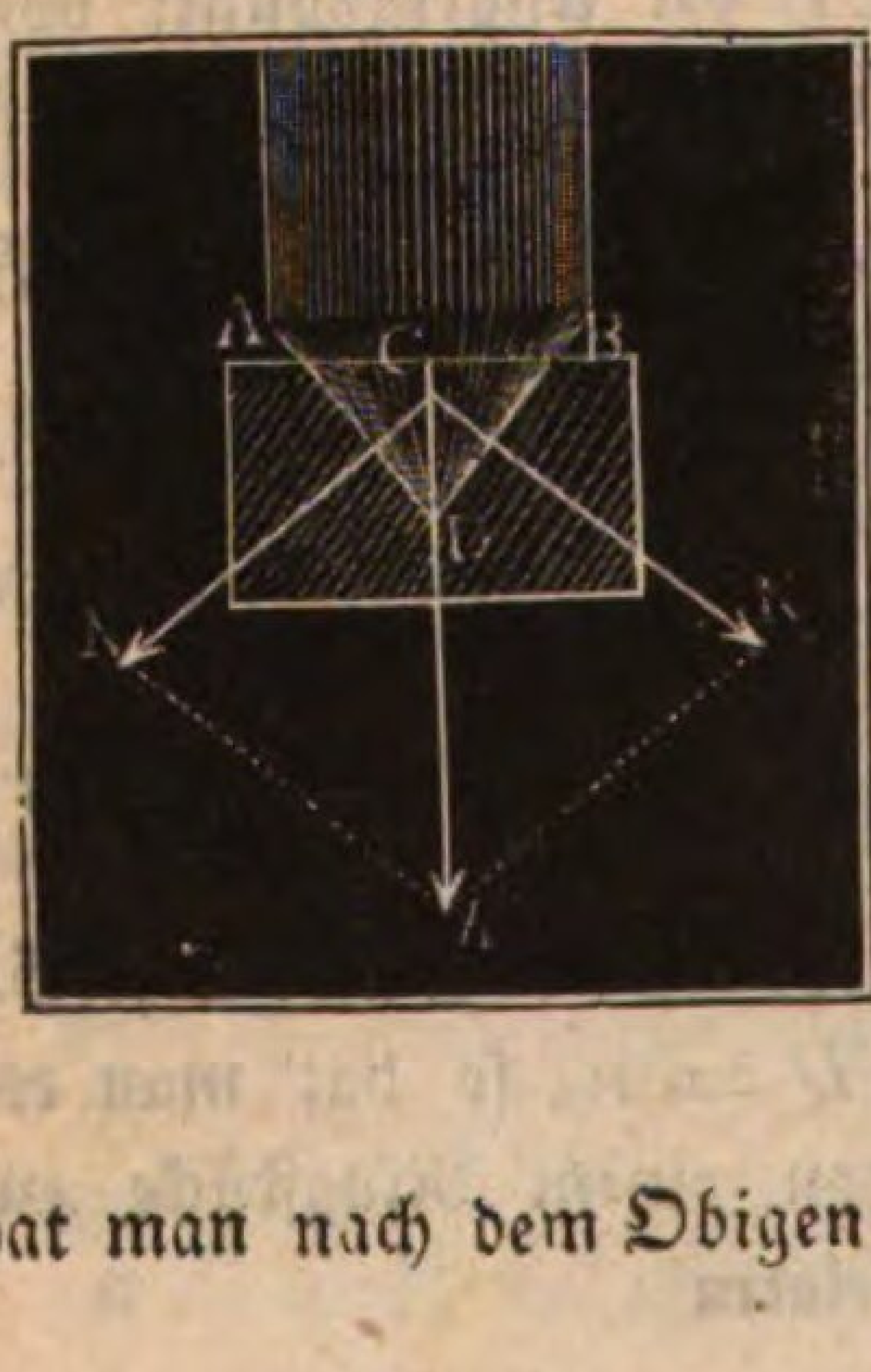
Die Arbeit der Reibung für eine Umdrehung des Zapfens ist im ersten Falle $= 2\pi . \frac{2}{3} \varphi R r = \frac{4}{3} \pi \varphi R r$, und im zweiten $\frac{4}{3} \pi \varphi R \left(\frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}\right)$.

Man sieht auch hier leicht ein, daß wegen Verminderung dieses Arbeitsverlustes die stehenden Zapfen oder Stifte möglichst schwach zu machen sind, und daß mehr Arbeitsverlust entsteht, wenn unter übrigens gleichen Verhältnissen die Reibung in einem Ringe als in einem vollen Kreise statt hat.

Beispiel. Bei einer in der Minute 100 Umdrehungen machenden und 1800 Pf. schweren Turbine ist die Stärke des Stiftes an der Basis 1 Zoll, wie viel Arbeit consumirt die Reibung dieses Stiftes in einer Secunde? Den Reibungscoefficienten $= 0{,}100$ angenommen, erhält man die Reibung $\varphi R = 0{,}100 . 1800 = 180$ Pf.; der Weg pro Umdrehung ist $= \frac{4}{3} \pi r = \frac{4}{3} . 3{,}14 . \frac{1}{24} = 0{,}1745$ Fß., daher die Arbeit pro Umdrehung $= 180 . 0{,}1745 = 31{,}41$ Fßpf. Nun macht aber diese Maschine in der Secunde $\frac{100}{60} = \frac{5}{3}$ Umdrehungen; es folgt daher der gesuchte Arbeitsverlust $= \frac{314{,}1}{6} = 52{,}3$ Fßpf.

Spitzapfen. §. 172. Ist der Zapfen ABD, Fig. 228, conisch zugespitzt, so fällt die Reibung größer aus als bei einem unten ebenen Zapfen; weil sich der Axendruck R in die die Reibung erzeugenden Normalkräfte, wie N, N_1 u. s. w. zerlegt, die zusammen größer als R allein sind. Ist der halbe Convergenzwinkel $ADC = BDC = \alpha$, so hat man $2 N = \frac{R}{sin. \alpha}$, und deshalb die Reibung dieses Spitzzapfens $F = \varphi \frac{R}{sin. \alpha}$. Bezeichnet man nun den Halbmesser $CA = CB$ des Zapfens an der Stelle des Eintrittes in die Pfanne durch r_1, so hat man nach dem Obigen das statische Reibungsmoment $M = \frac{\varphi R}{sin. \alpha} . \frac{2}{3} r_1$.

Fig. 228.



$= \frac{2}{3} \varphi \frac{Rr_1}{sin.\alpha}$; oder, da $\frac{r_1}{sin.\alpha} = \frac{CA}{sin.\alpha} = DA$, d. i. der Kegelseite Spitzzapfen.
$DA = a$ gleich ist, dasselbe auch $M = \frac{2}{3} \varphi R a$.

Läßt man diesen Zapfen nur wenig in die Pfanne eintauchen, so wird die Arbeit bei ihm kleiner als bei einem Zapfen mit ebener Basis und deshalb die Anwendung des Spitzzapfens dennoch von Nutzen sein. Ist z. B. $a = \frac{r_1}{sin.\alpha} = \frac{r}{2}$, also $r_1 = \frac{1}{2} r sin.\alpha$, so giebt der Spitzzapfen mit dem Halbmesser r_1 nur halb so viel Arbeitsverlust durch die Reibung als der eben abgestumpfte Zapfen mit dem Halbmesser r.

Bildet der Stift einen abgekürzten Kegel, Fig. 229, so findet Reibung an dem Mantel und an der Abstumpfungsfläche statt und es stellt sich das statische Reibungsmoment

$$M = \left(r_1^3 + \frac{r^3 - r_1^3}{sin.\alpha}\right) \cdot \frac{2}{3} \frac{\varphi R}{r^2}$$

heraus, wenn r den Halbmesser CA an der Stelle des Eintrittes in die Pfanne, r_1 den Halbmesser DE an der Basis und α^0 den halben Convergenzwinkel bezeichnet.

Fig. 229.

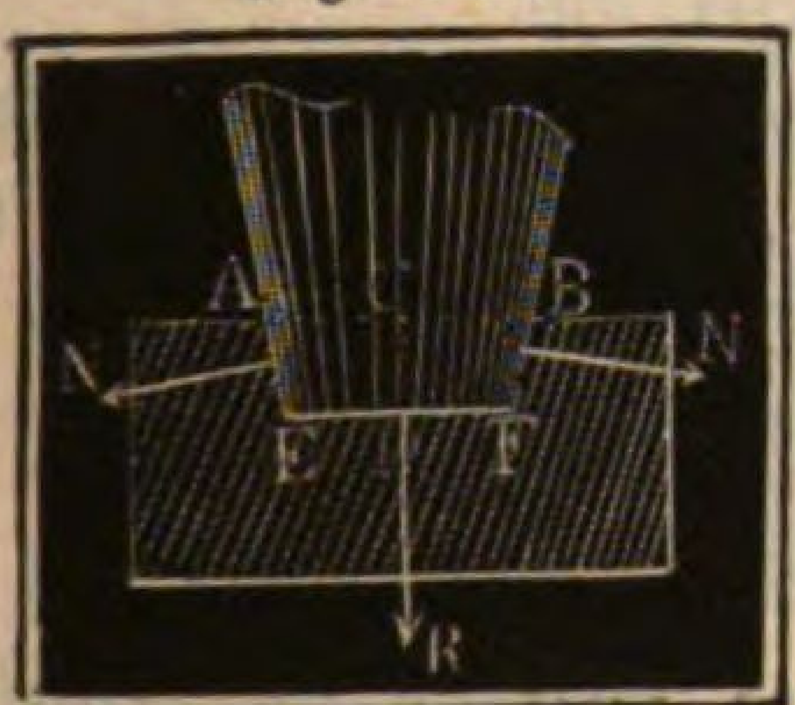


Fig. 230.

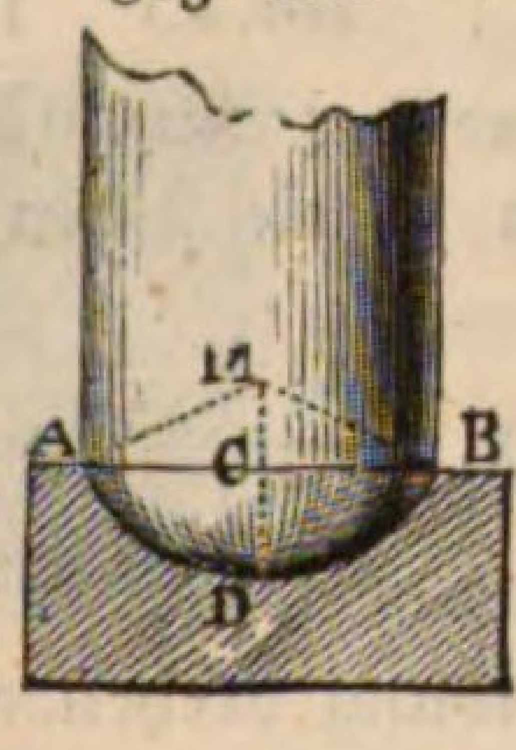
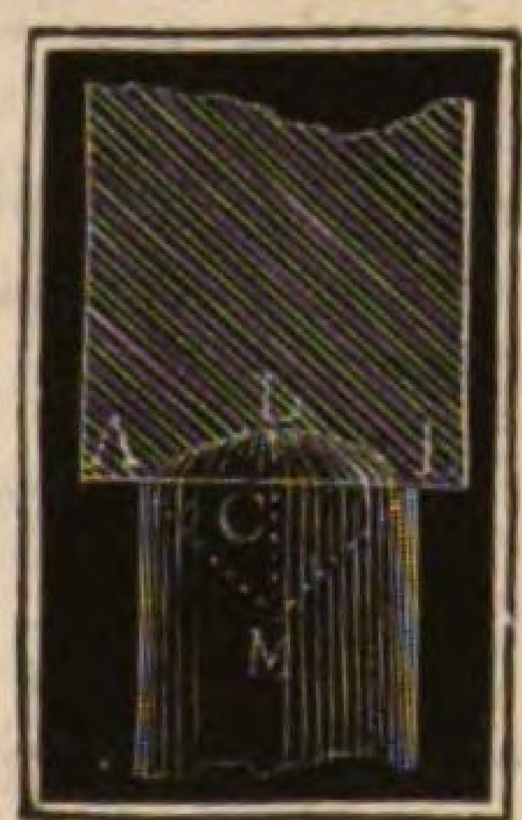


Fig. 231.



Sehr oft sind endlich noch die stehenden Zapfen oder Stifte, Fig. 230 und Fig. 231, abgerundet. Wenn auch durch die Abrundung die Reibung selbst keineswegs vermindert wird, so entsteht doch dadurch eine Verminderung des Reibungsmomentes, daß die Tiefe des Eintauchens in die Pfanne herabgezogen wird. Setzt man eine kugelförmige Abrundung voraus, so erhält man mit Hülfe des höheren Calculs für eine halbkugelförmige Pfanne: das Moment der Reibung

$$M = \frac{\varphi \pi}{2} \cdot Rr;$$

für die ein niedriges Segment bildende Pfanne aber

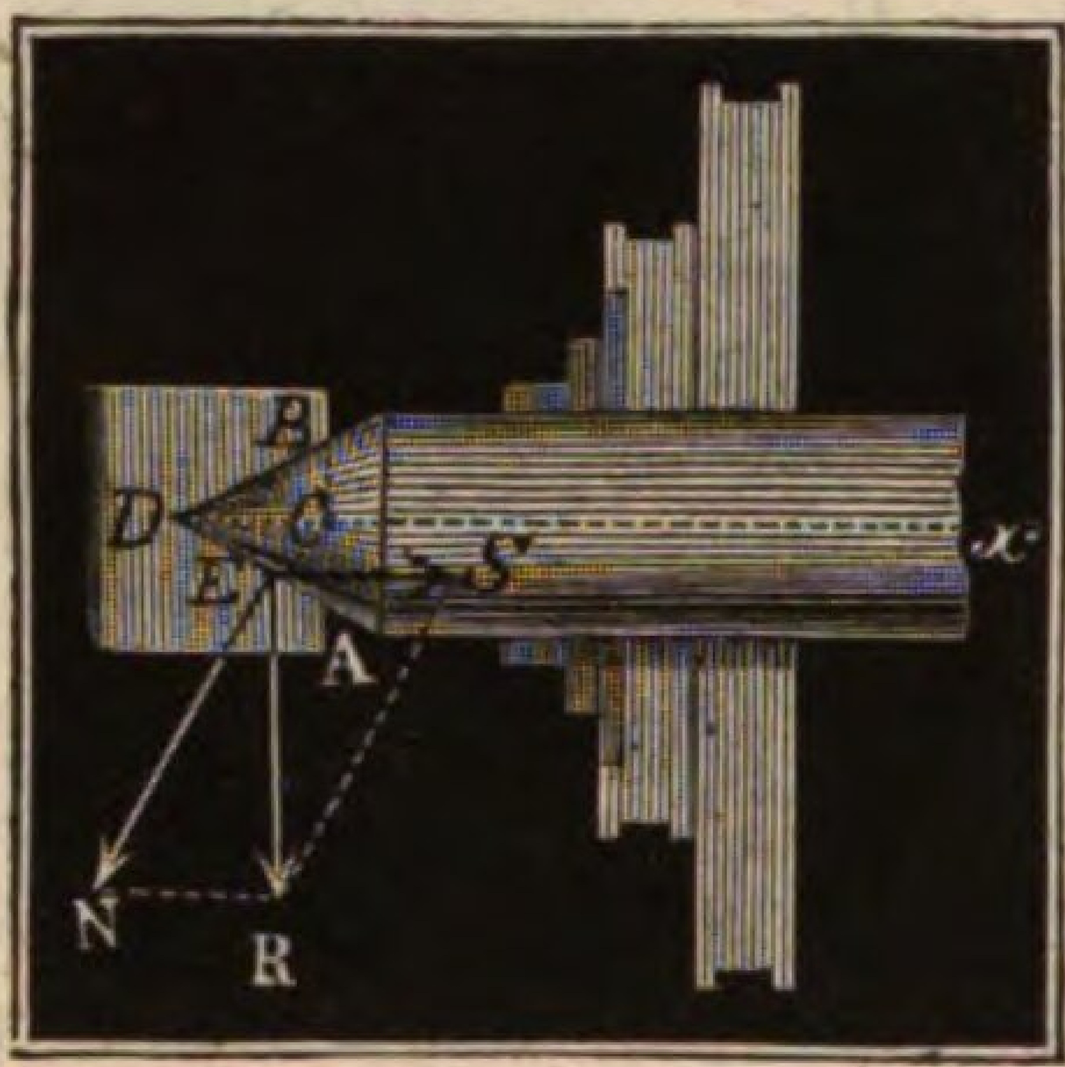
$$M = \frac{2}{3} \left[1 + 0{,}3 \left(\frac{r_1}{r}\right)^2\right] \varphi R r_1,$$

wenn r den Kugelhalbmesser $MA = MB$, r_1 aber den Pfannenhalbmesser $CA = CB$ bezeichnet.

Stiftreibung.

Anmerkung. Bei den Körnerspitzen ADB, Fig. 232, an den Drehbankspindeln zerlegt sich der Druck R rechtwinkelig gegen die Axenrichtung DX in einen Normaldruck N und einen Seitendruck S parallel zur Axe. Gelten dieselben Bezeichnungen wie oben bei dem Spitzzapfen stehender Wellen, so hat man $N = \frac{R}{cos.\ \alpha}$ und $S = R\ tang.\ \alpha$.

Fig. 232.



Das Moment der Reibung, welche aus N entspringt, ist

$$M = \varphi N \,.\, {}^2\!/_3 r_1 = {}^2\!/_3\ \varphi\ \frac{R r_1}{cos. \alpha},$$

oder da $r_1 = CA = DA\ sin.\ ADC = a\ sin.\ \alpha$ ist,

$$M = {}^2\!/_3\ \varphi\ R\ a\ tang.\ \alpha.$$

Die Seitenkraft S wird ganz oder zum Theil durch eine Gegenkraft S_1 an der andern Spitze aufgehoben.

Beispiel. Wenn das Gewicht der armirten Welle eines Pferdegöpels $R = 6000$ Pf., der Halbmesser seines conisch gespitzten Stiftes $= r = 1$ Zoll und der Convergenzwinkel 2α des Kegels $= 90^0$ ist, so beträgt das statische Moment der Reibung an diesem Stifte

$$M = {}^2\!/_3 \,.\, \varphi \,.\, \frac{Rr}{sin. \alpha} = {}^2\!/_3 \,.\, 0{,}1 \,.\, \frac{6000}{sin. 45^0} \,.\, \frac{1}{12} = \frac{100}{3\sqrt{{}^1\!/_2}} = 47{,}1 \text{ Fußpfund.}$$

Macht diese Welle während des Ausförderns einer Tonne aus der Grube $= u = 24$ Umdrehungen, so ist die Arbeit, welche die Reibung am Stifte in dieser Zeit aufzehrt

$$L = 2\pi u \,.\, {}^2\!/_3\ \varphi\ \frac{Rr}{sin. \alpha} = 2\pi \,.\, 24 \,.\, 47{,}1 = 7103 \text{ Fßpf.}$$

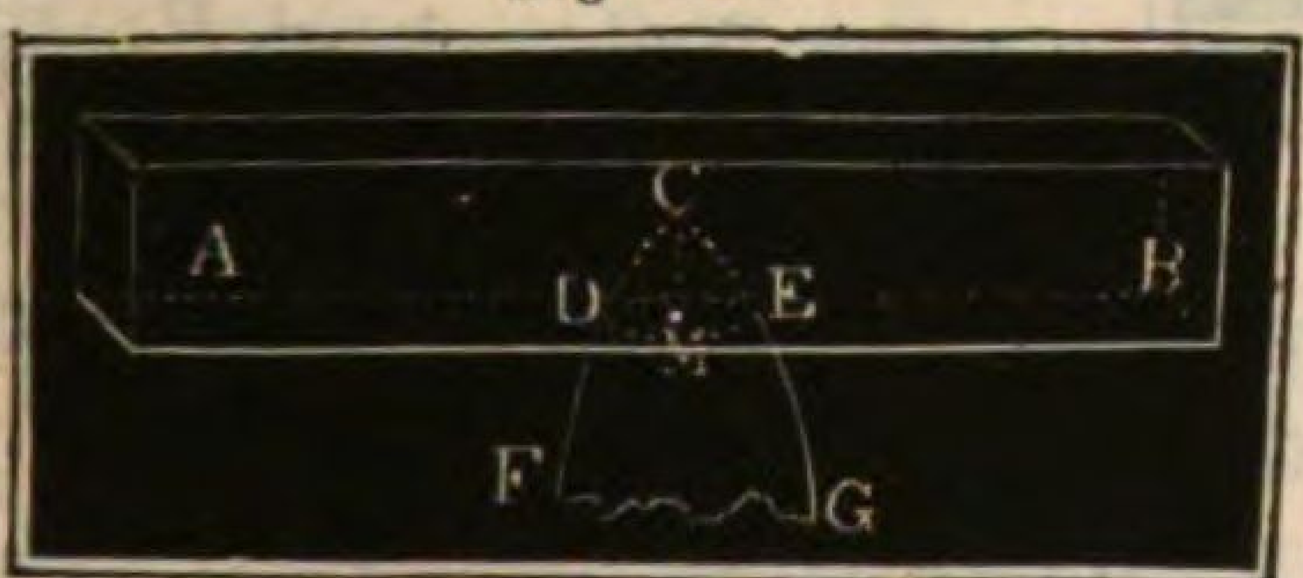
Spitzen und Schneiden.

§. 173. Um die Axenreibung drehender Körper möglichst zu vermeiden, unterstützt man diese durch zugespitzte Stifte, scharfe Schneiden u. s. w. Hätte man es hierbei mit vollkommen starren und unelastischen Körpern zu thun, so würde bei dieser Methode des Aufhängens oder Unterstützens gar kein Arbeitsverlust in Folge der Reibung entstehen können, weil hier von der Reibung kein meßbarer Weg zurückgelegt wird; allein da jeder Körper eine gewisse Elasticität besitzt, so wird beim Aufliegen eines solchen auf einer Spitze oder Schneide ein kleines Eindrücken dieser eintreten und sich dadurch eine reibende Fläche herausstellen, auf welcher von der Reibung Wege beschrieben werden, die allerdings zu einem, wenn auch nur sehr kleinen Arbeitsverluste Veranlassung geben. Bei lange anhaltenden Drehungen und Schwingungen der auf diese Weise unterstützten Körper stellen sich solche Reibungsflächen ohnedies noch ein in Folge des Abreibens der Spitze oder scharfen Kante, und es ist dann die Reibung nach dem Früheren zu beurtheilen. Man wendet aus diesem Grunde diese Unterstützungsmethoden auch nur bei Instrumenten, wie bei der Boussole,

Waage u. s. w. an, wo es auf die Herabziehung der Reibung wesentlich ankommt und nur von Zeit zu Zeit Bewegungen zugelassen werden. Spitzen und Schneiden.

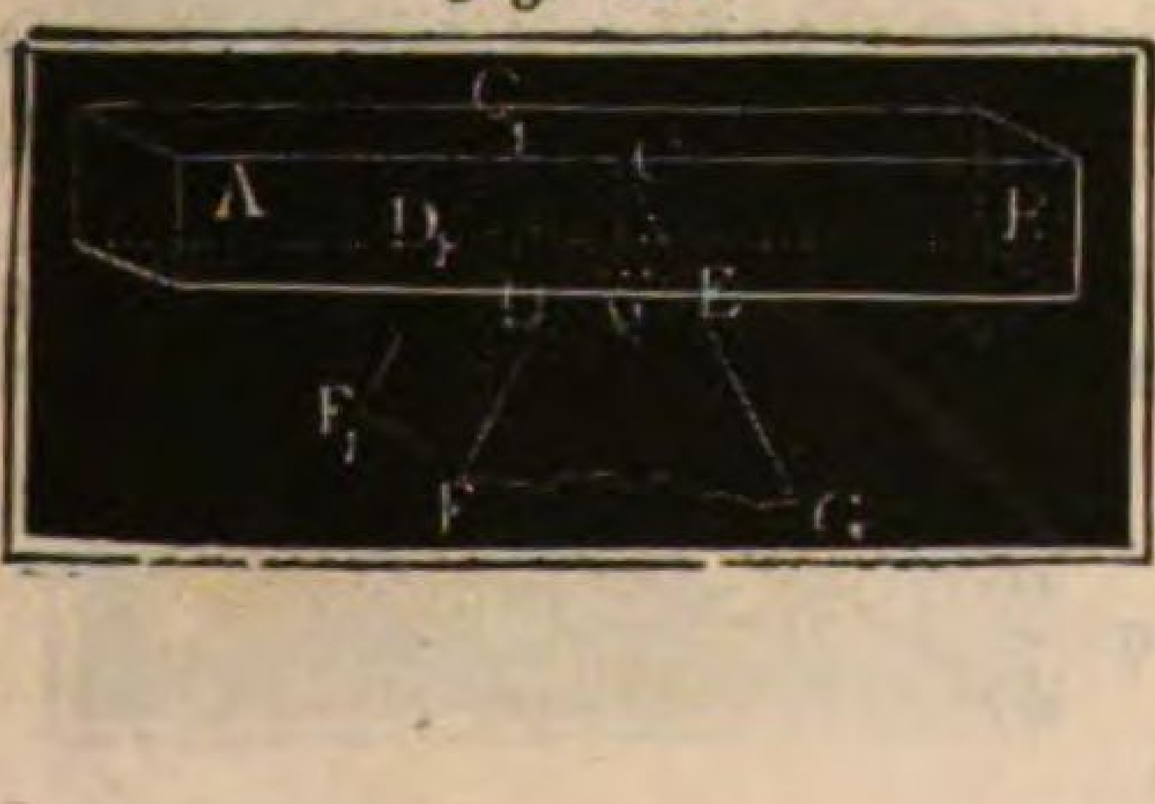
Versuche über Reibung eines auf einer harten Stahlspitze ruhenden und um diese drehbaren Körpers hat Coulomb angestellt. Nach diesen Versuchen wächst diese Reibung etwas stärker als der Druck und verändert sich mit der Stärke der Zuspitzung des unterstützenden Stiftes. Sie ist bei einer Granatfläche am kleinsten, größer bei einer Achatfläche, größer bei einer Fläche von Bergkrystall, noch größer bei einer Glasfläche, am größten aber bei Stahlflächen. Bei sehr kleinem Drucke, wie bei der Magnetnadel, kann der Stift bis auf 10^0 bis 12^0 Convergenz zugespitzt werden. Ist der Druck aber groß, so muß man weit größere Convergenzwinkel (30 bis 45^0) anwenden. Die Reibung ist kleiner, wenn der Körper mit einer ebenen Fläche auf einer Spitze ruht, als wenn er mit einer conischen oder sphärischen Höhlung aufsitzt. Bei einer scharfen Schneide, wie sie bei Waagebalken vorkommt, finden jedenfalls ähnliche Beziehungen statt. Schwer zu belastende Waagebalken bekommen schneidige Axen von 90^0 Convergenz, leichte Waagen können eine Schärfung von 30^0 vertragen.

Fig 233.



Anmerkung. Nimmt man an, daß die Nadel AB, Fig. 233, am Stifte FCG die Spitze DCE von der Höhe $CM = h$ und dem Halbmesser $DM = r$ eingedrückt habe, und setzt man voraus, daß das Volumen $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ dem Drucke R proportional sei, so läßt sich das Maaß der Reibung auf folgende Weise finden. Setzen wir $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \mu R$, wo μ eine Erfahrungszahl ist, und führen wir den Convergenzwinkel $DCE = 2\alpha$ ein, setzen also $h = r\, cotg.\, \alpha$, so erhalten wir den Halbmesser der Basis: $r = \sqrt[3]{\frac{3\mu R\, tang.\, \alpha}{\pi}}$ und $\varphi R r = \varphi \sqrt[3]{\frac{3\mu R^4\, tang.\, \alpha}{\pi}} = \varphi \sqrt[3]{\frac{3\mu}{\pi}} \cdot R^{4/3} (tang.\, \alpha)^{1/3}$. Hiernach ist also anzunehmen, daß die Reibung auf einem Stifte mit der Cubikwurzel aus der vierten Potenz des Druckes und der Cubikwurzel aus der Tangente des halben Convergenzwinkels gleichmäßig wächst.

Fig. 234.

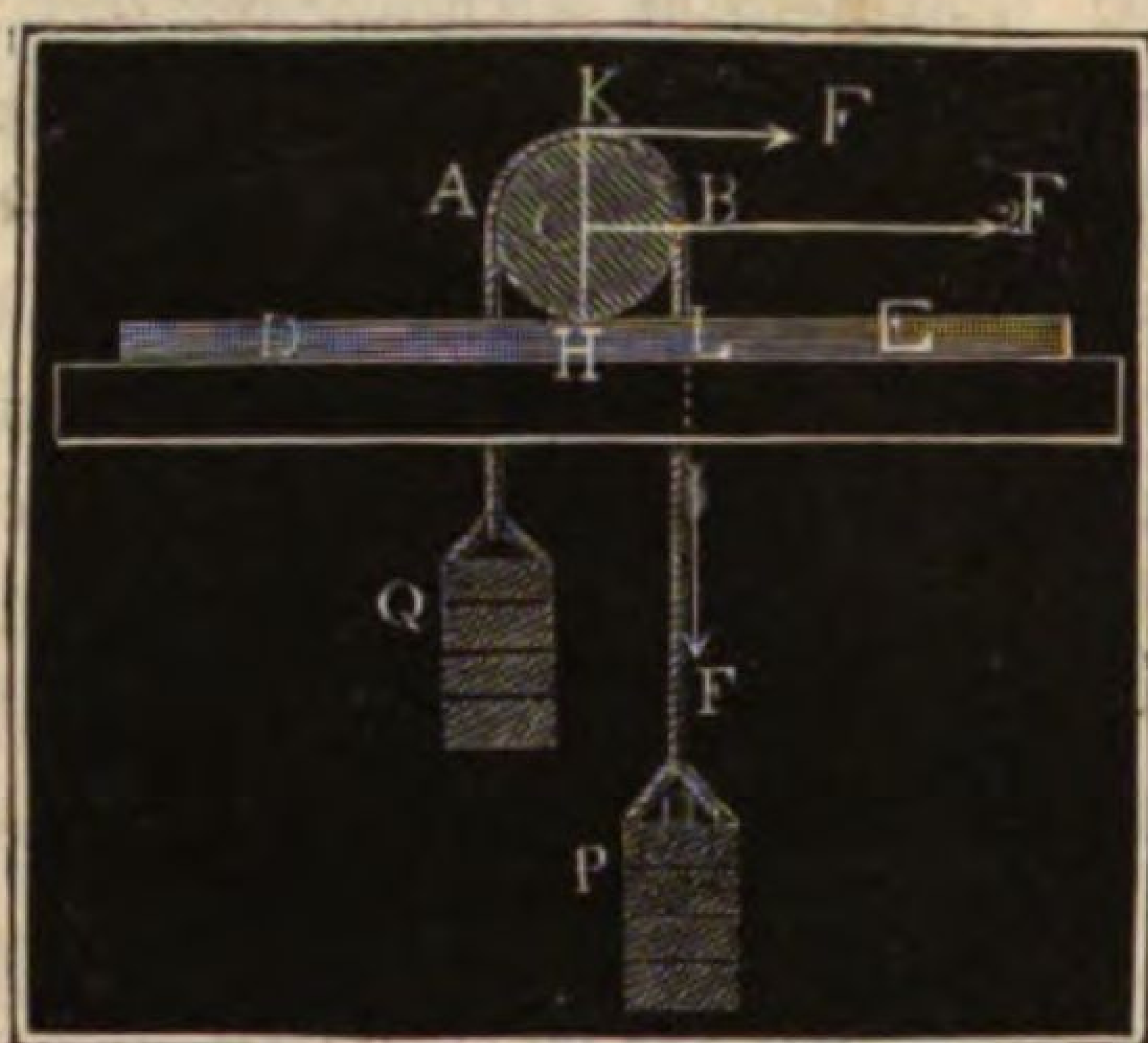


Ebenso läßt sich das Maaß der Reibung eines Balkens AB, Fig. 234, finden, welcher über einer scharfen Kante CC_1 oscillirt. Ist α der halbe Convergenzwinkel DCM, l die Länge CC_1 der Schneide und R der Druck, so ergiebt sich dieses Maaß $= \sqrt{\frac{(P\, tang.\, \alpha)^3}{l}}$.

Wälzende Reibung

§. 174. Die Theorie der wälzenden Reibung ist noch keineswegs fest begründet, man weiß, daß diese Reibung zunimmt mit dem Drucke und daß sie bei einem kleineren Durchmesser der Walze größer ist als bei einem größeren Durchmesser; in welcher algebraischen Abhängigkeit diese Reibung aber zum Drucke und Durchmesser des sich wälzenden Körpers steht, kann noch nicht als ausgemacht angesehen werden. Coulomb machte nur einige Versuche mit 2 bis 12 Zoll dicken Walzen aus Guajac (Pocken-) oder Franzosenholz und aus Ulmenholz, die er auf Unterlagen von Eichenholz wälzen ließ, indem er die Enden eines dünnen um die Walze AB gelegten Fadens durch ungleiche Gewichte P und Q. Fig 235, anspannte. Nach den Ergebnissen dieser Versuche scheint allerdings die wälzende Reibung dem Drucke direct und dem Durchmesser der Walze umgekehrt proportional zu wachsen, so daß die Kraft zur Ueberwindung der wälzenden Reibung durch $F = \varphi \cdot \frac{R}{r}$ auszudrücken ist, wenn R den Druck, r den Halbmesser der Walze und φ den durch Versuche zu ermittelnden Reibungscoefficienten bezeichnet. Giebt man r in preuß. Zollen, so ist nach diesen Versuchen

Fig. 235.



für die Walzen aus Pockenholz $\varphi = 0{,}0184$,
für die aus Ulmenholz $\varphi = 0{,}0311$.

Für gußeiserne Räder von 20 Zoll Durchmesser, welche auf gußeisernen Schienen laufen, fand der Verfasser:
$\varphi = 0{,}0178$, und Herr Rittinger in Schemnitz:
$\varphi = 0{,}0187$.

Nach Pambour ist für Eisenbahnräder von ungefähr 38 Zoll Höhe:
$\varphi = 0{,}019$ bis $0{,}021$.

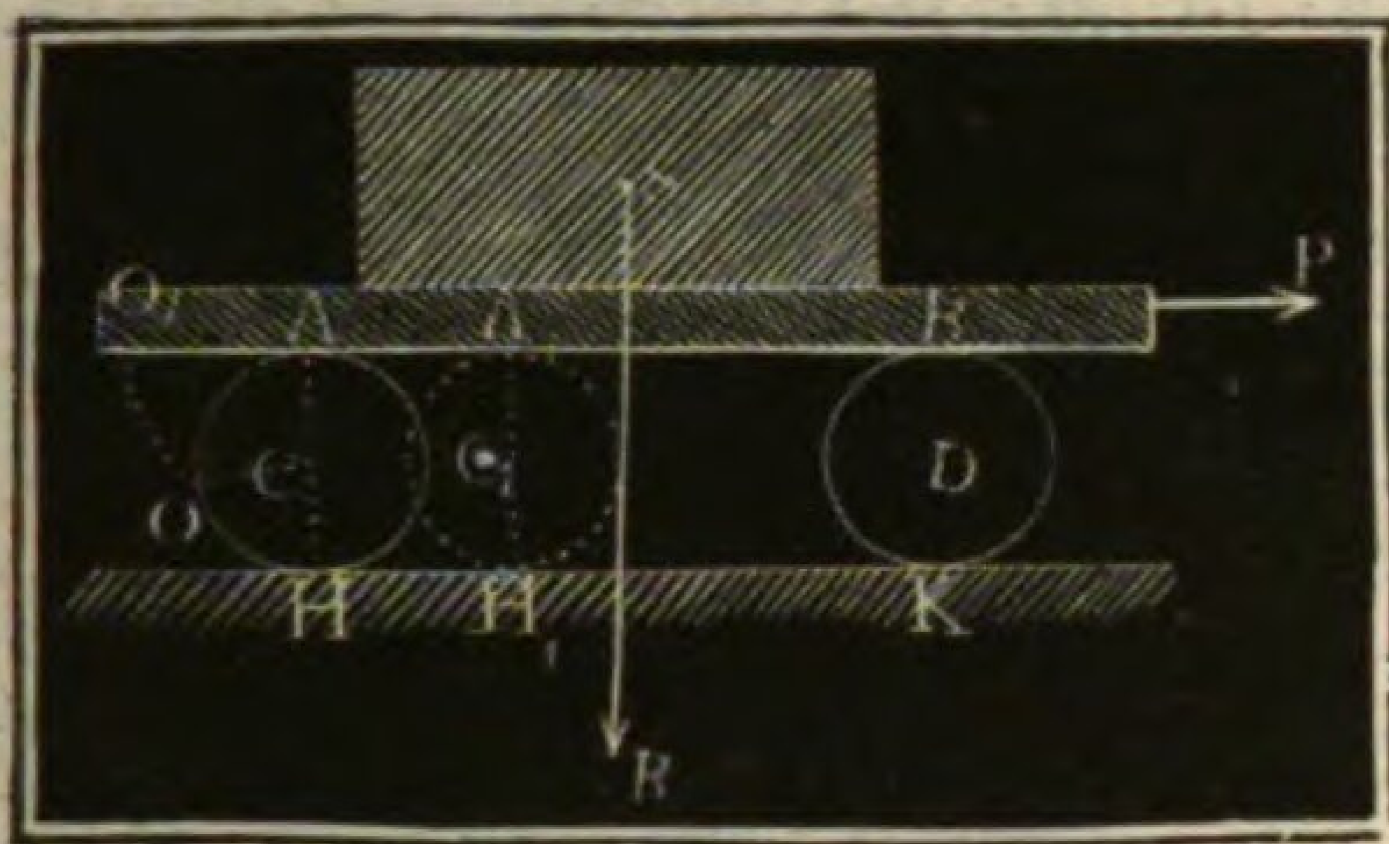
Die Formel $F = \varphi \frac{R}{r}$ setzt voraus, daß die Kraft F zur Ueberwindung der Reibung an einem dem Walzenhalbmesser gleichen Hebelarm $HC = HL = r$ wirke, und daher mit der Walze einerlei Weg zurücklege; wirkt dieselbe aber an einem Hebelarm $HK = 2r$, so ist auch der Weg derselben doppelt so groß als der der Walze auf der Bahn, und daher die Reibung:

$$F_1 = \frac{1}{2} F = \varphi \frac{R}{2r}.$$

Wälzende Reibung.

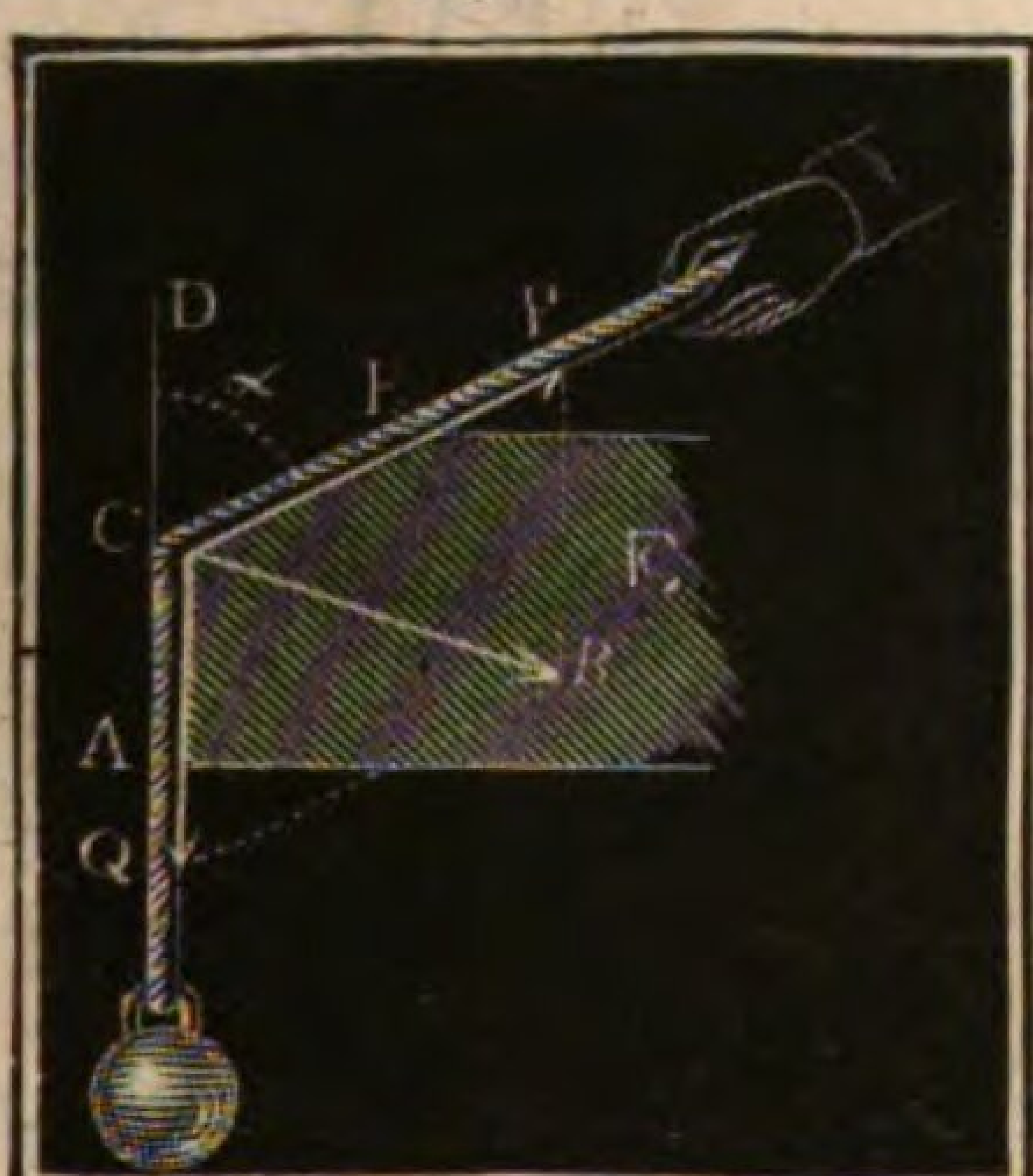
Wird ein über Walzen C und D, Fig. 236, liegender Körper ABS fortgezogen, so fällt die erforderliche Kraft P sehr klein aus, weil nur zwei wälzende Reibungen, nämlich die zwischen AB und den Walzen und die zwischen den Walzen und der Bahn HK zu überwinden sind. Uebrigens ist der progessive Weg der Walzen nur halb so groß als der Weg der Last R, und es sind deshalb beim ferneren Fortgehen immer wieder neue Walzen vorn unterzuschieben, weil die Berührungspunkte A und B zwischen den Walzen und dem Körper AB vermöge des Wälzens ebenso viel rückwärts gehen, als die Axe der Walze vorwärts. Hat sich die Walze AH um den Bogen AO gedreht, so ist sie auch um einen diesem Bogen gleichen Weg AA_1 vorwärts gegangen und O mit O_1 in Berührung gekommen, der neue Berührungspunkt O_1 also um $AO_1 = AO$ hinter dem vorigen (A) zurückgegangen. Sind die Reibungscoefficienten φ und φ_1, so hat man die Kraft zum Fortziehen der Last $R : P = (\varphi + \varphi_1)\, \frac{R}{2r}$.

Fig. 236.



Anmerkung. Die von Morin in großer Ausdehnung angestellten Versuche über den Widerstand der Wagen auf Straßen stimmen mit dem Gesetze, wonach dieser Widerstand mit dem Drucke gleichmäßig und mit der Dicke der Walze umgekehrt wächst, überein. Ein anderer französischer Ingenieur, Dupuit, hingegen leitet aus seinen Versuchen ab, daß die wälzende Reibung zwar dem Drucke direct, aber übrigens nur der Quadratwurzel aus dem Walzenhalbmesser umgekehrt proportional wachse. Besondere theoretische Ansichten über wälzende Reibung findet man in v. Gerstner's Mechanik, Bd. I. §. 537 und in Brix' Abhandlung über die Reibung, Art. 6 entwickelt. Ausführlicher wird hierüber im dritten Theile bei der Förderung auf Straßen und Schienenwegen gehandelt.

Fig. 237.



Seilreibung.

§. 175. Wir haben nun die Reibung eines biegsamen Körpers kennen zu lernen. Wird ein übrigens vollkommen biegsames, durch eine Kraft Q angespanntes Seil um die Kante C eines festen Körpers ABE, Fig. 237, gelegt und dadurch um einen Winkel $DCB = \alpha^0$ von seiner anfänglichen Richtung abgelenkt, so entsteht in der Kante ein

Seilreibung. Druck R, aus dem wieder eine Reibung F hervorgeht, welche verursacht, daß die Kraft P zur Herstellung eines labilen Gleichgewichtes größer oder kleiner als Q ist. Der Druck ist (§. 74) $R = \sqrt{P^2 + Q^2 - 2PQ \cos. \alpha}$, folglich die Reibung $F = \varphi \sqrt{P^2 + Q^2 - 2PQ \cos. \alpha}$. Setzen wir nun noch $P = Q + F$ und P^2 annähernd $= Q^2 + 2QF$, so erhalten wir

$$F = \varphi \sqrt{Q^2 + 2QF + Q^2 - 2Q^2 \cos. \alpha - 2FQ \cos. \alpha}$$

$= \varphi \sqrt{2(1 - \cos. \alpha)(Q^2 + QF)} = 2 \varphi \sin. \frac{\alpha}{2} \sqrt{Q^2 + QF}$, wofür sich wieder $= 2 \varphi \sin. \frac{\alpha}{2} (Q + \frac{1}{2} F)$ setzen läßt, wenn man von der Quadratwurzel nur die ersten 2 Glieder berücksichtigt. Jetzt ergiebt sich $F - \varphi F \sin. \frac{\alpha}{2} = 2 \varphi Q \sin. \frac{\alpha}{2}$, folglich die gesuchte Reibung $F = \dfrac{2 \varphi Q \sin. \frac{\alpha}{2}}{1 - \varphi \sin \frac{\alpha}{2}}$, wofür meist $= 2 \varphi Q \sin. \frac{\alpha}{2} \left(1 + \varphi \sin. \frac{\alpha}{2}\right)$ und sogar sehr oft $= 2 \varphi Q \sin. \frac{\alpha}{2}$ gesetzt werden kann. Um also das Seil über der Ecke wegzuziehen, ist eine Kraft $P = Q + F = \left(1 + \dfrac{2 \varphi \sin. \frac{\alpha}{2}}{1 - \varphi \sin. \frac{\alpha}{2}}\right) Q$ nöthig, und um umgekehrt, durch das Seil das Niedergehen der Last Q zu verhindern, ist eine Kraft $P_1 = Q : \left(1 + \dfrac{2 \varphi \sin. \frac{\alpha}{2}}{1 - \varphi \sin. \frac{\alpha}{2}}\right)$ erforderlich; annähernd ist also $P = \left[1 + 2 \varphi \sin. \frac{\alpha}{2} \left(1 + \varphi \sin. \frac{\alpha}{2}\right)\right] Q$, oder noch einfacher, $P = \left(1 + 2 \varphi \sin. \frac{\alpha}{2}\right) Q$ und $P_1 = \dfrac{Q}{1 + 2 \varphi \sin. \frac{\alpha}{2} \left(1 + \varphi \sin. \frac{\alpha}{2}\right)}$, oder $P_1 = \dfrac{Q}{1 + 2 \varphi \sin. \frac{\alpha}{2}} = \left(1 - 2 \varphi \sin. \frac{\alpha}{2}\right) Q$ zu setzen.

Geht das Seil über mehrere Kanten, so lassen sich durch wiederholte Anwendung dieser Formeln die Kräfte P und P_1 am andern Seilende eben=

falls berechnen. Nehmen wir den einfachen Fall an, daß das Seil ABC, Seilreibung.

Fig. 238.

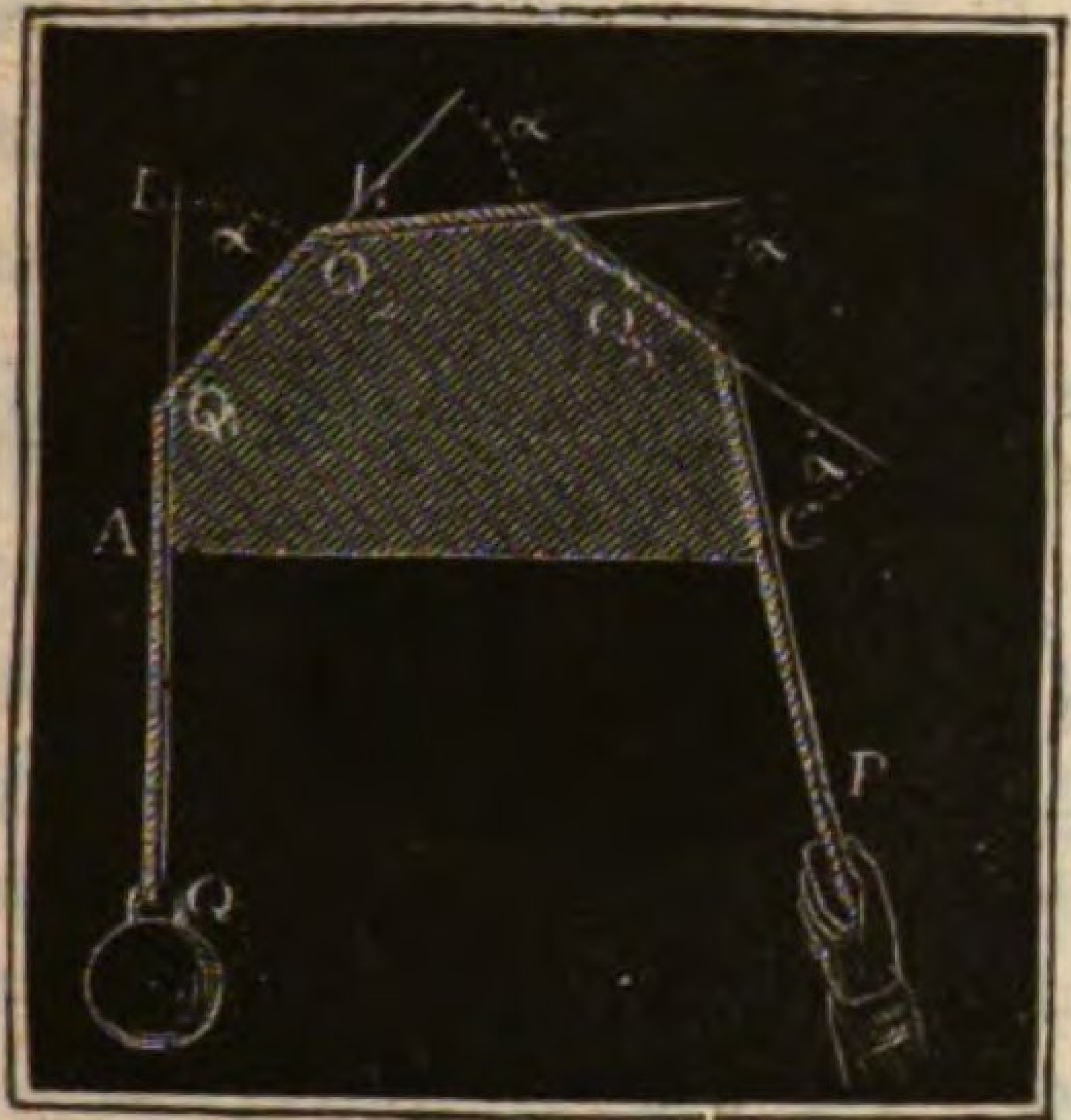
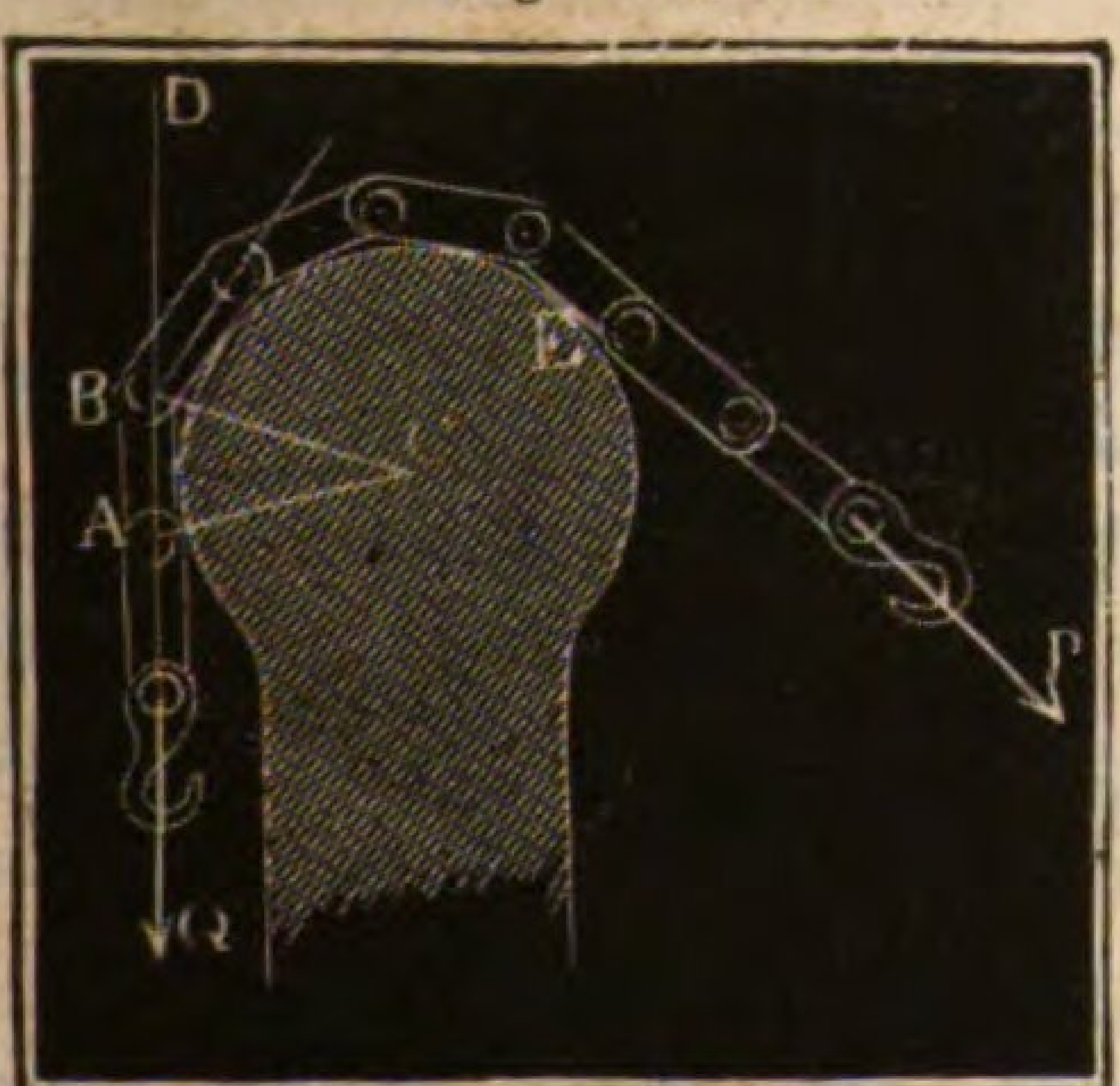


Fig. 238, um einen Körper mit n Kanten gelegt sei und an jeder Kante um denselben kleinen Winkel α abgelenkt werde. Die Spannung im ersten Seilstücke ist $Q_1 = \left(1 + 2\varphi \sin.\frac{\alpha}{2}\right) Q$, wenn die des Endes $= Q$ beträgt; die des zweiten, $Q_2 = \left(1 + 2\varphi \sin.\frac{\alpha}{2}\right) Q_1$ $= \left(1 + 2\varphi \sin.\frac{\alpha}{2}\right)^2 Q$, die des dritten, $Q_3 = \left(1 + 2\varphi \sin.\frac{\alpha}{2}\right) Q_2$ $= \left(1 + 2\varphi \sin.\frac{\alpha}{2}\right)^3 Q$, daher allgemein, die Kraft am letzten Ende: $P = \left(1 + 2\varphi \sin.\frac{\alpha}{2}\right)^n Q$, insofern es auf eine Bewegung in der Richtung der Kraft P ankommt. Vertauscht man P durch Q, so erhält man dagegen $P_1 = \frac{Q}{\left(1 + 2\varphi \sin.\frac{\alpha}{2}\right)^n}$, wofern nur eine Bewegung in der Richtung von Q zu verhindern ist.

Die Reibung $F = P - Q$ ist in einem Falle $= \left[\left(1 + 2\varphi \sin.\frac{\alpha}{2}\right)^n - 1\right] Q$ und im zweiten $= Q - P_1 = \left[\left(1 + 2\varphi \sin.\frac{\alpha}{2}\right)^n - 1\right] P_1$ $= \left[1 - \left(1 + 2\varphi \sin.\frac{\alpha}{2}\right)^{-n}\right] Q$.

Dieselben Formeln finden auch ihre Anwendung bei einem um einen

Fig. 239.



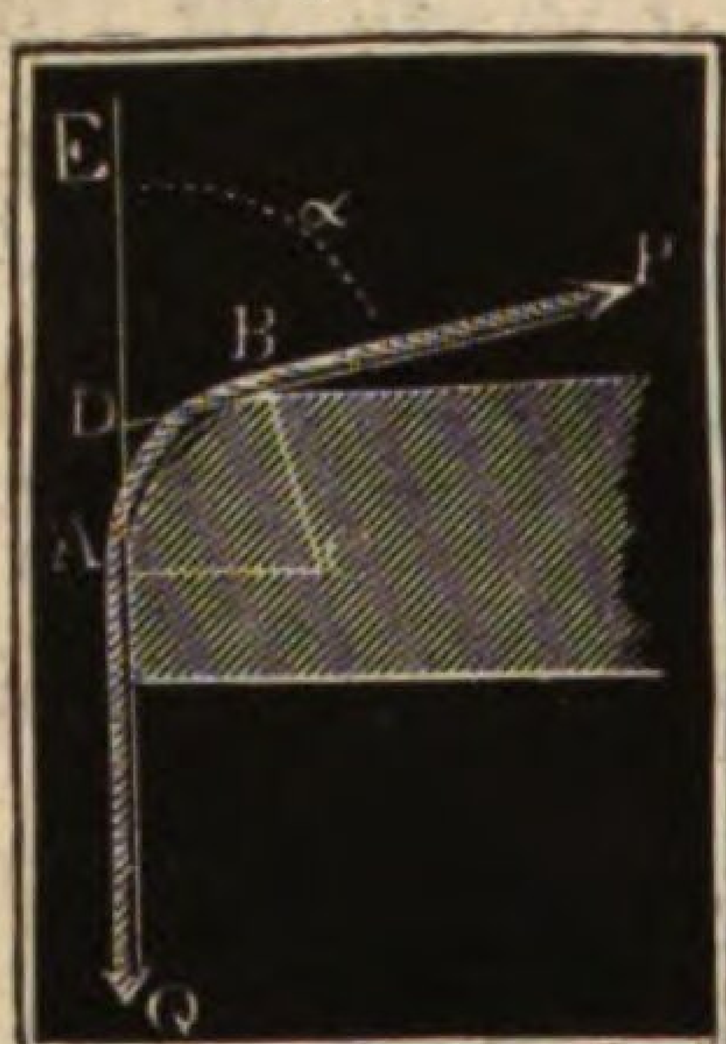
Cylinder gewickelten, gegliederten Körper, z. B. einer Kette ABE, Fig. 239, wo dann n die Zahl der aufliegenden Glieder angiebt. Ist die Länge AB eines Kettengliedes $= l$ und die Entfernung CA der Axe A eines Gliedes von dem Mittelpunkte des bedeckten Kreisbogens $= r$, so hat man $\sin.\frac{\alpha}{2} = \frac{l}{2r}$.

Beispiel. Wie groß ist die Reibung am Umfange eines 4 Fuß hohen Rades, wenn dasselbe von zwanzig 5 Zoll langen

Seilreibung. und einen Zoll dicken Gliedern einer Kette bedeckt wird, deren eines Ende festgehalten und deren anderes Ende mit 50 Pf. Kraft angespannt wird? Hier ist $P_1 = 50$ Pf., $n = 20$, $sin. \frac{\alpha}{2} = \frac{5}{48+1} = \frac{5}{49}$, setzen wir nun noch für φ den mittleren Werth 0,35, so erhalten wir die Reibung, mit der die Kette dem Rade in seiner Umdrehung entgegenwirkt: $F = \left[\left(1 + 2 \,.\, 0{,}35 \,.\, \frac{5}{49}\right)^{20} - 1\right] . \, 50$
$= \left[\left(1 + \frac{35}{490}\right)^{20} - 1\right] . \, 50 = \left[\left(\frac{15}{14}\right)^{20} - 1\right] . \, 50 = 2{,}974 \,.\, 50 = 149$ Pf.

§. 176. Liegt ein gespanntes Seil AB, Fig. 240, um einen festliegenden, cylindrisch abgerundeten Körper ACB, so läßt sich die Reibung durch die im vorigen §. gefundene Regel ebenfalls finden. Es ist hier der Ablenkungswinkel $EDB = \alpha^0 =$ dem Centriwinkel ACB des Seilbogens AB; theilt man denselben in n gleiche Theile und sieht man den Bogen AB als aus n geraden Linien bestehend an, so erhält man auch n Ecken, jede mit der Ablenkung $\frac{\alpha^0}{n}$, und deshalb die Gleichung zwischen Kraft und Last wie im vorigen §.: $P = \left(1 + 2\,\varphi\, sin. \frac{\alpha}{2n}\right)^n Q$. Wegen der

Fig. 240.



Kleinheit von $\frac{\alpha}{2n}$ läßt sich aber $sin. \frac{\alpha}{2n} \doteq \frac{\alpha}{2n}$ setzen, weshalb $P = \left(1 + \frac{\varphi\alpha}{n}\right)^n Q$ sich herausstellt. Bedient man sich nun noch der binomischen Reihe, so erhält man

$$P = \left(1 + n\frac{\varphi\alpha}{n} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\,\frac{(\varphi\alpha)^2}{n^2} + \frac{n(n-1)\;(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,\frac{(\varphi\alpha)^3}{n^3} + \ldots\right) Q,$$

oder, da n sehr groß ist, also $n - 1 = n - 2 = n - 3 \ldots = n$ gesetzt werden kann:

$$P = \left(1 + \varphi\alpha + \frac{1}{1\,.\,2}(\varphi\alpha)^2 + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,(\varphi\alpha)^3 + \ldots\right) Q.$$

Nun ist aber $1 + x + \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots = e^x$, wo e die Grundzahl 2,71828 . . des natürlichen Logarithmensystemes bezeichnet, es läßt sich daher auch setzen:

$$P = e^{\varphi\alpha}\,.\,Q, \text{ so wie } Q = Pe^{-\varphi\alpha}, \text{ und umgekehrt}$$

$$\alpha = \frac{1}{\varphi}\, Log.nat.\, \frac{P}{Q} = \frac{2{,}3026}{\varphi}\,(Log\, P - Log\, Q).$$

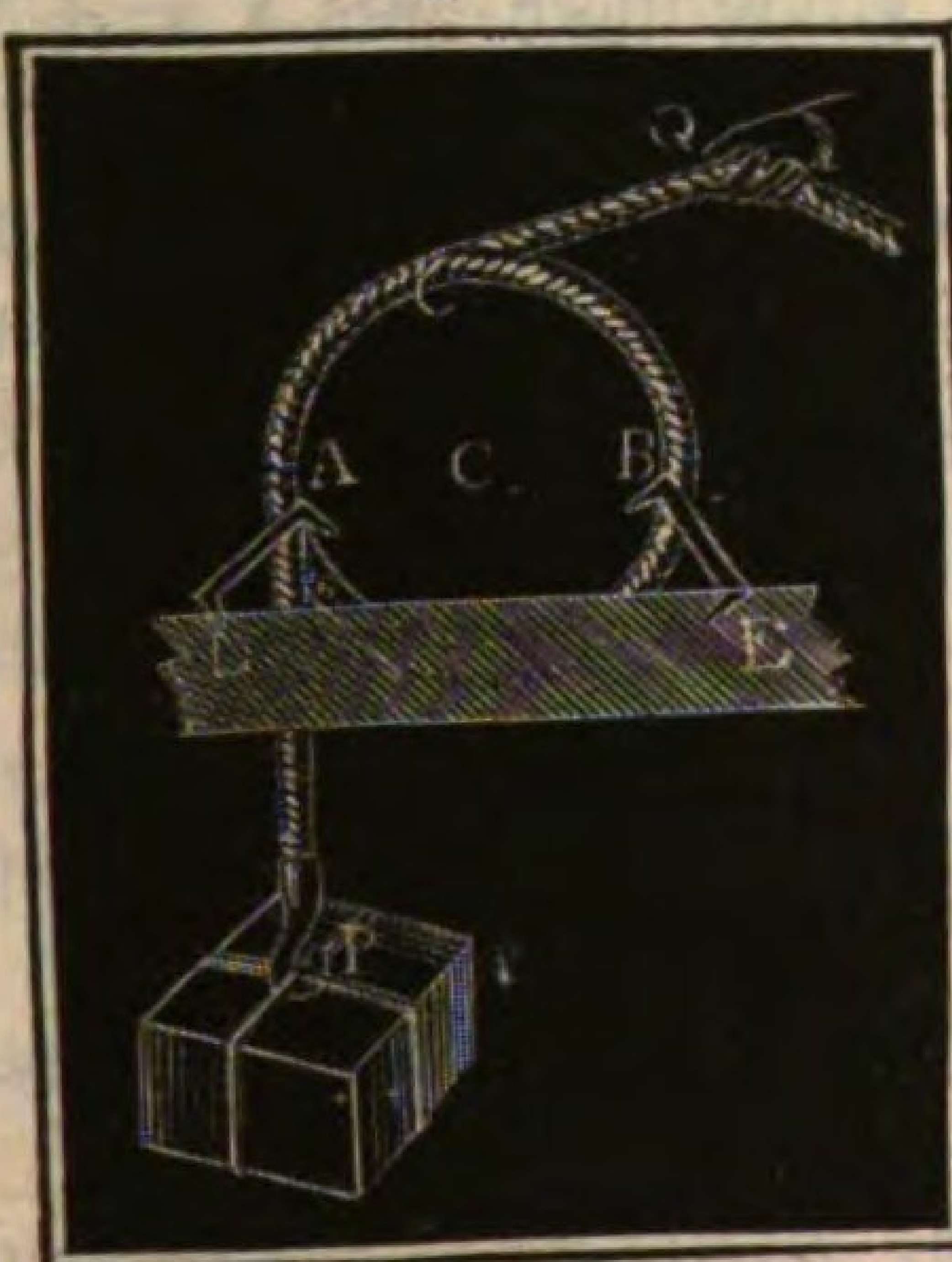
Giebt man den Seilbogen nicht in Theilen von π, sondern in Graden, Seilreibung.
so hat man $\alpha = \frac{\alpha^0}{180^0} \cdot \pi$ zu substituiren, drückt man ihn endlich durch die Zahl u der Umschläge aus, so hat man $\alpha = 2\pi u$ zu setzen.

Die Formel $P = e^{\varphi\alpha} . Q$ giebt an, daß die Seilreibung $F = P - Q$ auf einem festliegenden Cylinder gar nicht vom Durchmesser desselben, sondern nur von der Anzahl der Seilumschläge abhängt, zeigt aber auch, daß sie leicht außerordentlich vergrößert und fast bis in's Unendliche gesteigert werden kann. Setzen wir $\varphi = \frac{1}{3}$, so bekommen wir

für $\frac{1}{4}$	Umwickelung	$P = 1,69\ Q$
» $\frac{1}{2}$	»	$P = 2,85\ Q$
» 1	»	$P = 8,12\ Q$
» 2	»	$P = 65,94\ Q$
» 4	»	$P = 4348,56\ Q$, u. s. w.

Beispiel. Um eine große untheilbare Last P von 1200 Pf. von einer gewissen Höhe, z. B. in einem Schachte, herabzulassen, wickelt man das Seil, woran diese Last hängt, um einen festgeklammerten runden Stamm AB, Fig. 241, $1\frac{3}{8}$mal herum und hält das übrig bleibende Seilende in der Hand. Mit welcher Kraft ist nun dieses Seilende anzuspannen, damit die Last langsam und gleichförmig niedersinkt? Setzen wir auch hier $\varphi = 0,3$, so erhalten wir diese Kraft

Fig. 241.



$$Q = Pe^{-\varphi\alpha} = 1200 . e^{-0,3 . \frac{11}{8} 2\pi}$$

$$= 1200 . e^{-\frac{33}{40}\pi},$$

also $Log.\ nat.\ Q = Log\ nat.\ 1200 - \frac{33}{40}\pi$

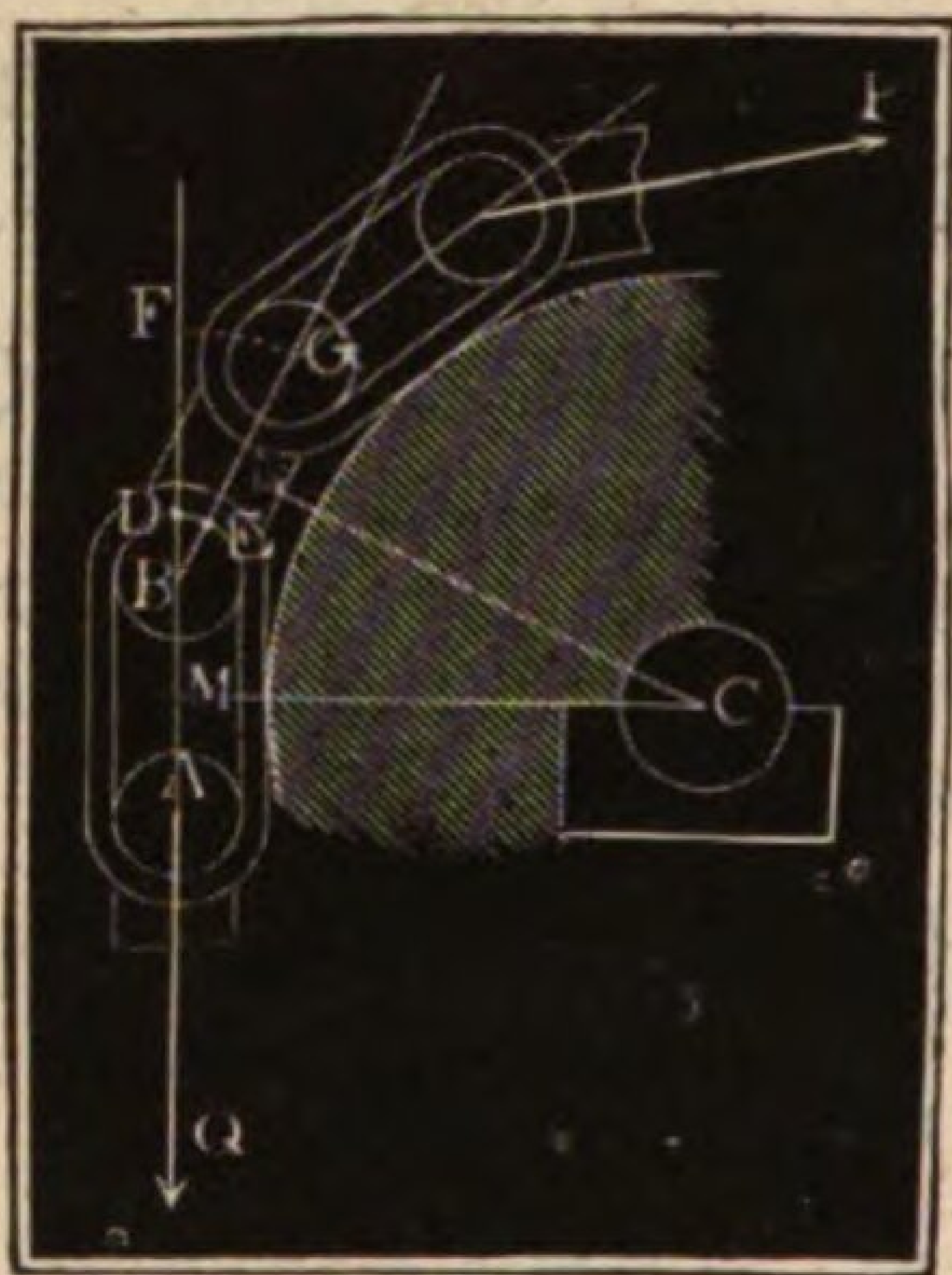
$$= 7,0901 - 2,5918 = 4,4983.$$

$Log.\ Q = 1,9536,\ Q = 89,9$ Pf.

§. 177. Legen sich Seile oder gegliederte Körper u. s. w. um eine Rolle oder um den Umfang anderer, um eine Axe drehbarer Cylinder, so hört die im vorigen §. betrachtete Seil- oder Kettenreibung auf, weil nun der Radumfang mit dem Seile einerlei Geschwindigkeit annimmt, dafür macht sich nun aber die Kraft zum Umbiegen beim Auflegen auf die Rolle und nach Befinden auch die zum Aufbiegen beim Abwickeln von der Rolle bemerkbar. Ist es eine Kette, die sich um eine Trommel wickelt, so besteht der Widerstand des Auf- und Abwickelns in einer Reibung der Kettenbolzen, indem letztere in ihren Lagern um gewisse Winkel gedreht werden. Ist AB, Fig. 242, das eine und BG Steifigkeit der Ketten.

Steifigkeit der Ketten.

Fig. 242.



das nächstfolgende Kettenglied, ist ferner C die Drehungsaxe der Rolle, worauf sich die durch die Last Q ausgespannte Kette aufwickelt, sind endlich CM und CN Perpendikel gegen die Längenaxen der Glieder AB und BG gefällt, so ist $MCN = \alpha^0$ der Winkel, um welchen sich die Rolle dreht, während sich ein neues Glied auflegt und auch zugleich der Winkel $FBG = 180^0 - ABE$, um welchen sich bei diesem Auflegen das Glied BG mit seinem Bolzen BD in dem Gliede AB umdreht. Ist nun $BD = BE = r_1$ der Halbmesser des Bolzens, so durchläuft der Druck- oder Reibungspunkt D bei diesem Umlegen einen Bogen $DE = r_1\alpha$, und es ist die hierbei verrichtete Arbeit der Reibung $\varphi_1 Q$ im Punkte B, $= \varphi_1 Q . r_1 \alpha$. Die Kraft P_1 zur Ueberwindung dieser Reibung, in der Richtung der Längenaxe BG wirkend, angenommen, erhält man für sie den gleichzeitigen Weg $s = CN$ mal Bogen des Winkels $MCN = CN . \alpha$ und die Arbeit $= P_1 . CN . \alpha$; es ergiebt sich daher durch Gleichsetzen beider Arbeiten $P_1 . CN . \alpha = \varphi_1 . Q r_1 \alpha$ und die gesuchte Kraft, wenn man noch den um die halbe Kettenstärke vergrößerten Halbmesser CN der Trommel durch a bezeichnet: $P_1 = \varphi_1 Q . \frac{r_1}{a}$.

Ohne Rücksicht auf alle Reibungen wäre die Kraft zum Umdrehen der Rolle: $P = Q$, mit Rücksicht der Reibung beim Aufwickeln der Kette ist sie aber $P = Q + P_1 = \left(1 + \varphi_1 \frac{r_1}{a}\right) Q$. Wickelt sich die Kette von der Trommel ab, so findet ein gleicher Widerstand Statt; wenn also, wie bei den sogenannten Leitrollen, ein Auflegen auf der einen Seite und ein Abwickeln auf der andern statthat, so ist die Kraft $P = \left(1 + \varphi_1 \frac{r_1}{a}\right)^2 Q$ oder annähernd $= \left(1 + 2\varphi_1 \frac{r_1}{a}\right) Q$.

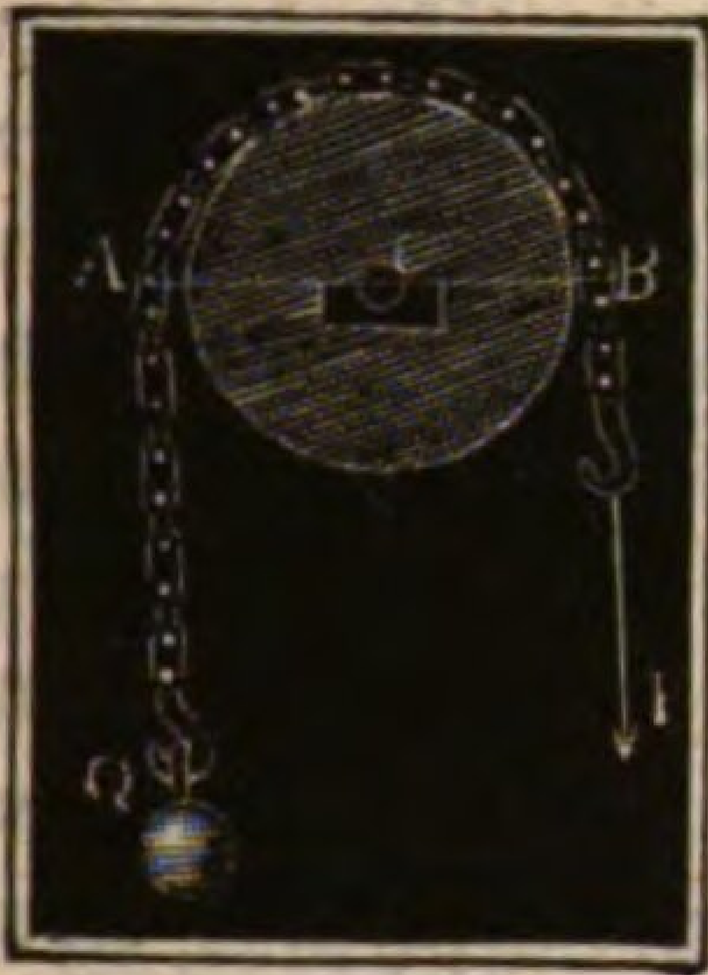
Ist endlich noch der Zapfendruck $= R$ und der Zapfenhalbmesser $= r$, so folgt die Kraft bei Berücksichtigung aller Hindernisse:

$$P = \left(1 + 2\varphi_1 \frac{r_1}{a}\right) Q + \varphi \frac{r}{a} R.$$

Steifigkeit der Ketten.

Beispiel. Wie groß ist die Kraft P am Ende einer um eine Rolle ACB, Fig. 243, geschlagenen Kette, wenn die vertikal niederziehende Last $Q = 110$ Pf., das Gewicht der Rolle sammt Kette 50 Pfund beträgt, der bis zur Mitte der Kette gemessene Halbmesser a der Rolle $= 7$ Zoll, der Halbmesser des Zapfens $C = \frac{5}{8}$ Zoll und der Halbmesser der Kettenbolzen $= \frac{3}{8}$ Zoll mißt? Setzen wir die Reibungscoefficienten $\varphi = 0{,}075$ und $\varphi_1 = 0{,}15$, so erhalten wir nach der letzten Formel die Kraft

Fig. 243.



$$P = \left(1 + 2\,.\,0{,}15\,.\,\frac{3}{8.7}\right).110 + 0{,}075\,.\,\frac{5}{8.7}(110 + 50 + P),$$

oder, wenn wir rechts $P = 110$ annähernd annehmen:

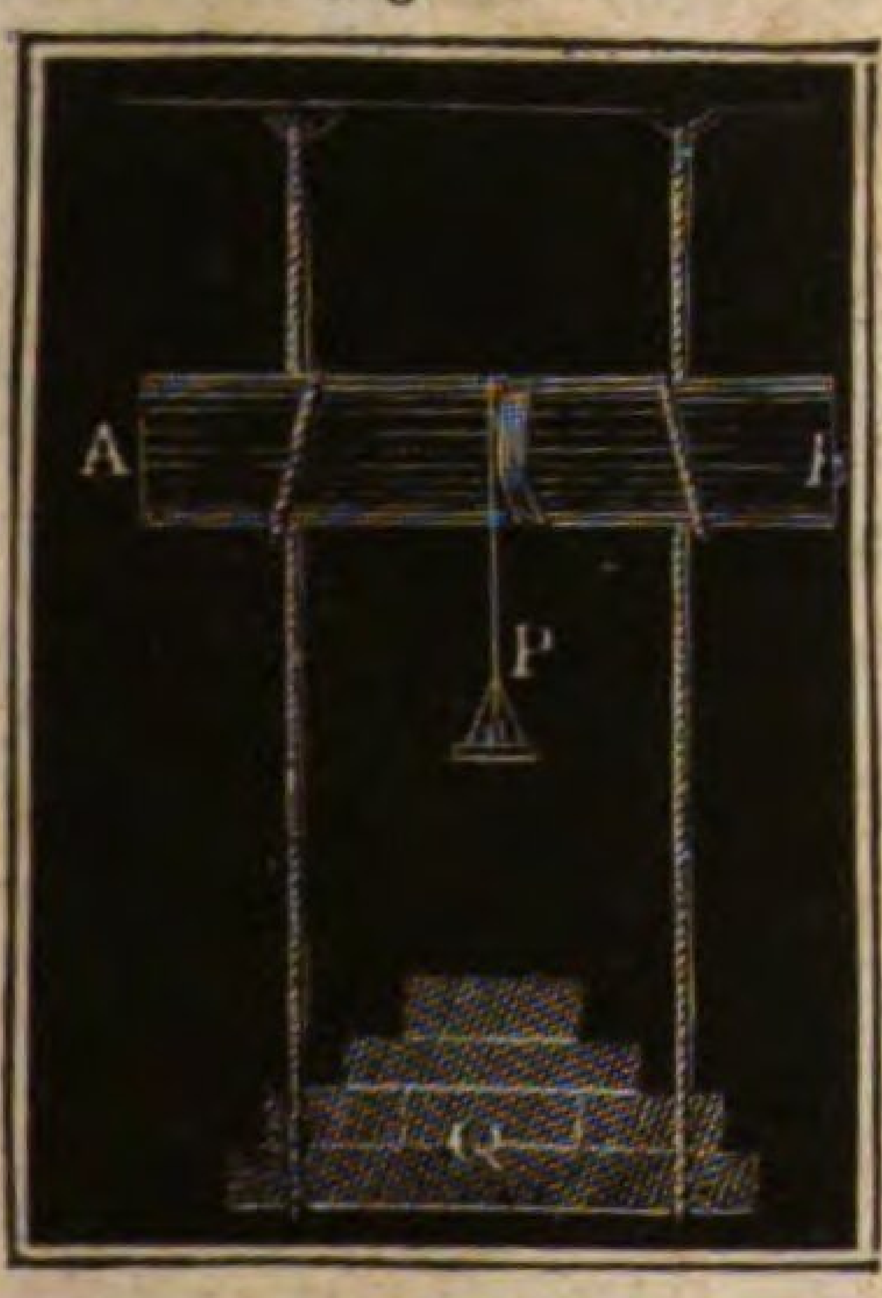
$$P = 1{,}016\,.\,110 + 0{,}0067\,.\,270 = 111{,}76 + 1{,}81 = 113{,}6 \text{ Pf.}$$

Steifigkeit der Seile.

§. 178. **Beim Umbiegen eines Seiles um eine Rolle, oder beim Aufwickeln desselben auf eine Welle, tritt die Steifigkeit (franz. roideur, engl. rigidity) desselben als ein der Bewegung desselben entgegengesetztes Hinderniß hervor.** Dieser Widerstand hängt nicht allein von dem Stoffe ab, aus dem das Seil gefertigt ist, sondern auch von der Zusammensetzungsweise und von der Stärke des Seiles, und läßt sich deshalb nur auf experimentellem Wege ermitteln.

Versuche zu diesem Zwecke sind vorzüglich von Coulomb, und in der neueren Zeit von dem Verfasser selbst angestellt worden. Während sich Coulomb nur mit schwachen Hanfseilen von $\frac{1}{4}$ bis höchstens $1\frac{1}{2}$ Zoll Stärke beschäftigte und dieselben auch nur auf Rollen von 1 bis höchstens 6 Zoll Durchmesser aufwickeln ließ, hat der Verfasser Hanfseile von 2 Zoll Stärke und Drahtseile von $\frac{1}{2}$ bis 1 Zoll Stärke über Rollen von 2 bis $6\frac{1}{2}$ Fuß Durchmesser laufen lassen.

Fig. 244.



Coulomb hat seine Versuche auf zweierlei Weise ausgeführt. Ein Mal nach Amontons mit einem in Fig. 244 abgebildeten Apparate, wo AB eine von zwei Seilen umschlungene Walze ist, die Spannung durch ein Gewicht Q hervorgebracht und das Herabrollen der Walze durch ein zweites Gewicht P, welches mittels eines dünnen Fadens an dieser Walze zieht, bewirkt wird. Ein zweites Mal hat er die Seile um, auf einer horizontalen Bahn sich wälzen lassende Cylinder gelegt, und aus der Differenz der an beiden Seilenden hängenden und ein langsames Fortrollen bewirkenden Gewichte, nach Abzug der rollenden Reibung, auf den Steifigkeitswiderstand geschlossen.

Aus den Versuchen Coulomb's geht hervor, daß der Steifigkeits-

Steifigkeit der Seile. widerstand mit der Stärke der Spannung des sich aufwickelnden Seiles ziemlich gleichmäßig wächst, daß er aber auch noch aus einem constanten Gliede K besteht, wie sich allerdings nicht anders erwarten läßt, weil schon eine gewisse Kraft nöthig ist, um ein unangespanntes Seil umzubiegen. Auch stellt sich heraus, daß dieser Widerstand im umgekehrten Verhältnisse der Rollendurchmesser zunimmt, daß er also bei dem doppelten Durchmesser der Rolle nur halb so groß ist, beim dreifachen ein Drittel u. s. w. Endlich läßt sich die Beziehung zwischen der Seildicke und der Seilsteifigkeit nach diesen Versuchen nur annähernd angeben, wie es auch kaum anders zu erwarten ist, da die Steifigkeit auch noch von der materiellen Beschaffenheit und von der Stärke der Drehung der Fäden und Litzen mit abhängt. Bei neuen Seilen fand sich die Steifigkeit ungefähr proportional der Potenz $d^{1,7}$, bei alten aber mehr $d^{1,4}$, wenn d den Durchmesser des Seiles bezeichnet. Es ist also nur sehr ohngefähr, wenn Einige diesen Widerstand dem einfachen, Andere dem Quadrate der Seilstärke proportional wachsend annehmen.

§. 179. Hiernach läßt sich also der Steifigkeitswiderstand der Hanfseile durch die Formel $S = \frac{d^n}{a}(K + \nu Q)$, wo d die Seilstärke, a der Rollenhalbmesser, bis Axe des Seiles gemessen, Q die Spannung des sich aufwickelnden Seiles, n, K und ν aber Erfahrungszahlen bezeichnen. Prony hat aus den Versuchen Coulomb's gefunden, daß für neue Seile

$$S = \frac{d^{1,7}}{a}(2,45 + 0,053\,Q),$$ und für alte

$$S_1 = \frac{d^{1,4}}{a}(2,45 + 0,053\,Q)$$ gesetzt werden kann, wenn a und d in Linien, Q, S in Pfunden ausgedrückt werden. Diese Ausdrücke beziehen sich aber auf Pariser Maaß, in preußischen Zollen und Pfunden ausgedrückt, ändern sie sich in folgende um:

$$S = \frac{d^{1,7}}{a}(14,23 + 0,295Q) \text{ und } S_1 = \frac{d^{1,4}}{a}(6,83 + 0,141\,Q).$$

Da selbst diese complicirteren Formeln nicht immer die erwünschte Uebereinstimmung mit den Versuchsresultaten geben, so kann man, so lange nicht neue Versuche zu Grunde gelegt werden können, mit Eytelwein

$$S = \nu \cdot \frac{d^2}{a} Q = \frac{d^2 Q}{3500\,a}$$ setzen, wobei vorausgesetzt ist, daß a in preußischen Fußen und d in preußischen Linien, Q und S aber in gleichem Gewichtsmaaße, übrigens willkürlich, auszudrücken sind. Für Metermaaß ist $S = 18,6 \cdot \frac{d^2 Q}{a}$. Diese Formel giebt natürlich nur bei größeren Spannungen, wie sie allerdings meist in der praktischen Anwendung vorkommen, genügende Annäherungsresultate.

Die Steifigkeit getheerter Seile ist ungefähr um ein Sechstel größer als die ungetheerter Seile gefunden worden, und nasse Seile hat man ungefähr ein Zwölftel steifer gefunden als trockene. Steifigkeit der Seile.

Beispiel. Bei einer Seilspannung von 350 Pf. und einem Rollenhalbmesser von $2\frac{1}{2}$ Zoll ist für ein 9 Linien dickes neues Seil der Steifigkeitswiderstand nach Prony: $S = \frac{2}{5}\,(\frac{3}{4})^{1,7}\,(14,23 + 0,295 \,.\, 350) = 0,613 \,.\, 47,0 = 28,8$ Pfd., nach Eytelwein: $S = \frac{9^2 \,.\, 350}{3500 \,.\, \frac{5}{24}} = 38,9$ Pf. Wäre die Spannung Q nur 150 Pf., so hätte man nach Prony $S = 0,613 \,.\, 23,4 = 14,34$ Pf., nach Eytelwein $= \frac{81 \,.\, 24 \,.\, 3}{350} = 16,7$ Pf., also hier eine bessere Uebereinstimmung. Man sieht aus diesen Beispielen, wie wenig Sicherheit diese Formeln gewähren.

Anmerkung. Tabelle zur Erleichterung der Berechnung des Steifigkeitswiderstandes der Seile theilt der »Ingenieur« S. 412 mit. Nach Morin (s. dessen Aide-Mémoire) ist, wenn n die Anzahl der Seilfäden bezeichnet, für ungetheerte Seile $d = \sqrt{0,1338\,n}$ Centimeter und

$$S = \frac{n}{2a}\,(0,000297 + 0,000245\,n + 0,000363\,Q) \text{ Kilogr.},$$

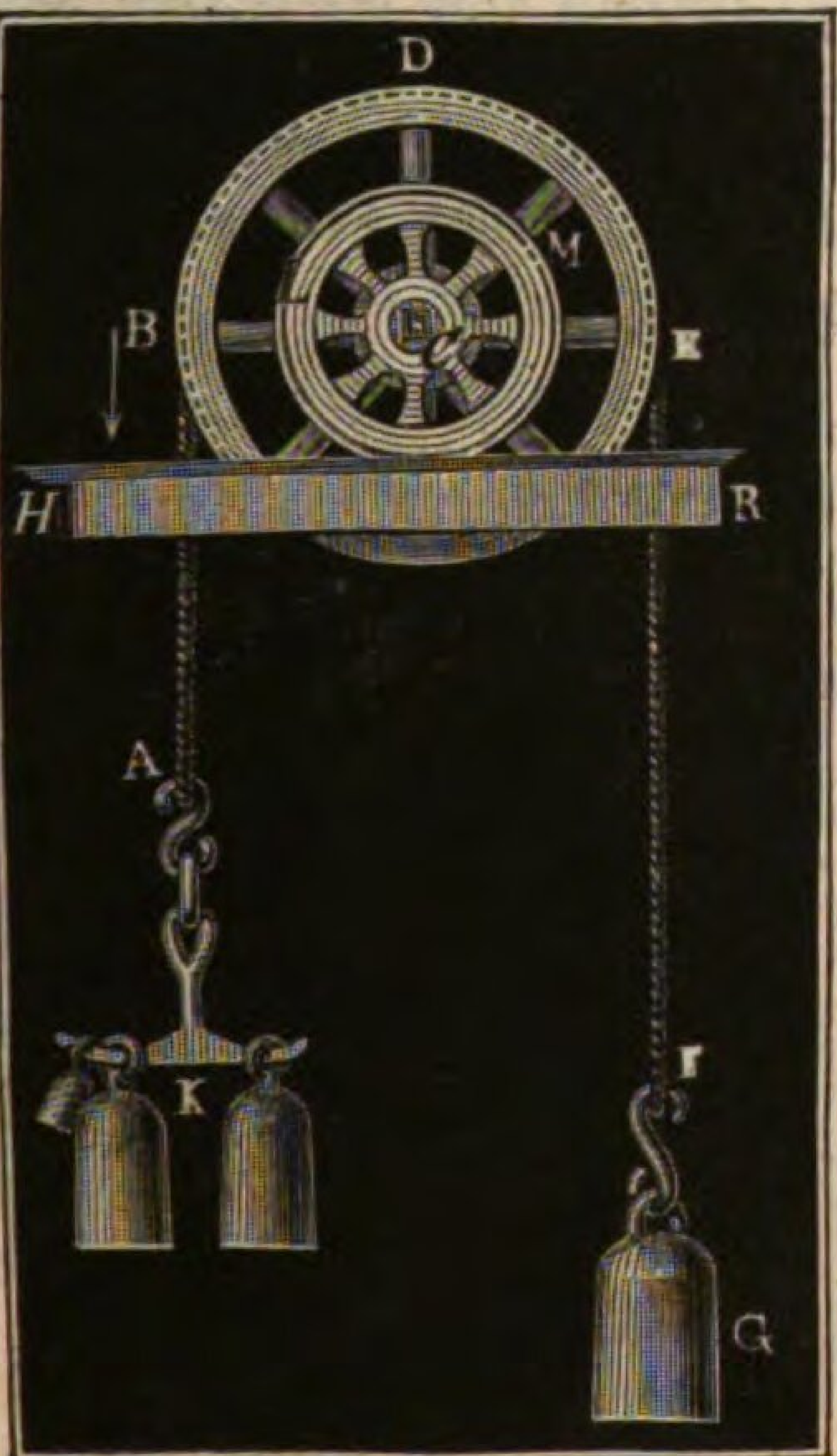
und für getheerte

$$d = \sqrt{0,186\,n} \text{ Centimeter, und}$$

$$S = \frac{n}{2a}\,(0,0014575 + 0,000346\,n + 0,000418\,Q) \text{ Kilogr.}$$

§. 180. Der Verfasser hat sich bei seinen Versuchen über die Steifigkeit der Seile eines in Fig. 245 abgebildeten Apparates bedient.

Fig. 245.



Die Scheibe oder Rolle BDE, auf welche sich das zu untersuchende Seil $ABDEF$ auflegte, war mit einem Paar eiserner Räder, wie CLM, auf einer Welle C befestigt, und dieses Räderpaar stand auf einer horizontalen Schienenbahn HR. Nachdem man das eine Seilende F durch ein angehängtes Gewicht G gespannt hatte, hing man an das Kreuz K, welches am anderen Seilende A befestigt war, so viel Gewichte, bis das Räderpaar sammt der Scheibe und ihren Gewichten langsam fortzurollen anfing. Um sich von den Unvollkommenheiten des Apparates möglich unabhängig zu machen, wurde nachher auf der Seite bei F so viel Gewicht zugelegt, bis das Fortrollen des armirten Räderpaars nach der entgegengesetzten Richtung eintrat. Das arithmetische Mittel

Steifigkeit der Seile. von den Zulagen gab nun, nachdem man hiervon noch die wälzende Reibung abgezogen hatte, die Kraft zur Ueberwindung der Seilsteifigkeit.

Den Coefficienten der in Abzug zu bringenden rollenden Reibung ermittelte man auf dieselbe Weise, indem man statt des Seiles einen schwachen Bindfaden, dessen Steifigkeitswiderstand vernachlässigt werden konnte, auflegte. Der mittlere Werth dieses Coefficienten ist oben, §. 174, mitgetheilt worden.

Der Steifigkeitswiderstand besteht nach des Verfassers Ansicht weniger aus der Steifigkeit, als aus der Reibung der einzelnen Fäden oder Drähte, die natürlich beim Auflegen auf die Rolle ihre gegenseitige Lage ändern müssen. Der erste Theil dieses Widerstandes fällt beim Umlegen eines Drahtseiles um eine Leitrolle ganz aus, weil dieses Seil vermöge seiner Elasticität beim Abwickeln zum Wiedergeradestrecken genau so viel Arbeit ausgiebt, als es beim Aufwickeln zum Krümmen in Anspruch genommen hat. Hier besteht also der Steifigkeitswiderstand lediglich in der Reibung der einzelnen Drähte unter einander, und daß dem so sei, zeigen auch die Versuche des Verfassers, durch welche sich ergab, daß dieser Widerstand bei eingeölten oder frisch getheerten Drahtseilen um 40 Procent kleiner ist als bei trockenen. Bei Hanfseilen ist das Verhältniß ein anderes, denn da diese, zumal nach längerem Gebrauche, fast gar keine Elasticität besitzen, so erfordern die einzelnen Fäden und Litzen derselben nicht allein Kraft zum Krümmen, sondern auch Kraft zum Wiedergeradestrecken.

§. 181. Da die Steifigkeit eines Seiles nicht allein von der Seilstärke, sondern auch von der Stärke der Drehung und von der Zusammensetzungsweise desselben abhängt, so hält es der Verfasser für angemessen, dieselbe durch die einfachere Formel

$$S = \frac{K + v\,Q}{a},$$

auszudrücken und die Constanten K und v für jede Seilart besonders zu bestimmen. Auch hat sich aus den Versuchen des Verfassers ergeben, daß sich, zumal für die Drahtseile angemessener statt $\frac{K}{a}$, bloß K, und demnach $S = K + \frac{vQ}{a}$ setzen läßt.

1. Für ein getheertes Hanfseil von 1,6 Zoll Stärke, gelegt um Scheiben von 4 bis 6 Fuß Höhe, ergab sich der Steifigkeitswiderstand

$S = 1{,}5 + 0{,}00565\,\frac{Q}{a}$ Kilogramm, wobei der Rollenhalbmesser a in Metern auszudrücken ist, oder

$S = 3{,}2 + 0{,}216\,\frac{Q}{a}$ Pfund, wo a in Zollen gegeben sein muß.

2. Für ein neues ungetheertes Hanfseil von $^3/_4$ Zoll Stärke und eine Rolle von 21 Zoll Durchmesser ergab sich Steifigkeit der Seile.

$$S = 0{,}086 + 0{,}00164 \frac{Q}{a} \text{ Kilogr.} = 0{,}18 + 0{,}0623 \frac{Q}{a} \text{ Pfund.}$$

3. Für ein Drahtseil von 8 Linien Dicke, welches aus 16 Drähten von je $1^1/_2$ Linien Dicke bestand, und wovon jeder laufende Fuß 0,64 Pfund wog, wurde bei Rollen von 4 bis 6 Fuß Höhe

$$S = 0{,}49 + 0{,}00238 \frac{Q}{a} \text{ Kilogr.} = 1{,}04 + 0{,}0802 \frac{Q}{a} \text{ Pf. gefunden.}$$

4. Für ein frisch getheertes Drahtseil mit Hanfseelen in den Litzen und im Seile, von 7 Linien Dicke, bestehend aus $4 . 4 = 16$ Drähten von je $1^1/_5$ Linien Dicke, und pr. Fuß 0,63 Pf. wiegend, stellte sich bei einer Rolle von 21 Zoll Durchmesser

$$S = 0{,}57 + 0{,}000694 \frac{Q}{a} \text{ Kilogr.} = 1{,}30 + 0{,}00264 \frac{Q}{a} \text{ Pf. heraus.}$$

Anmerkung. Eine ausführliche Beschreibung der Versuche des Verfassers findet man in der Zeitschrift für das gesammte Ingenieurwesen (dem Ingenieur) von Bornemann, Brückmann und Röting, Band I. Freiberg 1848.

Die Hanfseile unter 1. wurden in Freiberg zum Fördern durch Wassergöpel angewendet, sind aber in den neueren Zeiten durch die Drahtseile unter 2. ersetzt worden. Beiderlei Seile haben bei 6facher Sicherheit eine Tragkraft von circa 30 Centnern. Es ist aus dem Vorstehenden zu ersehen, daß bei gleicher Tragkraft der Steifigkeitswiderstand bei Drahtseilen viel kleiner ist als bei Hanfseilen. Nimmt man z. B. die Seilspannung $Q = 2000$ Pf. und den Rollenhalbmesser $a = 40$ Zoll, so erhält man den Steifigkeitswiderstand für ein Hanfseil $S = 3{,}2 + 0{,}216 . {}^{2000}/_{40} = 14$ Pfund, und dagegen für ein Drahtseil $S = 1{,}04 + 0{,}0802 . {}^{2000}/_{40} = 5{,}05$ Pf.

§. 182. Wenden wir nun die im Vorstehenden mitgetheilten Formeln für den Steifigkeitswiderstand der Seile auf die Theorie der festen Rollen an. Es sei ACB, Fig. 246 oder Fig. 247, die Rolle, a ihr Halbmesser $CA = CB$, r ihr Zapfenhalbmesser und G ihr Gewicht, ferner d die Seilstärke, Q die an einem Seilende angehängte Last, S der Steifigkeitswiderstand, F die auf den Rollenumfang reducirte Zapfenreibung, und folglich $Q + F + S$ die ganze Kraft P.

Fig. 246.

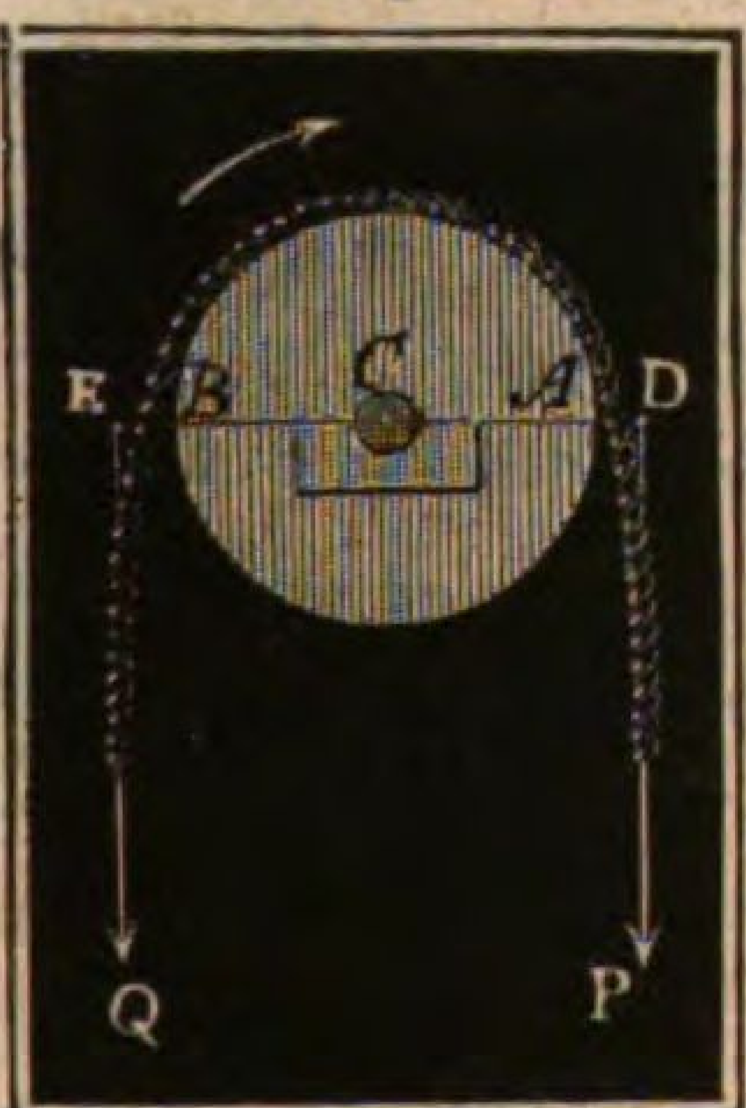
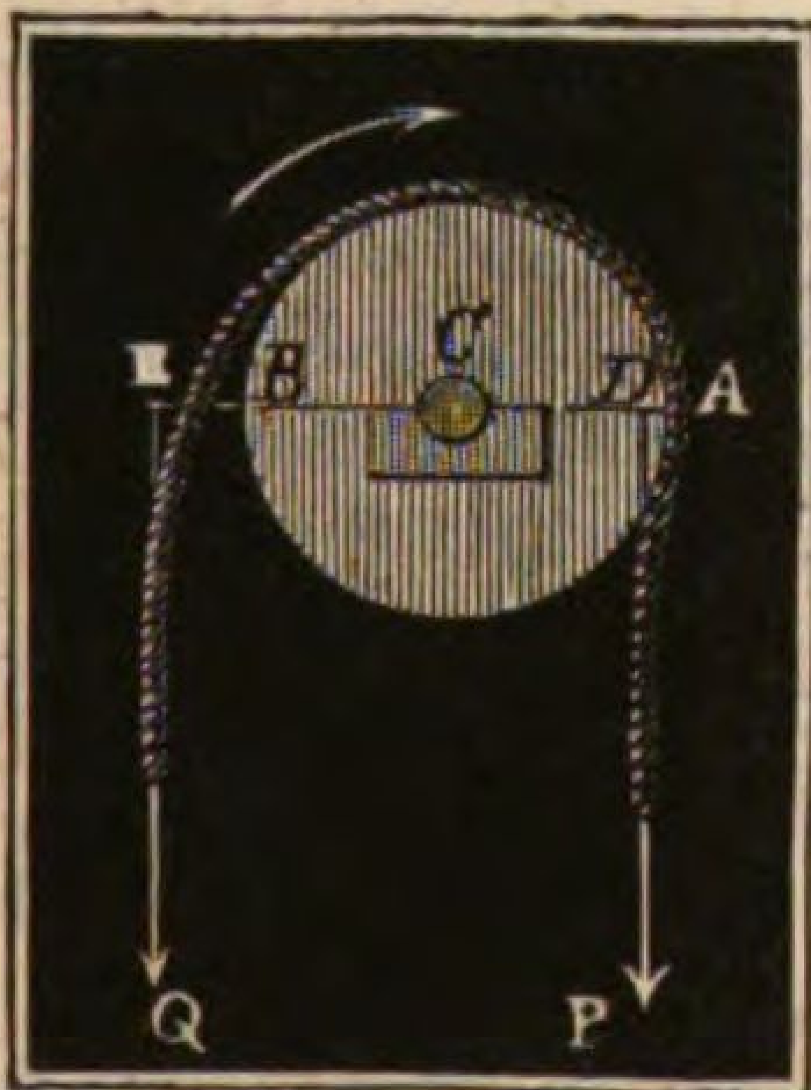


Fig. 247.



Die Steifigkeit des Seiles äußert sich dadurch, daß das Seil beim Aufwickeln nicht plötzlich

Steifigkeit der Seile. die Krümmung des Rollenumfanges annimmt und sich ebenso beim Abwickeln nicht plötzlich gerade streckt, sondern in einem Bogen mit wachsender Krümmung sich auf die Rolle auflegt, und sich in einem Bogen mit abnehmender Krümmung von derselben wieder abwickelt. Zwischen den elastischen Drahtseilen und den unelastischen Hanfseilen findet der Unterschied statt, daß sich jene beim Abwickeln etwas eher, und diese etwas später von dem Rollenumfange ablösen, folglich der Hebelarm CD der Kraft im ersten Falle (Fig. 246) etwas größer, und im zweiten Falle (Fig. 247) etwas kleiner als der Halbmesser $CA = a$ der Rolle ist, wogegen der Lastarm CE in beiden Fällen den Rollenhalbmesser a übertrifft. Wenn man von der Zapfenreibung F absieht, also $P = Q + S$ setzt, so hat man $(Q + S) . CD = Q . CE$, daher der Steifigkeitswiderstand $S = \left(\frac{CE - CD}{CD}\right) Q = \left(\frac{CE}{CD} - 1\right) Q$, und das Hebelarmverhältniß $\frac{CE}{CD} = 1 + \frac{S}{Q}$; was sich nun durch Einsetzen eines der oben angegebenen Werthe für S leicht berechnen läßt.

Wir können übrigens auch ohne weitere Berücksichtigung dieses Hebelarmverhältnisses die Kraft $P = Q + S + F$ bestimmen, wenn wir in diesem Ausdrucke für schwache Hanfseile nach Prony $S = \frac{d^n}{a}(K + \nu Q)$ und für Draht- und starke Hanfseile nach dem Verfasser, $S = K + \frac{\nu Q}{a}$, die auf den Rollenumfang reducirte Zapfenreibung aber

$F = \varphi \frac{r}{a} (Q + G + P)$ oder annähernd $F = \varphi \frac{r}{a} (2 Q + G)$ setzen,

Es folgt so im ersten Falle

$$P = Q + \frac{d^n}{a} (K + \nu Q) + \varphi \frac{r}{a} (2 Q + G),$$ und im zweiten

$$P = Q + K + \frac{\nu Q}{a} + \varphi \frac{r}{a} (2 Q + G).$$

Bei einer Radwelle ist natürlich noch eine Reduction der Kraft vom Wellenumfang auf den Radumfang nöthig (S. §. 152).

Beispiel. Wenn sich ein Drahtseil von ungefähr 8 Linien Dicke um eine Leitrolle von 5 Fuß Höhe, 3 Zoll Zapfenstärke und 1500 Pfund Gewicht legt, und die Spannung des Seiles 1200 Pf. beträgt, so hat man bei einem Reibungscoefficienten $\varphi = 0,075$, die nöthige Kraft

$$P = 1200 + 1,04 + 0,0802 . {}^{1200}/_{30} + 0,075\ {}^{3}/_{60}\ (2400 + 1500)$$
$$= 1200 + 1,04 + 3,28 + 14,62 = 1219 \text{ Pf.};$$

es geht also durch das Umlegen um diese Leitrolle ${}^{19}/_{12} = 1,6$ Proc an Kraft verloren.

Wenn statt des Drahtseiles ein Hanfseil von 1,6 Zoll Stärke in Anwendung gekommen wäre, so hätte man

$$P = 1200 + 3,2 + 0,216\ .\ {}^{1200}/_{0} + 14,62 = 1226,6 \text{ Pf.}$$

und daher den Kraftverlust $= \frac{26,5}{12} = 2,2$ Procent.

Sechstes Kapitel.

Elasticität und Festigkeit.

§. 183. Die Theile eines festen Körpers hängen mit einer gewissen Kraft unter einander zusammen, die man Cohäsion (franz. cohésion, engl. cohesion) nennt, und die zu überwinden ist, wenn Körper in ihrer Gestalt und Ausdehnung verändert oder gar zertheilt werden. Die erste Wirkung, welche Kräfte in einem Körper hervorbringen, ist eine Veränderung in der Lage seiner Theile gegen einander und eine daraus erwachsende Form- und nach Befinden Volumenveränderung des Körpers. Ueberschreiten die auf einen Körper wirkenden Kräfte eine gewisse Grenze, so tritt endlich eine Trennung der Theile und nach Befinden eine Zertheilung des ganzen Körpers ein. Die Fähigkeit der Körper, die durch Einwirkung von Kräften erlittene Formveränderung nach Wegnahme dieser Kräfte vollständig wieder aufzuheben, heißt Elasticität (franz. élasticité, engl. elasticity). Die Elasticität eines jeden Körpers hat eine gewisse Grenze; überschreitet die Gestalts- oder Volumenveränderung ein gewisses Maaß, so bleibt im Körper noch eine solche räumliche Veränderung zurück, wenn auch die Kräfte, welche jene Veränderung hervorgebracht haben, zu wirken aufhören. Die Elasticitätsgrenze ist bei verschiedenen Körpern sehr verschieden. Körper, welche eine große Formveränderung zulassen, ehe diese Grenze eintritt, nennt man vollkommen elastische, Körper aber, bei welchen kaum bemerkbare Formveränderungen der Elasticitätsgrenze vorausgehen, heißen unelastische, wiewohl es in Wirklichkeit Körper dieser Art gar nicht giebt. Elasticität.

Es ist eine wichtige Regel der Architektur und des Maschinenwesens, die zum Bau zu verwendenden Körper nicht so stark zu belasten, daß die hervorgebrachten Formveränderungen die Elasticitätsgrenze erreichen oder gar überschreiten.

§. 184. Verschiedene Körper bieten verschiedene Erscheinungen dar, wenn sie über die Elasticitätsgrenze hinaus in ihrer Form verändert werden. Ist ein Körper spröde (franz. cassant, engl. brittle), so zerspringt er in Stücke, wenn man seine Form über die Elasticitätsgrenze hinaus verändert; ist er aber geschmeidig (franz. und engl. ductile), wie z. B. viele Metalle, so läßt er noch bedeutende Veränderungen der Form außerhalb der Elasticitätsgrenze zu, ohne eine Trennung seiner Theile zu erleiden. Manche Körper sind hart (franz. dur, engl. hard), andere weich Elasticität und Festigkeit.

Elasticität und Festigkeit. (franz. mou, engl. soft); während jene der Trennung einzelner Theile einen großen Widerstand entgegensetzen, ist bei diesen eine Trennung der einzelnen Theile sehr leicht ausführbar.

Unter Elasticität im engeren Sinne des Wortes verstehen wir den Widerstand, mit welchem ein Körper der Formveränderung entgegenwirkt, dagegen unter Festigkeit (franz. resistance, engl strength) den Widerstand, welchen ein Körper der Zertheilung desselben entgegensetzt. Mit Beidem werden wir uns im Folgenden beschäftigen.

Nach der Art und Weise, wie äußere Kräfte auf Körper wirken und dieselben in räumlichen Beziehungen verändern, läßt sich die Elasticität und Festigkeit der Körper eintheilen:

I. in einfache und

II. in zusammengesetzte; erstere aber wieder

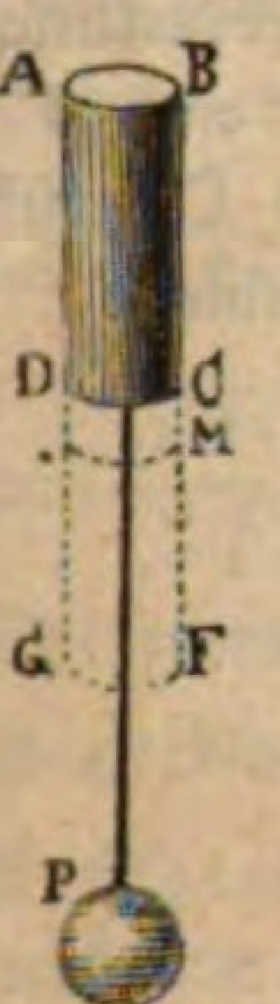
1) in die absolute,
2) in die relative,
3) in die rückwirkende und
4) in die drehende Elasticität und Festigkeit.

Wirken zwei äußere Kräfte durch Zug (franz. traction, engl. extension) in der Axenrichtung eines Körpers, so widersteht derselbe durch seine absolute Elasticität oder Festigkeit (franz. el. et resist. de traction, engl el. and str. of extension) dem Ausdehnen oder Zerreißen; wirken hingegen drei Kräfte winkelrecht zur Axe eines Körpers, so widersteht derselbe durch seine relative Elasticität und Festigkeit (franz. elast. et resist. de flexion, engl. el. and str. of flexure) dem Umbiegen und Abbrechen. Wirken ferner zwei Kräfte drückend in der Axenrichtung eines Körpers, so daß dieser zusammengedrückt, nach Befinden umgebogen und endlich zermalmt oder zerknickt wird, so hat man die rückwirkende Elasticität und Festigkeit (franz. el. et res. de compression, engl. el. and str. of compression) zu überwinden. Suchen endlich Kräfte einen Körper nach entgegengesetzter Richtung um eine Axe zu drehen, ohne daß dieselben in einerlei Normalebene zur Axe wirken, so hat man es mit der Ueberwindung der drehenden Elasticität und Festigkeit (franz. el. et res. de torsion, engl. el. and st. of torsion) zu thun. Wirken mehrere der hier aufgezählten Kräfte auf einen Körper zugleich, so tritt die zusammengesetzte Elasticität und Festigkeit oder eine Vereinigung von zwei oder mehreren einfachen Elasticitäten und Festigkeiten in Wirksamkeit.

Elasticitätsmodul. §. 185. Innerhalb der Elasticitätsgrenze ist die Volumenveränderung, d. h. die Ausdehnung oder Zusammendrückung eines Körpers, der aufgewendeten Kraft ziemlich genau proportional, überschreitet aber diese Veränderung jene Grenze, so hört diese Proportionalität auf, und es

nimmt die Veränderung bis zum Zustande des Zerreißens oder Zerdrückens meist sehr schnell zu. Als Maaß der Elasticität dient der Elasticitätsmodul E, welcher diejenige Kraft ausdrückt, die nöthig ist, um einen prismatischen Körper vom Querschnitte Eins (z. B. ein Quadratzoll) um seine anfängliche Länge auszudehnen oder zusammenzudrücken, also seine Länge durch Ausdehnen zu verdoppeln, oder durch Zusammendrücken auf Null zurückzuführen. Körpern von verschiedener materieller Beschaffenheit entsprechen verschiedene Elasticitätsmodul; es sind deshalb dieselben für jeden Stoff durch Versuche besonders zu ermitteln. Uebrigens ist im Auge zu behalten, daß der Elasticitätsmodul nur für Ausdehnungen und Zusammenpressungen innerhalb der Elasticitätsgrenze gilt und daß derselbe kein beobachtetes, sondern nur ein hypothetisches und berechnetes Maaß ist, weil sich nicht leicht ein Körper vorfindet, der, ohne die Grenze der Elasticität zu überschreiten, eine so große Gestaltsveränderung zuläßt, wie sie der Elasticitätsmodul voraussetzt. Elasticitätsmodul.

Fig. 248.

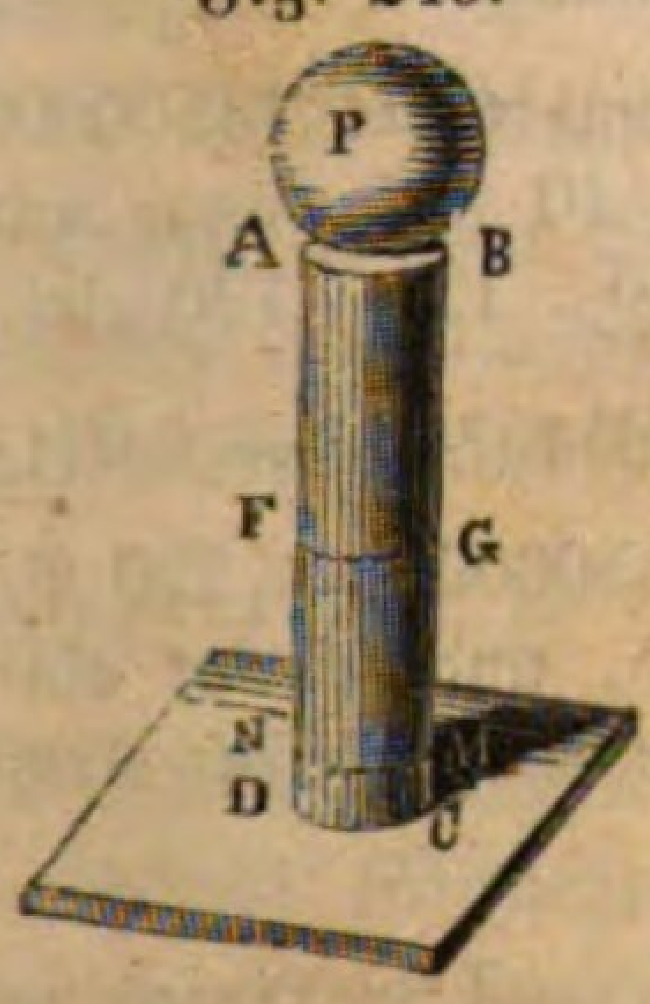


Ein Körper AC, Fig. 248, welcher die anfängliche Länge $AD = BC = l$ und den Querschnitt 1 hat, erfordert zur Ausdehnung um $DG = l$ die Kraft E, ist aber sein Querschnitt F, besteht er also aus F neben einander befindlichen Prismen, so ist diese Kraft $F \,.\, E$. Soll hingegen dieser Körper um eine Länge $DN = CM = \lambda$ ausgedehnt werden, so ist für die Kraft P

$P : F . E = \lambda : l$; es folgt daher dieselbe

1) $P = \frac{\lambda}{l} F . E$. Umgekehrt ist 2) $\lambda = \frac{P}{F \, E} . l$.

Fig. 249.



Dieselben Formeln gelten auch für einen Körper AC, Fig. 249, von der Länge $AD = l$ und dem Querschnitte $AB = F$, wenn derselbe von einer Kraft P durch Zusammendrücken um $MC = ND = \lambda$ kürzer wird.

Mit Hilfe dieser Formeln kann man aus der Volumenveränderung (λ) die entsprechende Kraft P, oder aus P die Größe der Ausdehnung oder Zusammendrückung berechnen.

Anmerkung 1. Setzt man in der Formel $\lambda = \frac{Pl}{FE}$, $P = 1$ (Pfund), $l = 1$ (Zoll) und $F = 1$ (Quadratzoll), so erhält man $\lambda = \frac{1}{E}$, und umgekehrt $E = \frac{1}{\lambda}$. Es ist hiernach der Elasticitätsmodul E auch die Reciproke von der-

Elasticitäts-modul. jenigen Ausdehnung λ, welche ein Körper von der Länge 1 und dem Querschnitte 1, durch eine Ausdehnungs- oder Zusammendrückungskraft 1 erleidet (s. Combes: Traité de L'exploitation des Mines, tome prem.). Man kann auch den Elasticitätsmodul E gleichsetzen dem Gewichte eines Prismas, welches mit dem Körper, auf den E wirkt, aus einerlei Materie besteht, und denselben Querschnitt Eins hat. Ist L die Länge dieses Körpers und γ die Dichtigkeit oder das Gewicht von 1 Cubikzoll der Materie desselben, so hat man $E = L\gamma$, und daher umgekehrt $L = \frac{E}{\gamma}$. Diese Länge gebraucht Tredgold (nach Young) als Maaß der Elasticität (s. T. Tredgold, über die Stärke des Gußeisens und anderer Metalle). Ist z. B. für Stahl $E = 30'000000$ Pf. und $\gamma = 0,3$ Pfund, so hat man $L = \frac{30'000000}{0,3} = 100'000000$ Fuß, d. i. eine Stahlstange von 100 Million Fuß Länge würde einen Stahlstab von demselben Querschnitt um seine eigene Länge länger ausdehnen, wenn das oben angegebene Ausdehnungsgesetz ohne Einschränkung richtig wäre.

Anmerkung 2. Bei der Ausdehnung oder Zusammendrückung eines Körpers findet zugleich eine Querschnittsverminderung Statt, die nach Wertheim (s. Compt. rend. T. 26.) $^2/_3$ der Längenausdehnung oder Zusammendrückung beträgt. Ist l die anfängliche Länge, F der anfängliche Querschnitt und V das anfängliche Volumen Fl des Körpers, l_1 und F_1 aber Länge und Querschnitt bei Einwirkung der Zugkraft P, so hat man das entsprechende Volumen:

$$V_1 = F_1 l_1 = Fl + F(l_1 - l) - (F - F_1)\, l, \text{ also}$$

$$V_1 - V = F(l_1 - l) - (F - F_1)\, l,$$

und die relative Volumenveränderung:

$$\frac{V_1 - V}{V} = \frac{l_1 - l}{l} - \frac{F - F_1}{F}.$$

Nun ist aber $\frac{F - F_1}{F} = {}^2/_3\, \frac{l_1 - l}{l}$, daher folgt

$$\frac{V_1 - V}{V} = {}^1/_3 \cdot \frac{l_1 - l}{l},$$

d. i. die Volumenvergrößerung ein Drittel der Längenausdehnung.

Beispiele. 1) Wenn der Elasticitätsmodul des Messingdrahtes 14500000 Pf. beträgt, welche Kraft ist nöthig, um einen Draht von 10 Fuß Länge und 2 Linien Dicke 1 Linie länger zu ziehen? Es ist $l = 10 \cdot 12 = 120$ Zoll, $\lambda = {}^1/_{12}$ Zoll, folglich $\frac{\lambda}{l} = {}^1/_{1440}$; ferner $F = \frac{\pi d^2}{4} = 0,7854\, ({}^2/_{12})^2 = 0,0218$ □Zoll, demnach die gesuchte Kraft $P = {}^1/_{1440} \cdot 0,0218 \cdot 14500000 = 220$ Pf. 2) Ist der Elasticitätsmodul von Eisendraht 30'000000 Pf., und spannt man eine eiserne Meßkette von 60 Fuß Länge und 0,2 Zoll Dicke mit 150 Pf. Kraft an, so nimmt dieselbe um die Länge

$$\lambda = \frac{150}{0,7854 . (0,2)^2} \cdot \frac{60 . 12}{30000000} = \frac{3600}{31416} = 0,115 \text{ Zoll} = 1,38 \text{ Linien zu.}$$

§. 186*). Wenn man eine prismatische Stange durch ein von Null bis P allmälig wachsendes Gewicht anspannt und dadurch von Null bis λ allmälig verlängert, so wird ein gewisses Arbeitsquantum verrichtet, welches sich sehr einfach auf folgende Weise bestimmen läßt. Während der

Ausdehnung um ein Element $d\lambda$ ist das Arbeitsquantum $dL = Pd\lambda$ verrichtet; nun ist aber $P = \frac{\lambda}{l} FE$, daher $dL = \frac{\lambda}{l} FE\, d\lambda = \frac{FE}{l} \lambda d\lambda$, und folglich das ganze Arbeitsquantum bei Ausdehnung um die ganze Länge λ: Elasticitäts-modul.

$$L = \frac{FE}{l} \int \lambda d\lambda = \frac{FE}{l} \cdot \frac{\lambda^2}{2} = \frac{\lambda FE}{l} \cdot \frac{\lambda}{2} = \frac{P\lambda}{2}.$$

Wird eine solche Stange bloß durch ihr eigenes Gewicht $G = Fl\gamma$ ausgedehnt, so ist die einem Stangenelemente dl entsprechende Ausdehnung

$$d\lambda = \frac{G}{F.E}\, dl = \frac{Fl\gamma}{FE}\, dl = \frac{\gamma}{E}\, l\, dl,$$

und daher die ganze Ausdehnung der Stange:

$$\lambda = \frac{\gamma}{E} \int l\, dl = \frac{\gamma l^2}{2E} = \frac{F\gamma l}{FE} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Gl}{2FE},$$

d. i. halb so groß, als wenn das ganze Gewicht G am äußersten Ende zöge.

Das Arbeitsquantum, welches bei dieser Ausdehnung das Gewicht der Stange verrichtet, ist:

$$L = \int G d\lambda = \int Fl\gamma \cdot \frac{\gamma l dl}{E} = \frac{F\gamma^2}{E} \int l^2 dl = \frac{F\gamma^2}{E} \cdot \frac{l^3}{3} = \frac{G\gamma l^2}{3E}$$

$$= \frac{GFl\gamma}{3FE} \cdot l = \frac{G^2 l}{3FE} = \tfrac{2}{3}\, G\, \frac{Gl}{2FE} = \tfrac{2}{3}\, G\lambda.$$

Dieselben Formeln gelten natürlich auch für die Zusammendrückung eines prismatischen Körpers.

Beispiel. Um eine Stahlstange von 5 Fuß Länge und ½ Quadratzoll Querschnitt eine halbe Linie länger zu ziehen, ist eine mechanische Arbeit

$$L = \frac{P\lambda}{2} = \frac{FE}{l} \cdot \frac{\lambda^2}{2} = \frac{\tfrac{1}{2} \cdot 30\,000000}{2 \cdot 60} \cdot \frac{1}{24^2} = \frac{125000}{576} = 217 \text{ Fußpfund}$$

nöthig.

§. 187. Die Kraft T, welche ein Körper vom Querschnitte Eins aufnimmt, in dem Augenblicke, wenn die Ausdehnung die Elasticitätsgrenze erreicht hat, bestimmt sich leicht aus dem Elasticitätsmodul E und der dieser Grenze entsprechenden Längenausdehnung λ, denn es ist $T:E = \lambda : l$, daher $T = \frac{\lambda}{l} E$. Diese Kraft ist diejenige, mit welcher man bei Bau- und Maschinenanlagen Körper belasten darf, wenn sie auf die Dauer hinreichende Sicherheit gewähren sollen. Ist der Querschnitt des Körpers, welcher eine Zugkraft P aufzunehmen hat, $= F$, so hat man Trag- und Festigkeitsmodul

$$1)\ P = FT \text{ und } 2)\ F = \frac{P}{T}.$$

Die Kraft T, wodurch sich die Tragfähigkeit von Körpern beurtheilen läßt, kann man unter dem Namen Tragmodul in die Rechnungen einführen.

Trag- und Festigkeitsmodul.

Von diesem Modul ist allerdings der **Festigkeitsmodul** K, welcher die Kraft ausdrückt, wodurch ein Körper vom Querschnitte Eins zerrissen wird, verschieden. Ist der Querschnitt eines prismatischen Körpers oder der kleinste Querschnitt eines Körpers überhaupt, $= F$, so folgt die Kraft zum Zerreißen dieses Körpers:

$$1)\ P_1 = FK, \text{ und umgekehrt } 2)\ F = \frac{P_1}{K}.$$

Sehr oft berechnet man auch die Stärken der Baustücke und Maschinentheile mit Hülfe der Coefficienten K, indem man sie vorher, wie man sagt, der Sicherheit wegen, durch eine der Zahlen 3,4 bis 10 dividirt. Im Ergebnisse ist dies fast einerlei, wie man aus einer Vergleichung der in unten stehender Tabelle befindlichen Werthe ersehen kann, allein die Voraussetzung selbst ist nicht die richtige und wenigstens nur insofern zu rechtfertigen, daß der Festigkeitsmodul das 3, 4... bis 10fache des Tragmoduls ist, oder überhaupt in einem constanten Verhältnisse zu diesem steht.

Ist der Querschnitt des Körpers ein Kreis vom Durchmesser d, hat man also $\frac{\pi d^2}{4} = F$, so ist $d = \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = 1{,}128\sqrt{F} = 1{,}128\sqrt{\frac{P}{T}}$, und es läßt sich hiernach aus der Belastung oder Spannung P eines Körpers und dem Tragmodul T seiner Materie die Stärke finden, bei welcher der Körper nicht über die Elasticitätsgrenze hinaus angespannt wird.

Beispiele. 1) Welche Last kann eine Hängesäule aus Fichtenholz aufnehmen, wenn dieselbe 5 Zoll breit und 4 Zoll dick ist? Den Tragmodul zu 3000 Pf. und den Querschnitt $F = 5 \cdot 4 = 20$ Quadratzoll angenommen, erhält man $P = 20 \cdot 3000 = 60000$ Pf. als Tragkraft dieser Säule. Wird aber der Festigkeitsmodul $K = 12000$ Pf. zu Grunde gelegt und eine dreifache Sicherheit angenommen, so erhält man $P = 20 \cdot {}^{12000}/_{3} = 80000$ Pf.; um auf lange Zeit Sicherheit zu haben, nimmt man aber für K den zehnten Theil, und erhält so $P = 20 \cdot 1200 = 24000$ Pf. 2) Eine schmiedeeiserne und rund abzudrehende Zugstange soll eine Last von 4500 Pf. aushalten, welchen Durchmesser muß dieselbe erhalten? Hier ist $T = 20000$ Pf., daher $d = 1{,}128\sqrt{\frac{4500}{20000}} = 1{,}128 \cdot \sqrt{{}^{9}/_{40}}$ $= 0{,}535$ Zoll. Der Festigkeitsmodul des Schmiedeeisens ist für eine Mittelgattung $= 58000$ Pf.; nimmt man aber sechsfache Sicherheit, so bekommt man $K = 10000$ Pf. und $d = 1{,}128\sqrt{\frac{4500}{10000}} = 0{,}756$ Zoll als die gesuchte Stangendicke.

Körper von gleichem Widerstande.

§. 188. Ist ein vertikal hängender prismatischer Körper, z. B. ein Gestänge oder ein Seil, sehr lang, so trägt das Gewicht G desselben zum Zerreißen mit bei und es ist deshalb $P + G = FT$ zu setzen. Ist nun

noch l die Länge dieses Körpers und γ das Gewicht einer Raumheit (hier eines Cubikzolles) von der Masse des Körpers, so hat man $G = Fl\gamma$ und daher $P = F(T - l\gamma)$, sowie umgekehrt $F = \frac{P}{T - l\gamma}$. Körper von gleichem Widerstande.

Besteht ein Körper $ABC..G$, Fig. 250, aus gleich langen Theilen, jeder von der Länge l, so ergeben sich für dieselben folgende Querschnitte. Der Querschnitt des untersten Stückes ist, wie vorhin, $F_1 = \frac{P}{T - l\gamma}$. Für das zweite Stück vom Querschnitte F_2 und Gewichte $l\gamma$ ist $P + F_1 l\gamma + F_2 l\gamma = F_2 T$, daher $F_2 = \frac{P + F_1 l\gamma}{T - l\gamma} = F_1 + \frac{F_1 l\gamma}{T - l\gamma} = F_1 \left(1 + \frac{l\gamma}{T - l\gamma}\right)$. Für das dritte Stück folgt hiernach der Querschnitt $F_3 = F_2 \left(1 + \frac{l\gamma}{T - l\gamma}\right)$ $= F_1 \left(1 + \frac{l\gamma}{T - l\gamma}\right)^2$, für das vierte Stück $F_4 = F_3 \left(1 + \frac{l\gamma}{T - l\gamma}\right)$ $= F_1 \left(1 + \frac{l\gamma}{T - l\gamma}\right)^3$, und allgemein, für das $n$te Stück:

$$F_n = F_1 \cdot \left(1 + \frac{l\gamma}{T - l\gamma}\right)^{n-1} \text{ oder } F_n = \frac{P}{T - l\gamma}\left(1 + \frac{l\gamma}{T - l\gamma}\right)^{n-1}$$

der entsprechende Querschnitt.

Ist l sehr klein, sind also die Stücke sehr kurz, so kann man setzen:

$$F_n = \frac{P}{T}\left(1 + \frac{l\gamma}{T}\right)^{n-1}.$$

Ist nun noch die Anzahl n der Stücke sehr groß, oder nimmt die Stärke des Körpers AG, Fig. 251, von unten nach oben stetig zu, so kann man (aus Gründen, wie in §. 176) den Querschnitt

Fig. 250.



Fig. 251.



P

$$F_n = \frac{P}{T} \cdot e^{(n-1)\frac{l\gamma}{T}} = \frac{P}{T} \cdot e^{\frac{nl\gamma}{T}} = \frac{P}{T} \cdot e^{\frac{a\gamma}{T}}$$

setzen, wofern e die Grundzahl 2,71828... des natürlichen Potenzensystems und a die ganze Länge des Körpers ausdrückt.

Soll ein Körper von unveränderlicher Stärke dieselbe Tragkraft haben, so muß er den Querschnitt $F = \frac{P}{T - a\gamma}$ erhalten. Ist $a\gamma$ nicht groß gegen T, also $\frac{a\gamma}{T}$ ein kleiner Bruch, so läßt sich setzen:

$$F_n = \frac{P}{T}\left[1 + \frac{a\gamma}{T} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{a\gamma}{T}\right)^2\right] \text{ und}$$

Körper von gleichem Widerstande.

$$F = \frac{P}{T}\left[1 + \frac{a\gamma}{T} + \left(\frac{a\gamma}{T}\right)^2\right],$$

ferner das Gewicht des ersten Körpers

$$G_n = \frac{F_1 + F_n}{2}\, a\gamma = \left[1 + \tfrac{1}{2}\frac{a\gamma}{T} + \tfrac{1}{4}\left(\frac{a\gamma}{T}\right)^2\right]\frac{P}{T}\, a\gamma;$$

und das des zweiten

$$G = Fa\gamma = \left[1 + \frac{a\gamma}{T} + \left(\frac{a\gamma}{T}\right)^2\right]\frac{P}{T}\, a\gamma;$$

es ist daher der prismatische Körper schwerer und deshalb kostbarer als derjenige, welcher an jeder Stelle den seiner Tragkraft entsprechenden Querschnitt besitzt, und deshalb ein **Körper von gleichem Widerstande** genannt wird.

Beispiele. 1) Welchen Querschnitt muß ein 1000 Fuß langes schmiedeeisernes Schachtgestänge erhalten, wenn dasselbe außer seinem eigenen Gewichte noch eine Last $P = 75000$ Pf. zu tragen hat? Den Tragmodul $T = \frac{1}{6} K = 10000$ Pf. angenommen und das Gewicht eines Cubikzolles Schmiedeeisen: $\gamma = \frac{7{,}60.66}{12.12.12} = 0{,}29025$ Pf. gesetzt, folgt der gesuchte Querschnitt $F = \frac{P}{T - a\gamma} = \frac{75000}{10000 - 12000.0{,}29025} = \frac{75000}{6517} = 11{,}508$ Quadratzoll und das Gewicht des Gestänges $G = F \,.\, a\gamma = 11{,}508 \,.\, 12000 \,.\, 0{,}29025 = 40084$ Pf. 2) Könnte man diesem Gestänge die Form eines Körpers von gleichem Widerstande geben, so würde man erhalten: zum kleinsten Querschnitte $F_1 = \frac{P}{T} = \frac{75000}{10000} = 7{,}5$ Quadratzoll, zum größten $F_n = 7{,}5 \,.\, e^{0{,}29025\,.\,1{,}2} = 7{,}5 \,.\, e^{0{,}3483} = 10{,}62$ Quadratzoll, und das Gewicht $G_n = \left(\frac{7{,}5 + 10{,}62}{2}\right) . 3483 = 9{,}06 \,.\, 3483 = 31600$ Pf. (annähernd).

Zahlenwerthe.

§. 189. **In folgender Tabelle sind die mittleren Werthe der Elasticitäts-, Trag- und Festigkeitsmodule verschiedener, im Bauwesen am häufigsten vorkommender Stoffe aufgeführt.**

Zahlenwerthe.

Tabelle I.

Die Modul der absoluten Elasticität und Festigkeit.

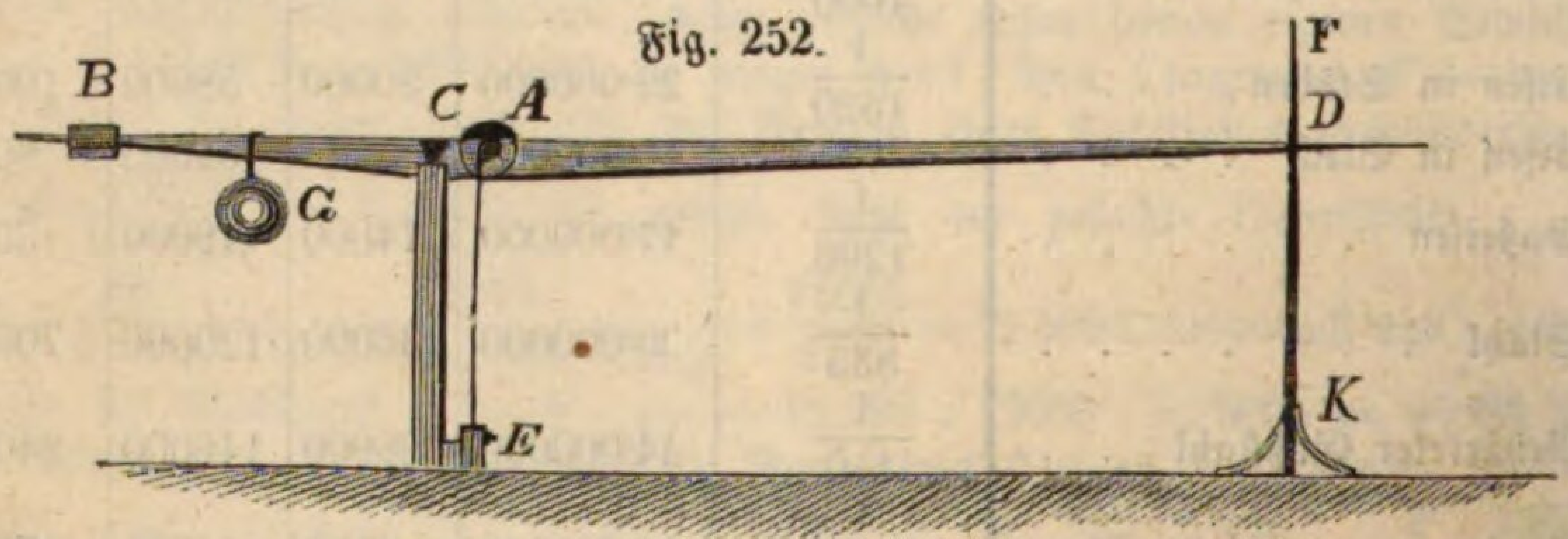
Namen der Körper.	Ausdehnung bei der Elasticitätsgrenze $\frac{\lambda}{l}$.	Elasticitätsmodul E.	Tragmodul T.	Festigkeitsmodul K.	Sicherheitsmodul K_1.
Buchen-, Eichen-, Fichten-, Kiefern- und Tannenholz, in der Axenrichtung . .	$\frac{1}{600}$	1'800000	3000	12000	1200
Dasselbe, radial		200000		650	65
» tangential . .		120000		700	70
Eisen in Drähten . . .	$\frac{1}{1000}$	30'000000	30000	100000	17000
Eisen in Stäben	$\frac{1}{1520}$	29'000000	20000	58000	10000
Eisen in Blech		26'000000		55000	9000
Gußeisen	$\frac{1}{1200}$	17'000000	14000	19000	3000
Stahl	$\frac{1}{835}$	30'000000	36000	120000	20000
Gehärteter Gußstahl . .	$\frac{1}{450}$	44'000000	96000	146000	24000
Kupfer	$\frac{1}{4000}$	16'000000	4500	44000	7000
Kupferdraht	$\frac{1}{1000}$	17'500000	17500	59000	9000
Messing	$\frac{1}{1320}$	9'500000	7000	18000	3000
Messingdraht	$\frac{1}{742}$	14'500000	20000	73000	12000
Glockengut	$\frac{1}{1590}$	4'700000	3000	34000	5600
Blei	$\frac{1}{477}$	700000	1500	1900	320
Bleidraht	$\frac{1}{1500}$	1'000000	700	2000	340
Marmor		2'600000		2000	200
Seile, unter 1 Zoll dick .				9000	3000
» 1 — 3 » »				7000	2300
» über 3 » »				5000	1700
Riemen					290

Die in der zweiten Vertikalcolumne dieser Tafel enthaltenen Werthe der relativen Ausdehnung $\left(\frac{\lambda}{l}\right)$ bei der Elasticitätsgrenze geben auch das Verhältniß $\frac{T}{E}$ der in der vierten und dritten Columne aufgeführten Werthe

Versuche. an. Die sechste Columne ergiebt sich aus der fünften, wenn man bei Hölzern durch zehn, bei Metallen durch sechs und bei Seilen durch drei dividirt. Die Festigkeit der Drähte ist immer größer, als die stärkerer Stäbe, weil die Drähte eine Kruste haben, die fester ist als der Kern.

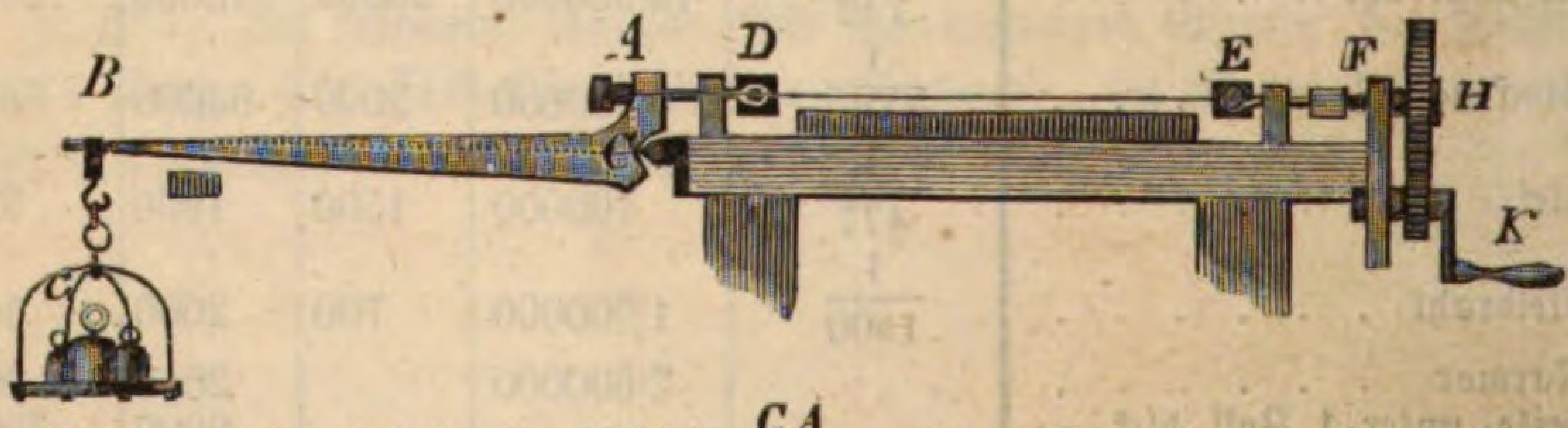
Anmerkung. Ueber die absolute Elasticität und Festigkeit des Schmiedeeisens, und zumal des Eisendrahtes sind ausgedehnte Versuche von Lagerhjelm in Schweden, von Gerstner in Prag und von Brix in Berlin angestellt worden. Die Resultate der ersteren sind enthalten in der von Pfaff in's Deutsche übertragenen Abhandlung: »Versuche zur Bestimmung der Dichtigkeit, Gleichartigkeit, Elasticität, Schmiedbarkeit und Stärke des Stabeisens.« Gerstner beschreibt seine Versuche in dem ersten Bande seines Handbuches der Mechanik, und Brix die seinigen in der Abhandlung über die Cohäsions- und Elasticitätsverhältnisse einiger nach ihren Dimensionen beim Bau der Hängebrücken in Anwendung kommenden Eisendrähte u. s. w., Berlin 1837. Gerstner bediente sich bei seinen Versuchen eines geradlinigen Hebels ACB, Fig. 252, mit

Fig. 252.



einem Laufgewichte G und einer 15 Fuß langen Zunge CD, welche an einer Scala FK die Ausdehnung des zu untersuchenden Drahtes AE vervierundfünfzigfacht angab. Lagerhjelm und Brix wendeten hingegen einen Winkelhebel ACB, Fig. 253, mit Waagschale und Gewichten G an. Bei dem Apparate von

Fig. 253.



Brix betrug das Hebelarmverhältniß $\frac{CA}{CB} = \frac{1}{20}$. Das eine Drahtende D war mittels Kluppe, Bolzen und Haken an den kurzen Arm dieses Hebels, und das andere Ende E auf dieselbe Weise an eine Schraube F angeschlossen, die durch ein Räderwerk HK in Umdrehung gesetzt werden konnte. Zur Angabe der Längenausdehnung dienten zwei Nonien, welche an den entgegengesetzten Enden auf den Draht aufgeschraubt wurden und über zwei in Viertellinien eingetheilten Scalen hinliefen. Nachdem man den Draht in die Kluppen eingeklemmt hatte, wurde die Waagschale nach und nach mit größeren Gewichten beladen, und bei jedem einzelnen Versuche durch Drehung der Kurbel an dem Räderwerke der

Draht so gespannt, daß sich der Hebel von seiner Unterstützung erhob, und sich so die Spannung des Drahtes mit dem Gewichte G in's Gleichgewicht setzte. Die Versuche wurden mit Drähten von $1\frac{1}{3}$ bis $1\frac{1}{2}$ Linien Stärke ausgeführt und gaben für dieselben, wenn sie ungeglüht waren, im Mittel den Festigkeitsmodul $K = 100000$ Pf., und dagegen nach dem Glühen $K = 62000$ Pf. Der Elasticitätsmodul wurde dagegen für geglühten und ungeglühten Draht im Mittel $E = 30000000$ Pf. gefunden; ferner ergab sich, daß die Grenze der Elasticität erreicht wurde, wenn die Spannung bei ungeglühtem Draht $0,5\,K$ und bei geglühtem $0,6\,K$ betrug. Bei stärkeren Spannungen traten bleibende Ausdehnungen (Verschiebungen) ein, und es betrug die ganze Ausdehnung im Augenblicke des Zerreißens bei ungeglühtem Drahte $\frac{\lambda}{l} = 0,0034$, und beim geglühten $\frac{\lambda}{l} = 0,0885$, also 26mal so viel. Versuche.

Bei dem Apparate von Lagerhjelm erfolgte die Anspannung des Drahtes durch eine hydraulische Presse.

Der Apparat, welchen Wertheim bei seinen Versuchen über die Elasticität angewendet hat, ist hiervon verschieden. S. Poggend. Ann. (Ergänzungsbd. II., 1845.)

§. 190. Wird ein prismatischer Körper $ABCD$, Fig. 254, an einem Ende festgehalten, z. B. eingemauert, und an dem andern Ende von einer Kraft P ergriffen, so entstehen Spannungen in demselben, wodurch der eine Theil desselben ausgedehnt und der andere zusammengedrückt wird, das Ganze aber eine Biegung annimmt. Denken wir uns den ganzen Körper durch Ebenen parallel zur Axe und winkelrecht gegen die Kraftrichtung in lauter dünne Schichten zerlegt, so können wir annehmen, daß eine gewisse mittlere Schicht KLM, die man die **neutrale Axenschicht**, oder auch wohl **neutrale Axe** schlechtweg nennt, bei dieser Biegung ohne Spannung und deshalb auch in ihrer Länge unverändert bleibt, daß dagegen die Schichten auf der convexen Seite eine Ausdehnung und die auf der concaven Seite eine Verkürzung erleiden. Es sei ABC_1D_1, Fig. 255, ein Längendurchschnitt des Körpers, KL dessen neutrale Axe, NO_1 eine ausgedehnte und UV_1 eine verkürzte oder comprimirte Schicht. Wäre die Biegung ohne Volumenverände- Biegung der Körper.

Fig. 254.

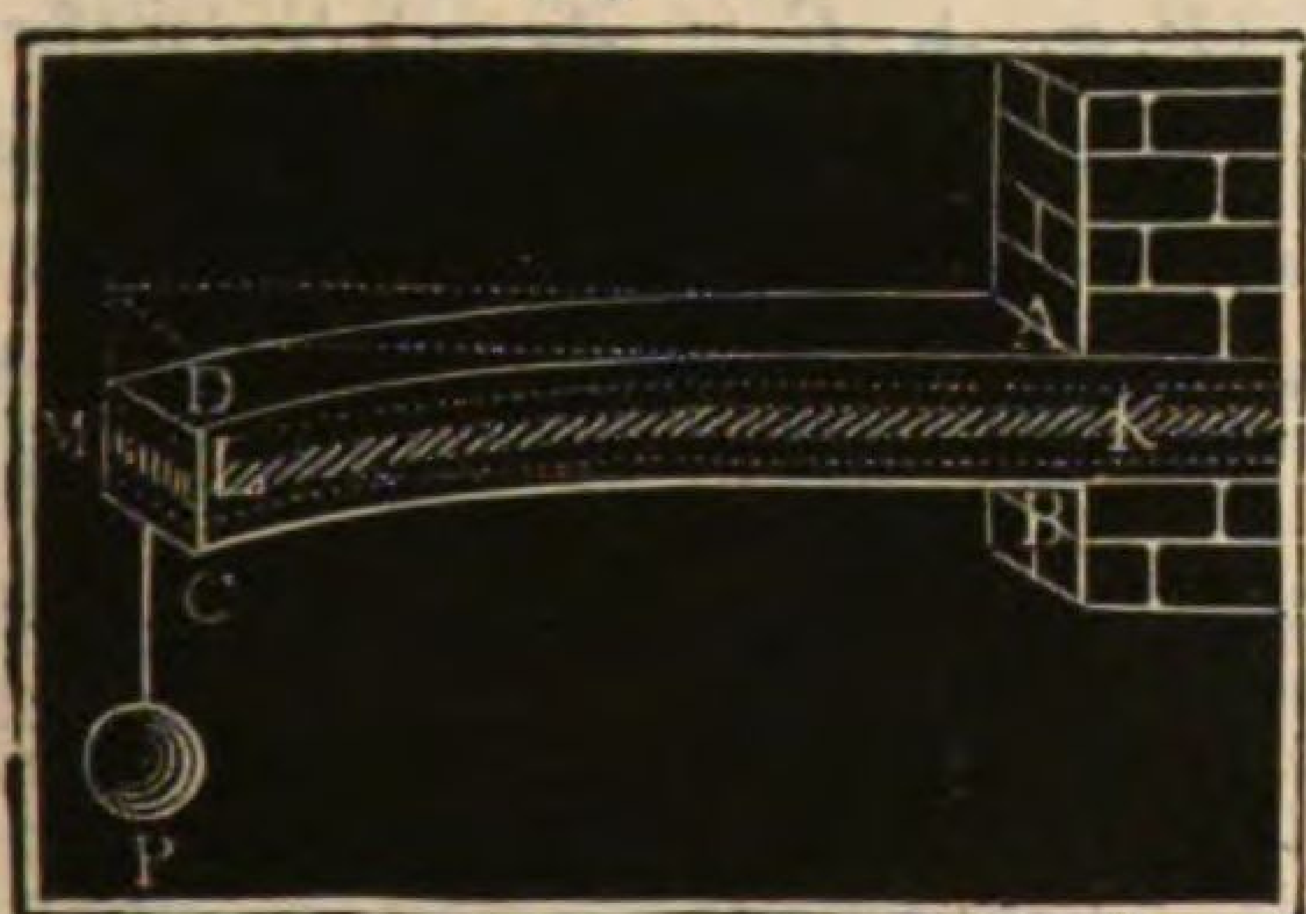
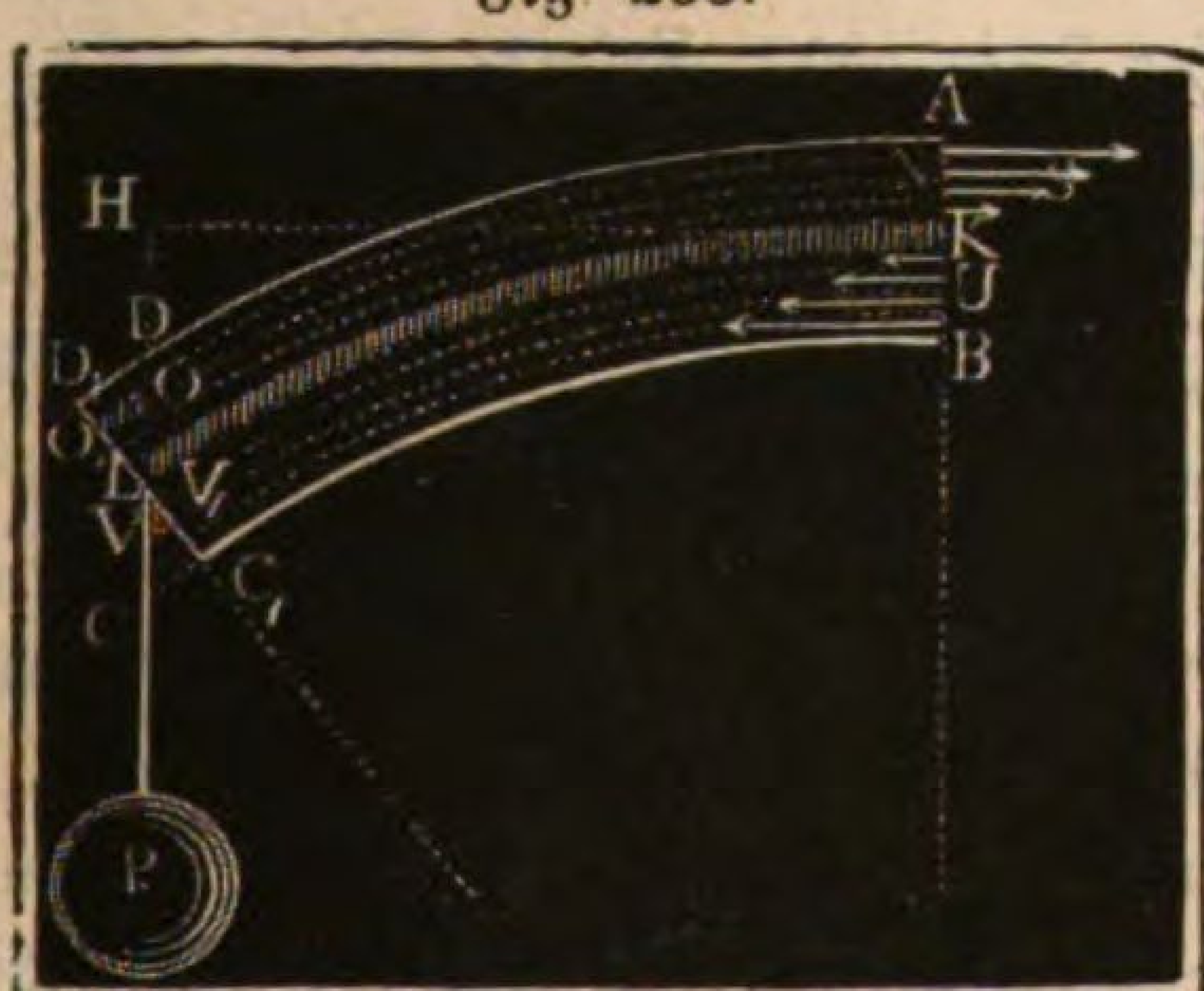


Fig 255.



Biegung der Körper.

rung vor sich gegangen, so würde $KL = AD = NO$ u. s. w., d. i., die Länge aller Schichten, eine und dieselbe sein, der Körper also die Gestalt $ABCD$ haben, weil aber Ausdehnungen und Zusammendrückungen eingetreten sind, so haben gewisse Schichten, wie AD, NO u. s. w. Verlängerungen DD_1, OO_1 u. s. w., und andere, wie BC, UV u. s. w., Verkürzungen CC_1, VV_1 u. s. w. erlitten und es hat der Körper die Form ABC_1D_1 angenommen. Jedenfalls sind die Verlängerungen DD_1, OO_1, und ebenso die Verkürzungen CC_1, VV_1 u. s. w. den Entfernungen LD, LO, LC, LV u. s. w. von der neutralen Axe proportional. Nun verhalten sich aber die Spannungen in der Richtung der Schichten, wie die von ihnen bewirkten Verlängerungen und Verkürzungen; es ist daher auch anzunehmen, daß diese Spannungen mit den Entfernungen von der neutralen Axe proportional wachsen. Setzen wir deshalb die Spannung einer Faser oder Faserschicht vom Querschnitt Eins (1 Quadratzoll) und in der Entfernung Eins (1 Zoll) von der neutralen Axe $= S$, so ist sie für eine Entfernung $KN = z$, Sz, und bei einem Querschnitte F, $= FSz$. Gilt nun die Erfahrungszahl S für die Ausdehnung und Compression zugleich, so hat man die Summe aller Spannungen eines Querschnittes $= (F_1 z_1 + F_2 z_2 + \ldots) S$, wofern F_1, F_2 u. s. w. die Querschnittstheile und z_1, z_2 u. s. w. ihre Entfernungen von der neutralen Axe bezeichnen. Damit die Spannungen in dem als Stützpunkt eines Hebels anzusehenden Endpunkt K der neutralen Axe keinen Druck und deshalb auch keine Veränderung in der Länge erzeugen, so muß jene Summe von Spannungen $(F_1 z_1 + F_2 z_2 + \ldots) S$, und also auch $F_1 z_1 + F_2 z_2 + \ldots, = $ Null sein, d. i. es muß **die neutrale Axe oder neutrale Schicht durch den Schwerpunkt des Querschnittes vom ganzen Körper gehen.**

Wir können nun den Zustand des Körpers mit dem Gleichgewichte eines Winkelhebels vergleichen. Die Kraft P wirkt an einem Hebelarme $KH = l$, hat also das Moment $M = Pl$, und hält den sämmtlichen Ausdehnungs- und Compressionskräften, deren Momente $z_1 . F_1 S z_1$, $z_2 . F_2 S z_2$ u. s. w. oder $F_1 z_1^2 . S$, $F_2 z_2^2 . S$ u. s. w. sind, das Gleichgewicht; wir müssen folglich $M = Pl = (F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + \ldots) . S$ setzen.

Diese Formel gilt übrigens für jeden Querschnitt des Körpers, nur ist statt l die jedesmalige Entfernung desselben von dem Angriffspunkte L der Kraft P einzusetzen. Der Faktor $F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + \ldots$ ist nur von dem Querschnitte des gebogenen Körpers abhängig, und möge in der Folge mit dem Buchstaben W bezeichnet werden. Es läßt sich hiernach $M = Pl = WS$ setzen und behaupten, daß die **absolute Spannung** S eines Querschnittes der Entfernung l desselben von dem Angriffspunkte der Kraft proportional ist.

§. 191. Aus dem Elasticitätsmodul E, der Länge l einer Faser, welche um die Einheit (1 Zoll) von der neutralen Axe absteht, und der Verlänge-

rung λ, welche diese erleidet, ergiebt sich die entsprechende Spannung $S = \frac{\lambda}{l} E$. Ist nun ABC_1D_1, Fig. 256, ein kurzes Stück des gebogenen Körpers, $KL = l$, dessen Länge und $MK = ML = r$, dessen Krümmungshalbmesser, so läßt sich setzen: $DD_1 : KL = LD : ML$, und auch $OO_1 : KL = LO : ML$, d. i. $OO_1 : l = LO : r$. Nehmen wir nun $LO = 1$ und $OO_1 = \lambda$, so bekommen wir $\lambda : l = 1 : r$ und hieraus $S = \frac{\lambda}{l} E = \frac{E}{r}$. Setzen wir endlich diesen Werth von S in die Formel $M = WS$, so erhalten wir das Kraftmoment $M = \frac{WE}{r}$, und umgekehrt $WE = Mr$. Biegung der Körper.

Man nennt das Produkt WE das Biegungsmoment (franz. moment de flexion; engl. momentum of flexure) und kann hiernach behaupten, das Produkt aus dem Kraftmomente (M) und dem Krümmungshalbmesser (r) ist für jeden Querschnitt gleich dem Biegungsmomente.

Theilen wir die neutrale Axe KL, Fig. 257, in n gleiche Theile, wie

Fig. 256.

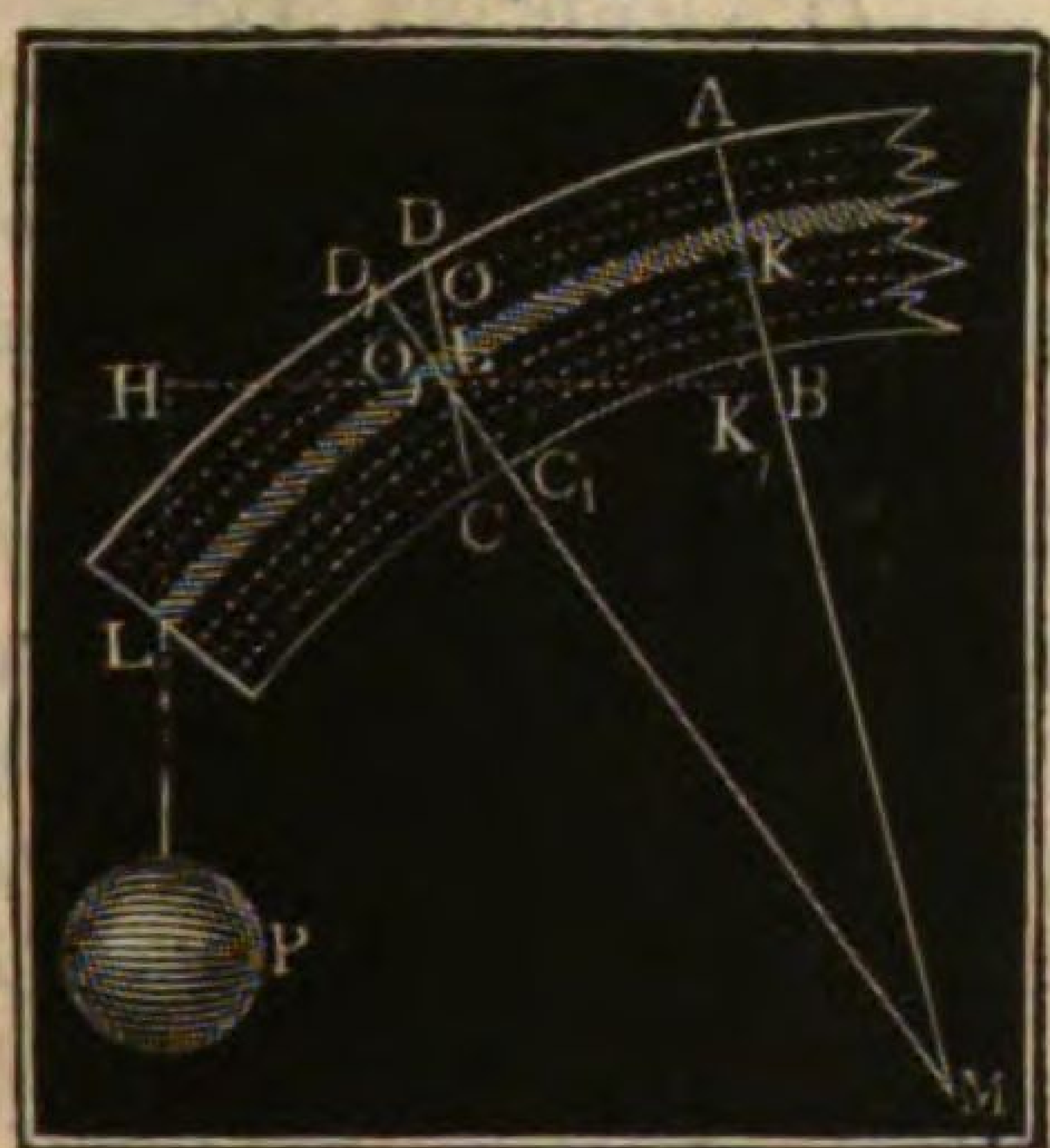
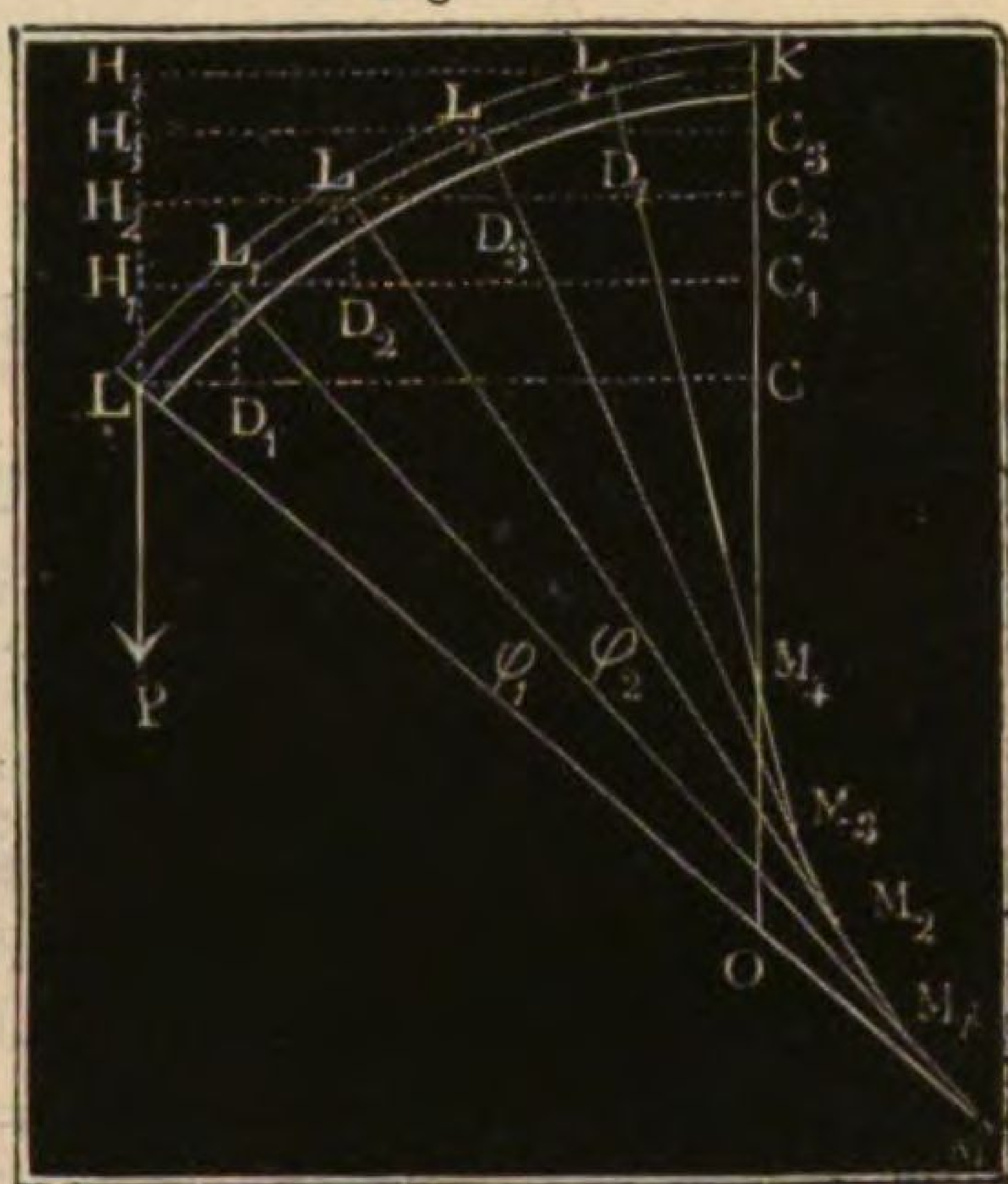


Fig. 257.



LL_1, L_1L_2, L_2L_3 u. s. w. $= \frac{l}{n}$, und bestimmen wir die diesen Theilen entsprechenden Krümmungshalbmesser $\overline{ML_1} = r_1$, $\overline{M_1L_2} = r_2$ u. s. w., so können wir auch die Krümmungswinkel $LML_1 = \varphi_1^0$, $\overline{L_1M_1L_2} = \varphi_2^0$ u. s. w. angeben, welche je zwei Krümmungshalbmesser zwischen sich einschließen, es ist nämlich $LL_1 = \frac{l}{n} = r_1\varphi_1$, $L_1L_2 = \frac{l}{n} = r_2\varphi_2$ u. s. w., und daher $\varphi_1 = \frac{l}{nr_1}$, $\varphi_2 = \frac{l}{nr_2}$ u. s. w. Setzen wir nun

Elastische Linie. noch $r_1 = \frac{WE}{M_1}$, $r_2 = \frac{WE}{M_2}$ u. s. w. ein, so erhalten wir $\varphi_1 = \frac{M_1 l}{nWE}$, $\varphi_2 = \frac{M_2 l}{nWE}$ u. s. w., und es läßt sich durch Summation aller dieser Winkel auch der Winkel $LOK = \alpha^0$ finden, um welchen ein größeres Stück oder die ganze neutrale Axe KL gebogen ist.

§. 192. Setzen wir nur eine kleine Biegung voraus, so können wir die Projection $CL = KH_4$, parallel der anfänglichen Richtung des noch ungebogenen Balkens, gleich der Länge des Balkens selbst, und ebenso die Projectionen LD_1, L_1D_2 u. s. w. den Theilen LL_1, L_1L_2 u. s. w. der neutralen Axe gleich, d. i. $= \frac{l}{n}$, annehmen, und erhalten so die Momente $M_1 = \frac{Pl}{n}$, $M_2 = \frac{2Pl}{n}$, $M_3 = \frac{3Pl}{n}$ u. s. w. Substituiren wir diese Werthe in die Formeln für φ_1, φ_2 u. s. w., so ergeben sich die Maaße der Krümmungswinkel

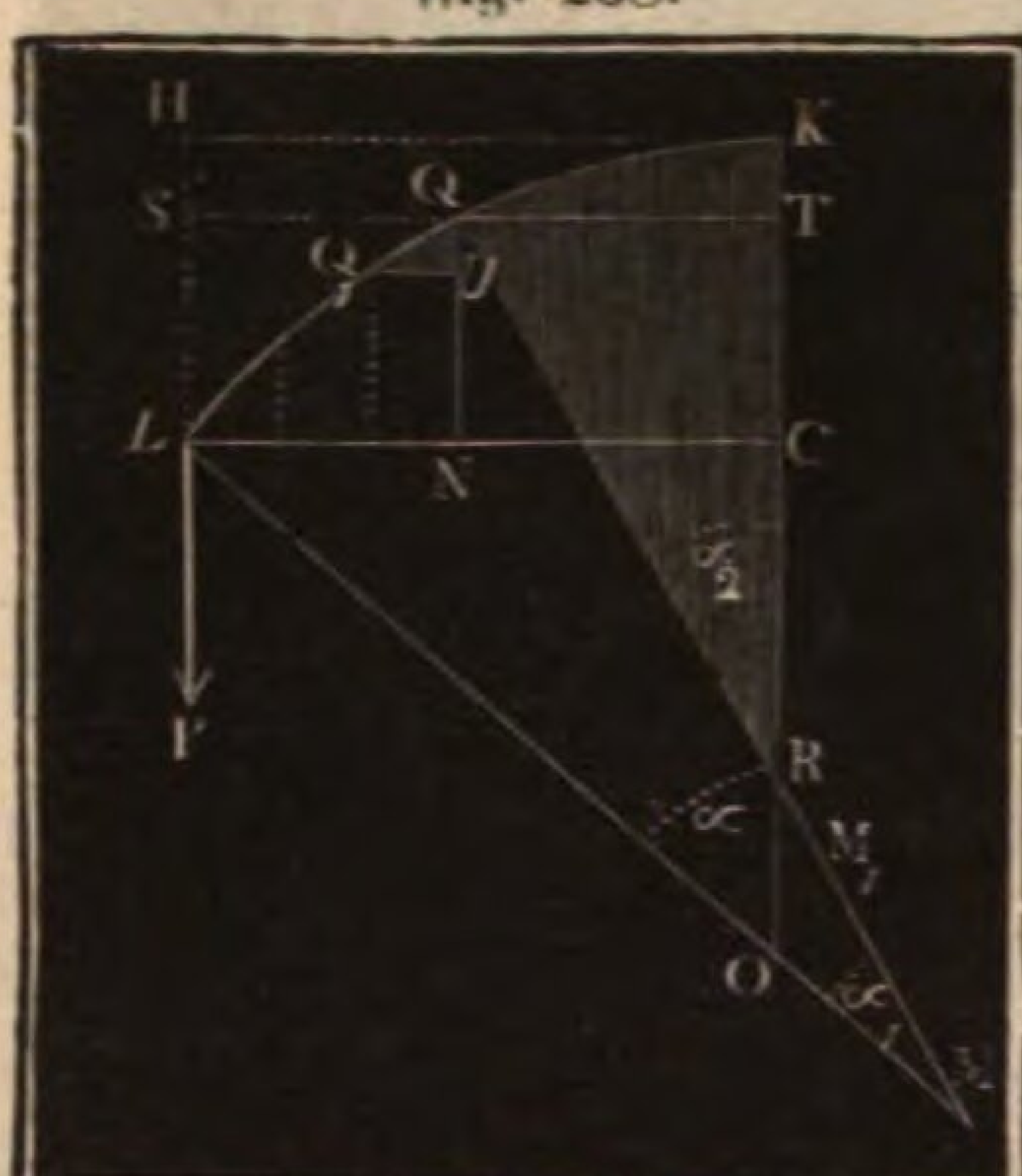
$$\varphi_1 = \frac{Pl^2}{n^2WE},\ \varphi_2 = \frac{2Pl^2}{n^2WE},\ \varphi_3 = \frac{3Pl^2}{n^2WE}$$

u. s. w., und wir erhalten durch Summation das Maaß des Krümmungswinkels $KOL = \alpha$ der ganzen neutralen Axe

$$\alpha = \frac{Pl^2}{n^2WE}(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = \frac{Pl^2}{n^2WE} \cdot \frac{n^2}{2} = \frac{Pl^2}{2WE}.$$

Mit Hilfe der letzten Formel läßt sich nun auch die Gleichung der von der neutralen Axe KL, Fig. 258, gebildeten elastischen Linie finden.

Fig. 258.



Theilen wir die in L anfangende Abscisse $LN = x$ in m gleiche Theile und suchen wir die diesen Theilen entsprechenden Theile der Ordinate $NQ = y$. Da der Krümmungshalbmesser QR winkelrecht auf dem Bogentheil QQ_1 steht, so ist der Winkel $QQ_1U = QRK = \alpha_2$, und daher der Theil QU der Ordinate $y_1 = Q_1U . tang.\ \alpha_2$, oder $Q_1U = \frac{x}{m}$ und $tang.\ \alpha_2 = \alpha_2$ gesetzt, $QU = \frac{x\alpha_2}{m}$. Nun ist $\alpha_2 = LOK - LMQ = \alpha - \alpha_1 = \frac{Pl^2}{2WE} - \frac{Px^2}{2WE} = \frac{P}{2WE}(l^2 - x^2)$; es folgt daher jener Ordinatentheil $QU = \frac{x}{m} \cdot \frac{P}{2WE}(l^2 - x^2)$. Setzen wir statt x^2 in der Parenthese

successiv $\left(\frac{x}{m}\right)^2, \left(\frac{2x}{m}\right)^2, \left(\frac{3x}{m}\right)^2$, u. s. w., so erhalten wir durch die letzte Formel alle Theile von y, und vereinigen wir diese durch Addiren, so ergiebt sich die ganze Ordinate Elastische Linie.

$$NQ = y = \frac{x}{m} \cdot \frac{P}{2WE}\left[l^2 - \left(\frac{x}{m}\right)^2 + l^2 - \left(\frac{2x}{m}\right)^2 + l^2 - \left(\frac{3x}{m}\right)^2 + \ldots\right]$$

$$= \frac{x}{m} \cdot \frac{P}{2WE}\left[ml^2 - \left(\frac{x}{m}\right)^2 (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + m^2)\right],$$

$$\text{d. i. } y = \frac{Px}{2WE}\left(l^2 - \frac{x^2}{3}\right).$$

Mit Hilfe dieser Formel läßt sich für jede Abscisse x die entsprechende Ordinate y und ebenso auch für die ganze Länge $CL = l$ die Bogenhöhe $CK = a$ berechnen. Es ist die letztere

$$a = \frac{Pl}{2WE}\left(l^2 - \frac{l^2}{3}\right) = \frac{Pl^3}{3WE}.$$

Es wächst also die Bogenhöhe wie die Kraft und wie der Cubus der Länge.

Hat man a gemessen, so kann man durch diese Formel den Elasticitätsmodul finden, es ist nämlich $E = \frac{Pl^3}{3Wa}$.

Das Arbeitsquantum, durch welches die Einbiegung a hervorgebracht wird, ist nach §. 186:

$$L = \frac{Pa}{2} = \frac{Pl^3}{6WE} = \frac{3WE}{2l^3}.$$

§. 193. Ist die ganze Last gleichmäßig vertheilt auf den Balken und trägt jede Längeneinheit desselben $= q$, also die ganze Länge l, $Q = lq$, so hat man statt der Momente $\frac{1}{n} Pl, \frac{2}{n} Pl, \frac{3}{n} Pl$ u. s. w. die Momente $\frac{1}{2}q\left(\frac{l}{n}\right)^2, \frac{1}{2}q\left(\frac{2l}{n}\right)^2, \frac{1}{2}q\left(\frac{3l}{n}\right)^2$ u. s. w. einzusetzen, weil die Schwerpunkte der Lasten $q\frac{l}{n}, q \cdot \frac{2l}{n}, q \cdot \frac{3l}{n}$ u. s. w. in der Mitte von $\frac{l}{n}, \frac{2l}{n}, \frac{3l}{n}$ u. s. w. liegen, also die Hebelarme $\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{n}, \frac{1}{2} \cdot \frac{2l}{n}, \frac{1}{2} \cdot \frac{3l}{n}$ u. s. w. sind. Hiernach bekommen wir hier

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{ql^3}{n^3WE},\ \varphi_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2^2 \cdot ql^3}{n^3WE},\ \varphi_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3^2 \cdot ql^3}{n^3WE} \text{ u. s. w., und daher}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{ql^3}{n^3WE}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) = \frac{ql^3}{2n^3WE} \cdot \frac{n^3}{3} = \frac{ql^3}{6WE},$$

ebenso $\alpha_1 = \frac{qx^3}{6WE}$ und $\alpha_2 = \frac{q}{6WE}(l^3 - x^3)$. Aus dem letzten Winkelmaaße folgt ein Element der Ordinate

Elastische Linie. $= \frac{x}{m} \alpha_2 = \frac{x}{m} \cdot \frac{q}{6WE} (l^3 - x^3)$, und nun statt x^3 nach und nach $\left(\frac{x}{m}\right)^3, \left(\frac{2x}{m}\right)^3, \left(\frac{3x}{m}\right)^3$ eingeführt, ergiebt sich

$$y = \frac{x}{m} \cdot \frac{q}{6WE} \left[ml^3 - \left(\frac{x}{m}\right)^3 (1^3 + 2^3 + \ldots + m^3) \right]$$
$$= \frac{x}{m} \cdot \frac{q}{6WE} \left[ml^3 - \left(\frac{x}{m}\right)^3 \cdot \frac{m^4}{4} \right],$$

d. i. $y = \frac{qx}{6WE}\left(l^3 - \frac{x^3}{4}\right)$, die gesuchte Curvengleichung.

Nehmen wir wieder $x = l$, so bekommen wir die Bogenhöhe

$a = \frac{ql}{6WE} \cdot {}^3/_4\, l^3 = \frac{ql^4}{8WE} = \frac{Ql^3}{8WE} = {}^3/_8 \cdot \frac{Ql^3}{3WE}$ d. i. ${}^3/_8$mal so groß, als wenn die Last Q am Ende des Balkens hinge.

Das Arbeitsquantum, welches die Einbiegung a hervorbringt, ist hier

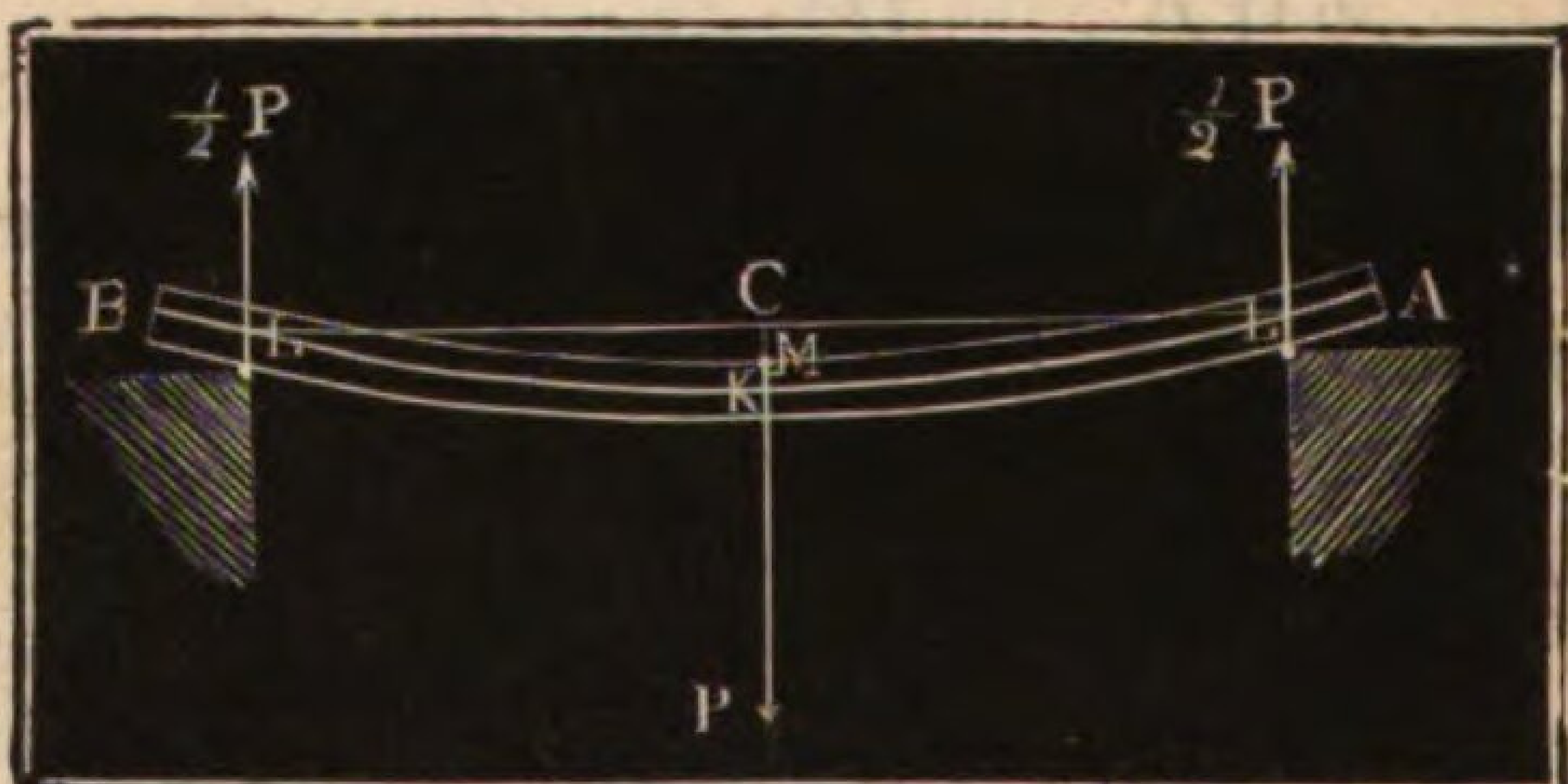
$$L = \frac{q^2 l^5}{40WE} = \frac{Q^2 l^3}{40WE} = \frac{8WEa^2}{5 l^3}.$$

Ist der Balken durch eine gleichmäßig vertheilte Last Q und durch eine Kraft P am Ende zugleich belastet, so hat man die Bogenhöhe

$$a = \frac{Pl^3}{3WE} + \frac{Ql^3}{8WE} = \left(\frac{P}{3} + \frac{Q}{8}\right) \frac{l^3}{WE}.$$

Ist ein Balken AMB, Fig. 259, in den Endpunkten unterstützt, und in der Mitte M durch eine Kraft P belastet, so werden die Enden durch die Reactionen $^1/_2\, P$ und $^1/_2\, P$ gerade so aufwärts gebogen, wie im vorigen Falle (§. 192) das eine Ende abwärts, es gilt daher die dort gefundene Formel auch hier, wenn man statt

Fig. 259.



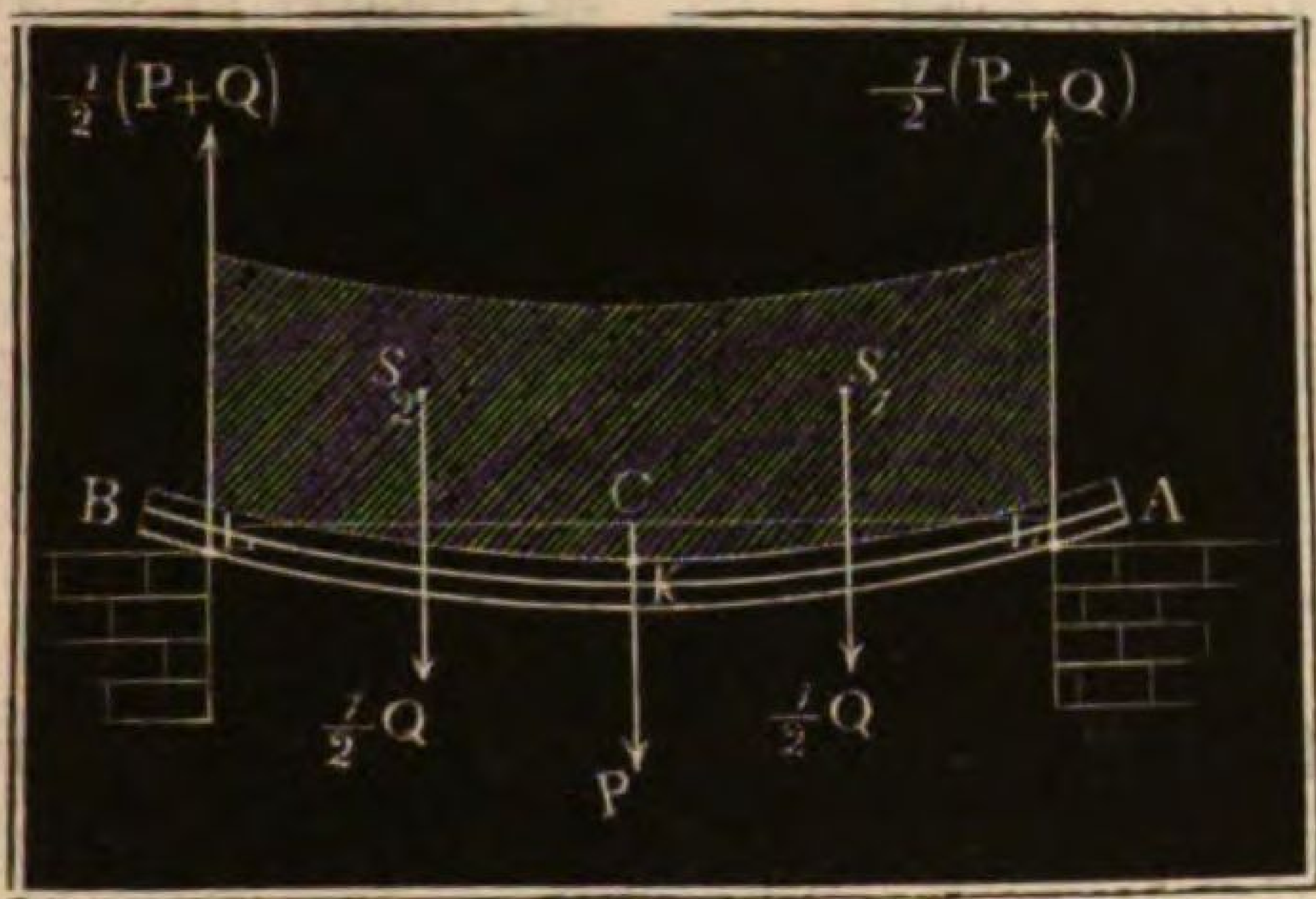
P, $\frac{P}{2}$ und statt der ganzen Länge $LL = l$ nur die halbe Länge $KL = \frac{l}{2}$ einführt. Hiernach ergiebt sich die Bogenhöhe

$a = \frac{{}^1/_2\, P \,.\, ({}^1/_2\, l)^3}{3WE} = {}^1/_{16} \cdot \frac{Pl^3}{3WE}$ = ein Sechszehntel der Bogenhöhe des am Ende belasteten Balkens.

Ist endlich auch noch die Last $Q = ql$ auf den mit beiden Enden aufruhenden Körper AB, Fig. 260 (a. folg. S.), gleichmäßig vertheilt, so hat man in der Formel $a = \left(\frac{P}{3} + \frac{Q}{8}\right) \frac{l^3}{WE}$ statt l, $\frac{l}{2}$, statt P,

$\frac{P+Q}{2}$ und statt Q, $-\frac{Q}{2}$ zu setzen, weil in Beziehung auf die Mitte K die Last $\frac{Q}{2}$ am Hebelarme $\frac{l}{4}$ der Kraft $\frac{P+Q}{2}$ am Hebelarme $\frac{l}{2}$ entgegen wirkt. Es ist folglich Elastische Linie.

Fig. 260.

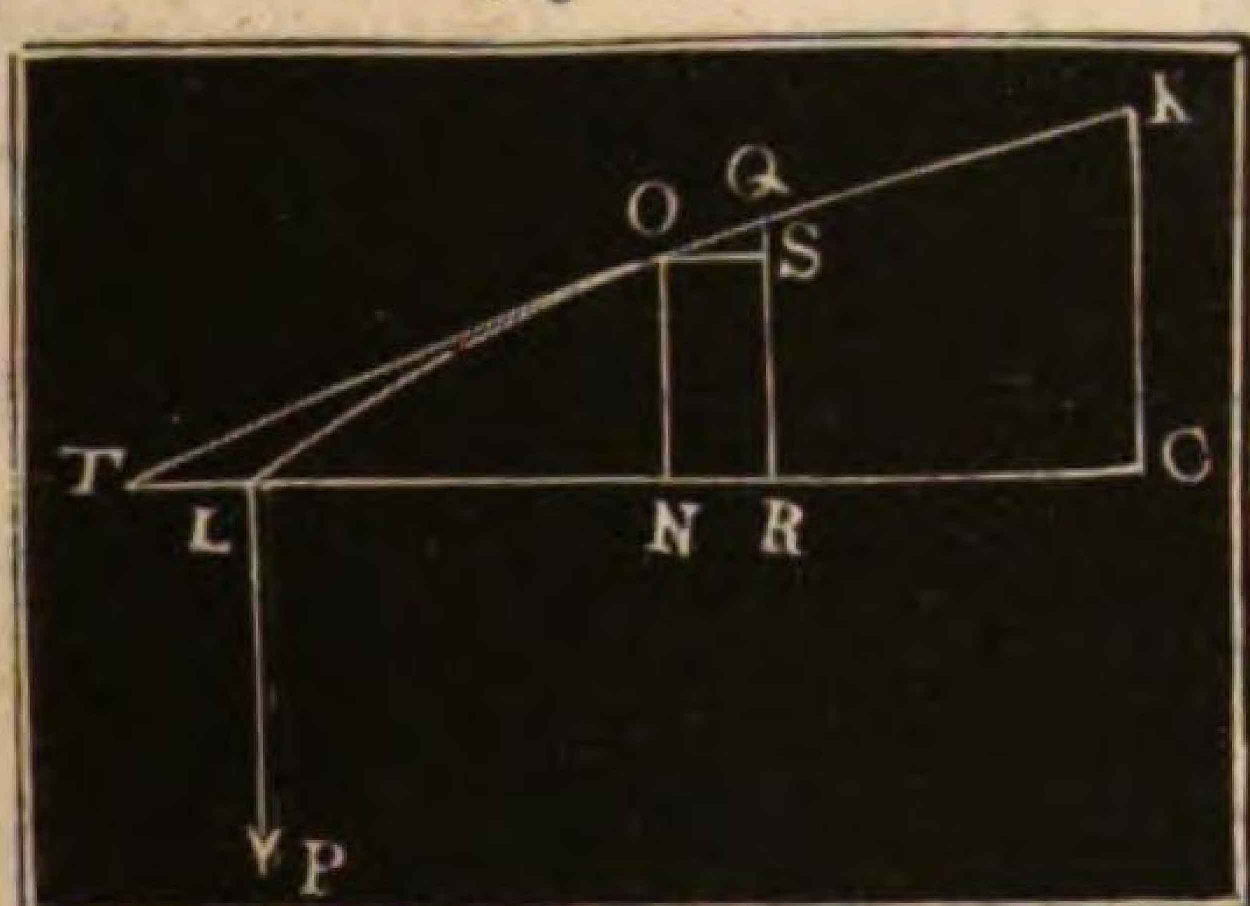


$$a = \left(\frac{P+Q}{6} - \frac{Q}{16}\right)\frac{l^3}{8WE}$$
$$= \left(P + \frac{5}{8}Q\right)\frac{l^3}{48WE}.$$

Für $P = o$ folgt $a = {}^5/_8 \cdot \frac{Ql^3}{48WE}$; ist also die Last auf den ganzen Bogen gleichmäßig vertheilt, so fällt die Bogenhöhe $^5/_8$ mal so groß aus, als wenn dieselbe in der Mitte des Balkens niederzieht.

§. 194 *). Eine schärfere Gleichung der von der neutralen Axe eines gebogenen Balkens gebildeten elastischen Linie LOK, Fig. 261, läßt sich durch den höhern Calcul auf folgende Weise finden. Setzen wir in der allgemeinen Gleichung des §. 191, $WE = Mr$, das Moment $M = Px$ und für den Krümmungshalbmesser (aus Art. 27 der analytischen Hülfslehren), den Werth

Fig. 261.



$$r = -\frac{ds^3}{dx^2 d\,(tang.\alpha)}$$

ein, und hierin wieder, nach Art. 26:

$$ds = \sqrt{1 + (tang.\alpha)^2}\,.\,dx,$$ so erhalten wir

$$WE = -\frac{Px\,dx\,[1 + (tang.\alpha)^2]^{3/2}}{d\,tang.\alpha}.$$

Bei einer mäßigen Biegung des Balkens ist aber der Winkel α, welchen die Berührungslinie mit der Abscissenaxe einschließt, nur klein, und es läßt sich daher

$[1 + (tang.\alpha)^2]^{3/2}$ annähernd $= 1 + {}^3/_2 (tang.\alpha)^2$ setzen,

weshalb nun

Elastische Linie.

$$WE = -\frac{Px\,[1 + {}^3\!/_2 (tang.\alpha)^2]\,dx}{d\,tang.\alpha},$$ oder umgekehrt

$$\frac{Px\,dx}{WE} = -\frac{d\,tang.\alpha}{1 + {}^3\!/_2 (tang.\alpha)^2} = -[1 - {}^3\!/_2 (tang.\alpha)^2]\,d\,tang.\alpha$$

folgt.

Hiernach ist:

$$\int \frac{Px\,dx}{WE} = -\int d\,tang.\alpha + {}^3\!/_2 \int (tang.\alpha)^2\,d\,tang.\alpha,$$

d. i. nach Art. 13:

$$\frac{Px^2}{2WE} = -\,tang.\alpha + {}^1\!/_2\,(tang.\alpha)^3 + Con.,$$

Nun ist aber in dem Scheitel K die Curve parallel zur Abscissenaxe, also $\alpha = 0$; setzen wir daher die Projection CL der elastischen Linie in der Abscissenaxe $= b$, so erhalten wir:

$$\frac{Pb^2}{2WE} = -\,tang.0 + {}^1\!/_2\,(tang.0)^3 + Con.,$$

und daher durch Subtraction dieser Gleichungen:

$$\frac{P\,(b^2 - x^2)}{2\,WE} = tang.\alpha - {}^1\!/_2\,(tang.\alpha)^3;$$

und umgekehrt für den Tangentenwinkel $OTN = \alpha$,

$$tang.\,\alpha = \frac{P\,(b^2 - x^2)}{2\,WE} + {}^1\!/_2\,(tang.\alpha)^3$$

$$= \frac{P\,(b^2 - x^2)}{2\,WE} + {}^1\!/_2\,\frac{P^3\,(b^2 - x^2)^3}{8\,W^3 E^3},$$ d. i.

1) $$tang.\alpha = \frac{P\,(b^2 - x^2)}{2\,WE}\left(1 + \frac{P^2\,(b^2 - x^2)^2}{8\,W^2 E^2}\right).$$

Nun ist ferner $tang.\alpha = \frac{dy}{dx}$, daher folgt denn

$$dy = \left(1 + \frac{P^2\,(b^2 - x^2)^2}{8\,W^2 E^2}\right)\frac{P\,(b^2 - x^2)\,dx}{2\,WE},$$ und

$$y = \frac{P}{2\,WE}\left[\int (b^2 - x^2)\,dx + \frac{P^2}{8\,W^2 E^2}\int (b^2 - x^2)^3\,dx\right]$$

$$= \frac{P}{2\,WE}\left[\int b^2\,dx - \int x^2 dx + \frac{P^2}{8W^2E^2}\left(\int b^6\,dx - \int 3\,b^4 x^2\,dx + \int 3\,b^2 x^4 dx - \int x^6\,dx\right)\right]$$

$$= \frac{P}{2\,WE}\left[b^2 x - \frac{x^3}{3} + \frac{P^2}{8W^2E^2}\left(b^6 x - b^4 x^3 + \frac{3b^2 x^5}{5} - \frac{x^7}{7}\right)\right] + Con.$$

Da mit $x = 0$ auch $y = 0$ ist, so hat man auch $Con. = 0$, und

2) $$y = \frac{Px}{2\,WE}\left[b^2 - \frac{x^2}{3} + \frac{P^2}{8W^2E^2}\left(b^6 - b^4 x^2 + {}^3\!/_5\, b^2 x^4 - \frac{x^6}{7}\right)\right].$$

Im Scheitel ist $x = b$ und y die Bogenhöhe $CK = a$, daher folgt Elastische Linie.

$$a = \frac{P}{2WE}\left(\frac{2}{3}b^3 + \frac{P^2}{8W^2E^2}\cdot \frac{16}{35}\cdot b^7\right), \text{ d. i.}$$

3) $a = \frac{Pb^3}{3WE}\left(1 + \frac{3}{35}\,\frac{P^2b^4}{W^2E^2}\right)$.

Aus $ds = \sqrt{1 + (tang.\alpha)^2}\,.\,dx = [1 + \frac{1}{2}(tang.\alpha)^2]\,dx$ ergiebt sich, wenn man $tang.\alpha = \frac{P\,(b^2 - x^2)}{2\,WE}$ substituirt:

$$s = \int\left(1 + \frac{1}{8}\cdot\frac{P^2\,(b^2-x^2)^2}{W^2\,E^2}\right)dx$$

$$= \int dx + \frac{P^2}{8W^2E^2}\left[\int\left(b^4\,dx - \int 2\,b^2x^2\,dx + \int x^4dx\right)\right]$$

$$= x + \frac{P^2}{8W^2E^2}\left(b^4\,x - \frac{2\,b^2x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right), \text{ d. i. die Bogenlänge}$$

4) $s = \left[1 + \frac{P^2}{8W^2E^2}\left(b^4 - \frac{2}{3}\,b^2x^2 + \frac{x^4}{5}\right)\right]x.$

Nimmt man $x = b$, so erhält man die ganze Länge des Balkens:

5) $l = \left(1 + \frac{P^2\,b^4}{15\,W^2\,E^2}\right)b = \left(1 + \frac{3}{5}\cdot\frac{a^2}{b^2}\right)b.$

Umgekehrt erhält man:

6) $b = \frac{l}{1 + \frac{P^2b^4}{15W^2E^2}} = \left(1 - \frac{P^2\,l^4}{15\,W^2E^2}\right)l$, und daher

$$a = \frac{P}{3\,WE}\left(1 - \frac{P^2\,l^4}{15\,W^2E^2}\right)^3 l^3\left(1 + \frac{3}{35}\cdot\frac{P^2\,l^4}{W^2E^2}\right), \text{ oder}$$

$$= \frac{Pl^3}{3WE}\left(1 - \frac{3\,P^2\,l^4}{15\,W^2E^2}\right)\left(1 + \frac{3}{35}\cdot\frac{P^2\,l^4}{W^2\,E^2}\right), \text{ d. i.}$$

7) $a = \frac{Pl^3}{3WE}\left(1 - \frac{4}{35}\cdot\frac{P^2\,l^4}{W^2\,E^2}\right)$.

Vernachlässigen wir alle Glieder mit den Potenzen von $\frac{P}{WE}$, so erhalten wir, wie in den vorigen Paragraphen:

$$a = \frac{Pl^3}{3\,WE},\quad b = l,$$

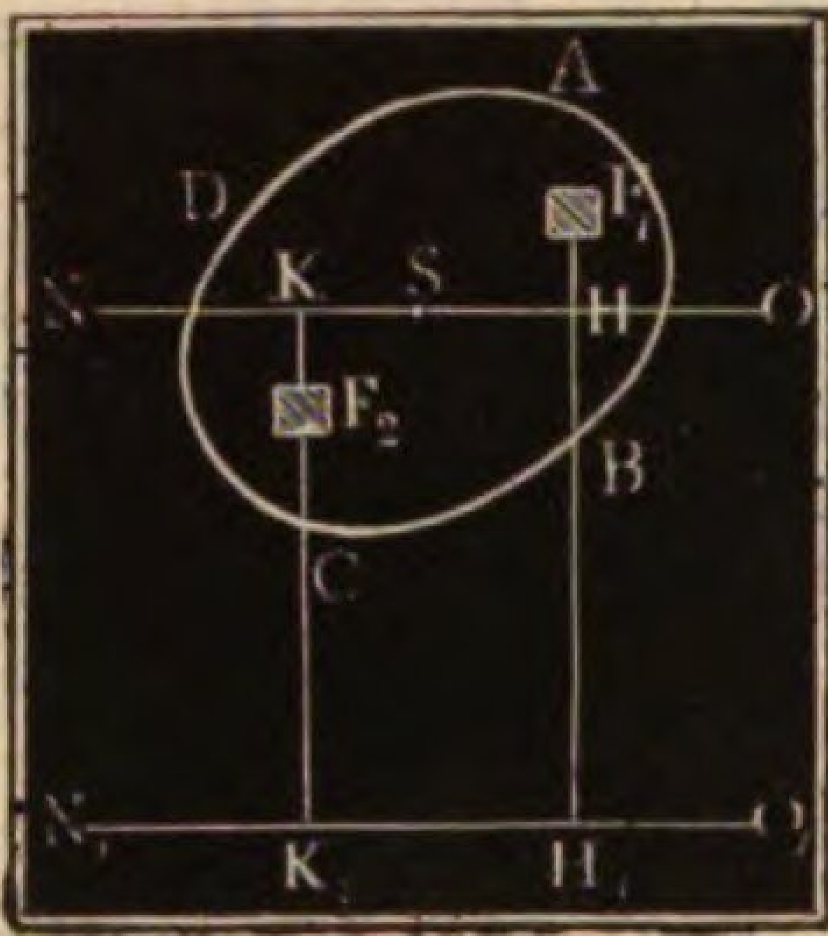
$$y = \frac{Px}{2\,WE}\left(l^2 - \frac{x^2}{3}\right) \text{ und } tang.\alpha = \frac{P\,(l^2 - x^2)}{2\,WE}.$$

§. 195. Kennt man das Biegungsmoment W_1E eines Körpers $ABCD$, Fig. 262 (a. f. S.), in Beziehung auf eine Axe N_1O_1 außerhalb des Schwerpunktes, so läßt sich leicht das Moment in Beziehung auf eine andere, Reduction der Biegungsmomente.

Reduction der Biegungsmomente.

durch den Schwerpunkt S gehende Axe NO finden, welche mit der ersteren parallel läuft. Ist der Abstand $HH_1 = KK_1$ beider Axen $= d$, und sind die Abstände der Flächenelemente F_1, F_2 u. s. w. von der neutralen Axe $NO = z_1$, z_2 u. s. w., so hat man die Abstände von der Axe $N_1O_1 = d + z_1$, $d + z_2$ u. s. w., und es ist nun das Biegungsmoment $W_1E = [F_1(d + z_1)^2 + F_2(d + z^2{}_2) + ..] E = [F_1(d^2 + 2dz_1 + z^2{}_1) + F_2(d^2 + 2dz_2 z^2{}_2 + ...)] E = [d^2(F_1 + F_2 + \ldots) + 2d(F_1 z_1 + F_2 z_2 + \ldots) + (F_1 z_1{}^2 + F_2 z_2{}^2 + \ldots)]$. Nun ist aber $F_1 + F_2 + \ldots$ als Summe aller Elemente = Querschnittt F des ganzen Körpers, ferner $F_1 z_1 + F_2 z_2 + \ldots$ als Summe der statischen Momente in Beziehung auf eine durch den Schwerpunkt gehende Axe = Null, und $F_1 z_1{}^2 + F_2 z_2{}^2 + \ldots$ das Biegungsmoment WE in Beziehung auf die neutrale Axe NO; es folgt daher $W_1 E = (Fd^2 + W)E$, oder $W_1 = Fd^2 + W$ und umgekehrt $W = W_1 - Fd^2$.

Fig. 262.



Es ist also das Maaß W des Biegungsmomentes in Beziehung auf die neutrale Axe gleich dem Maaße W_1 des Biegungsmomentes in Beziehung auf eine zweite Parallelaxe minus Produkt aus Querschnitt F und Quadrat (d^2) des Abstandes beider Axen. Auch folgt hieraus, daß unter allen Biegungsmomenten das in Hinsicht auf die neutrale Axe am kleinsten ist.

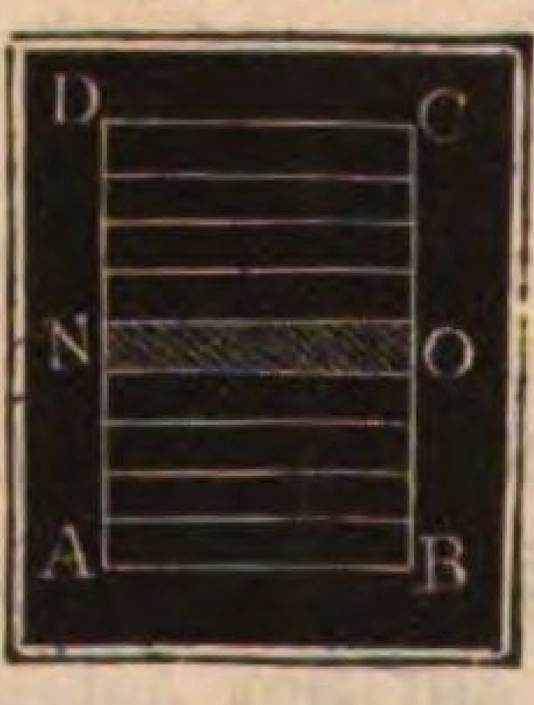
Von vielen Körpern lassen sich die Biegungsmomente in Hinsicht auf irgend eine Axe leicht finden, man kann daher diese dazu benutzen, um mittels der gefundenen Formel die Momente in Hinsicht auf die neutrale Axe zu bestimmen.

Parallelepipedischer Balken.

§. 196. Um die Biegungsverhältnisse eines Balkens oder andern prismatischen Körpers und die durch seine neutrale Axe gebildete elastische Linie angeben zu können, muß der Querschnitt dieses Körpers bekannt sein, und daraus das Biegungsmoment WE berechnet werden.

Ist der Querschnitt des Balkens ein Rechteck $ABCD$, Fig. 263, von der Breite $AB = CD = b$ und der Höhe $AD = BC = h$, so bestimmt sich das Biegungsmoment $WE = (F_1 z_1{}^2 + F_2 z_2{}^2 + \ldots) E$, wenn man diesen Querschnitt durch Linien parallel zur neutralen Axe NO in $2n$ gleiche Streifen, jeden vom Inhalte $b \cdot \frac{h}{2n} = \frac{bh}{2n}$, zerschneidet, die Momente dieser Streifen bestimmt und sie durch Addition vereinigt. Setzen wir in

Fig. 263.



$\frac{bh}{2n} \cdot z^2\, E$ statt z nach und nach die Werthe $\frac{1}{n} \cdot \frac{h}{2}$, $\frac{2}{n} \cdot \frac{h}{2}$, $\frac{3}{n} \cdot \frac{h}{2}$ Parallelepipedischer Balken.
u. s. w., so erhalten wir zunächst die Momente der Streifen auf der einen Seite der neutralen Axen, verdoppeln wir aber deren Summe, so ergiebt sich das vollständige Biegungsmoment

$$WE = 2 \cdot \frac{bh}{2n} \left[\left(\frac{h}{2n}\right)^2 + \left(\frac{2h}{2n}\right)^2 + \left(\frac{3h}{2n}\right)^2 + \dots \right] E =$$

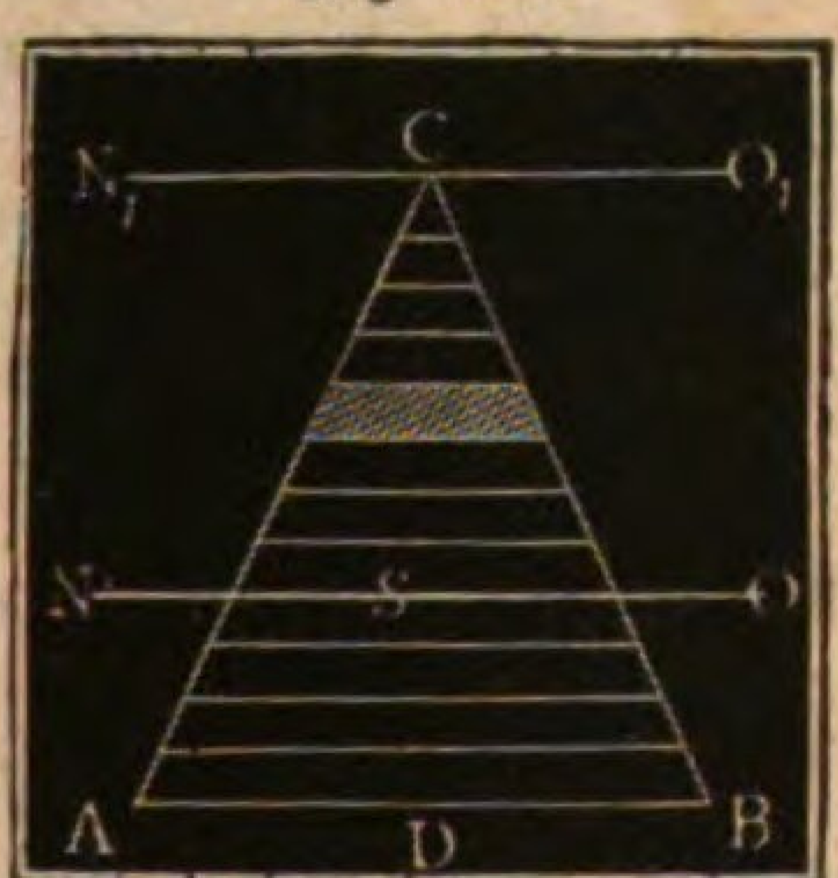
$$\frac{bh}{n} \cdot \left(\frac{h}{2n}\right)^2 (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)\, E = \frac{bh^3}{4 \cdot 3} E = \frac{bh^3}{12} \cdot E.$$

Bei einem parallelepipedischen Balken wächst also das Biegungsmoment wie die Breite und wie der Cubus der Höhe des Balkens.

Setzen wir diesen Werth für WE in die Formel $a = \frac{Pl^3}{3WE}$ des §. 192, so erhalten wir $a = 4 \cdot \frac{Pl^3}{bh^3E}$, setzen wir ihn aber in die Formel $a = \frac{1}{48} \frac{Pl^3}{WE}$ des §. 193, so stellt sich $a = \frac{Pl^3}{4bh^3E}$ heraus. Umgekehrt, folgt aus der Bogenhöhe a der Elasticitätsmodul $E = \frac{4\,Pl^3}{abh^3}$ für den einen, und $E = \frac{Pl^3}{4abh^3}$ für den andern Fall.

Beispiele. 1) Ein hölzerner Balken von 10 Fuß = 120 Zoll Länge, 8 Zoll Breite und 10 Zoll Höhe soll in beiden Enden aufruhen und eine gleichmäßig vertheilte Last Q = 10000 Pf. tragen, welche Biegung wird derselbe erleiden? Es ist die Bogenhöhe $a = \frac{5}{8} \frac{Ql^3}{4bh^3E} = \frac{5}{32} \cdot \frac{10000 . 120^3}{8 . 10^3 . E} = \frac{50000 \,.\, 12^3}{32 \,.\, 8E} = \frac{1350000}{4 . E}$. Nun E = 1800000 Pf. eingesetzt, folgt $a = \frac{135}{4 . 180}$ = 0,1875 Zoll.
2) Wenn sich eine parallelepipedisch geformte gußeiserne Stange von 2 Zoll Breite und ½ Zoll Dicke durch ein in der Mitte aufliegendes Gewicht P = 18 Pf. um ¼ Zoll gesenkt hat, während die Entfernung l der Stützen 5 Fuß beträgt, so ergiebt sich der Elasticitätsmodul des Gußeisens $E = \frac{Pl^3}{4abh^3} = \frac{18 \,.\, 60^3}{4 . \frac{1}{4} . 2 . (\frac{1}{2})^3} = \frac{18 . 60^3}{\frac{1}{4}} =$ 72 .. 216000 = 15552000 Pf.

Fig. 264.



§. 197. Um das Biegungsmoment eines Prisma's mit dreiseitigem Querschnitte ABC, Fig. 264, zu finden, zerlegen wir diesen Querschnitt durch Parallellinien zur Grundlinie AB in n schmale Streifen und bestimmen die Momente dieser in Hinsicht auf die durch die Spitze C parallel zu AB gehende Axe $N_1 O_1$. Ist h die Höhe CD, und b die Breite AB des triangulären Querschnitts ABC, so hat man die Höhe Reduction der Biegungsmomente.

Reduction der Biegungsmomente.

dieser Streifen $= \frac{h}{n}$, ihre Längen $= \frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, \frac{3b}{n}$ u. s. w. bis $\frac{nb}{n}$ und ihre Abstände von $N_1O_1 = \frac{h}{n}, \frac{2h}{n}, \frac{3h}{n}$ u. s. w. bis $\frac{nh}{n}$. Hiernach sind dann die Inhalte dieser Streifen: $F_1 = \frac{bh}{n^2}$, $F_2 = \frac{2\,bh}{n^2}$, $F_3 = \frac{3\,bh}{n^2}$ u. s. w. und ihre Momente $F_1 z_1^2 = \frac{bh^3}{n^4}$, $F_2 z_2^2 = 2^3 . \frac{bh^3}{n^4}$, $F_3 z_3^2 = 3^3 . \frac{bh^3}{n^4}$ u. s. w., und es ergiebt sich das Maaß des Biegungsmomentes in Beziehung auf die Axe N_1O_1:

$$W_1 = \frac{bh^3}{n^4}(1^3+2^3+3^3+ .. + n^3) = \frac{bh^3}{n^4} . \frac{n^4}{4} = \frac{bh^3}{4}.$$

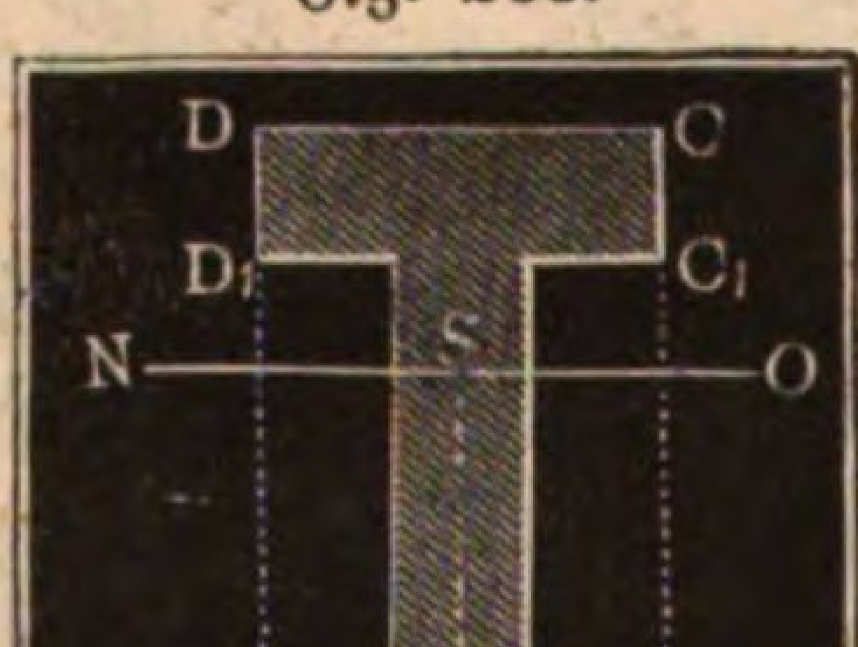
Der Abstand des Schwerpunktes S von der Spitze C ist aber $d = \frac{2}{3}h$, und der Inhalt des ganzen Dreieckes ist $F = \frac{b\,h}{2}$; es folgt daher $Fd^2 = \frac{b\,h}{2} . \frac{4}{9} h^2 = \frac{2bh^3}{9}$ und das gesuchte Biegungsmoment in Hinsicht auf die neutrale Axe NO:

$$WE = (W_1 - Fd^2)\,E = \left(\frac{bh^3}{4} - \frac{2bh^3}{9}\right)E = \frac{1}{3} . \frac{bh^3}{12}\,E =$$

einem Drittel von dem Biegungsmomente des parallelipipedischen Balkens, welcher mit diesem dreiseitigen gleiche Höhe und Breite hat. Da aber dieser Balken nur doppelt so viel Volumen hat, so folgt, daß unter übrigens gleichen Umständen der trianguläre Balken $\frac{2}{3}$mal so viel Biegungsmoment hat als der parallelepipedische Balken.

Auf dieselbe Weise kann man die Biegungsmomente vieler anderen in der Praxis häufig vorkommenden Körper finden. So ist z. B. für den Körper mit T förmigem Querschnitte A_1B_1CD, Fig. 265, und den Dimensionen $AB = b, AB - A_1B_1 = AA_1 + BB_1 = b_1$, $AD = BC = h$ und $AD_1 = BC_1 = BC - CC_1 = h_1$, das Maaß des Biegungsmomentes in Beziehung auf die untere Kante A_1B_1 : Moment des Rechteckes $ABCD$ minus Moment der Rechtecke A_1D_1 und B_1C_1, d. i. $W_1 = \frac{1}{2} . \frac{b(2h)^3}{12} - \frac{1}{2} . \frac{b_1(2h_1)^3}{12} = \frac{bh^3 - b_1h_1^3}{3}$, wie sich ergiebt, wenn man jedes dieser Rechtecke als die Hälfte von doppelt so hohen Rechtecken mit der neutralen Axe N_1O_1 ansieht. Nun ist die Fläche $A_1C_1D = bh - b_1h_1$,

Fig. 265.



und ihr statisches Moment $Fd = bh \cdot \frac{h}{2} - b_1 h_1 \cdot \frac{h_1}{2} = \frac{1}{2}(bh^2 - b_1 h_1^2)$;

es folgt daher der Hebelarm $MS = d = \frac{bh^2 - b_1 h_1^2}{2(bh - b_1 h_1)}$, das Moment $Fd^2 = \frac{1}{4}(bh^2 - b_1 h_1^2)^2 : (bh - b_1 h_1)$ und das Biegungsmoment in Beziehung auf die durch den Schwerpunkt S gehende neutrale Axe:

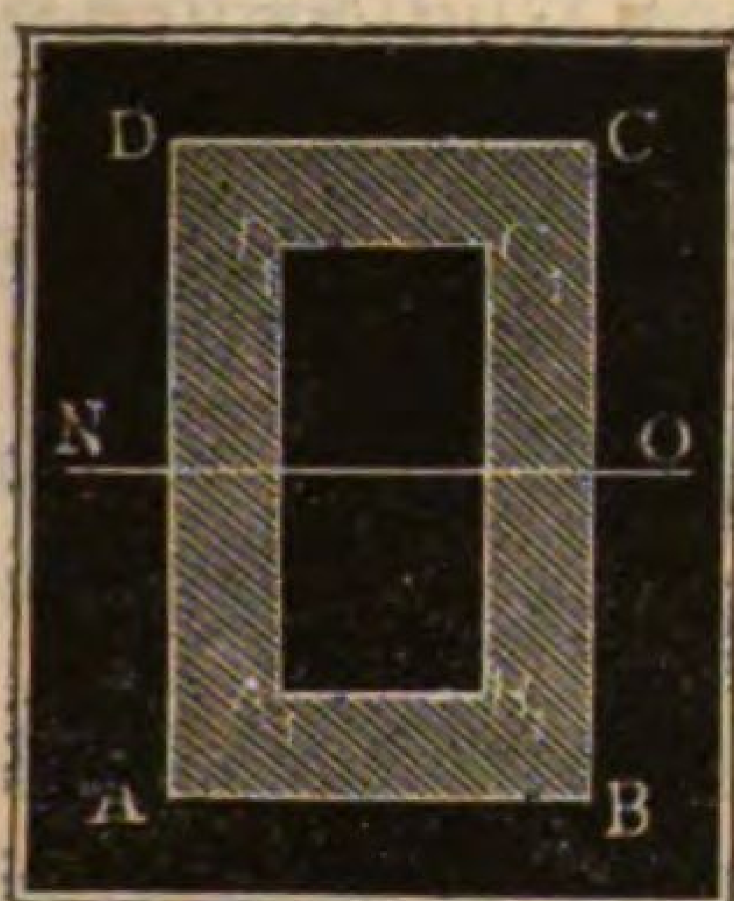
$$W = W_1 - Fd^2 = \frac{bh^3 - b_1 h_1^3}{3} - \frac{1}{4}(bh^2 - b_1 h_1^2)^2 : (bh - b_1 h_1)$$

$$= \frac{4(bh^3 - b_1 h_1^3)(bh - b_1 h_1) - 3(bh^2 - b_1 h_1^2)^2}{12(bh - b_1 h_1)}$$

$$= \frac{(bh^2 - b_1 h_1^2)^2 - 4bh\, b_1 h_1 (h - h_1)^2}{12(bh - b_1 h_1)}.$$

§. 198. Von einem hohlen parallelepipedischen Balken $ABCD$, Fig. 266 bestimmt sich das Biegungsmoment, wenn man von dem Momente des vollständigen Balkens das Moment der Höhlung abzieht. Sind $AB = b$ und $BC = h$ die äußere Breite und Höhe und $A_1 B_1 = b_1$ und $B_1 C_1 = h_1$ die innere Breite und Höhe, so hat man die Maaße der Biegungsmomente beider $= \frac{bh^3}{12}$ und $\frac{b_1 h_1^3}{12}$, und es giebt die Subtraction für das Biegungsmoment des hohlen Balkens: Hohle Balken.

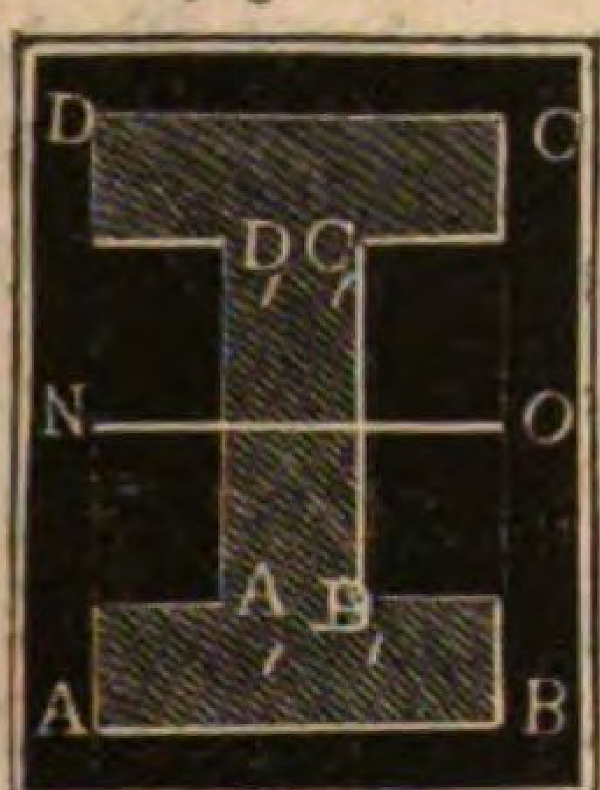
Fig. 266.



$$W = \frac{bh^3 - b_1 h_1^3}{12}.$$

Ganz auf gleiche Weise ergiebt sich das Biegungsmoment des an den Seiten ausgehöhlten Körpers $ABCD$, Fig. 267. Sind $AB = b$ und $BC = h$ äußere Breite und Höhe, und ist $AB - A_1 B_1 = b_1$, sowie $B_1 C_1 = h_1$ die Summe der Breiten und die Höhe der beiden Höhlungen, so erhält man wieder durch Subtraction:

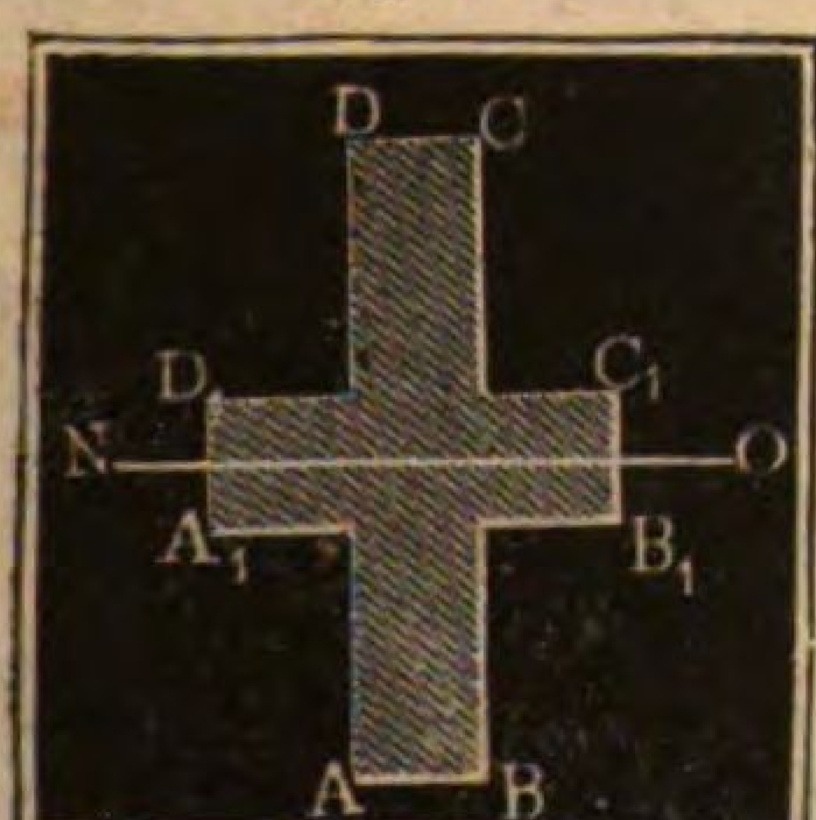
Fig. 267.



$$W = \frac{bh^3 - b_1 h_1^3}{12}.$$

Ebenso ergiebt sich das Biegungsmoment des Körpers $ABCD$, Fig. 268, mit kreuzförmigem Querschnitte. Ist hier $AB = b$ und $BC = h$ die Breite und Höhe des Mittelstückes, und ist $A_1 B_1 - AB = b_1$ und $A_1 D_1 = h_1$ die Summe der Breiten und die Höhe der Seitenstücke, so folgt durch Addition das Biegungsmoment: $W = \frac{bh^3 + b_1 h_1^3}{12}$.

Fig. 268.

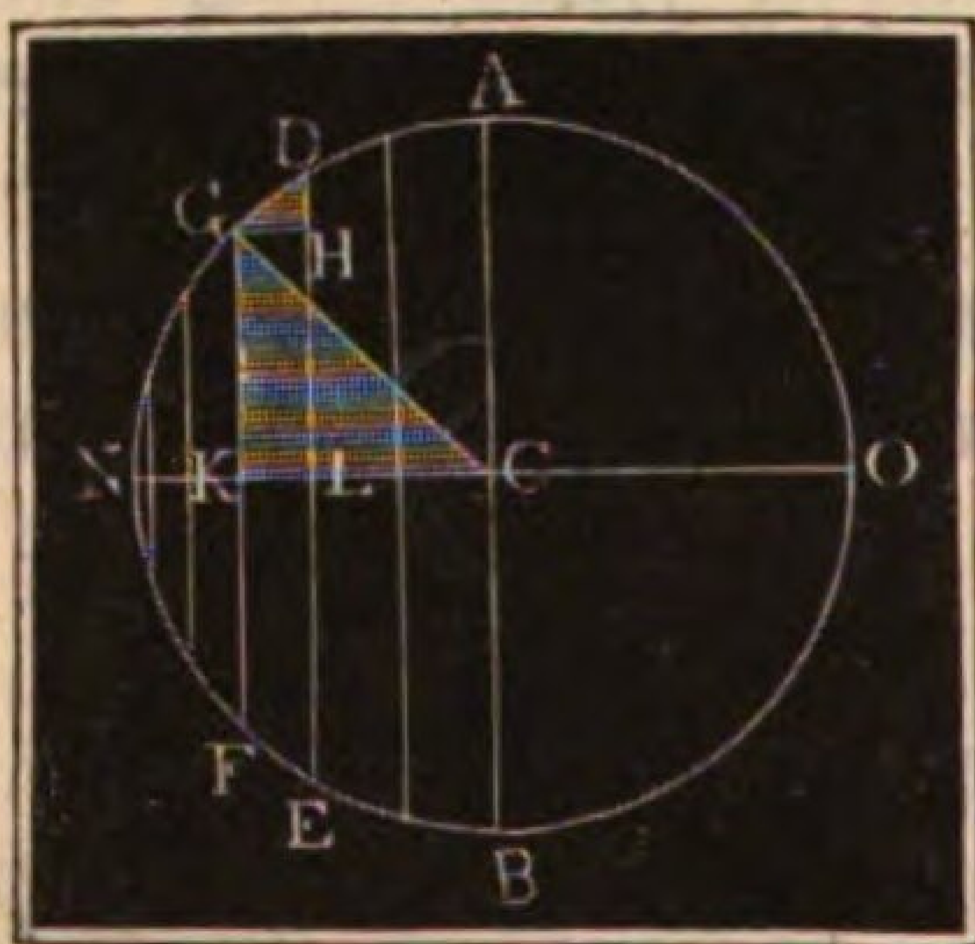


Es ist übrigens leicht einzusehen, daß die ho-

Hohle Balken. hen, ausgehöhlten und gefiederten Körper bei gleicher Masse ein größeres Biegungsmoment haben als die breiten, massiven Körper. Weil dieses Moment mit dem Querschnitte F und dem Quadrate (z^2) der Entfernung von der neutralen Axe wächst, so hat eine und dieselbe Faser um so mehr Widerstand gegen die Biegung, je entfernter sie von der neutralen Axe ist. Ist z. B. bei einem massiven parallelepipedischen Balken die Höhe $h =$ der doppelten Breite b, so fällt sein Biegungsmoment $W = \frac{b.(2b)^3}{12} = \frac{2}{3}\, b^4$ oder $= \frac{2b.b^3}{12} = \frac{1}{6}\, b^4$ aus, je nachdem man diesen Balken mit der kleinern Breite b oder mit der größern $2b$ auflegt; es ist also im ersten Falle das Biegungsmoment viermal so groß, als im zweiten Falle. Wenn man ferner den massiven Balken vom Querschnitte bh durch einen hohlen ersetzt, dessen Höhlung bh gleich ist dem massiven Theile, vom Querschnitte $b_1h_1 - bh$, wenn also $b_1h_1 - bh = bh$, d. i. $b_1h_1 = 2\,bh$, oder $b_1 = b\sqrt{2}$ und $h_1 = h\sqrt{2}$ ist, so erhält man für den letztern das Biegungsmoment $\frac{b_1h_1^3 - bh^3}{12} = \frac{b\sqrt{2}\,(h\sqrt{2})^3 - bh^3}{12} = \frac{3}{12}\, b\,h^3$, d. i. dreimal so groß als für den erstern.

Cylinder. §. 199. Das Biegungsmoment eines Cylinders bestimmt sich auf folgende Weise. Es sei $AOBN$, Fig. 269, der kreisförmige Querschnitt und NO die neutrale Axe des Cylinders. Da der Durchmesser AB diesen Querschnitt in zwei gleiche und gleiche Biegungsmomente besitzende Theile theilt, so findet man das Biegungsmoment des Ganzen durch Verdoppelung des Momentes der Hälfte ANB. Diese Hälfte läßt sich durch Schnitte DE, FG u. s. w. parallel zu AB und rechtwinklig auf NO in dünne, als Parallelepipede anzusehende Platten zertheilen. Das Biegungsmoment eines solchen Theiles $DEFG$ ist $= \frac{KL\,.\,\overline{DE}^3}{12}$. Bezeichnet nun r den Halbmesser $CA = CN$ des kreisförmigen Querschnittes, so hat ein Quadrant AN den Umfang $\frac{\pi r}{2}$, und theilt man diesen in n gleiche Theile, so mißt ein solcher Theil $DG = \frac{1}{n}.\frac{\pi r}{2} = \frac{\pi r}{2n}$. Diesem Theile entspricht die mit CN parallel laufende Projection $GH = KL$, welche sich bestimmt, indem man setzt: $GH : GD = GK : CG$, und die deshalb

Fig. 269.



$GH = \frac{GD.GK}{CG} = \frac{\pi}{2n}.GK$ ausfällt. Hiernach ist denn für das Biegungsmoment des Theiles $DEFG = \frac{\pi}{2n}.GK.\frac{(2GK)^3}{12} = \frac{\pi}{3n}(GK)^4$. Cylinder.

Setzen wir den veränderlichen und dem Schnitte GF entsprechenden Winkel $ACG = \varphi^0$, so erhalten wir die Ordinate $GK = r\ cos.\ \varphi$ und das letzte Biegungsmoment

$$= \frac{\pi}{3n} r^4 cos.\ \varphi^4 = \frac{\pi}{3n} r^4 \ . \ \frac{3 + 4 cos. 2\varphi + cos. 4\varphi}{8}.$$

Das Biegungsmoment des halben Cylinders ANB wird nun gefunden, wenn wir für φ nach und nach die Werthe $\frac{1}{n}.\frac{\pi}{2}, \frac{2}{n}.\frac{\pi}{2}, \frac{3}{n}.\frac{\pi}{2}$ u. s. w. bis $\frac{n}{n}.\frac{\pi}{2}$ einsetzen und die sich herausstellenden Ergebnisse addiren. Nun ist aber $\frac{\pi r^4}{3n}.\,{}^1\!/_8 = \frac{\pi r^4}{24n}$ ein gemeinschaftlicher Faktor, es handelt sich daher nur um die Summe von Werthen wie $3 + 4 cos. 2\varphi + cos. 4\varphi$. Die Zahl 3 $n$mal zu sich selbst addirt, giebt $3n$, alle Werthe von $cos.\ 2\ \varphi$, welche sich herausstellen, wenn man φ von Null nach und nach bis $\frac{\pi}{2}$, also $2\ \varphi$ von Null bis π wachsen läßt, geben zur Summe Null, weil die Cosinus im zweiten Quadranten gleich und entgegengesetzt sind den Cosinus im ersten Quadranten, auch ist endlich die Summe der Cosinus aller Winkel von 0 bis 2π = Null, daher bleibt die Summe aller Werthe von $3 + 4 cos.\ 2\varphi + cos. 4\varphi$ innerhalb der Grenzen $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{\pi}{2}$ genommen, $= 3n$, und es ist das Maaß des Biegungsmomentes vom halben Cylinder $= \frac{\pi r^4}{24n}.3n = \frac{\pi r^4}{8}$ und endlich das des ganzen Cylinders:

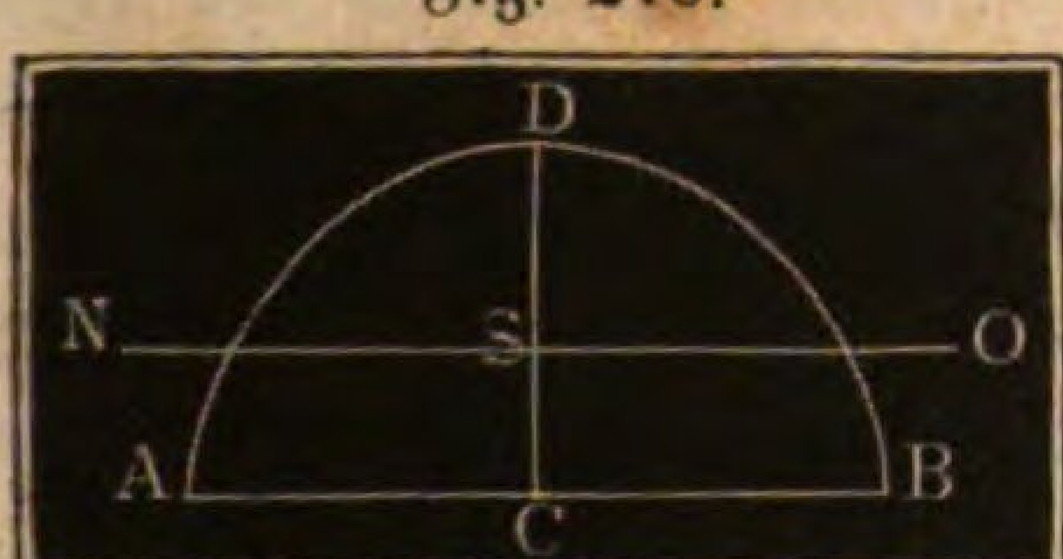
$$W = \frac{\pi}{4} r^4 = 0{,}7854\, r^4.$$

Für eine Röhre oder einen hohlen Cylinder mit dem äußeren Halbmesser r_1 und dem inneren Halbmesser r_2 ist

$$W = \frac{\pi}{4}(r_1{}^4 - r_2{}^4).$$

Um das Biegungsmoment eines Körpers mit halbkreisförmigem Querschnitte ADB, Fig. 270, zu finden, machen wir von der im §. 195 gefundenen Regel Gebrauch, wonach das Moment in Beziehung auf die durch den Schwerpunkt S gehende Axe NO gleich ist dem Momente in Beziehung auf den als zweite

Fig. 270.



Cylinder. Axe anzusehenden Durchmesser AB minus Querschnitt F ($= \frac{1}{2}\pi r^2$) mal Quadrat der Entfernung CS beider Axen. Diesem zufolge erhalten wir das gesuchte Moment $= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} r^4 - \frac{1}{2}\pi r^2 . \overline{CS}^2 = \frac{\pi r^4}{8} - \frac{1}{2}\pi r^2 . \left(\frac{4r}{3\pi}\right)^2$ (s. §. 108), d. i. $W_1 = \pi r^4 \left(\frac{1}{8} - \frac{8}{9\pi^2}\right) = 0{,}110 \, . \, r^4$.

Relative Festigkeit. §. 200. Kennt man das Biegungsmoment eines prismatischen Körpers, so läßt sich hieraus durch eine einfache Multiplication das **Tragvermögen** und die **Festigkeit** dieses Körpers bestimmen. Ist eine einzige Faser oder Faserschicht bis zur Elasticitätsgrenze ausgedehnt oder zusammengedrückt, so hat der Körper die Grenze seines Tragvermögens erreicht; bezeichnet man wieder den Tragmodul durch T und die Entfernung der entferntesten Faser von der neutralen Axe durch e, so hat man auch wieder $T = \frac{\lambda}{l} E$ und $\frac{\lambda}{l}$, oder die relative Längenausdehnung, $= \frac{e}{r}$, daher $\frac{E}{r} = \frac{T}{e}$. **Setzen wir also in der Formel für das Biegungsmoment statt $\frac{E}{r}, \frac{T}{e}$ ein, so giebt uns dieselbe das statische Moment der Tragkraft.** Es ist $Px = SW = \frac{EW}{r}$, also auch $Px = \frac{TW}{e}$. Man sieht, daß dieses Moment am größten ist, wenn der Hebelarm $x = l$ ausfällt, und folgert hieraus, daß an der Stelle, wo der Balken an einem Ende festgehalten wird, die größte Biegung vorhanden ist, und die Elasticitätsgrenze zuerst erreicht wird. Diesemnach bestimmt sich denn die **Tragkraft eines Balkens** durch die Formel

$$P = \frac{TW}{el}.$$

Ebenso bestimmt sich die **Festigkeit** oder die Kraft zum Abbrechen des Balkens. Ist eine Faser bis zum Zerreißen gespannt, so tritt auch das Abbrechen des ganzen Balkens ein, weil nun der Balken einen um den Faserquerschnitt kleineren Querschnitt erhält, deshalb eine größere Biegung eintritt, und nun auch ein Zerreißen der folgenden Faser oder Faserschichten nachfolgt. Ist wieder der Festigkeitsmodul $= K$, so bleibt auch $\frac{E}{r} = \frac{K}{e}$ und deshalb wieder die Kraft zum Abbrechen eines Balkens:

$$P = \frac{KW}{el}.$$

Bei einem massiven parallelepipedischen Balken ist die Entfernung der äußersten Faserschicht von der neutralen Axe $= \frac{h}{2}$, daher giebt die Formel

$Pl = \frac{E}{r} \cdot \frac{bh^3}{12}$ (§. 191) die Kraft zum Abbrechen Relative Festigkeit

$$P = \frac{2K}{h} \cdot \frac{bh^3}{12l} = \frac{bh^2}{6l} \cdot K.$$

Ist der Balken hohl, wie Fig. 266, so hat man $P = \frac{bh^3 - b_1 h_1^3}{6hl} \cdot K$, auch gilt diese Formel für einen an den Seiten ausgehöhlten Körper, wie Fig. 267.

Beim prismatischen Körper mit triangulärem Querschnitte, wie Fig. 264, ist $e = \frac{2}{3}h$, daher $P = \frac{K}{\frac{2}{3}h} \cdot \frac{bh^3}{36l} = \frac{bh^2}{24l} \cdot K$. Bei gleichem Querschnitte trägt hiernach der parallelepipedische Balken zweimal so viel als der trianguläre.

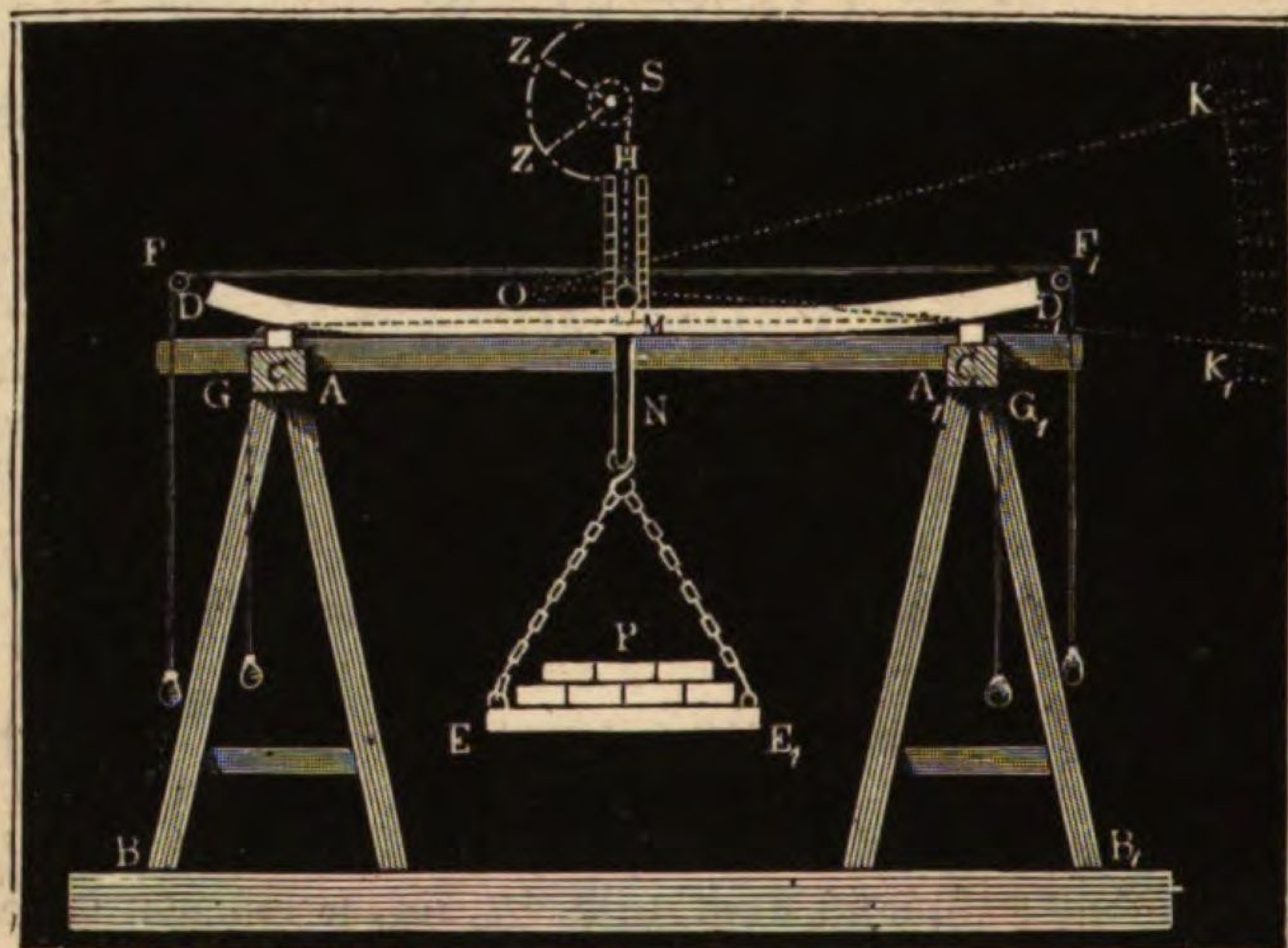
Für einen Cylinder vom Halbmesser r ist $e = r$, daher $Pl = \frac{K}{r} \cdot \frac{\pi}{4} r^4 = \frac{\pi}{4} r^3 K$. Ist der Cylinder hohl, so hat man $Pl = \frac{\pi}{4} \left(\frac{r_1^4 - r_2^4}{r_1} \right) K$.

Vertauscht man den Festigkeitsmodul durch den Tragmodul T oder führt man für K einen aliquoten Theil, z. B. $\frac{1}{10}$ ein, so bestimmt sich durch die jetzt gefundenen Formeln auch die Tragkraft.

§. 201. Um die Biegung und Tragkraft der Balken zu finden, kann man die in §. 189 mitgetheilten Erfahrungswerthe für E und T benutzen; was aber die Festigkeit der Balken anlangt, so ist es sicherer, den dort angegebenen, durch Zerreißungsversuche gefundenen Festigkeitsmodul K durch diejenigen Werthe von K_1 zu ersetzen, welche bei Zerbrechungsversuchen gefunden worden sind. Daß zwischen diesen auf zweierlei Wegen gefundenen Moduln eine vollkommene Uebereinstimmung nicht stattfinden kann, liegt schon darin, daß beim Zerbrechen nicht nur ein Ausdehnen, sondern auch ein Comprimiren, und beides nicht allein in der Axenrichtung, sondern auch im Querschnitte, wenn auch hier nicht in so großem Maaße, stattfindet. Uebrigens wirken auf die Elasticität, Tragkraft und Festigkeit der Körper vielerlei Umstände ein, weshalb immer beträchtliche Abweichungen in den Ergebnissen sich herausstellen. So ist z. B. das Holz am Kerne und an der Wurzel stärker als am Splint und an dem Gipfel; auch trägt das Holz mehr, wenn die Kraft parallel zu den Jahresringen wirkt als winkelrecht darauf, endlich haben noch der Erdboden und die Lage des Ortes, wo das Holz gewachsen ist, Temperatur, Zustand der Trockenheit, Alter u. s. w. Einfluß auf den Widerstand der Hölzer. Uebrigens fällt die Biegung, welche ein Körper, nachdem er längere Zeit belastet gewesen ist, immer etwas größer aus, als die Biegung, welche gleich anfangs beim Auflegen der Last eintritt. Versuche.

Versuche. Die Versuche über die Elasticität und Festigkeit wurden von Eytelwein und von Gerstner mit einem in Fig. 271 abgebildeten Apparate

Fig. 271.



angestellt. AB und A_1B_1 sind zwei Rüstböcke, C und C_1 darauf befestigte Eisenlager, DD_1 der darüber liegende, zur Untersuchung bestimmte parallelepipedische Körper. Die Last P zum Biegen des Körpers liegt auf einer Waagschale EE_1, die an einem Bügel MN hängt, dessen oberer und abgerundeter Theil in der Mitte M des Balkens aufliegt. Um die einer Belastung P entsprechende Biegung a zu finden, wendete Eytelwein zwei feine Horizontalfäden FF_1 und GG_1, sowie eine in der Mitte auf dem Balken aufsitzende Scala MH an. Gerstner hingegen bediente sich eines langen einarmigen Fühlhebels OK, der nahe bei seinem Drehpunkte in M auflag und mit seinem Ende, wie der Zeiger einer Uhr, an einer vertikalen Scala KK_1 die Senkung von M verfünfzehnfacht angab. Lagerhjelm wendete einen Zeiger SZ an, der mittels eines Fadens MS und einer Rolle S in Bewegung gesetzt wurde, und die Biegung des Balkens auf einer eingetheilten Kreisscheibe vergrößert angab.

§. 202. Wenn man in der §. 196 entwickelten Formel

$$E = \frac{Pl^3}{48Wa} = \frac{Pl^3}{4abh^3}$$

für den Elasticitätsmodul eines parallelepipedischen Balkens die durch Biegungsversuche mittels des im vorigen Paragraphen beschriebenen Apparates gefundene Bogenhöhe a, die entsprechende Last P und die Dimensionen b, h und l des Balkens substituirt, so erhält man dadurch neue Werthe

für die Elasticitätsmodul. Bedient man sich bei diesen Versuchen nicht sehr dicker, sondern mehr langer und dünner Körper, und wendet man mäßige, nur kleine Biegungen hervorbringende Belastungen an, so findet zwischen diesen Werthen und denjenigen, welche die direkten Ausdehnungsversuche geben, eine ziemliche Uebereinstimmung Statt. So fand z. B. auf diesem Wege: Versuche.

Duleau für Schmiedeeisen: $E = 29'000000$ Pf.,

Tredgold, sowie auch Hodgkinson für Gußeisen: $E = 18'000000$ Pf.,

Barlow und andere für Holz im Mittel: $E = 1'500000$ Pf.

Werden aber die prismatischen Körper stärkeren Biegungen unterworfen, und wohl gar bis zum Zerbrechen gebogen, so stellt sich, zumal nach den neuesten Versuchen von Hodgkinson, ein großer Unterschied heraus. Der Grund dieser Abweichung liegt aber darin, daß bei dem Biegen nicht eine bloße Ausdehnung der Fasern vorkommt, sondern ein Theil des Körpers ausgedehnt und ein Theil comprimirt wird. Wenn daher bei größeren Formveränderungen der Widerstand gegen die Ausdehnung ein anderer ist, als der gegen die Zusammendrückung, also der ersteren Veränderung ein anderer Elasticitätsmodul zukommt als der letzteren, so muß der durch die Biegungsversuche erhaltene Elasticitätsmodul ein Mittel von den jener Module, und daher von dem Modul der einfachen Ausdehnung verschieden sein. Es hat sich ergeben, daß Holz der Ausdehnung mehr widersteht als der Zusammendrückung, und daß bei Steinen und beim Gußeisen das Gegentheil Statt hat. Die Versuche mit prismatischen Körpern von T förmigen Querschnitten, wie sie zumal von Hodgkinson angestellt worden sind, geben hierbei das beste Anhalten. Da beim Auflegen eines solchen Körpers auf zwei Stützen und beim Belasten desselben in der Mitte, der untere Theil desselben ausgedehnt und der obere zusammengedrückt wird, so folgt, daß das Holz bei dieser Lage (T), dagegen das Gußeisen bei dieser Lage (⊥) des Querschnittes den verhältnißmäßig größern Widerstand leistet. So fand z. B. Hodgkinson, daß ein solcher Gußeisenbarren in der letzteren Lage viermal so viel Kraft zum Zerbrechen erforderte als in der ersteren.

Anmerkung. Es ist anzunehmen, daß eine Abweichung zwischen den Elasticitätsmoduln der Ausdehnung und Zusammendrückung eintritt, und daher die neutrale Axe aus dem Schwerpunkte herauszutreten anfängt, wenn die Verlängerung oder Verkürzung beträgt:

für Holz, nach Ardant: 0,00117,
für Schmiedeeisen, nach Duleau: 0,0006,
für Gußeisen, nach Hodgkinson: 0,0003.

§. 203. Folgende Tabelle enthält die Mittelwerthe der Brechungsmodul K_1 für einige in der Technik am häufigsten vorkommenden Körper. Um mit Hilfe derselben die Kräfte zu finden, welche Körper auf längere Modul der relativen Festigkeit.

Modul der relativen Festigkeit. Dauer mit Sicherheit tragen können, hat man für Holz den zehnten und für Metalle und Steine den dritten bis vierten Theil von K_1 einzusetzen. Für Maschinentheile, welche einer immerwährenden Bewegung ausgesetzt sind, hat man noch mehr Sicherheit nöthig, und daher K_1 noch kleiner anzunehmen.

Tabelle II.

Die Brechungsmodul oder Festigkeitsmodul bei Biegung der Körper.

Namen der Körper.	Brechungs-modul K.	Namen der Körper.	Brechungs-modul K.
Buchenholz . . .	10000 bis 24000	Ulmenholz . . .	6000 bis 12000
Eichenholz . . .	8000 „ 24000	Gußeisen . . .	24000 „ 56000
Fichtenholz . . .	8000 „ 13000	Kalkstein . . .	700 „ 1700
Kiefernholz . . .	7000 „ 17000	Sandstein . . .	600 „ 800
Tannenholz . . .	7000 „ 14000	Ziegelstein . . .	180 „ 340

Hiernach kann man für Holz im Mittel $K = 12000$ und für Gußeisen $K = 40000$ Pfund annehmen und bekommt so für den an einem Ende eingemauerten und am andern Ende belasteten parallelepipedischen Balken:

1) $Pl = 200 \cdot bh^2$, wenn derselbe aus Holz besteht und zehnfache Sicherheit angenommen,
2) $Pl = 1700 \cdot bh^2$, wenn derselbe aus Gußeisen besteht und vierfache Sicherheit vorausgesetzt wird

Ist der Körper cylindrisch, so hat man für Holz

3) $Pl = 950\, r^3$, und für Gußeisen
4) $Pl = 8000\, r^3$.

P, l, b, h und r haben die seither gebrauchten Bedeutungen.

Für Schmiedeeisen nimmt man K_1 20 Procent kleiner an, weil sich dieses mehr biegt als Gußeisen; es ist deshalb hier $Pl = 1400\, bh^2 = 6400 \cdot r^3$ zu setzen.

Ist die Last Q gleichförmig auf den Balken vertheilt, so trägt der Balken noch einmal so viel, weshalb die obigen Coefficienten zu verdoppeln sind. Ruht der Balken an den Enden oder in Stützpunkten auf, deren Entfernung l ist, und wirkt die Last P in der Mitte zwischen diesen Punkten, so ist statt P, $\frac{P}{2}$ und statt l, $\frac{l}{2}$ einzusetzen, weshalb Pl in $\frac{Pl}{4}$ übergeht und die Tragkraft die vierfache wird. Ist aber die Last Q zwischen den Stützpunkten auf den Balken gleichförmig vertheilt, so hat

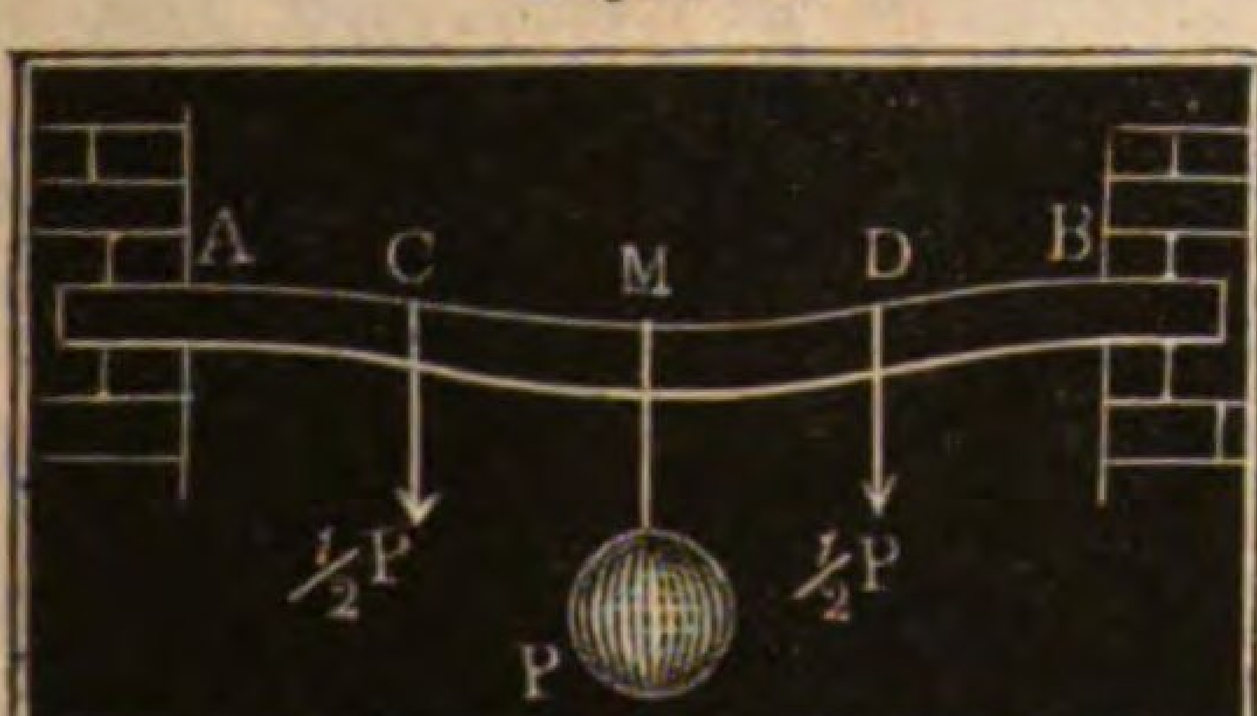
man für die Kraft $\frac{Q}{2}$, welche in einem Stützpunkte von unten nach oben wirkt, das Moment $\frac{Q}{2} \cdot \frac{l}{2}$ und für die Gegenkraft $-\frac{Q}{2}$, als die in ihrem Schwerpunkte niederziehende Hälfte der Last, das Moment $-\frac{Q}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} = -\frac{Ql}{8}$; es bleibt daher als Kraft zum Brechen in der Mitte das Moment $\frac{Ql}{4} - \frac{Ql}{8} = \frac{Ql}{8}$, und es ist deshalb Modul der relativen Festigkeit.

$Ql = 8 \cdot \frac{bh^2}{6} K$ auch $= 8 \cdot \frac{\pi}{4} br^3 K$, also die Festigkeit oder Tragkraft doppelt so groß, als wenn die Last in der Mitte wirkt, und 8mal so groß, als wenn sie an einem Ende niederzieht, während das andere Ende festgehalten wird.

Beispiele. 1) Ein parallelepipedischer Balken aus Fichtenholz von 7 Zoll Dicke und 9 Zoll Höhe soll mit beiden Enden aufruhen, so daß die Entfernung der Stützpunkte 20 Fuß beträgt. Welche in der Mitte aufzuhängende Last kann derselbe tragen? Es ist $b = 7$, $h = 9$, $l = 20$ Fuß $= 240$ Zoll, daher $240 \cdot P = 4 \cdot 200 \cdot 7 \cdot 9^2$, folglich diese Last $P = 70 \cdot 27 = 1890$ Pf. 2) Eine runde hölzerne Wasserradwelle von 10 Fuß Länge soll in dem Rade sammt eigenem Gewichte die ziemlich gleichförmig vertheilte Last $Q = 10000$ Pf. tragen. Wie stark muß dieselbe ausgewählt werden? Es ist $Ql = 10000 \cdot 120 = 1200000$, $= 8 \cdot 950 \cdot r^3$, oder $r^3 = \frac{1200000}{8 \cdot 950} = 157{,}9$, daher ist der gesuchte Halbmesser $r = \sqrt[3]{157{,}9} = 5{,}4$ Zoll und die Wellenstärke $2r = 10{,}8$ Zoll, wofür 1 Fuß angenommen werden kann.

§. 204. Ist ein Balken AB, Fig. 272, mit den Enden eingemauert, oder werden die Enden desselben festgehalten, so trägt der Balken noch einmal so viel, als wenn er in den Endpunkten frei aufliegt, denn in diesem Falle ist die größte Biegung nicht nur in der Mitte, sondern auch in den Enden, es zerbricht deshalb der Balken in der Mitte und an den Enden zugleich, während in den Zwischenpunkten C und D, wo Convexität in Concavität übergeht, gar keine Biegung eintritt. Es ist folglich für ein Stück AC die Kraft $= \frac{P}{2}$, der Hebelarm $= \frac{l}{4}$ und das Moment $= \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{Pl}{8}$. Ist endlich auch in diesem letzten Falle die Last Q gleichförmig auf den Balken ver-

Fig. 272.



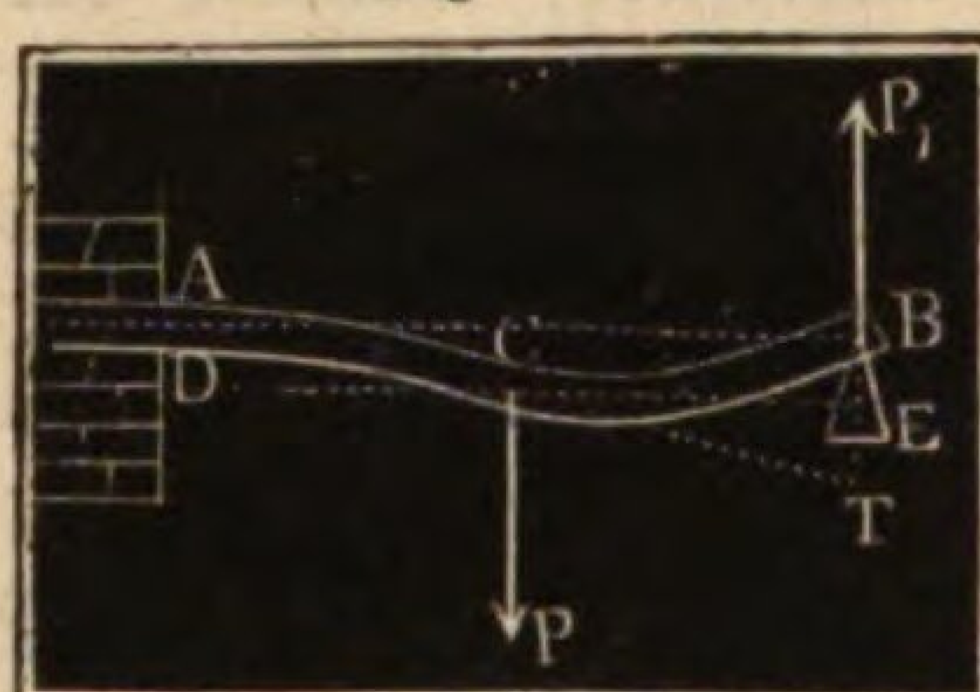
Modul der relativen Festigkeit.

theilt, so stellt sich das Moment $\frac{Ql}{16}$ heraus, weil sich annehmen läßt, daß die eine Hälfte von Q von den Stützpunkten unmittelbar aufgenommen wird, und nur die andere Hälfte in der Mitte von Q wirkt.

Das Gewicht G eines Balkens wirkt genau so, wie eine auf den Balken gleichförmig vertheilte Last Q; für einen mit einem Ende befestigten Balken ist daher das Kraftmoment $= Pl + \frac{1}{2} Gl$; für einen an beiden Enden aufliegenden und in der Mitte belasteten Balken ist es aber $= \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} + \frac{G}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{G}{2} \cdot \frac{l}{4} = (P + \frac{1}{2} G) \frac{l}{4}$, u. s. w.

*) Ist der Balken AB, Fig. 273, nur an einem Ende A eingemauert, während er am anderen Ende B frei aufliegt, so bildet seine neutrale Axe eine elastische Linie, welche bei A horizontal, in der Mitte, wo das Gewicht P hängt, abwärts, und am Ende B aufwärts läuft. Um denjenigen Theil P_1 von P zu finden, welchen die Stütze E aufnimmt, setzen wir die Bogenhöhe BT der zweiten Hälfte CB des Balkens gleich der Bogenhöhe $AD = BE$ der ersten Hälfte AC plus der Tangentenhöhe oder Vertikalprojection TE der Tangente CT. Nach §. 192 ist, wenn man die ganze Balkenlänge $= l$, also $CA = CB = \frac{1}{2} l$ setzt,

Fig. 273.



$$BT = \frac{P_1 l^3}{24 WE}.$$

Der Tangentenwinkel $TCE = \alpha$ ergiebt sich aus der bekannten Grundgleichung $Mr = WE$, oder einfacher $M dx = - WE d\alpha$ sehr leicht, wenn man für das Moment M die Summe $Px - P_1 \left(\frac{l}{2} + x\right)$ substituirt. Es folgt dann

$$\left[Px - P_1 \left(\frac{l}{2} + x\right)\right] dx = - WE d\alpha,$$

und daher durch Integriren:

$$\frac{Px^2}{2} - P_1 \left(\frac{lx}{2} + \frac{x^2}{2}\right) = Con. - WE\alpha.$$

Da für $x = \frac{1}{2} l$, $\alpha = 0$ ist, so folgt $Con. = \frac{Pl^2}{8} - \frac{3 P l_1^2}{8}$, und

$$\frac{P}{2} \left(\frac{l^2}{4} - x^2\right) - \frac{P_1}{2} (\frac{3}{4} l^2 - lx - x^2) = WE\alpha.$$

Nimmt man $x = 0$, so erhält man für den Tangentenwinkel α des Mittelpunktes C:

$$\frac{Pl^2}{8} - \frac{3P_1l^2}{8} = WE\alpha, \text{ also}$$

Tragkraft der Balken.

$$\alpha = \frac{Pl^2 - 3P_1l^2}{8WE};$$

und hieraus ergiebt sich die Vertikalprojection der Tangente CT:

$$ET = CT \, . \, \alpha = \tfrac{1}{2} l\alpha = \frac{(P-3P_1)l^3}{16WE}.$$

Für eine Ordinate des Bogenstückes AC hat man

$$dy = \alpha dx = \frac{P(\frac{1}{4}l^2 - x^2) - P_1(\frac{3}{4}l^2 - lx - x^2)}{2WE} dx, \text{ oder}$$

$$y = \frac{P(\frac{1}{4}l^2x - \frac{1}{3}x^3) - P_1(\frac{3}{4}l^2x - \frac{1}{2}lx^2 - \frac{1}{3}x^3)}{2WE};$$

nimmt man $x = \frac{1}{2}l$, so folgt daher die Bogenhöhe

$$BE = AD = \frac{(P - \frac{5}{2}P_1)l^3}{24WE}.$$

Endlich diese Werthe für BT, ET und BE in die Formel

$$BT = BE + ET \text{ eingesetzt,}$$

so erhält man die Gleichung

$$\frac{P_1}{24} = \frac{P - \frac{5}{2}P_1}{24} + \frac{P - 3P_1}{16}, \text{ oder}$$

$$2P_1 = 2P - 5P_1 + 3P - 9P_1, \text{ d. i. } 16P_1 = 5P,$$

und sonach ist der Druck im Stützpunkte B:

$$P_1 = \tfrac{5}{16}P,$$

d. i. $\frac{5}{16}$ der in der Mitte wirkenden Last. Für das Abbrechen in C hat man nun das Moment $\frac{1}{2}P_1l = \frac{5}{32}Pl$, dagegen für das in A:

$$\tfrac{1}{2}Pl - P_1l = \tfrac{1}{2}Pl - \tfrac{5}{16}Pl = \tfrac{3}{16}Pl = \tfrac{6}{32}Pl.$$

Da dieser Werth der kleinere ist, so wird demnach ein Zerbrechen in A eher eintreten als in der Mitte. Wäre B frei und hinge die Last P an diesem Ende B, so würde das Moment zum Abbrechen $= Pl = \frac{32}{32}Pl$, d. i. $\frac{32}{6} = \frac{16}{3}$mal so groß sein. Es trägt also hiernach der Balken in dem behandelten Falle $\frac{3}{16}$mal so viel, als wenn er an einem Ende befestigt ist, oder $4 \, . \, \frac{3}{16} = \frac{3}{4}$mal so viel, als wenn er an beiden Enden aufhängt.

Beispiel. Wie hoch läßt sich in einem Getreidemagazine das Korn aufschütten, wenn der Boden auf Balken von 25 Fuß Länge, 10 Zoll Breite und 12 Zoll Höhe ruht, die Entfernung zwischen den Axen von je zwei Balken = 3 Fuß beträgt und 1 Cubikfuß Kornmasse 48,5 Pfund wiegt? Wenden wir die Formel $Ql = 16.200.bh^2$ an, so müssen wir setzen: $b = 10$, $h = 12$, $l = 25.12 = 300$, folglich $Q = \frac{16 \, . \, 200 \, . \, 10 \, . \, 144}{300} = 15360$ Pfund. Nun wiegt aber ein Parallelepiped von 25 Fuß Länge, 3 Fuß Breite und x Fuß Höhe $= 25 \, . \, 3 \, . \, x \, . \, 48{,}5$ Pf.; setzen wir daher diesen Werth $= Q$, so folgt $x = \frac{15360}{75 \, . \, 48{,}5} = 4{,}22$ Fuß die fragliche Höhe der Aufschüttung.

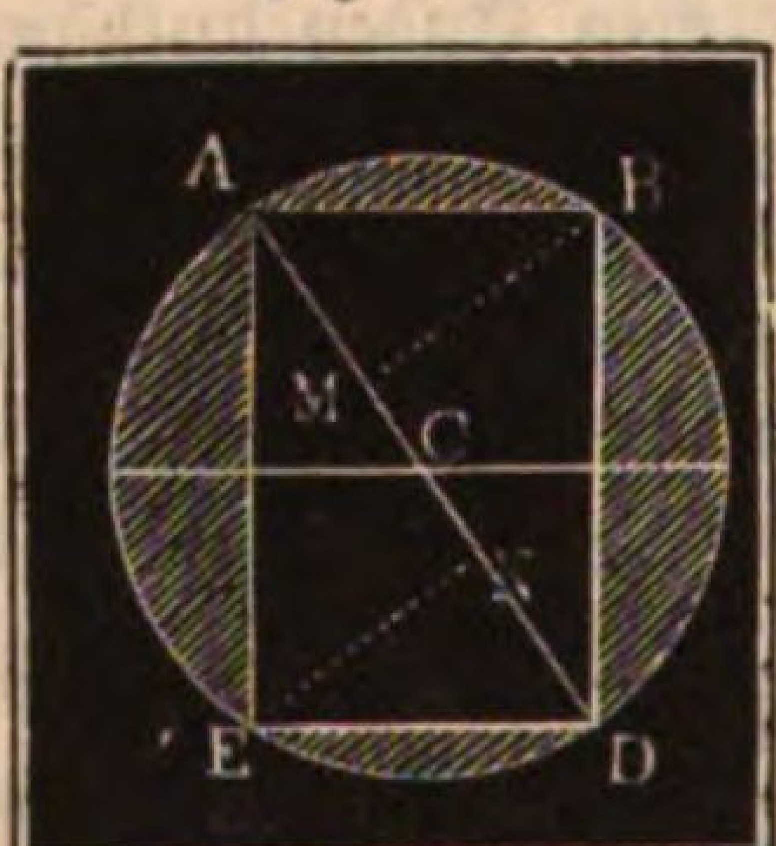
Stärkster Balken.

§. 205. Körper von gleichem Querschnitte haben oft sehr verschiedene relative Festigkeiten, die Formel $Pl = \frac{K}{6} \cdot bh^2$ zeigt, daß die Festigkeit wie die Breite, wie das Quadrat der Höhe und umgekehrt wie die Länge des Balkens wächst. Hiernach hat also die Höhe einen viel größeren Einfluß auf die Haltbarkeit als die Breite; der doppelt so breite Balken trägt doppelt, d. i. so viel, wie zwei einfache Balken, der doppelt so hohe Balken hingegen trägt das Vierfache des einfach hohen Balkens. Aus diesem Grunde macht man die Balken, namentlich, wenn sie aus Eisen gegossen werden, viel höher als breit, höhlt sie in der Nähe der Mitte aus und ersetzt das Ausgenommene durch Theile in größerer Entfernung von der neutralen Axe, besonders aber ist die Regel zu befolgen, die Balken stets mit der schmalen Seite aufzulegen, oder vielmehr so zu legen, daß die Kraft in der Richtung der längeren Seite wirkt.

Die Festigkeit des runden Stammes oder eines andern cylindrischen Körpers ist $P = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{r^3}{l} K$, die eines quadratischen mit gleicher Breite $2r$ und Höhe $2r$, $= P_1 = \frac{2r \cdot (2r)^2}{l} \cdot \frac{K}{6} = \frac{4}{3} \cdot \frac{r^3}{l} K$; vergleicht man beide Kräfte mit einander, so ergiebt sich $\frac{P}{P_1} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{3}{4} = 0{,}588$; es hat also der cylindrische Körper circa nur 59 Procent Festigkeit gegen den ihn einschließenden Balken mit quadratischem Querschnitte. Die hölzernen Balken werden aus runden Baumstämmen gehauen oder geschnitten und eben dadurch geschwächt. Es ist nun aber die Frage: welcher ist von allen Balken, die sich aus dem cylindrischen Stamme hauen lassen, der haltbarste?

Es sei $ABDE$, Fig. 274, der Querschnitt des Stammes, $AD = d$ der Durchmesser desselben, ferner $AB = DE = b$ die Breite und $AE = BD = h$ die Höhe des Balkens. Dann ist $b^2 + h^2 = d^2$, oder $h^2 = d^2 - b^2$, und das Brechungsmoment $Pl = \frac{K}{6} \cdot bh^2 = \frac{K}{6} b (d^2 - b^2)$. Es kommt nun darauf an, $b (d^2 - b^2) = bd^2 - b^3$ so groß wie möglich zu machen. Setzen wir statt b, $b \pm x$, wo x sehr klein ist, so bekommen wir für den letzten

Fig. 274.



Ausdruck $(b \pm x) d^2 - (b \pm x)^3 = bd^2 - b^3 \pm (d^2 - 3b^2) x - 3bx^2$, insofern wir x^3 vernachlässigen, und die Differenz beider $= \mp (d^2 - 3b^2) x + 3bx^2$.

Damit der erste Werth $b d^2 - b^3$ in jedem Falle größer ausfällt als der letzte, muß die Differenz $\mp (d^2 - 3b^2)x + 3bx^2$ positiv sein, man mag b um x größer oder um x kleiner nehmen. Dies ist aber nur möglich, wenn $d^2 - 3b^2 = 0$ wird, denn dann ist die Differenz $= 3bx^2$, also positiv, wogegen, wenn $d^2 - 3b^2$ ein positiver oder negativer reeller Werth ist, $3bx^2$ vernachlässigt werden kann, und jene Differenz $= \mp (d^2 - 3b^2)x$, d. i. mit x gleichbezeichnet, also bald negativ, bald positiv ausfällt. Setzen wir aber $d^2 - 3b^2 = 0$, so bekommen wir die gesuchte Breite $b = d\sqrt{1/3}$ und die entsprechende Höhe $h = \sqrt{d^2 - b^2} = d\sqrt{2/3}$; also das Verhältniß der Höhe zur Breite: $\frac{h}{b} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1}} = 1{,}414$ oder ungefähr wie $7/5$. Stärkster Balken.

Man soll also den Baumstamm so zimmern, daß ein Balken hervorgeht, dessen Höhe zur Breite sich wie 7 zu 5 verhält. Um den der größten Festigkeit entsprechenden Querschnitt zu finden, theilen wir den Durchmesser AD in drei gleiche Theile, errichten in den Theilpunkten M und N Perpendikel MB und NE, und verbinden die sich ergebenden Durchschnittspunkte B und E im Kreise mit den Endpunkten A und D durch gerade Linien. $ABDE$ ist endlich der Querschnitt des größten Widerstandes, denn da $AM : AB = AB : AD$ und $AN : AE = AE : AD$, so ist $AB = b = \sqrt{AM \,.\, AD} = \sqrt{1/3\, d \,.\, d} = d\sqrt{1/3}$ und $AE = h = \sqrt{AN \,.\, AD} = \sqrt{2/3\, d \,.\, d} = d\sqrt{2/3}$, also $\frac{h}{b} = \frac{\sqrt{2}}{1}$, wie auch wirklich verlangt wird.

Anmerkung. Der Baumstamm hat das Brechungsmoment $Pl = \frac{\pi K}{4} \,.\, r^3$, der daraus gezimmerte Balken von größtem Widerstande aber $Pl = \frac{K}{6}\, d\sqrt{1/3} \,.\, 2/3\, d^2 = \frac{K}{\sqrt{243}} \,.\, d^3 = \frac{8K}{\sqrt{243}} r^3$, es verliert folglich der Stamm durch das Beschlagen um $1 - \frac{8}{\sqrt{243}} \,.\, \frac{4}{\pi} = 1 - 0{,}65 = 0{,}35$, d. i. 35 Procent von seiner Festigkeit. Um diesen Verlust zu mäßigen, behaut man den Stamm oft nicht ganz vierkantig, sondern läßt ihn noch mit abgestumpften Kanten. Ein aus demselben Stamme gezimmerter Balken mit quadratischem Querschnitte hat das Moment $Pl = \frac{K}{6} \,.\, d\sqrt{1/2} \,.\, \frac{d^2}{2}$, weil hier Breite = Höhe = $d\sqrt{1/2} = 0{,}707\, d$ ist, daher fällt hier jener Verlust gar $= 1 - \frac{8}{6 \,.\, 2\sqrt{2}} \,.\, \frac{4}{\pi} = 1 - \frac{8}{3\pi\sqrt{2}} = 1 - 0{,}60 = 0{,}40$, d. i. 40 Procent aus.

§. 206. Sehr häufig werden Körper mit inneren oder äußeren Höhlungen oder mit Rippen oder Federn angewendet, um an Material zu Hohle und elliptische Balken.

Hohle und elliptische Balken.

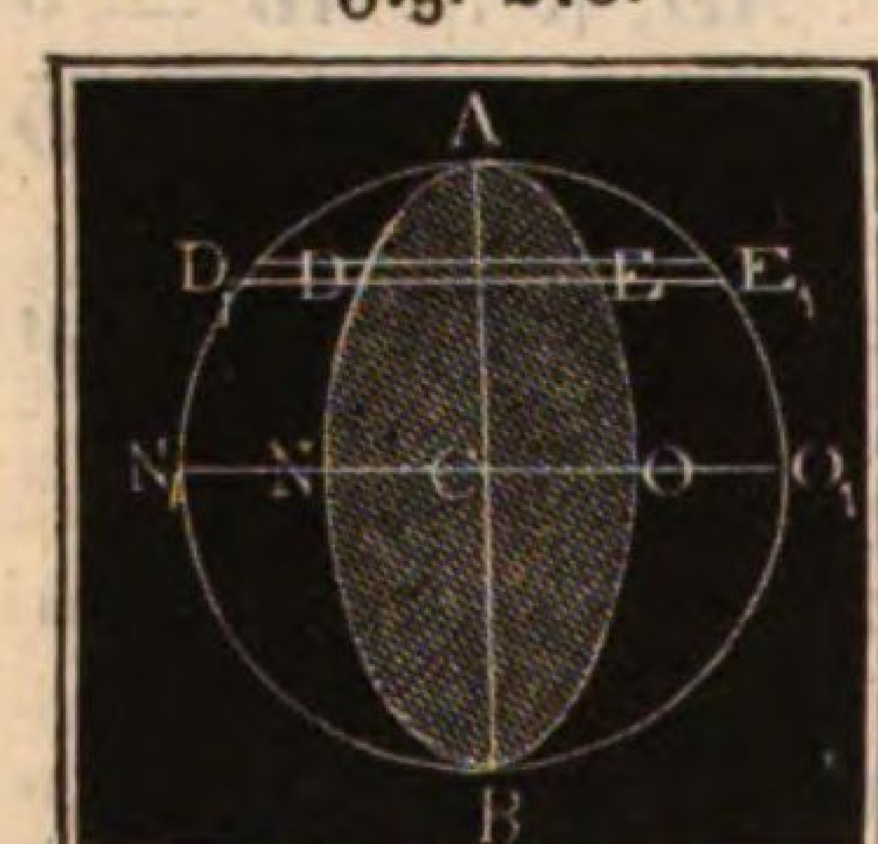
ersparen oder, was am Ende auf eins hinauskommt, um an Festigkeit zu gewinnen. Für einen hohlen parallelepipedischen Balken aus Eisen ist $P = 1700 \, . \, \frac{bh^3 - b_1 h_1^3}{lh}$, mag die Höhlung von der Höhe h_1 und Breite b_1 im Innern oder äußerlich an den Seiten angebracht sein. Für den hohlen cylindrischen Körper ist $P = 8000 \, . \, \frac{r_1^4 - r_2^4}{l r_1}$. Gewöhnlich macht man in solchen Fällen die Dicke des massiven Theiles $r_1 - r_2 = {}^2/_5$ des äußeren Halbmessers r_1, weshalb folgt:

$$P = 8000 \, . \, \frac{r_1^4 - (0{,}6 r_1)^4}{l r_1} = 8000 \, . \, \frac{0{,}8704 r_1^3}{l} = 6963 \, \frac{r_1^3}{l}.$$

Ein gleich schwerer massiver Cylinder hat den Halbmesser $r = \sqrt{r_1^2 - r_2^2} = \sqrt{r_1^2 - 0{,}36 r_1^2} = 0{,}8 r_1$; daher ist sein Widerstandsmoment $= 8000 \, . \, (0{,}8\, r)^3 = 4096\, r^3$, um beinahe 41 Procent kleiner als das des hohlen Cylinders.

Man gewinnt auch an Festigkeit, wenn man statt der Cylinder prismatische Körper mit elliptischen Querschnitten anwendet und dabei die große Axe aufrecht oder parallel zur Kraftrichtung stellt. Denkt man sich um diesen elliptischen Querschnitt $AOBN$, Fig. 275, einen Kreis AO_1BN_1 gelegt, dessen Halbmesser der großen Halbaxe $CA = CB = a$ ist, so läßt sich der Festigkeitswiderstand des Körpers mit elliptischem Querschnitte einfach aus dem mit kreisförmigem Querschnitte berechnen. Die Länge eines jeden Elementes DE der Ellipse parallel zur kleinen Axe $NO = 2b$ ist stets $\frac{b}{a}$ der Länge des Kreiselementes D_1E_1; nun sind aber die Elasticität und Festigkeit dieser Dimension einfach proportional, es verhält sich also auch die Festigkeit des Ellipsenelementes zu der des Kreiselementes, wie b zu a, und es ist endlich die Festigkeit für die ganze Ellipse $= \frac{b}{a}$ mal Festigkeit des ganzen Kreises, d. i.

Fig. 275.



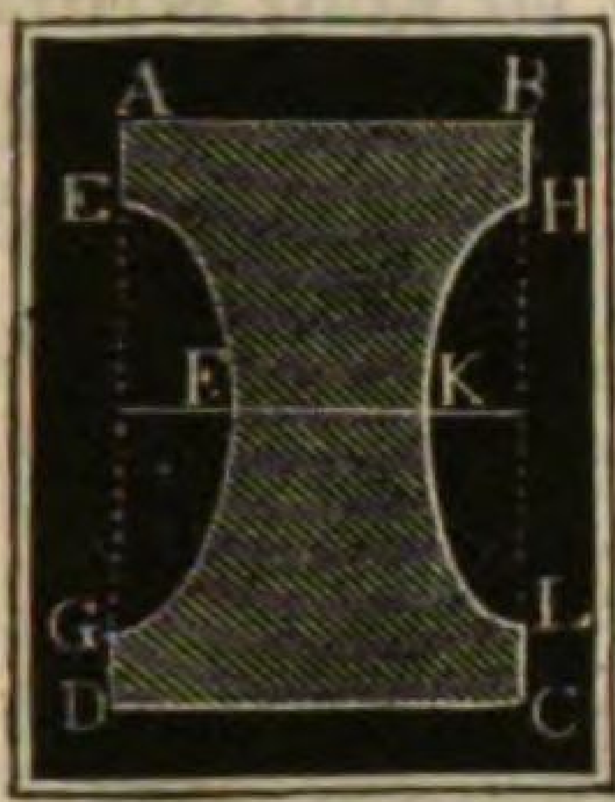
$$Pl = \frac{\pi}{4} \, . \, \frac{b}{a} \, . \, a^3 K = \frac{\pi}{4} \, b\, a^2 K, \text{ für Gußeisen } = 8000\, a^2 b.$$

Ist nun noch eine elliptische Höhlung mit den Halbaxen a_1 und b_1 vorhanden, so bleibt

$$Pl = \frac{\pi}{4} \, . \, \frac{b a^3 - b_1 a_1^3}{a} \, K, \text{ für Gußeisen}$$

$$= 8000 \, . \, \frac{a^3 b - a_1^3 b_1}{a}.$$

Fig. 276.



Hohle und elliptische Balken.

Ist endlich ein Körper mit rectangulärem Querprofile $ABCD = bh$, Fig. 276, in den Flanken durch halbe Ellipsen, wie EFG, HKL ausgenommen, und sind die Halbaxen dieser halben Ellipsen $= a_1$ und b_1, so hat man

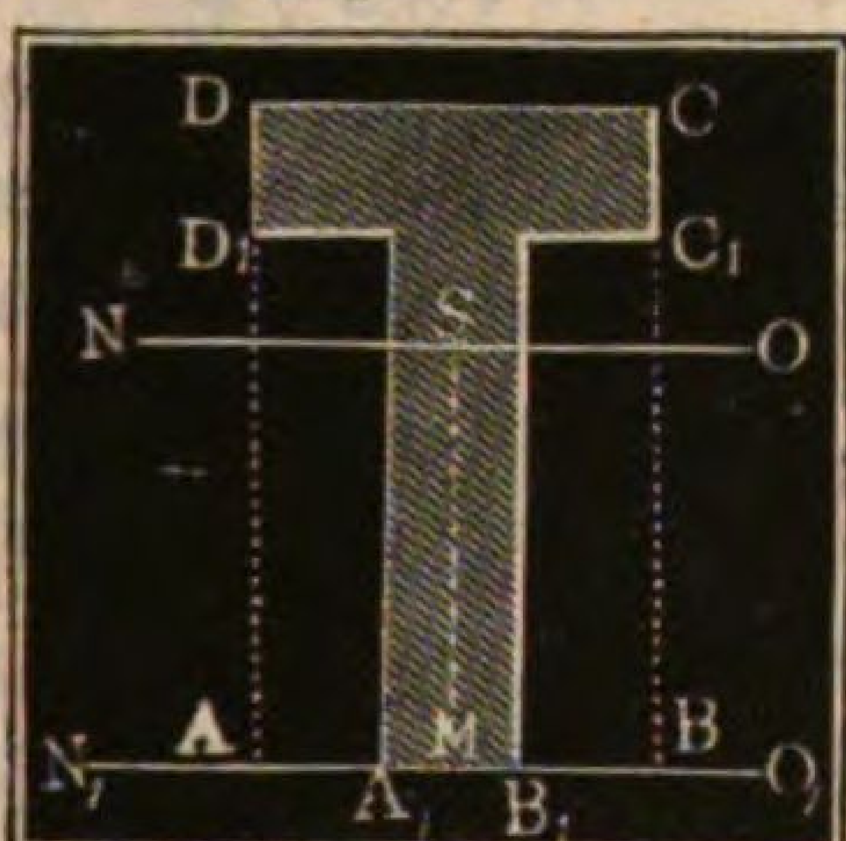
$$Pl = bh^2\frac{K}{6} - \frac{\pi b_1 a_1^3}{4h}K = \frac{2bh^3 - 3\pi b_1 a_1^3}{12h} \cdot K,$$

für Gußeisen

$$Pl = 1700 \cdot \frac{bh^3 - 4{,}712\, a_1^3 b_1}{h}.$$

Beispiele. 1) Ein Tragbalken aus Eichenholz von 9 Zoll Breite und 11 Zoll Höhe, welcher seither hinreichende Tragkraft gewährt hat, soll durch einen hohlen gußeisernen Balken von 5 Zoll äußerer Breite und 10 Zoll Höhe ersetzt werden, von welcher Eisenstärke wird man denselben gießen lassen müssen? Setzt man die doppelte Stärke $= x$, so hat man die Breite der Höhlung $= 5 - x$, und die Höhe derselben $10 - x$, folglich ist für den hohlen Balken $b_1 h_1^3 - b_2 h_2^3 = 5 \cdot 10^3 - (5-x)(10-x)^3 = 2500\, x - 450\, x^2 + 35\, x^3 - x^4$. Da für den massiven hölzernen Balken das Widerstandsmoment $= 200 \cdot 9 \cdot 11^2 = 217800$ ist, so hat man zu setzen: $\frac{1700}{10}(2500\, x - 450\, x^2 + 35\, x^3 - x^4) = 217800$, oder $2500\, x - 450\, x^2 + 35\, x^3 - x^4 = 1281$. Zunächst ist annähernd $x = \frac{1281}{2500} = 0{,}5$ Zoll. Dieser Werth giebt aber $450 \cdot x^2 = 450 \cdot 0{,}25 = 112{,}5$; $35\, x^3 = 4{,}4$, $x^4 = 0{,}1$; daher läßt sich setzen:
$x = \frac{1281 + 112{,}5 - 4{,}4 + 0{,}1}{2500} = \frac{1389{,}2}{2500} = 0{,}56$ Zoll, also die gesuchte Eisendicke $\frac{x}{2} = 0{,}28$ Zoll. 2) Wenn bei einer Tförmigen Schiene aus Gußeisen die Breite $AB = CD = b$ gleich der Höhe h und die Dicke $A_1 B_1 = CC_1 = \frac{1}{5}b$, also $b_1 = \frac{4}{5}b$ und $h_1 = \frac{4}{5}h$ ist, so hat man für deren Widerstandsmoment (§. 197):

Fig. 277.



$$Pl = \frac{K}{12} \cdot \frac{(bh^2 - b_1 h_1^2)^2 - 4\, bhb_1 h_1 (h - h_1)^2}{(bh - b_1 h_1)e},$$ oder

$$e = \frac{1}{2} \cdot \frac{bh^2 - b_1 h_1^2}{bh - b_1 h_1}$$ substituirt,

$$Pl = \frac{K}{6} \cdot \frac{(bh^2 - b_1 h_1^2)^2 - 4bb_1 hh_1 (h - h_1)^2}{bh^2 - b_1 h_1^2} =$$

$$1000 \cdot \frac{(b^3 - 0{,}512\, b^3)^2 - 4 \cdot 0{,}64\, b^4 \cdot (b - 0{,}8\, b)^2}{b^3 - 0{,}512\, b^2} =$$

$$1700 \cdot \frac{0{,}2381 - 2{,}56 \cdot 0{,}04}{0{,}488} \cdot b^3 = \frac{230{,}5}{0{,}488} \cdot b^3 = 472 \cdot b^3.$$

Sollte nun eine solche Schiene bei einer Länge von 4 Fuß mit beiden Enden aufruhen und in der Mitte eine Last von 7400 Pf. tragen, so wäre $Pl = 7400 \cdot 4 \cdot 12 = 355200$ und daher $4 \cdot 472\, b^3 = 355200$ zu setzen, woraus denn die äußere Höhe und Breite $b = h = \sqrt[3]{\frac{355200}{1888}} = 5{,}73$ Zoll und die Eisendicke $\frac{1}{5}\, b = 1{,}15$ Zoll sich ergäbe. Diese Dimensionen sind nur mittlere, bei der Stellnng (T) müssen sie reichlich, bei der Stellung (⊥) aber knapp genommen werden (vergl. §. 202).

Schiefer Druck.

§. 207. Wir haben seither angenommen, daß der Balken, welcher dem Biegen oder Brechen ausgesetzt ist, horizontal liege, und die Kraft vertikal wirke; es ist jedoch leicht zu ermessen, daß die gefundenen Regeln und Formeln auch in allen den Fällen gültig sind, wenn der Balken *AB*, Fig. 278, eine geneigte Lage gegen den Horizont hat, und die Kraft *P*

Fig. 278.

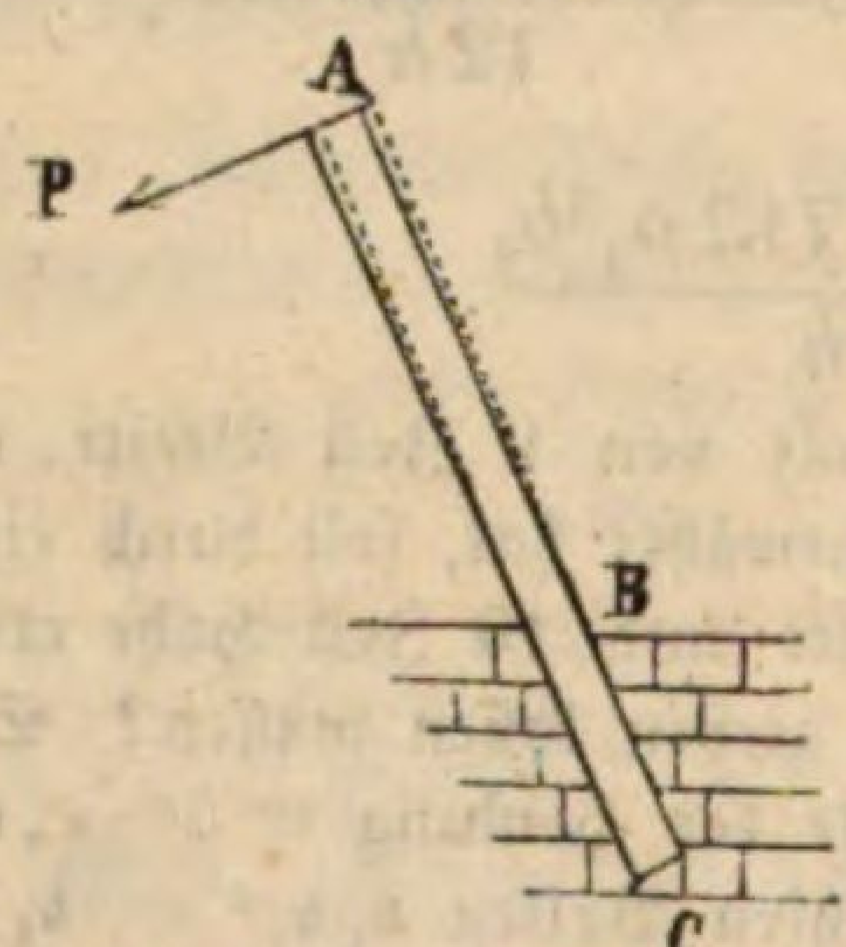
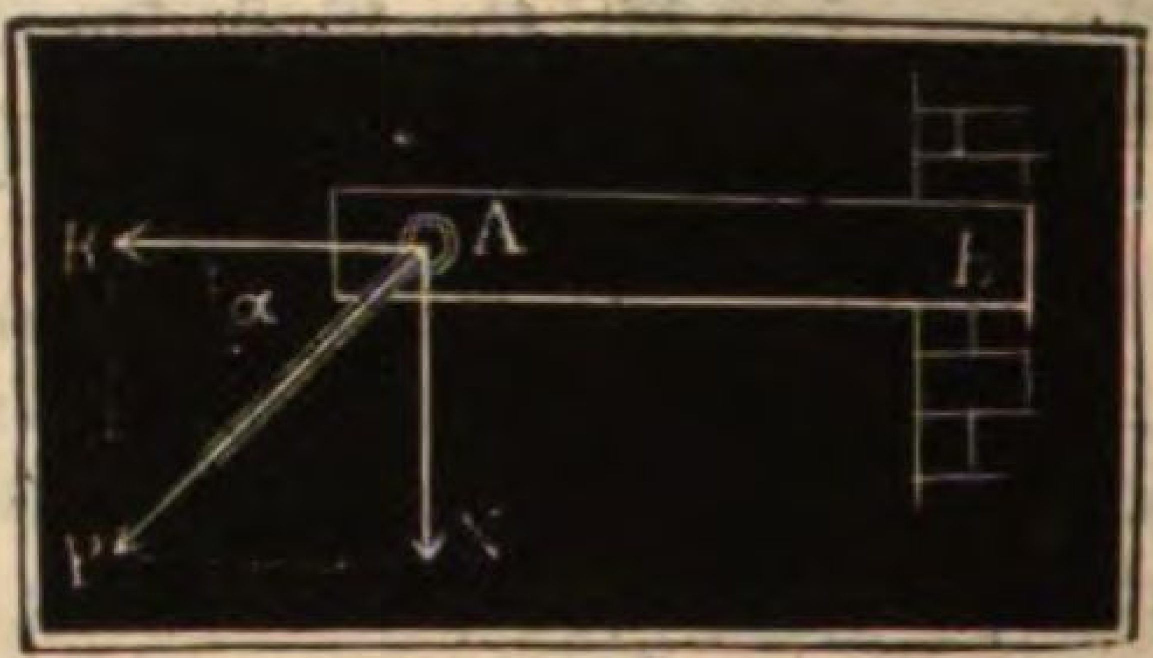
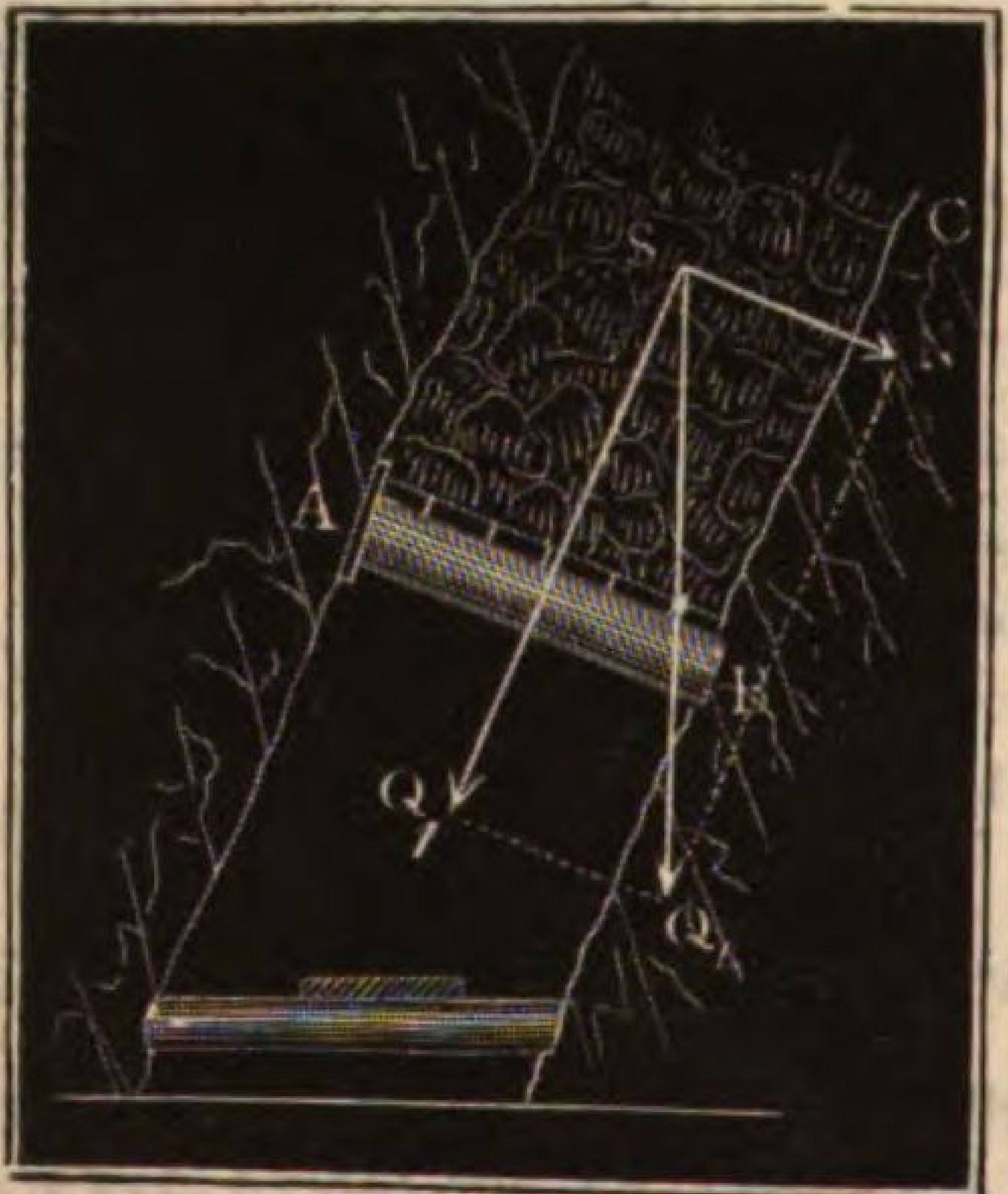


Fig. 279.



winkelrecht gegen seine Axe wirkt. Ganz anders ist das Verhältniß dagegen, wenn die Kraft *P*, Fig. 279, den Balken *AB* schief zieht; hier hat man es mit der weiter unten zu behandelnden zusammengesetzten Festigkeit zu thun, da aus *P* zwei Seitenkräfte *N* und *R* hervorgehen, wovon die eine eine Biegung und die andere eine bloße Ausdehnung verursacht. Wird eine der beiden Seitenkräfte von einem andern Körper aufgenommen, so bleibt natürlich die Theorie der einfachen Festigkeit ebenfalls in Anwendung. Trägt z. B. der schiefstehende Stempel *AB*, Fig. 280, die über ihm aufgeschüttete Last Q, so zerlegt sich diese in die Seitenkräfte Q_1 und N, und es ist bei einer Neigung α des Stempels gegen den Horizont, die Kraft Q_1, welche der Stempel aufnimmt $= Q \,.\, cos.\alpha$ und die Kraft N, welche die Seitenwand (das Liegende) *BC* aufnimmt $= Q\, sin.\, \alpha$. Mit Berücksichtigung der Reibung ist

Fig. 280.



$$Q_1 = Q \,.\, (cos.\alpha - \varphi\, sin.\alpha)$$

und daher bei einem runden Stempel:

$$Q\,(cos.\alpha - \varphi\, sin.\alpha) = 8 \,.\, \frac{950\, r^3}{l},$$

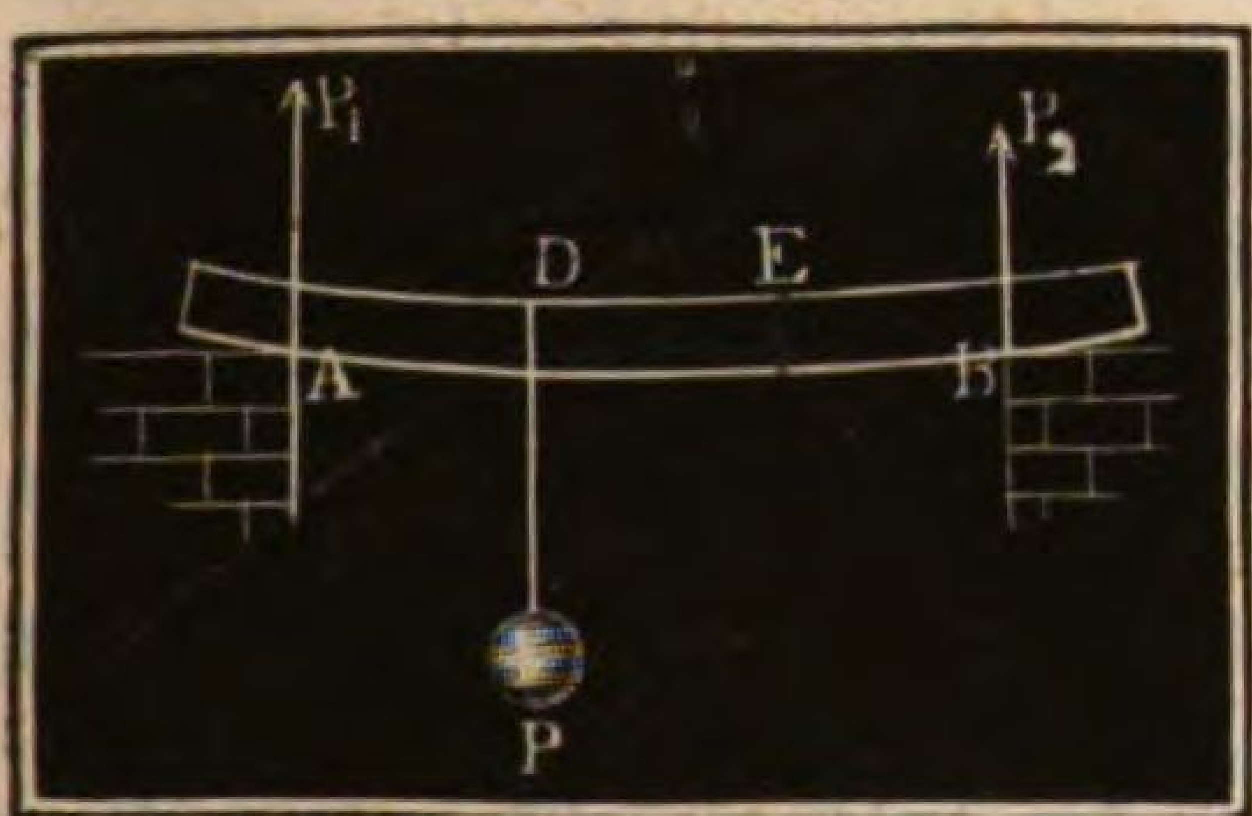
wenn r den Halbmesser und l die Länge des Stempels bezeichnet.

Beispiel. In welcher Entfernung von einander müssen die 10 Zoll starken Tragstempel eines Förstenbaues *ASB*, Fig. 280, von einander gelegt werden, wenn derselbe $4\frac{1}{2}$ Fuß weit ist und sich 60 Fuß auf einem 70 Grad fallenden Gange in die Höhe zieht, das Gewicht eines Cubikfußes der abzuhaltenden Berge

65 Pf. beträgt, der Coefficient der Reibung auf dem Liegenden aber $\frac{1}{3}$ angenommen wird? Die gesuchte Entfernung zweier Stempel $= x$ Fuß gesetzt, ergiebt sich das über einem Stempel ruhende Gewicht $= 4{,}5 \cdot 60 \cdot 65\, x = 17550 . x$ Pf., und der Theorie der schiefen Ebene zufolge hat hiervon der Stempel nur die Kraft $Q_1 = (sin. 70^0 - \frac{1}{3} cos. 70) . 17550\, x = (0{,}9397 - 0{,}1140) . 17550\, x = 0{,}8257 . 17550\, x = 14492\, x$ Pf. aufzunehmen. Der Stempel trägt aber $8 . 950 . \frac{r^3}{l} = 8 . \frac{950 . 5^3}{54} = 17592$, es ist daher zu setzen: $14492\, x = 17592$, und $x = \frac{17592}{14492} = 1{,}214$ Fuß $= 14{,}6$ Zoll. Man wird also hier zwischen je zwei Stempeln nur 4,6 Zoll Zwischenraum lassen dürfen. Schiefer Druck.

§. 208. **Wirkt die Kraft P auf einen mit seinen Enden A und B aufliegenden Balken, Fig. 281, nicht in der Mitte, sondern steht der Angriffspunkt D um die Abstände $DA = l_1$ und $DB = l_2$ von den Stützpunkten ab, so besitzt der Balken eine größere Tragkraft.** Belastung außerhalb der Mitte.

Fig. 281.

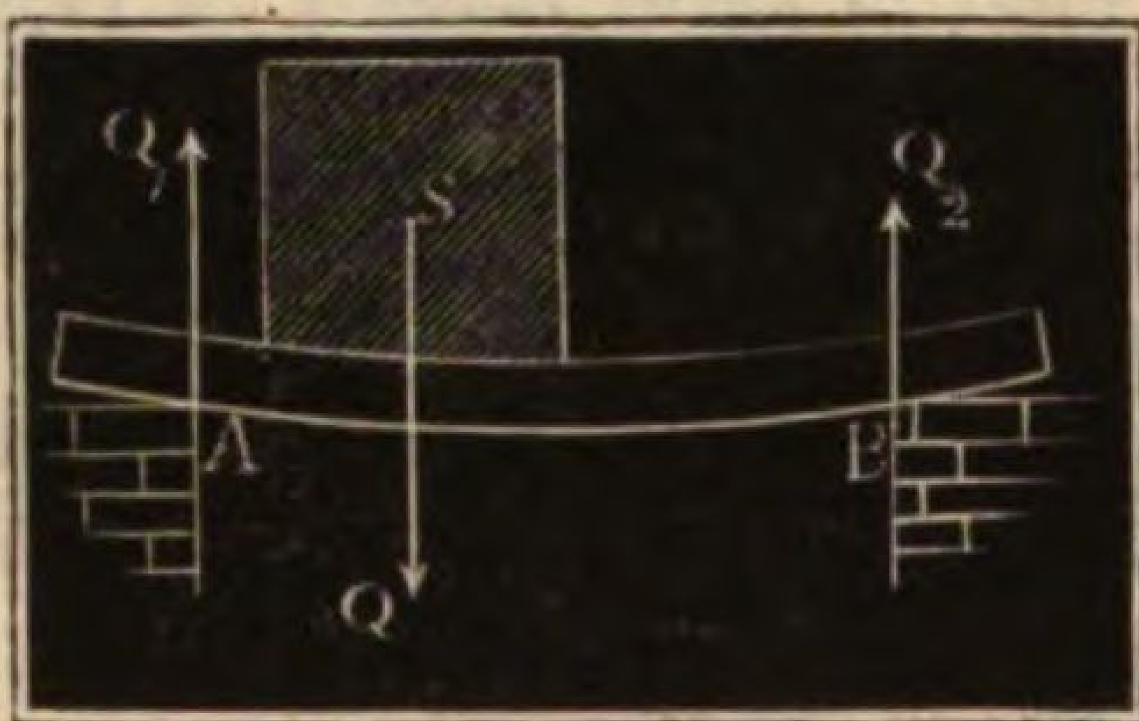


Der Gleichheit gewisser statischer Momente zufolge trägt der Stützpunkt A die Kraft $P_1 = \frac{l_2}{l_1 + l_2} P$, und der Stützpunkt B: $P_2 = \frac{l_1}{l_1 + l_2} P$, es ist daher das statische Moment zum Abbrechen in dem Angriffspunkte D, $= DA . P_1 = DB . P_2 = \frac{l_1 l_2 P}{l_1 + l_2}$. Für jeden andern Punkt E ist aber dieses Moment $EB.P_1$ kleiner, weil der Hebelarm EB kleiner als der Hebelarm $DB = l_2$ ist; es findet daher auch in D die größte Biegung statt und es tritt der Bruch in diesem Punkte zuerst ein. Diesemnach setzen wir $\frac{P l_1 l_2}{l_1 + l_2} = \frac{KW}{e}$, oder, die ganze Länge $l_1 + l_2$ mit l bezeichnet, $\frac{P l_1 l_2}{l} = \frac{K}{6} . bh^2$, wenn der Balken parallelepipedisch geformt ist. Die Kraft $P = \frac{K}{6} \cdot \frac{l}{l_1 l_2} . bh^2$ ist übrigens $=$ Unendlich, wenn l_1 oder $l_2 =$ nahe Null ist; wird aber um so kleiner, je mehr sich l_1 und l_2 einander gleichkommen; ist endlich $l_1 = l_2$, d. h. wirkt die Kraft P in der Mitte des Balkens, so ist P ein Minimum, weil, wenn man $l_1 = \frac{l}{2} + x$ und $l_2 = \frac{l}{2} - x$ setzt, das den Nenner bildende Product $l_1 l_2 = \frac{l^2}{4} - x^2$ stets kleiner ausfällt, als $\frac{l^2}{4}$, man mag $\frac{l}{2}$ um etwas (x) größer oder kleiner annehmen.

Belastung außerhalb der Mitte. Es trägt also ein an den Enden unterstützter Balken in der Mitte am wenigsten, und immer mehr und mehr, je näher die Last einem der Stützpunkte kommt.

Ist eine Last Q über die Länge c gleichmäßig vertheilt, während die Mitte dieser um l_1 und l_2 von den Stützpunkten A und B, Fig. 282, absteht, so hat man als Brechungsmoment die Differenz $\frac{Q l_1 l_2}{l} - \frac{Q}{2} \cdot \frac{c}{4}$ anzunehmen, weil die Kraft $Q_1 = \frac{Q l_2}{l}$ am Hebelarm l_1 und ihr entgegen das halbe Gewicht $\frac{Q}{2}$ am Hebelarm $\frac{c}{4}$ wirkt. Es ist also

Fig. 282.



$$Q\left(\frac{l_1 l_2}{l} - \frac{c}{8}\right) = \frac{K}{6} \cdot b h^2 \text{ zu setzen.}$$

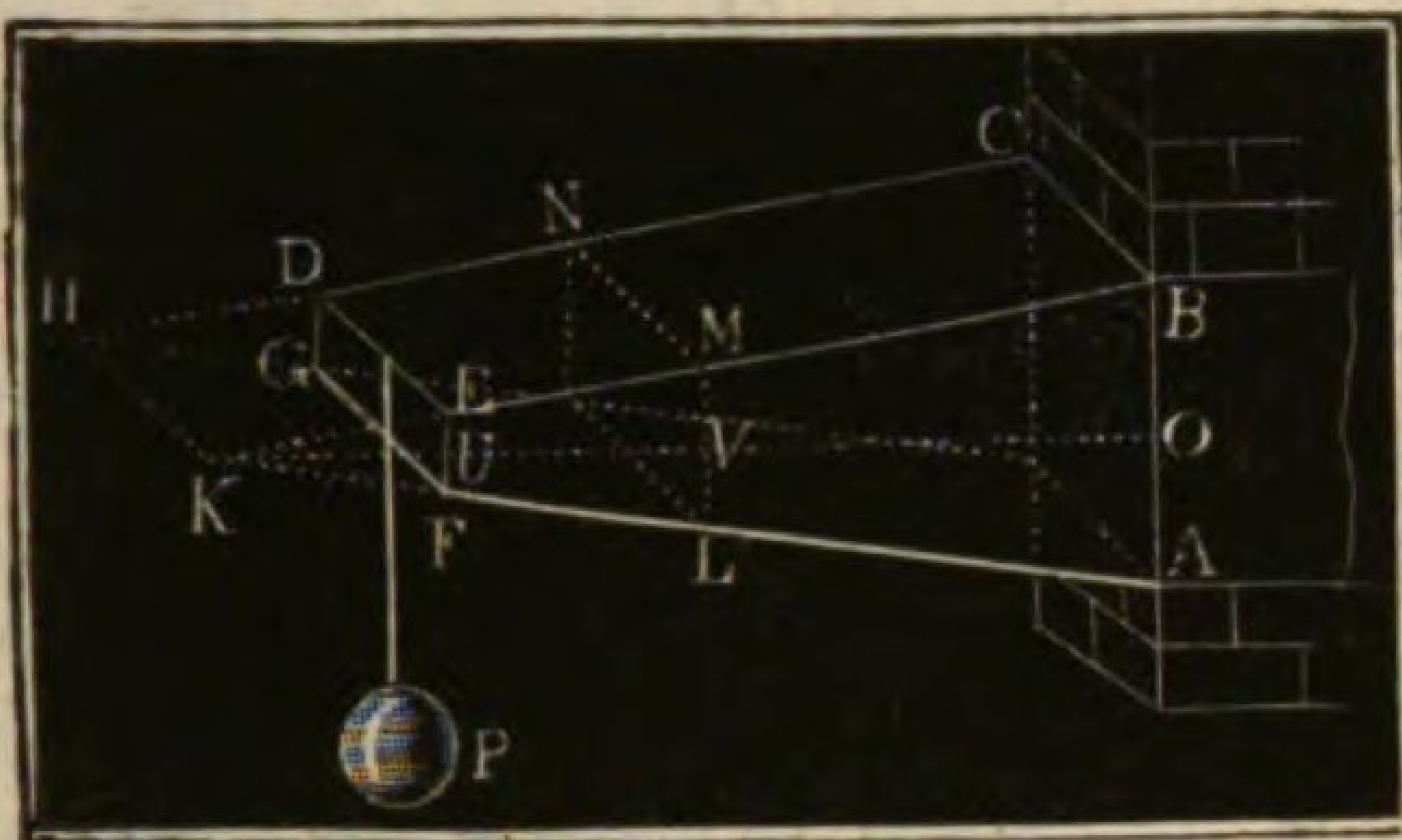
Beispiel. Welche Last trägt ein hohler Balken aus Gußeisen, wenn dessen äußere Höhe und Breite 8 Zoll und 4 Zoll und innere Höhe und Weite 6 Zoll und 2 Zoll beträgt, wenn ferner die Mitte der auf 3 Fuß Länge gleichförmig vertheilten Last vom einen Stützpunkt 4 und vom andern 2 Fuß absteht? Es ist $\frac{b_1 h_1^3 - b_2 h_2^3}{h_1} = \frac{4 \cdot 512 - 2 \cdot 216}{8} = 202$, ferner $\frac{l_1 l_2}{l} - \frac{c}{8} = \left(\frac{4 \cdot 2}{6} - \frac{3}{8}\right) \cdot 12 = {}^{23}/_{2}$ Zoll, daher zu setzen: ${}^{23}/_{2}\, Q = 1700 \cdot 202$ und folglich $Q = 29860$ Pf.

Brechungsebene. §. 209. Sind die Tragbalken nicht prismatisch geformt, haben sie also an verschiedenen Stellen verschiedene Querschnitte, so ist die **Brechungsebene**, d. h. die Ebene, in welcher der Bruch erfolgt, nicht mehr dieselbe, wie bei einem prismatischen Körper: weil diese Stelle nicht allein vom Hebelarme x, sondern auch vom Querschnitte abhängig ist. Setzen wir einen rectangulären Querschnitt von der veränderlichen Breite w und Höhe z voraus; nehmen wir an, daß der Balken an einem Ende festgehalten und am andern Ende von einer Kraft P ergriffen wird, und setzen wir den Abstand des Querschnittes wz von dem Kraftende $= x$, so ist $P = \frac{K}{6} \cdot \frac{w z^2}{x}$ zu setzen, und der Minimalwerth von $\frac{w z^2}{x}$ zu ermitteln, um die schwächste Stelle oder Brechungsebene des Balkens zu finden.

Es können hier sehr verschiedene Fälle vorkommen; betrachten wir indessen nur folgenden. Der Körper $ABEG$, Fig. 283 (a. f. S.), sei ein abgestumpfter Keil oder habe die Form eines Prismas mit trapezoidaler Basis. Setzen wir die Breite $DE = FG = b$, die Höhe $EF = DG$

am Ende $= h$ und die Entfernung UK der abgeschnittenen Kante HK von der Endfläche EG, $= c$. Nehmen wir nun an, daß die Brechungsebene NL um $UV = x$ von der Endfläche abstehe, so erhalten wir für dieselbe die Höhe Brechungsebene.

Fig. 283.



$ML = z = h + \frac{x}{c}h$

$= h\left(1 + \frac{x}{c}\right)$, während die unveränderliche Breite $MN = w = b$ ist. Der Werth $\frac{w z^2}{x} = \frac{bh^2}{x}\left(1 + \frac{x}{c}\right)^2$ $= bh^2\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{c} + \frac{x}{c^2}\right)$ nimmt mit $\frac{1}{x} + \frac{x}{c^2}$ gleichzeitig zu und ab, ist also auch ein Minimum, wenn es der letzte Werth ist. Setzen wir aber in diesem statt x, $c + u$, wo u eine kleine Zahl bedeutet, so bekommen wir für ihn $\frac{1}{c+u} + \frac{c+u}{c^2} = \frac{1}{c\left(1+\frac{u}{c}\right)} + \frac{1}{c} + \frac{u}{c^2}$ $= \frac{1}{c}\left(2 - \frac{u}{c} + \frac{u^2}{c^2} - \ldots\right) + \frac{u}{c^2} = \frac{2}{c} + \frac{u^2}{c^3}$. Da nun in diesem letzten Ausdrucke u nur im Quadrat vorkommt, so folgt, daß jeder andere Werth, den man erhält, wenn man die Entfernung x größer oder kleiner als c annimmt, mehr giebt, als $x = c$, daß folglich für $x = c$, $\frac{1}{x} + \frac{x}{c^2}$, und also auch $\frac{w z^2}{x} = bh^2\left(\frac{1}{c} + \frac{2}{c} + \frac{1}{c}\right) = \frac{4bh^2}{c}$ ein Minimum ist. Es folgt hiernach die Größe der Brechungsfläche $= b.2h$ $= 2bh$, und es steht dieselbe von der Endfläche $EG = bh$ ebenso viel ab als die Kante HK des abgeschnittenen Stückes.

Auf ähnliche Weise findet man für eine abgekürzte Pyramide oder einen abgekürzten Kegel den Abstand der Brechungsebene von der Endfläche gleich der halben Höhe der Ergänzungspyramide oder des Ergänzungskegels.

§. 210. Ein Körper, welcher in allen Querschnitten dem Zerbrechen einerlei Widerstand entgegensetzt, von dem also jeder Querschnitt als Brechungsebene angesehen werden kann, heißt ein **Körper von gleichem Widerstande** (franz. corps d'égale résistance, engl. body of the strongest form). Unter allen Körpern von gleicher Festigkeit hat der Körper von gleichem Widerstande die kleinste Menge an Materie, ist deshalb auch der zweckmäßigste und derjenige, welchen man bei den Con- Körper von gleichem Widerstande.

Körper von gleichem Widerstande. structionen der Architektur und des Maschinenwesens auswählen sollte, nicht nur aus Oekonomie, sondern auch, um Belastungen nicht unnöthig zu vergrößern.

Setzen wir den Abstand einer Brechungsebene von dem äußeren Ende $= x$ und das Maaß des Biegungsmomentes für jenen Querschnitt $= W$, so haben wir die Kraft zum Abbrechen $P = \frac{WK}{ex}$. Da K ein constanter Factor ist, so muß bei einem Körper von gleichem Widerstande $\frac{W}{ex}$ constant, d. h. für alle mögliche Querschnitte ein und derselbe Werth sein. Ist für einen Balken mit rectangulärem Querschnitte die veränderliche Breite $= u$ und Höhe $= v$; die Breite am Anfange aber $= b$ und die Höhe daselbst $= h$, so hat man überhaupt $W = \frac{u v^3}{12}$ und $e = \frac{v}{2}$, daher $P = \frac{u v^2}{x} \cdot \frac{K}{6}$ und für den Anfangspunkt, für welchen x in l übergegangen ist, $P = \frac{b h^2}{l} \cdot \frac{K}{6}$. Setzt man diese beiden Werthe für P einander gleich, so erhält man die Gleichung $\frac{u v^2}{x} = \frac{b h^2}{l}$ für den Körper von gleichem Widerstande. Bei einem Körper mit gleicher Breite $u = b$ ist $\frac{v^2}{x} = \frac{h^2}{l}$, daher $\frac{v^2}{h^2} = \frac{x}{l}$, welche Proportion nur der Parabel zukommt (§. 35, Anmerkung) und nachweis't, daß das Längenprofil ABE, Fig. 284, eines solchen Körpers die Form einer Parabel haben muß, deren Scheitel der End- oder Aufhängepunkt E der Last ist. Ruht der Balken AB, Fig. 285, in seinen Enden auf und trägt eine Last P in der Mitte C, oder wird ein Balken AB, Fig. 286, in der

Fig. 284.

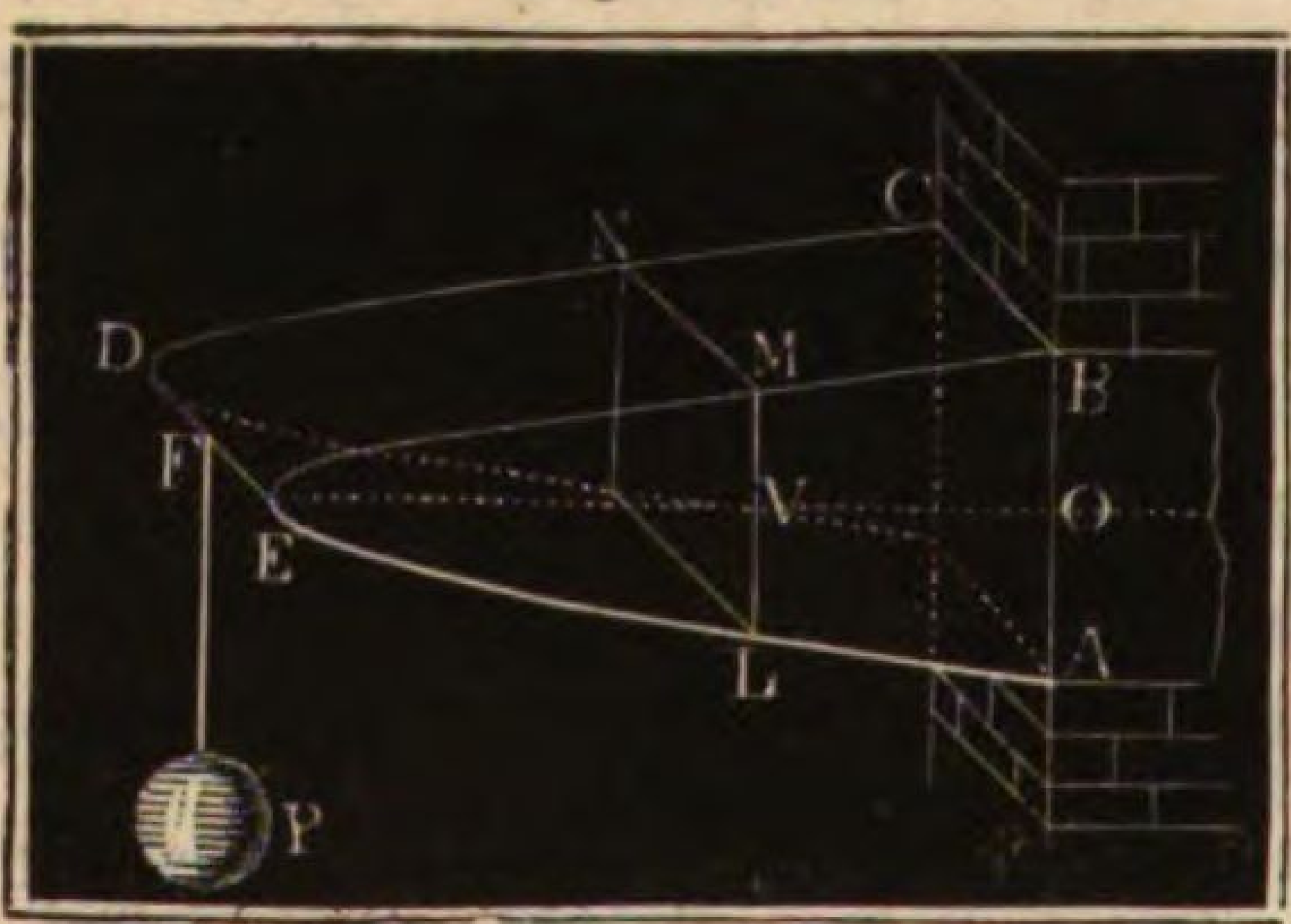


Fig. 285.

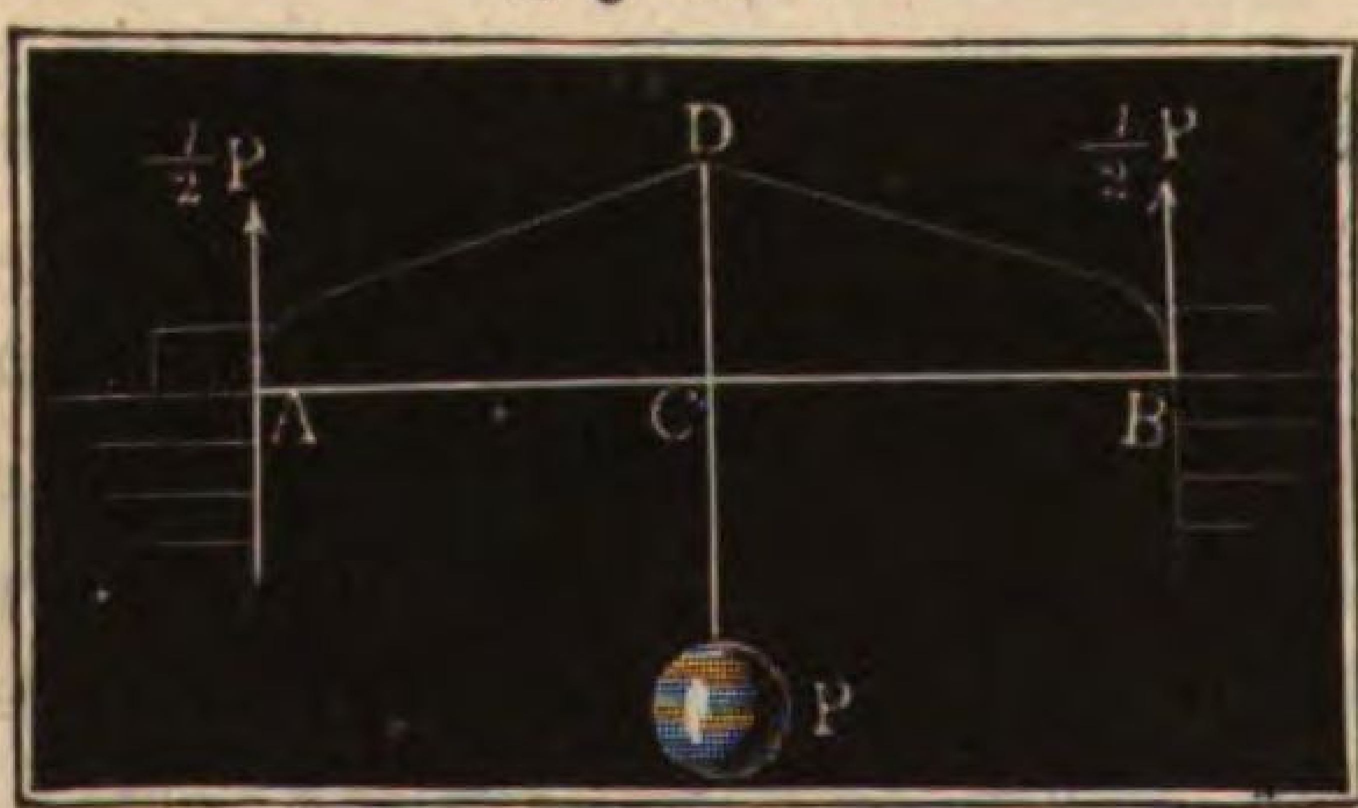
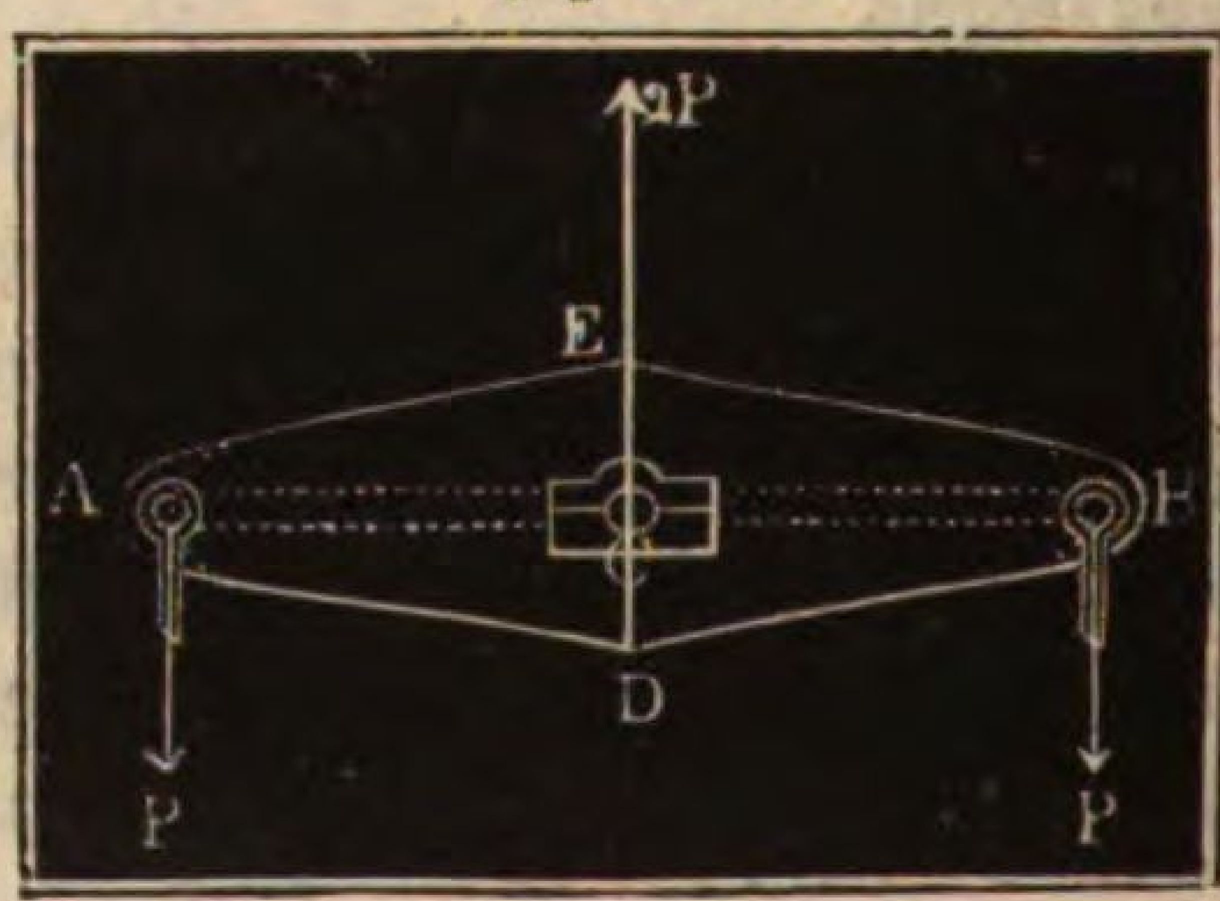


Fig. 286.



Mitte C unterstützt und an den Enden A und B durch zwei sich das Gleichgewicht haltende Kräfte ergriffen, so hat das Längenprofil die Gestalt von zwei in der Mitte zusammenstoßenden Parabeln. Der letzte Fall kommt bei Balanciers vor. Da dieselben durch die Zapfenlöcher A, C, B geschwächt werden, so versieht man sie noch mit Rippen, oder giebt ihnen noch ein Mittelstück AB. Körper von gleichem Widerstande.

Ist die Höhe $v = h$ constant, so hat man $\frac{u}{x} = \frac{b}{l}$ oder $\frac{u}{b} = \frac{x}{l}$, dann ist also die Breite u ihrer Entfernung von dem Ende proportional, es bildet deshalb die Horizontalprojection des Balkens ABD, Fig. 287, ein Dreieck BCD und der ganze Balken einen Keil mit ver-

Fig. 287.

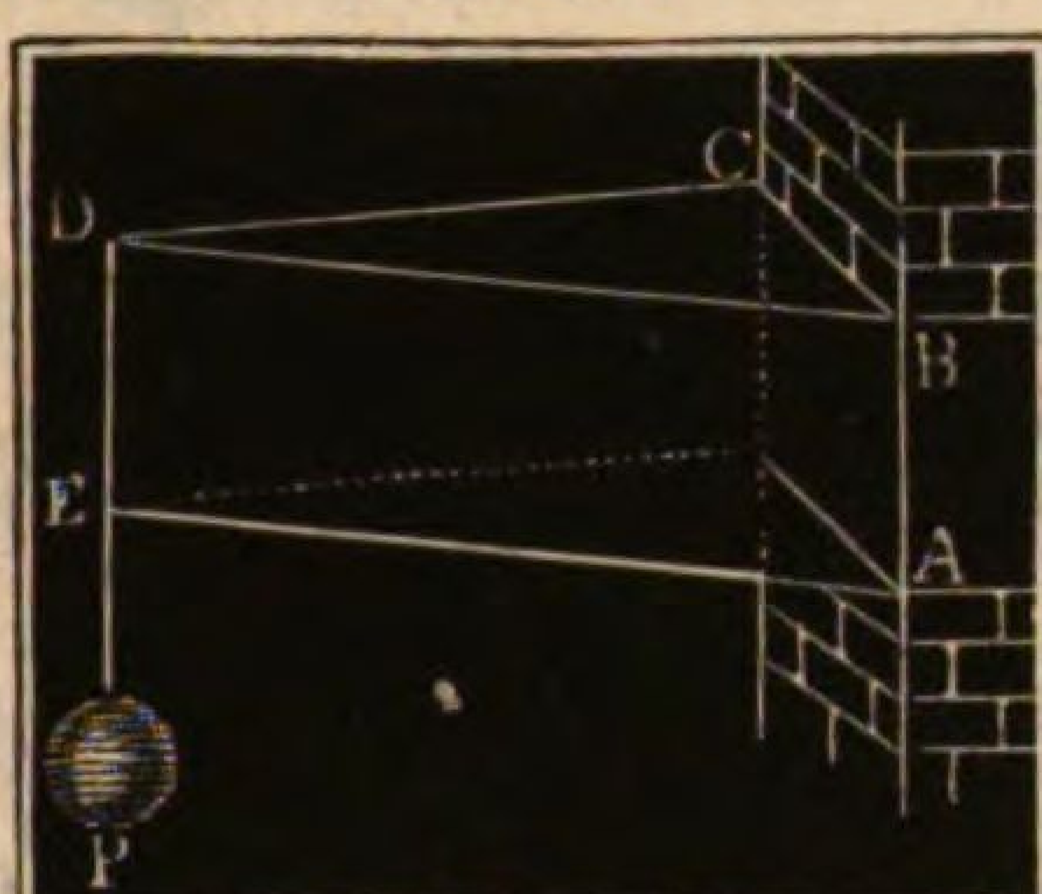
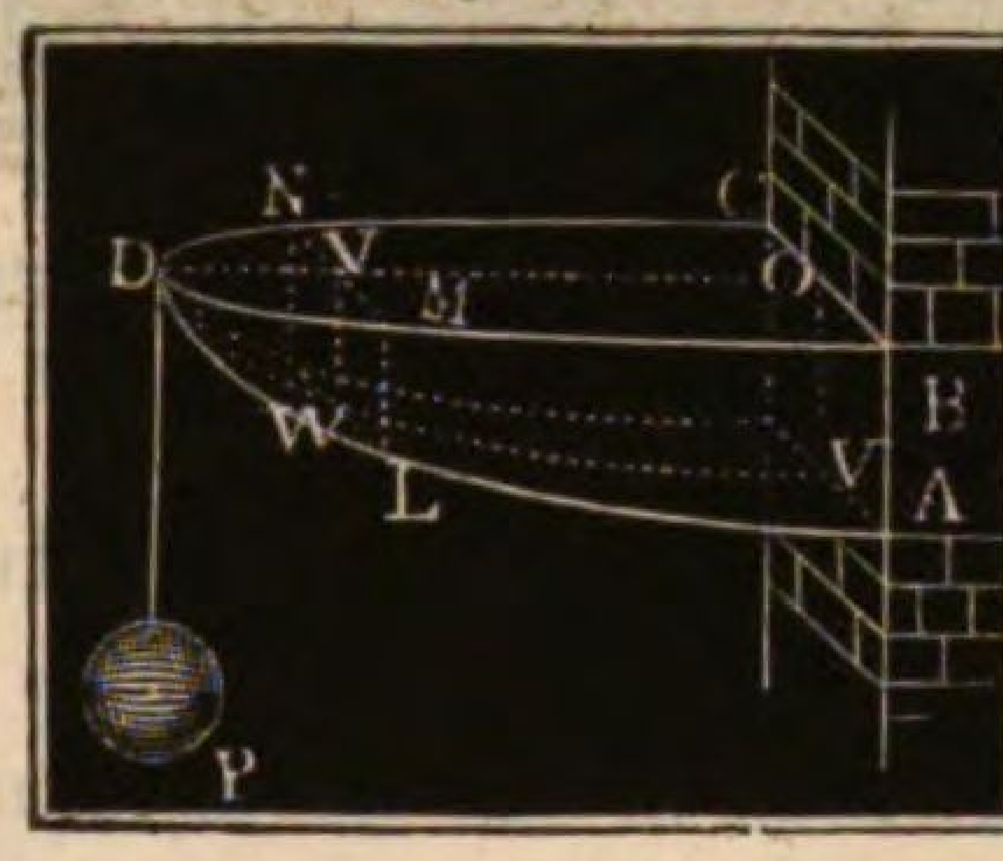


Fig. 288.



tikaler, in die Kraftrichtung fallender Schärfe. Soll der Körper ABD, Fig. 288, lauter ähnliche Querschnitte haben, so hat man

$\frac{v}{h} = \frac{u}{b}$, daher $\frac{u \cdot u^2 h^2}{b^2 x} = \frac{bh^2}{l}$, d. i. $\frac{u^3}{b^3} = \frac{x}{l}$; dann wachsen also die Breiten und Höhen wie die Cubikwurzeln aus den entsprechenden Hebelarmen. Der achtfachen Entfernung vom Ende entspricht z. B. nur die doppelte Höhe und Breite von der in der einfachen Entfernung.

Ist ein Balken gleichförmig belastet, so hat man die veränderliche Last $Q = qx$ und ihren Hebelarm $= \frac{x}{2}$, daher statt Px, $xq \cdot \frac{x}{2} = \frac{x^2 q}{2}$ zu setzen, weshalb nun $\frac{x^2 q}{2} = uv^2 \cdot \frac{K}{6}$ und auch $\frac{l^2 q}{2} = bh^2 \frac{K}{6}$ anzunehmen ist, und folglich $\frac{uv^2}{bh^2} = \frac{x^2}{l^2}$.

Wäre die Breite unveränderlich, also $u = b$, so hätte man $\frac{v^2}{h^2} = \frac{x^2}{l^2}$, also auch $\frac{v}{h} = \frac{x}{l}$, und deshalb ein Dreieck ABE zum Längenprofil, und einen Keil $ABED$, Fig. 289 (auf folgender Seite), als Körper von gleichem Widerstande. Nehmen wir die Höhe $v = h$ unveränderlich, so

Körper von gleichem Widerstande.

bekommen wir $\frac{u}{b} = \frac{x^2}{l^2}$, und daher zum Grundriß eine von umgekehrtem Parabelbogen begränzte Fläche BDC, wie Fig. 290. Macht

Fig. 289.

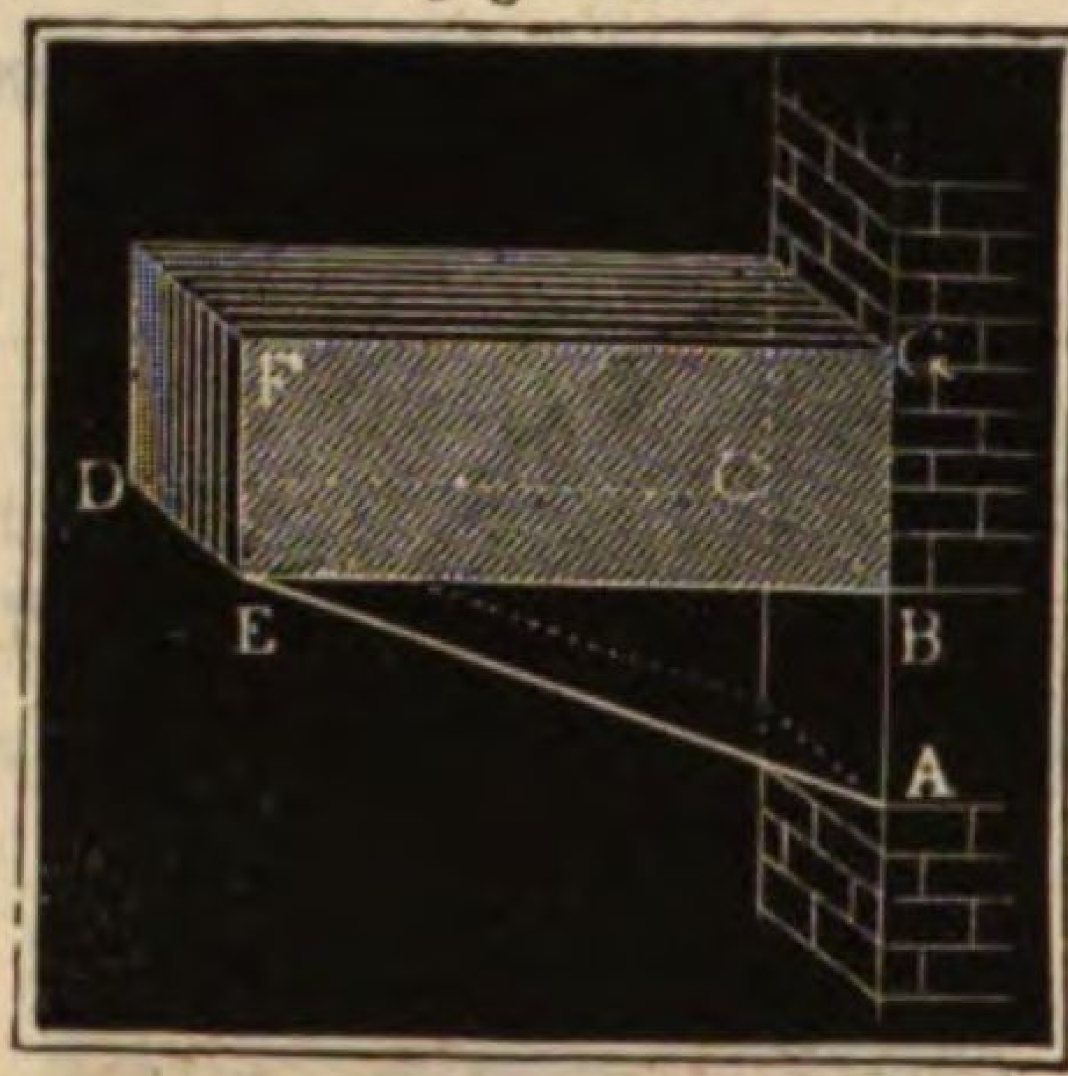
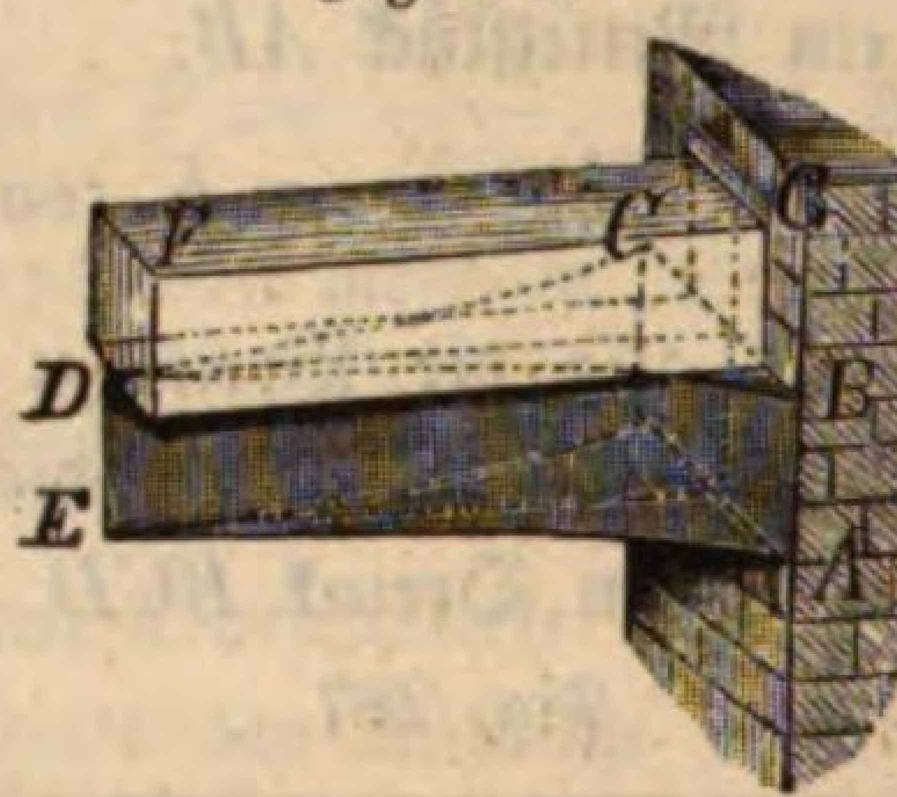


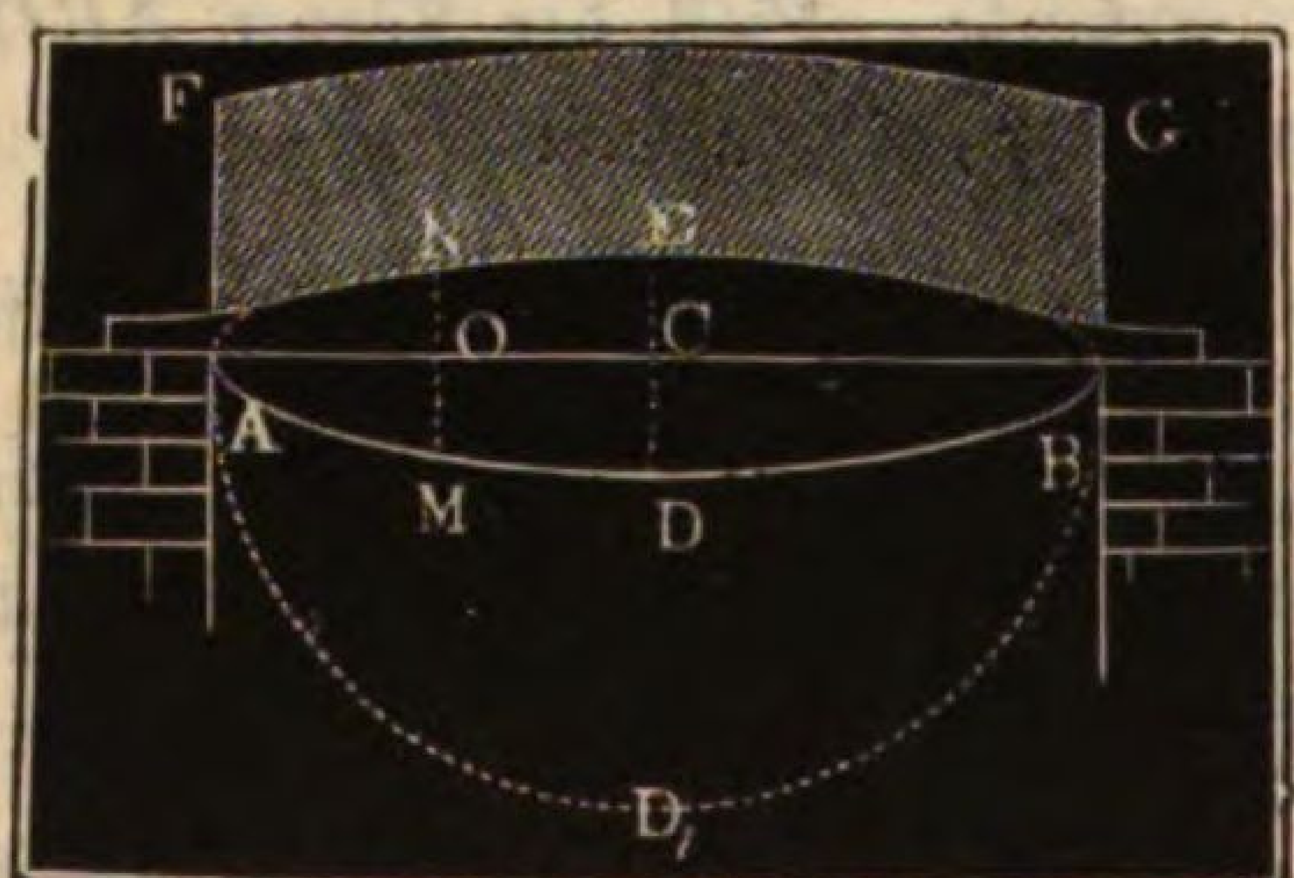
Fig. 290.



man wieder ähnliche Querschnitte, so ist $\frac{u^3}{b^3} = \frac{x^2}{l^2}$, dann hat man es also sowohl im Vertikal- als auch im Horizontalprofile mit der cubischen Parabel, bei welcher die Cuben der Ordinaten wie die Quadrate der Abscissen wachsen, zu thun.

Wird ein in beiden Enden aufruhender Körper AB, Fig. 291, auf die

Fig. 291.



ganze Länge gleichförmig belastet, so hat man für das Brechungsmoment in einer Entfernung $AO = x$ von einem Stützpunkte:

$$\frac{Q}{2} . x - qx . \frac{x}{2} = \frac{q}{2} (lx - x^2),$$

dagegen für die Mitte:

$$= \frac{Q}{2} . \frac{l}{2} - \frac{Q}{2} . \frac{l}{4} = \frac{Ql}{8} = \frac{ql^2}{8}.$$

Setzen wir einen Körper von unveränderlicher Breite voraus, so haben wir zu setzen: $\frac{q}{2}(lx - x^2) = bv^2 . \frac{K}{6}$ und $\frac{ql^2}{8} = bh^2 . \frac{K}{6}$, und es folgt nun durch Division $\frac{v^2}{h^2} = \frac{lx - x^2}{\frac{1}{4}l^2}$, oder $v^2 = \left(\frac{h}{\frac{1}{2}l}\right)^2 (lx - x^2)$. Wäre $h = \frac{1}{2}l$, so würde $v^2 = lx - x^2$ und deshalb das Längenprofil der mit $\frac{1}{2}l$ als Halbmesser construirte Kreis AD_1B sein, weil aber $lx - x^2$ noch durch $\left(\frac{h}{\frac{1}{2}l}\right)^2$ zu multipliciren ist, um das Quadrat v^2 der jedesmaligen Höhe MN zu erhalten, so geht dieser Kreis in eine Ellipse ADB über, deren Halbaxen $CA = a_1 = \frac{1}{2}l$ und $CD = b_1 = \frac{1}{2}h$ sind.

Bei Körpern mit kreisförmigen Querschnitten treten dieselben Verhältnisse ein wie bei Körpern mit ähnlichen rectangulären Querschnitten. Bei dem an einem Ende eingemauerten und am andern Ende belasteten Körper ist $\frac{u^3}{r^3} = \frac{x}{l}$ oder $\frac{u}{r} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}}$, d. h. es wachsen die Halbmesser wie die Cubikwurzeln aus den Entfernungen vom Angriffspunkte.

§. 211. Bei Maschinentheilen, z. B. bei Wellen, Radaxen u. s. w. Wellenstärke. können Biegungen nachtheilig auf den Gang der Maschine wirken, indem sie zu Schwingungen und Erschütterungen Veranlassung geben, es ist deshalb hier oft angemessener, die Querschnitte nicht nach der Festigkeit, sondern nach dem Grade der Biegung zu bestimmen. Gerstner und Tredgold geben an, daß ein mit beiden Enden aufliegender und in der Mitte belasteter Balken von Holz eine Biegung $a = \frac{1}{288} . l$ und ein solcher Balken von Guß- oder Schmiedeeisen nur die Biegung oder Bogenhöhe $a = \frac{1}{480} . l$ ohne Nachtheile ertragen kann. Nun ist aber nach §. 193: $a = \frac{Pl^3}{48\,WE}$ und nach §. 196: $W = \frac{bh^3}{12}$, es folgt daher die Bogenhöhe: $a = \frac{Pl^3}{4\,bh^3E}$ und $\frac{a}{l} = \frac{Pl^2}{4\,bh^3E}$. Setzen wir nun $\frac{a}{l} = \frac{1}{288}$ und $E = 1'800000$ ein, so bekommen wir für hölzerne Balken die Tragkraft in der Mitte:

$$P = \frac{a}{l} . \frac{4\,bh^3E}{l^2} = \frac{1}{288} . \frac{4\,bh^3 . 1'800000}{l^2} = 25000 . \frac{bh^3}{l^2}.$$

Für Gußeisen $\frac{a}{l} = \frac{1}{480}$ und $E = 17'000000$ gesetzt, folgt:

$$P = \frac{1}{480} . \frac{4\,bh^3}{l^2} . 17'000000 = 142000 . \frac{bh^3}{l^2}.$$

Nimmt man noch für Schmiedeeisen $\frac{a}{l} = \frac{1}{480}$ und $E = 29'000000$ Pf. an, so erhält man für parallelepipedische Balken aus diesem Materiale:

$$P = 242000 . \frac{bh^3}{l^2}.$$

Die Coefficienten 25000, 142000, 242000 sind durch $3\pi = 9{,}42$ zu multipliciren, und es ist b und h durch r zu ersetzen, wenn man es mit cylindrischen Balken, z. B. runden Wellen u. s. w., zu thun hat. Folgende Tabelle giebt die Querschnittsverhältnisse unter der Voraussetzung, daß l in Fußen, b, h, r in Zollen und P in Pfunden ausgedrückt sind.

Wellenstärke.

Materie.	Rectangulärer Querschnitt.	Kreisförmiger Querschnitt.
Holz	$bh^3 = \frac{Pl^2}{170}$	$r^4 = \frac{Pl^2}{1600}$
Gußeisen	$bh^3 = \frac{Pl^2}{980}$	$r^4 = \frac{Pl^2}{9250}$
Schmiedeeisen . .	$bh^3 = \frac{Pl^2}{1680}$	$r^4 = \frac{Pl^2}{15800}$

Ist die Last Q gleichförmig auf den Balken vertheilt, so hat man statt P, $\frac{5}{8}Q$, §. 193, zu setzen, und will man auf das Gewicht des Balkens Rücksicht nehmen, so setze man statt P, $P + \frac{5}{8}G$. Hat man es mit einem Balken zu thun, welcher an einem Ende festgehalten und am andern belastet wird, so hat man P und l doppelt zu nehmen, daher Pl^2 zu verachtfachen; trägt endlich der mit einem Ende festgehaltene Balken eine gleichmäßig vertheilte Last Q, so hat man statt Pl^2, $\frac{3}{8} . 8Ql^2 = 3Ql^2$ einzusetzen.

Beispiele. 1) Welche Last trägt ein hölzerner, an beiden Enden aufliegender Balken von 20 Fuß Länge, 7 Zoll Dicke und 9 Zoll Höhe auf die Dauer? Es ist diese Last $P = 170 . \frac{bh^3}{l^2} = 170 . \frac{7.9^3}{20^2} = 1190 . \frac{729}{400} = 2170$ Pf.

In §. 203 wurde $P = 1890$ Pf. gefunden. 2) Wie stark ist eine eiserne Welle von 12 Fuß Länge zu schmieden, wenn dieselbe eine gleichförmig vertheilte Last $Q = 40000$ Pf., ohne eine nachtheilige Biegung zu erleiden, tragen soll? Es ist $r^4 = \frac{\frac{5}{8} Ql^2}{15800}$, also hier $r^4 = \frac{5}{8} . \frac{40000 . 12^2}{15800} = 228$ und $r = \sqrt[4]{228}$ $= 3,89$ Zoll, folglich die Wellenstärke $2r = 7,78$ oder circa $7\frac{3}{4}$ Zoll. Nach der Festigkeitsformel ergiebt sich, wenn der Tragmodul des Schmiedeeisens $\frac{14}{9}$mal so groß als für Gußeisen angenommen wird: $r^3 = \frac{Ql}{8 . \frac{14}{9} . 8000}$ $= \frac{40000 . 144 . 9}{8 . 14 . 8000} = 57,8$, daher $r = \sqrt[3]{57,8} = 3,86$ Zoll und $2r = 7,72$ Zoll.

Zerdrücken. §. 212. Werden prismatische Körper in ihrer Axenrichtung so stark zusammengedrückt, daß dieselben zerbrechen, so hat man die rückwirkende Festigkeit derselben zu überwinden. Dieses Zerbrechen kann aber auf zweierlei Weise vor sich gehen. Ist der Körper kurz, nähert er sich z. B. einem Würfel, so zerfällt derselbe in Theile ohne eine vorausgegangene Biegung; ist aber der Körper viel länger als breit und dick, so geht dem Zerbrechen eine Biegung voraus, wie sie bei der relativen Festigkeit

vorkommt. Jene Art des Zerbrechens besteht in einem Zerdrücken, Zermalmen, Zerquetschen oder Zersplittern des Körpers oder der Theile desselben, diese aber in einem Abbrechen oder Zerknicken in einem Querschnitte des Körpers. Man unterscheidet hiernach Festigkeit des Zerdrückens von der Festigkeit des Zerknickens. Zerdrücken.

Die Festigkeit des Zerdrückens (franz. résistance à l'écrasement; engl. crushing force) ist bei ähnlichen Querschnitten den Inhalten dieser proportional, bei regelmäßigen Querschnitten aber etwas größer als bei unregelmäßigen, und beim Kreise am größten. Sie ist übrigens von der Länge des Körpers ziemlich unabhängig. Kurze Holzprismen zerspalten der Länge nach oder bilden eine Wulst; Steine aber zerspringen entweder in mehrere Stücke oder zertrennen sich in einer schiefen Ebene. Man giebt dem Holze und Steinen zehnfache, dem Eisen aber nur fünffache Sicherheit, Mauern von Bruchsteinen aber erhalten gar die zwanzigfache Sicherheit. Ist K der Modul der Festigkeit des Zerdrückens, K_1 der entsprechende Sicherheitsmodul und F der Querschnitt des Körpers, so hat man

$$K_1 = \frac{1}{5} K \text{ bis } \frac{1}{20} K,$$

die Tragkraft $P = FK_1$ und umgekehrt $F = \frac{P}{K_1}$.

Tabelle
der Festigkeitsmodul für das Zerdrücken.

Namen der Körper.	Festigkeitsmodul K.	Namen der Körper.	Festigkeitsmodul K.
Basalt . . .	27000	Ziegelstein . .	580 bis 2200
Gneis . . .	5100	Eichenholz . .	2800 „ 6800
Granit . . .	6000 bis 11000	Fichtenholz .	6800 „ 8000
Kalkstein . .	1500 „ 6000	Tannenholz .	2000
Marmor . .	3200 „ 12000	Gußeisen . .	82000 „ 45000
Mörtel . . .	450 „ 900	Schmiedeeisen	72000
Sandstein . .	1400 „ 13000	Kupfer . . .	60000

Nach den neuesten Erfahrungen kann man von den Werthen für K in der vorstehenden Tabelle auch dann noch Gebrauch machen, wenn die Säulen eine mehr als zwölffache Länge zur Dicke haben. Ist die kleinste Dicke d der Säule in der Länge l derselben

1 12 24 36 48 60 72mal enthalten,

so soll man nur den

1 $\frac{5}{6}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{24}$fachen

Zerdrücken. Werth von K einsetzen. Nimmt man für Holz eine zehnfache und für Eisen eine fünffache Sicherheit, so erhält man hiernach folgenden Sicherheitsmodul (K_1) für das Zerdrücken:

Namen der Körper.	Werthe von $\frac{l}{d}$							
	1	12	18	24	36	48	60	72
Eichenholz . .	500	400	330	250	170	80	40	20
Fichtenholz .	750	600	500	380	250	120	60	30
Gußeisen. . .	20000	16700	13300	10000	6700	3300	1700	800
Schmiedeeisen	14000	11700	9300	7000	4700	2300	1200	600

Beispiele. 1) Welche Last kann eine 12 Fuß lange runde Säule von 11 Zoll Durchmesser aus Fichtenholz tragen? Es ist $F = \frac{\pi . 11^2}{4} = 95$ □Zoll; nimmt man nun für K den Mittelwerth $\frac{6800+8000}{2} = 7400$, vermindert man diesen Werth, weil die Länge 13 mal so groß als die Dicke ist, um ein Sechstel, setzt man also $K = 7400 . \frac{5}{6} = 6200$ Pf. und giebt man noch zehnfache Sicherheit, so hat man $P = \frac{6200 . F}{10} = 620 . 95 = 58900$ Pf. 2) Wie stark hat man die Grundmauern eines außen 60 Fuß langen und 40 Fuß breiten und 20 Millionen Pfund schweren Gebäudes aufzuführen, wenn man hierzu gut bearbeitete Gneisstücke verwendet? Setzen wir die gesuchte Mauerdicke $= x$, so können wir die mittlere Länge $60 - x$ und Breite $40 - x$, also den mittleren Umfang $2(60 - x + 40 - x) = 200 - 4x$ setzen; hiermit x multiplicirt, erhält man die Basis der Mauern $(200 - 4x)\, x$ □ Fuß $= 144\,(200 - 4x)\, x = 576\,(50 - x)\, x$ □ Zoll. Bei zwanzigfacher Sicherheit trägt ein □ Zoll Gneis $= \frac{5100}{20} = 255$ Pf., daher ist zu setzen: $255 . 576\,(50 - x)\, x = 20000000$, oder $50\,x - x^2 = \frac{20000000}{146880} = 136$. Es folgt nun $x = \frac{136 + x^2}{50}$, oder ungefähr $x = \frac{136}{50} = 2{,}7$ Fuß. Nun $x^2 = 2{,}7^2 = 7$ gesetzt, folgt genauer $x = \frac{136+7}{50} = \frac{143}{50} = 2{,}86$ Fuß, wofür 2,9 Fuß $=$ 35 Zoll zu nehmen ist.

Zerknicken. §. 213*). Wird ein prismatischer Körper $ABCD$, Fig. 292 (a. f. S.), an einem Ende festgehalten und an dem andern Ende von einer Kraft P ergriffen, die in der Axenrichtung des Körpers selbst wirkt, so stellen sich die Biegungsverhältnisse anders heraus, als wenn die Kraft winkelrecht zur Axe wirkt. Die neutrale Axe KL nimmt eine andere Gestalt an, weil die Hebelarme der Kraft P nicht durch die Abscissen, sondern durch die Ordi-

naten, z. B. HK, gebildet werden. Nach §. 191 hat man für den Krümmungshalbmesser QO einer elastischen Linie KL, Fig. 293, die Formel $Mr = WE$; nun ist aber bei einer kleinen Biegung $r = -\frac{dx}{d(tang.\alpha)}$, Zerknicken.

Fig. 292.

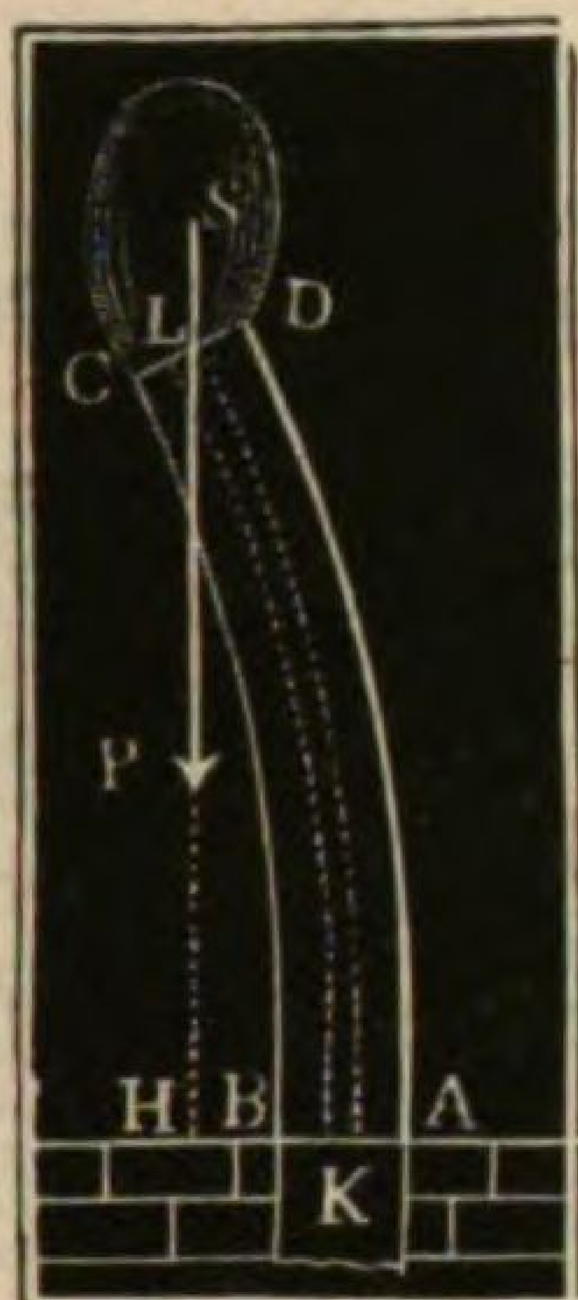
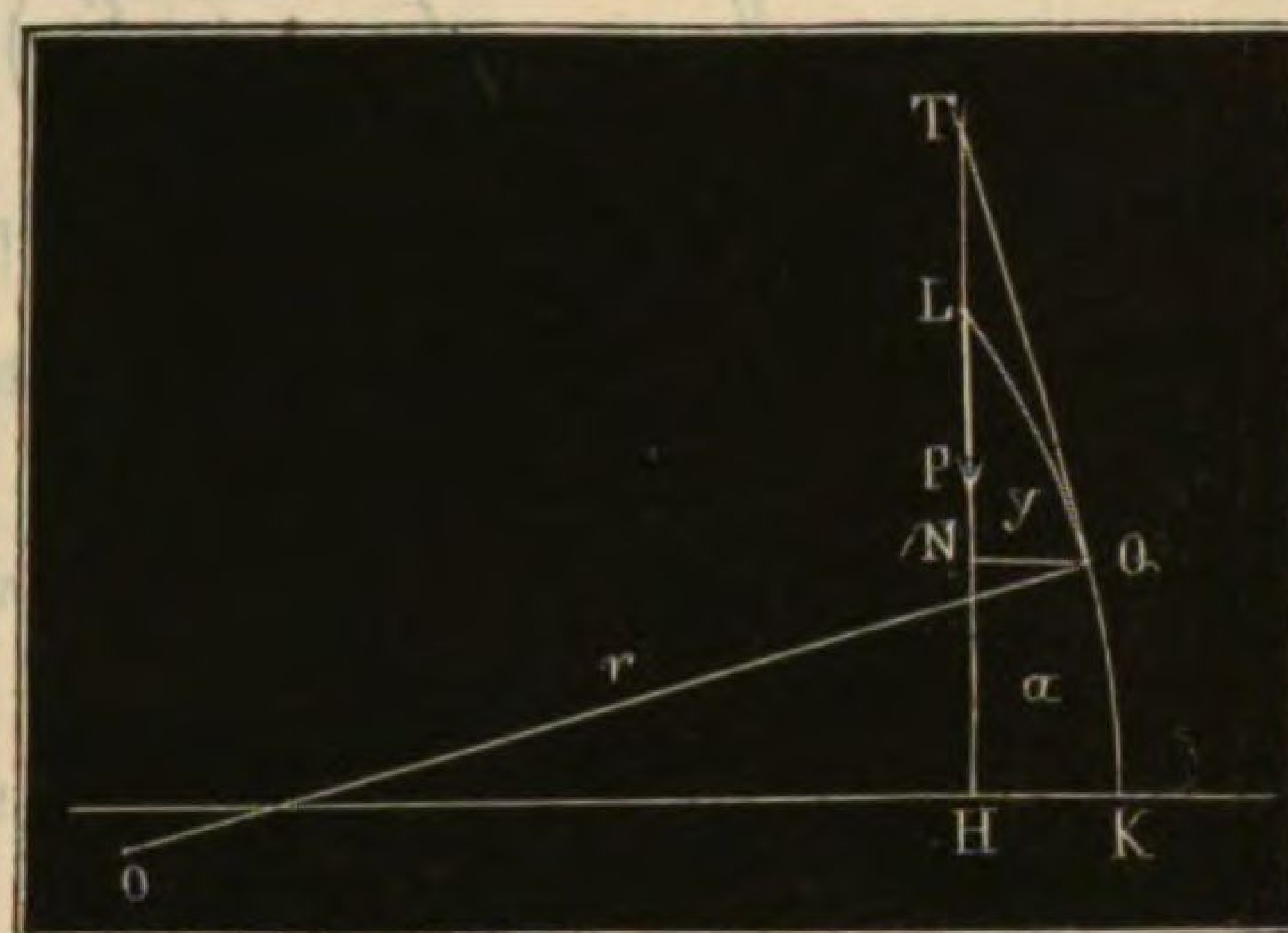


Fig. 293.



wenn dx ein Element der Abscisse $LN = x$ und α den Tangentenwinkel QTN, ferner M das Moment Py und y die Ordinate NQ eines Punktes Q der Curve bezeichnet; daher hat man die Gleichung

$-\frac{Py\,dx}{d(tang.\alpha)} = WE$; oder, da $tang.\alpha = \frac{dy}{dx}$, also $dx = \frac{dy}{tang.\alpha}$ ist,

$$Py\,dy = -\,WE\,tang.\alpha\,.\,d\,(tang.\alpha),$$

und es folgt nun durch Integriren:

$$\tfrac{1}{2}Py^2 = Con. - \tfrac{1}{2}WE\,(tang.\alpha)^2.$$

Für den festgehaltenen Punkt K ist $\alpha =$ Null und y die ganze Bogenhöhe $KH = a$, daher hat man auch

$$\tfrac{1}{2}Pa^2 = Con. - 0,$$

und es folgt durch Subtraction

$$P\,(a^2 - y^2) = WE\,(tang.\alpha)^2, \text{ also}$$

$$tang.\alpha = \sqrt{\frac{P\,(a^2-y^2)}{WE}}.$$

Führen wir jetzt wieder $tang.\alpha = \frac{dy}{dx}$ ein, so erhalten wir

$$\frac{dy}{\sqrt{a^2-y^2}} = dx\sqrt{\frac{P}{WE}}, \text{ oder}$$

$$\frac{d\left(\frac{y}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{a}\right)^2}} = dx\sqrt{\frac{P}{WE}}.$$

Zerknicken. und es folgt nun nach Artikel 19 der analytischen Vorlehren:

$$arc.\left(sin. = \frac{y}{a}\right) = x\sqrt{\frac{P}{WE}},$$

oder umgekehrt,

$$\frac{y}{a} = sin.\left(x\sqrt{\frac{P}{WE}}\right),$$

d. i. die Gleichung $y = a\ sin.\left(x\sqrt{\frac{P}{WE}}\right)$ für die elastische Linie.

Für $x =$ der Länge $BC = KL = l$, ist $y =$ der Bogenhöhe $HK = a$, und daher

$$a = a\ sin.\left(l\sqrt{\frac{P}{WE}}\right),\ \text{d. i.}\ sin.\left(l\sqrt{\frac{P}{WE}}\right) = 1;$$

da aber dem Sinus 1 der Quadrant $\frac{\pi}{2}$ als Bogen zukommt, so folgt

$$l\sqrt{\frac{P}{WE}} = \frac{\pi}{2},$$ und folglich die Kraft

$$P = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 WE.$$

Da diese Formel die Bogenhöhe a nicht enthält, so folgt, daß die Kraft P bei jeder Biegung dem Körper das Gleichgewicht zu halten vermag. Dieses auffallende Verhältniß erklärt sich dadurch, daß mit der Zunahme der Biegung auch ein Wachsen des Hebelarmes oder des statischen Momentes verbunden ist. Hiernach ist also auch die Kraft zum Abbrechen:

$$P = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 WE.$$

Säulen. §. 214. Setzen wir in der Formel $P = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 . WE$ für $W = \frac{bh^3}{12}$, so erhalten wir die rückwirkende Festigkeit einer parallelepipedischen Säule

$$P = \frac{\pi^2}{48} \cdot \frac{bh^3}{l^2} E.$$

Es wächst also die rückwirkende Festigkeit eines Parallelepipedes wie die Breite oder größere Dimension, wie der Cubus der Dicke oder kleinern Dimension des Querschnittes, und umgekehrt wie das Quadrat der Länge.

Setzen wir dagegen $W = \frac{\pi}{4} r^4$, so erhalten wir für eine cylindrische Säule $P = \frac{\pi^3}{16} \cdot \frac{r^4 E}{l^2}$.

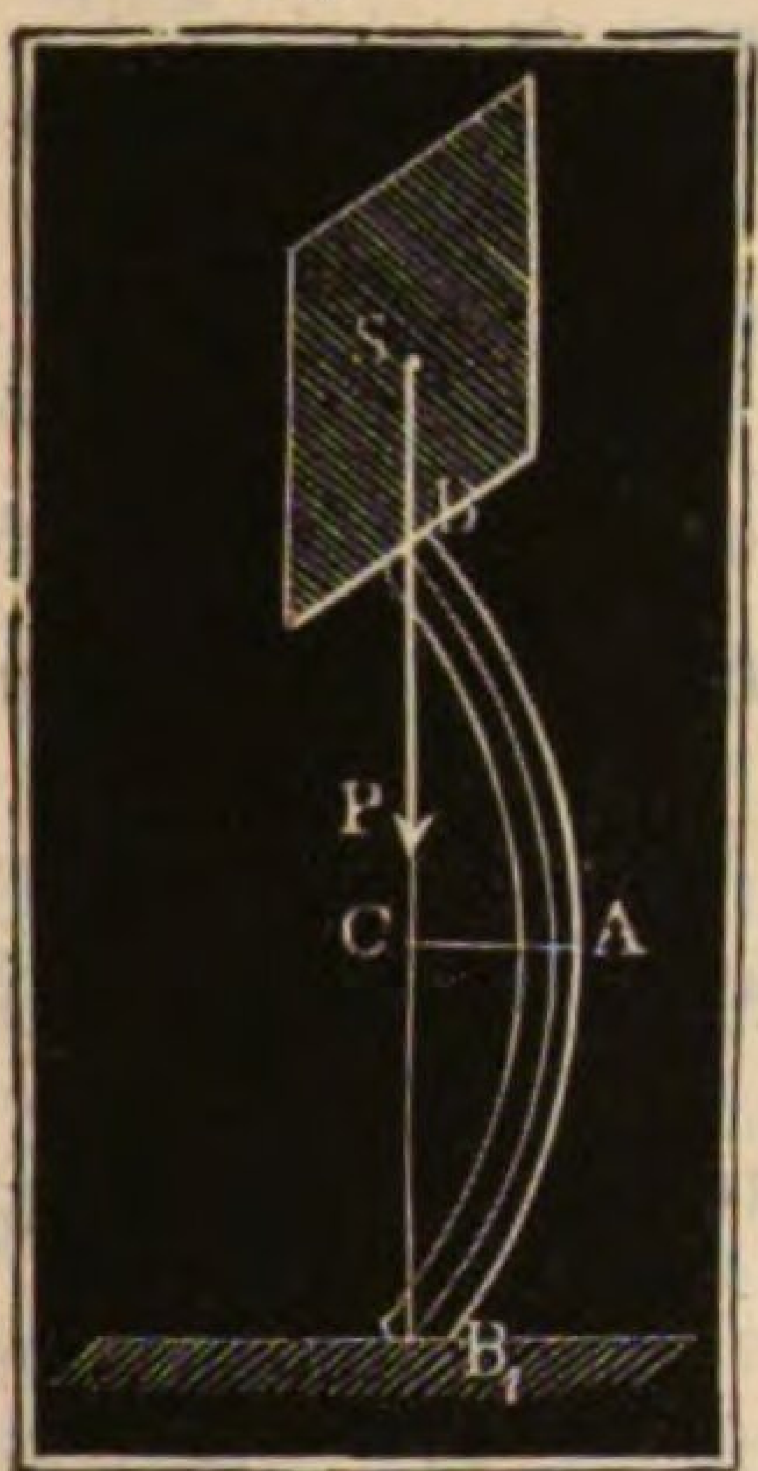
Die rückwirkende Festigkeit eines Cylinders wächst also wie das Biquadrat des Durchmessers und umgekehrt wie das Quadrat der Länge. Säulen.

Für eine hohle Säule mit den Halbmessern r_1 und r_2 ist

$$P = \frac{\pi^3}{16} \cdot \frac{(r_1^4 - r_2^4)E}{l^2}.$$

Wird die Säule am untern Ende nicht festgehalten, so nimmt sie eine Krümmung wie BAB_1, Fig. 294, an, wobei die untere Hälfte ebenso stark wie die obere gebogen wird, und in der Mitte die stärkste Krümmung stattfindet. Deshalb ist dieser Balken als das Doppelte eines eingemauerten anzusehen und statt l, $\frac{l}{2}$ einzuführen, so daß für die parallelepipedische Säule $P = \frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{bh^3}{l^2} E$ und für die cylindrische $P = \frac{\pi^3}{4} \cdot \frac{r^4}{l^2} E$, in beiden Fällen aber die vierfache Tragkraft folgt.

Fig. 294.



Setzen wir die Kraft des Zerknickens der des Zerdrückens gleich, also z. B. für eine cylindrische Säule

$\frac{\pi^3}{4} \cdot \frac{r^4 E}{l^2} = \pi r^2 K$, so bekommen wir die Formel

$$\frac{l}{r} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{E}{K}},$$

oder statt dem Halbmesser r die Dicke $d = 2r$ eingeführt:

$$\frac{l}{d} = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{E}{K}}.$$

Nun ist aber für Holz im Mittel $E = 1'800000$ und K im Mittel $= 6000$ zu setzen, daher folgt denn hier

$$\frac{l}{d} = \frac{\pi}{4} \sqrt{300} = \frac{11 \cdot 17{,}3}{7 \cdot 2} = 13{,}6.$$

Für Gußeisen können wir $E = 17'000000$ und $K = 100000$ setzen, weshalb für dasselbe

$$\frac{l}{d} = \frac{\pi}{4} \sqrt{170} = 10{,}2 \text{ sich herausstellt.}$$

Für Schmiedeeisen ist endlich $E = 29'000000$ und $K = 72000$, folglich $\frac{l}{d} = \frac{\pi}{4} \sqrt{403} = 15{,}7.$

Säulen. Bei diesen Längenverhältnissen ist also, wenn man in beiden Fällen einerlei Sicherheitsmaaß voraussetzt, die Kraft des Zerknickens gleich der des Zerdrückens, und nur erst bei längeren Säulen übertrifft der letztere Widerstand den ersten, sind also die Dimensionen nach den so eben gefundenen Formeln für das Zerknicken zu berechnen.

Beispiele. 1) Für eine 12 Fuß lange und 11 Zoll dicke Säule aus Fichtenholz ist die Tragkraft nach der letzten Formel, bei 10facher Sicherheit

$P = \frac{\pi^3}{4} \cdot \frac{r^4}{l^2} \cdot \frac{E}{10} = {}^{31}/_4 \cdot ({}^{11}/_{24})^4 \cdot 180000 = {}^{31}/_4 \cdot 0{,}044 \cdot 180000 = 61600$ Pf.;

nach dem Beispiel Nr. 1 des §. 212 aber nur $P = 58900$ Pf.

2) Wie stark muß eine 30 Fuß hohe Säule aus Eichenholz sein, damit sie eine Last von 60000 Pfund tragen könne? Hier ist

$r = \sqrt[4]{\frac{4Pl^2}{\pi^3 E}} = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 60000 \cdot (30 \cdot 12)^2}{31 \cdot 180000}} = \sqrt[4]{\frac{4\,(360)^2}{31 \cdot 3}} = \frac{26{,}8}{3{,}1} = 8{,}7$ Zoll,

und die gesuchte Stärke $d = 2r = 17{,}4$ Zoll. Die Festigkeit des Zerdrückens erfordert, wenn man $K = {}^1/_{10} \cdot \frac{2800 + 6800}{2} = 480$ Pf. setzt, den Querschnitt $F = {}^{60000}/_{480} = 125$ Quadratzoll, und hiernach die Stärke

$d = \sqrt{\frac{4 \cdot F}{\pi}} = \sqrt{\frac{500}{\pi}} = 12{,}6$ Zoll. Nach der Tabelle in §. 212, $K = 300$

genommen, erhält man die Stärke $d = \sqrt{\frac{800}{\pi}} = 16$ Zoll, also nahe so groß wie die dem Zerdrücken entsprechende.

§. 215. Die Versuche, welche in den neueren Zeiten Hodgkinson über die rückwirkende Festigkeit angestellt hat (s. Barlow's Bericht in den Philosophical Transactions, 1840), bestätigen wenigstens eine angenäherte Richtigkeit der im Vorstehenden entwickelten Formeln. Nach diesem Experimentator ist die Formel $P = \frac{\pi^3}{4} \cdot \frac{r^4}{l^2} E = \frac{d^4}{l^2} \cdot \frac{\pi^3 E}{64}$, wenn man nur statt $\frac{\pi^3}{64} E$ einen besonderen Erfahrungswerth einsetzt, unbedingt richtig, dagegen für Guß- und Schmiedeeisen darin statt d^4 eine kleinere Potenz von d einzuführen, und zwar $d^{3,76}$, wenn die Säulenenden abgerundet, und $d^{3,55}$, wenn die Enden flach sind. Im letztern Falle ist überhaupt die Tragkraft größer, weil durch das flache Aufliegen der Säulenenden das Biegen sehr erschwert wird. Auch ist beim Gußeisen statt l^2, $l^{1,7}$ einzusetzen.

Folgendes sind die Hauptergebnisse der Hodgkinson'schen Versuche an cylindrischen Säulen. Es wird hier vorausgesetzt, daß die Säulendurchmesser d oder Dicke b in Zollen, die Säulenlängen l aber in Fußen gegeben sind.

Säulen.

Beschaffenheit der Säulen.	Die Säulenenden abgerundet $\frac{l}{d} > 15.$	Die Säulenenden flach $\frac{l}{d} > 30.$
Massiver Cylinder aus Gußeisen.	$P = 34300 \frac{d^{3,76}}{l^{1,7}}.$	$P = 101600 \frac{d^{3,55}}{l^{1,7}}$
Hohler Cylinder aus Gußeisen.	$P = 29900 \frac{d^{3,76} - d_1^{3,76}}{l^{1,7}}$	$P = 102000 \frac{d^{3,55} - d_1^{3,55}}{l^{1,7}}$
Massiver Cylinder aus Schmiedeeisen.	$P = 98400 \frac{d^{3,76}}{l^2}$	$P = 307600 \frac{d^{3,55}}{l^2}$
Quadratische Säule aus trocknem Danziger Eichenholze.	— —	$P = 25200 \frac{b^4}{l^2}$
Quadratische Säule aus trocknem Fichtenholze.	— —	$P = 18000 \frac{b^4}{l^2}.$

Noch hat Hodgkinson gefunden, daß gußeiserne Säulen eher zerknickt als zerdrückt werden, bei abgerundeten Enden, wenn $l > 15 d$, und bei flachen Enden, wenn $l > 30\ d$ ist; daß ferner gußeiserne Säulen, welche in der Mitte $^3/_2$ bis 2 mal so dick sind als an den Enden bei gleichem Gewichte und gleicher Länge unter gleichen Umständen ungefähr $^1/_8$ mehr tragen als cylindrische Säulen, und daß hohle cylindrische Säulen unter übrigens gleichen Verhältnissen stets mehr tragen als gleich schwere Säulen mit polygonalen oder sternförmigen Querschnitten. Ferner soll die Tragkraft des trocknen Holzes doppelt so groß sein als die des frisch gefällten. Wenn das eine Ende der Säule flach und das der andern abgerundet ist, so soll endlich die Tragkraft das arithmetische Mittel sein, zwischen der Tragkraft, wenn beide Enden abgerundet, und der, wenn beide Enden flach sind.

Beispiel. Welche Stärke soll eine gußeiserne Säule von 20 Fuß Länge erhalten, wenn dieselbe eine Last P von 20000 Pf. tragen soll? Nach der Tabelle ist $20000 = \frac{34300\ .\ d^{3,76}}{20^{1,7}}$, daher umgekehrt $d^{3,76} = \frac{20000}{34300} \ .\ 20^{1,7}$, oder $3,76\ Log.\ d = 0,76574 - 1 + 1,7\ .\ Log.\ 20$, d. i.

$$Log. d = \frac{1,9775}{3,76} = 0,526, \text{ also } d = 3,36 \text{ Zoll.}$$

Giebt man aber 5fache Sicherheit, so hat man $d^{3,76} = \frac{100000}{34300} \cdot 20^{1,7}$, daher $Log. d = \frac{2,676}{3,76} = 0,712$, und $d = 5,15$ Zoll.

Nach der theoretischen Formel ist, bei 5facher Sicherheit:

$$d' = 2 \sqrt[4]{\frac{4.20000.240^2}{31.\,^1/_5\,.17000000}} = 2 \sqrt[4]{\frac{40.24^2}{31.17}} = 5,14 \text{ Zoll.}$$

Nach der Tabelle in §. 212 wäre, da hiernach $\frac{l}{d}$ ungefähr 48 ist, der Querschnitt $F = \frac{20000}{3300} = 6{,}06$, und daher die Stärke um 2,78 Zoll, also viel zu klein.

Torsion §. 216. Wird ein an einem Ende befestigter Körper ABC, Fig. 295, von einer Kraft ergriffen, deren Richtung in eine Normalebene zur Axe fällt und deshalb den Körper um die Axe zu drehen sucht, oder wirken zwei

Fig. 295.

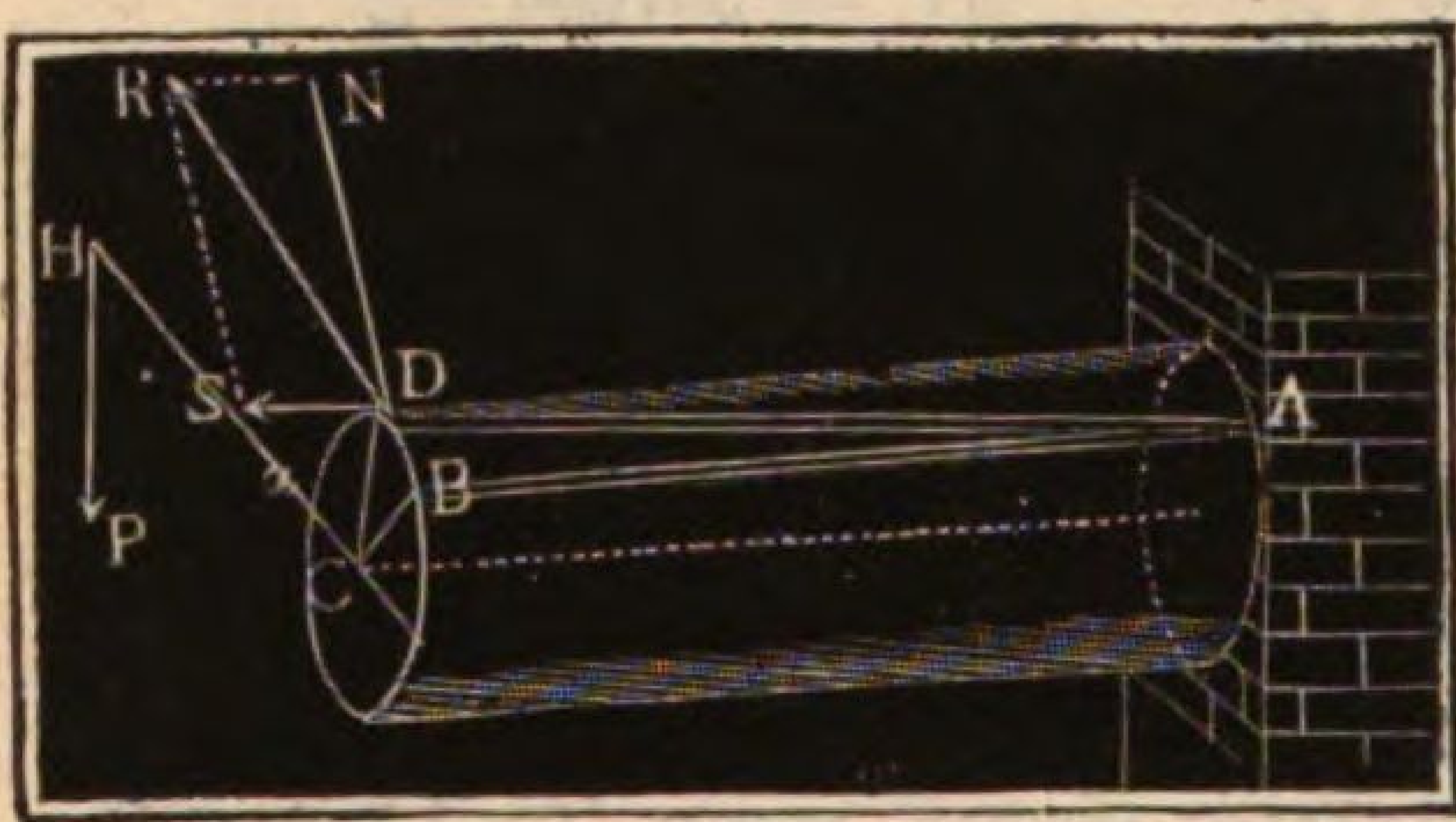
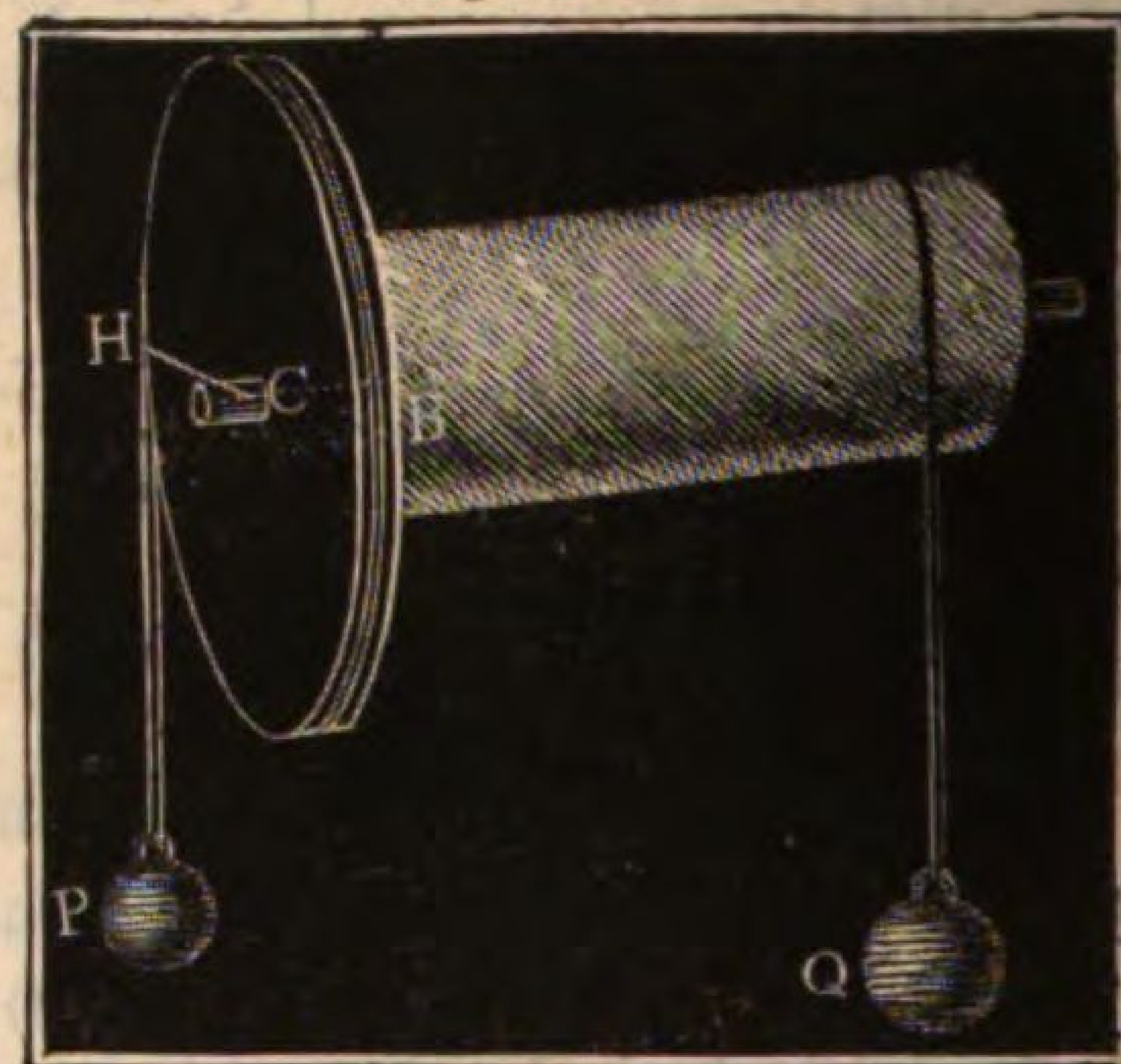


Fig. 296.

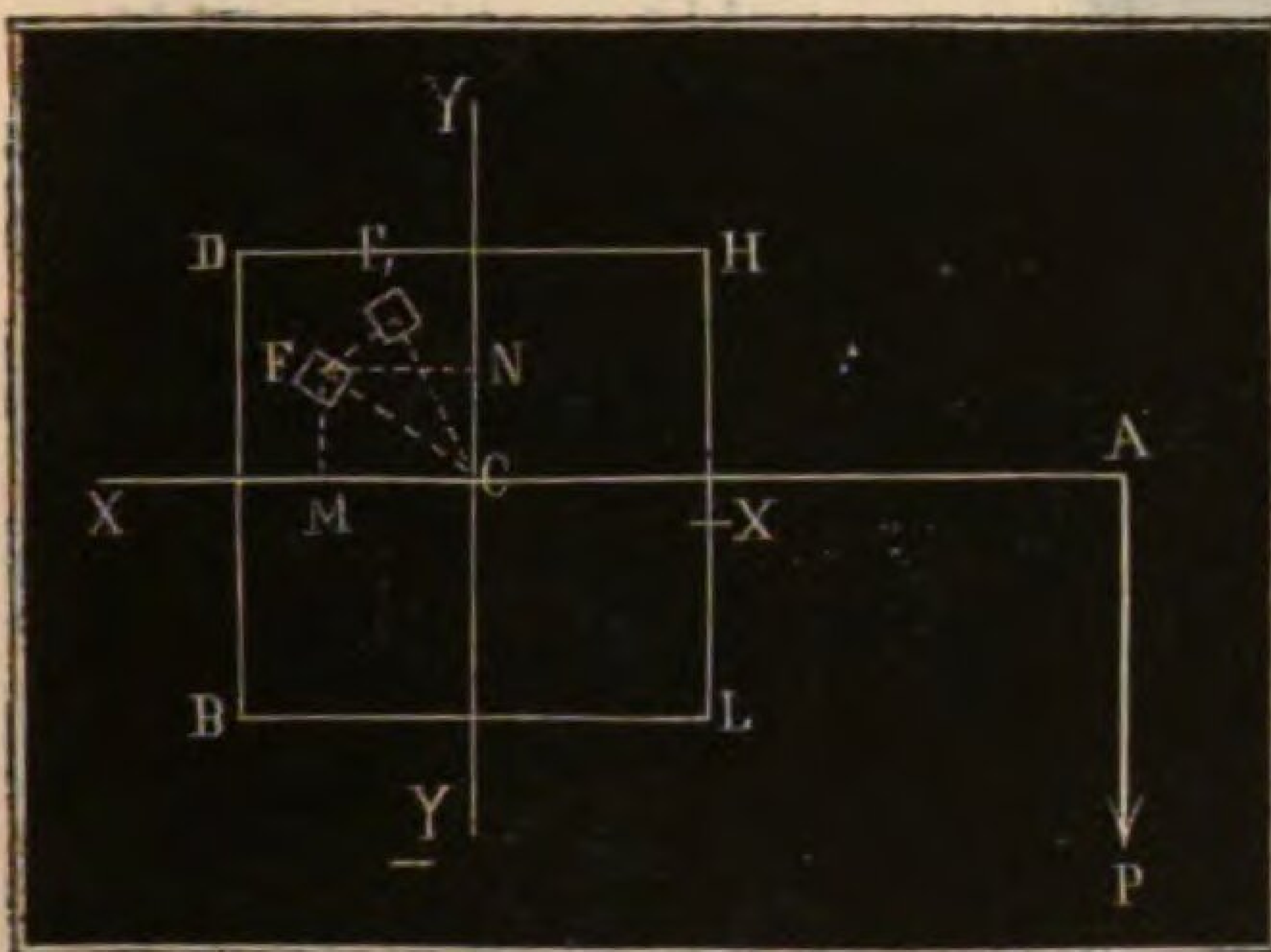


Umdrehungskräfte P und Q in verschiedenen Normalebenen auf einen in seiner Axe festgehaltenen Körper AB, Fig. 296, so nehmen die ursprünglich parallel mit der Axe laufenden Fasern eine Verdrehung oder Torsion an, deren Größe wir eben bestimmen wollen. Es sei AB, Fig. 295, eine Faser vor, und AD dieselbe Faser während der Torsion, es sei also in Folge der Torsionskraft das Ende B der Faser nach D gerückt. Ist nun l die anfängliche Länge AB, und λ die Ausdehnung derselben, also $l + \lambda$ die Länge AD während der Torsion, und ist s die entsprechende Torsion BD, so hat man nach dem pythagorischen Lehrsatze, $\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2$, d. i.: $(l + \lambda)^2 = l^2 + s^2$, oder $l^2 + 2l\lambda + \lambda^2 = l^2 + s^2$, weshalb sich annähernd $\lambda = \frac{s^2}{2l}$ setzen läßt. Ist noch F der Querschnitt einer solchen Faser, so hat man die in der Richtung der Faser nöthige Kraft zur Hervorbringung dieser Ausdehnung: $S = \frac{s^2}{2l^2} \cdot F \cdot E$. Diese Kraft oder Spannung S einer Faser ist aber nur eine Seitenkraft von der Torsionskraft R, die außerdem noch einen Normaldruck N zwischen den Fasern hervorbringt. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke RDS und BDA folgt $S : R = s : l$, daher ist $S = \frac{Rs}{l}$ und es giebt das Gleichsetzen beider Werthe für S, $R = \frac{s}{2l} F \cdot E$.

Es wächst also die Torsionskraft einer Faser wie die Torsion. Torsion (s), wie der Querschnitt (F) und umgekehrt wie die Länge (l) der Faser.

Ist r der Abstand CF des Querschnittes F von der Umdrehungsaxe C, Fig. 297, so hat man das Moment der Kraft R:

Fig. 297.



$$Rr = \frac{s}{2l} Fr \,.\, E,$$

und bezeichnet endlich α den Torsionswinkel FCF_1, um welchen jeder Faserquerschnitt verdreht ist, so hat man $s = \alpha r$, und daher

$$Rr = \frac{Fr^2}{2l} \alpha E.$$

Wenn man nun die sämmtlichen Querschnittselemente mit $F_1, F_2, F_3 \ldots$ und ihre Abstände von der Drehungsaxe mit r_1, r_2, r_3 u. s. w. bezeichnet, und annimmt, daß die Umdrehungskraft P an einem Hebelarme $CA = a$ wirkt, so hat man die Formel:

$$Pa = (F_1 r_1^2 + F_2 r_2^2 + \ldots) \frac{\alpha E}{2l};$$

oder, da sich in Uebereinstimmung mit dem Obigen, $F_1 r_1^2 + F_2 r_2^2 + \ldots$ als Maaß des Drehungsmomentes, $= W$ setzen läßt:

$$Pa = \frac{\alpha W E}{2l}.$$

Es wächst also das Torsionsmoment wie der Torsionswinkel α, wie der Elasticitätsmodul E, umgekehrt wie die Länge l des Körpers und endlich noch wie das vom Querschnitte des Körpers abhängige Maaß W des Drehungs- oder Biegungsmomentes.

Das entsprechende Arbeitsquantum ist:

$$L = \frac{P.\alpha a}{2} = \frac{\alpha^2 W E}{4l} = \frac{P^2 a^2 l}{WE}.$$

§. 217. Das Drehungsmoment W einer Fläche $BDHL$, Fig. 297, in Hinsicht auf die normale Axe C läßt sich leicht durch die Biegungsmomente W_1 und W_2 in Hinsicht auf zwei rechtwinkelige Axen $X\overline{X}$ und $Y\overline{Y}$ in der Ebene der Fläche ausdrücken. Da

$$\overline{CF}^2 = \overline{CM}^2 + \overline{CN}^2, \text{ oder } r^2 = x^2 + y^2 \text{ ist,}$$

wenn r den Abstand CF des Elementes F von der Axe C, x den Abstand $CM = NF$ desselben von der Axe $Y\overline{Y}$, und y den Abstand $CN = MF$ von der Axe $X\overline{X}$ bezeichnet, so hat man $Fr^2 = Fx^2 + Fy^2$, und auch

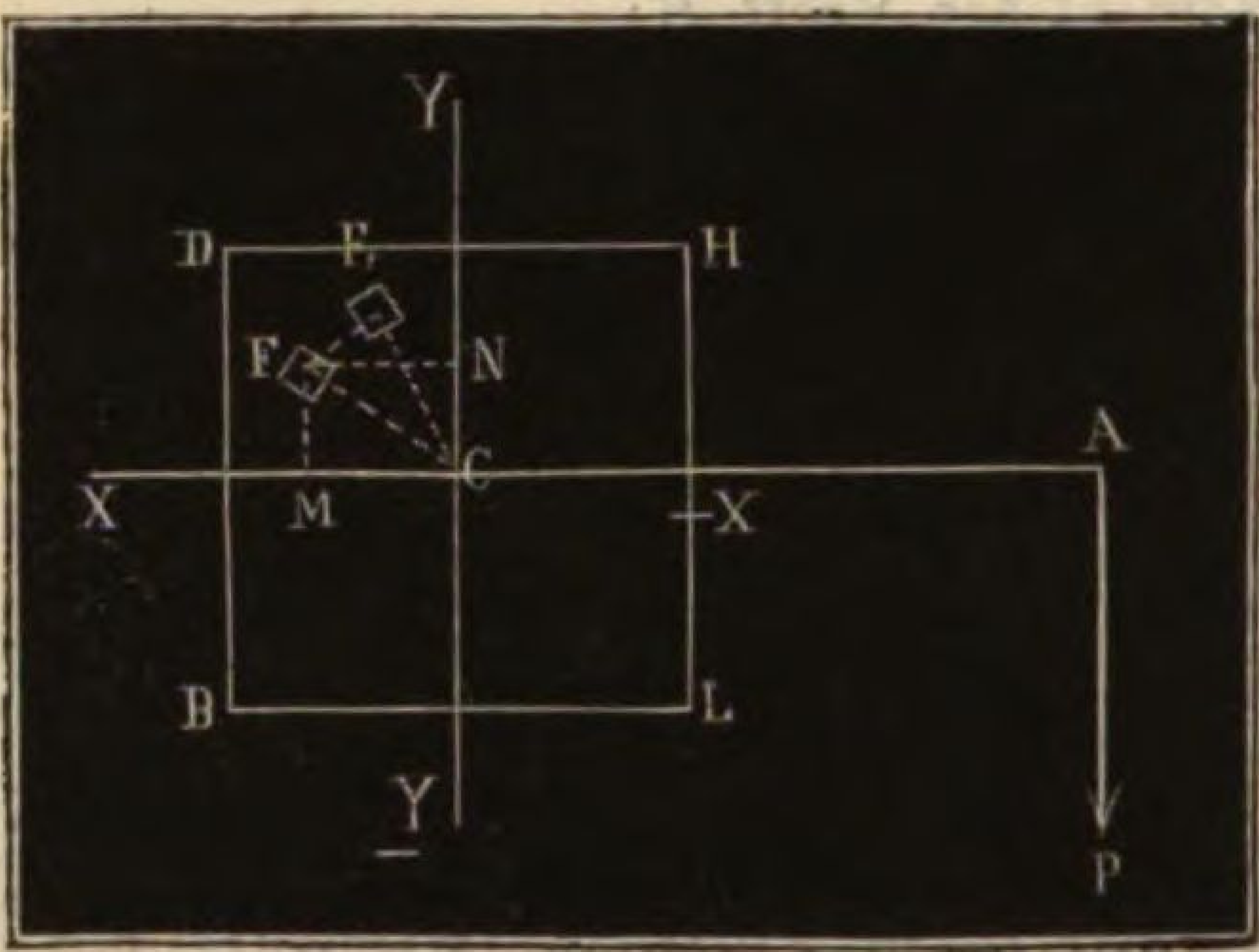
Torsion.

$$F(r_1^2+r_2^2+..) = F(x_1^2+x_2^2+..) + F(y_1^2+y_2^2+..),$$ d. i.

$$W = W_1 + W_2.$$

Für eine parallelepipedische Welle $BDHL$, Fig. 298, von der Breite $BL = DH = b$ und Höhe $AD = HL = h$ hat man nach §. 196:

Fig. 298.



$$W_1 = \frac{bh^3}{12} \text{ und } W_2 = \frac{hb^3}{12};$$

daher ist

$$W = \frac{bh^3+hb^3}{12} = (b^2+h^2)\frac{bh}{12},$$

und das Torsionsmoment für diese Welle:

$$Pa = \alpha E \,.\, \frac{(b^2+h^2)\,bh}{24\,l}.$$

Für einen quadratischen Schaft von der Seitenlänge $b = h$ ist:

$$Pa = \frac{\alpha E b^4}{12\,l} = 0{,}0833\,\frac{\alpha E b^4}{l}.$$

Fig. 299.



Für eine cylindrische Welle ABC, Fig. 299, vom Halbmesser r hat man

$$W_1 = W_2 = \frac{\pi r^4}{4}, \text{ daher}$$

$$Pa = \frac{\alpha E \pi r^4}{4\,l} = 0{,}785\,\frac{\alpha E r^4}{l}.$$

Ist die Welle hohl und sind ihre Halbmesser r_1 und r_2, so gilt die Formel

$$Pa = \frac{\alpha E \pi (r_1^4 - r_2^4)}{4\,l}.$$

Die vorstehende Theorie giebt uns von der Wahrheit etwas abweichende Torsionsmomente, weil bei ihrer Entwickelung vorausgesetzt worden ist, daß die Endflächen des Prismas, welches eine Torsion erleidet, während der Torsion eben bleiben, dieselben aber in Wirklichkeit windschief ausfallen. Nach den Untersuchungen von Saint-Venant, Wertheim u. s. w. (siehe Comptes rendus de séances de l'académie des sciences à Paris, T. 24 und T. 27) ist für einen quadratischen Schaft:

$$Pa = 0{,}841\,.\,\frac{\alpha E b^4}{16\,l} = 0{,}0526\,\frac{\alpha E b^4}{l},$$

und für eine cylindrische Welle:

$$Pa = \frac{3\pi}{16}\,\frac{\alpha E r^4}{l} = 0{,}59\,\frac{\alpha E r^4}{l}.$$

Bei Körpern, deren Querschnittsdimensionen sehr von einander abwei-

chen, fallen die Abweichungen größer aus. Z. B. für ein Parallelepiped, deſſen Höhe h die Breite vielfach übertrifft, iſt nach Saint-Venant und Cauchy: Torſion.

$$Pa = \frac{2}{0{,}841} \frac{\alpha E b^3 h}{16 l} = 0{,}149 \frac{\alpha E b^3 h}{l}.$$

Legt man die letzten Formeln von Wertheim zu Grunde und verwandelt man die Torſionsbogen α in Winkel, ſetzt alſo:

$$\alpha = \frac{\pi \alpha^0}{180} = 0{,}01745\, \alpha^0,$$

ſo läßt ſich mit Hülfe der in §. 189 mitgetheilten Werthe der Elaſticitätsmodul leicht folgende Tabelle zuſammenſtellen.

Materie der Welle.	Kreisförmiger Querſchnitt.	Quadratiſcher Querſchnitt.
Holz	$Pa = 18500 \frac{\alpha^0 r^4}{l}$	$Pa = 1650 \frac{\alpha^0 b^4}{l}$
Gußeiſen	$Pa = 175000 \frac{\alpha^0 r^4}{l}$	$Pa = 15600 \frac{\alpha^0 b^4}{l}$
Stahl und Schmiedeeiſen . . .	$Pa = 310000 \frac{\alpha^0 r^4}{l}$	$Pa = 27500 \frac{\alpha^0 b^4}{l}$

Beiſpiele. 1) Welches Umbrehungsmoment kann ein quadratiſcher Schaft aus Schmiedeeiſen von 10 Fuß Länge und 5 Zoll Stärke aufnehmen, ohne eine Torſion über ¼ Grad zu erleiden? Es iſt nach dieſer Tabelle:

$$Pa = 27500 \,.\, \tfrac{1}{4} \,.\, \frac{5^4}{10.12} = 2750 \,.\, \frac{25^2}{48} = 36000 \text{ Fußzoll} = 3000 \text{ Fußpf.}$$

2) Welche Torſion erleidet eine hohle gußeiſerne Welle von der Länge $l = 100$ Zoll und den Halbmeſſern $r_1 = 6$ Zoll und $r_2 = 4$ Zoll, durch ein Kraftmoment $Pa = 10000$ Fußpfund? Es iſt hier:

$$Pa = 175000 \frac{\alpha^0 (r_1^4 - r_2^4)}{l}, \text{ folglich}$$

$$\alpha = \frac{Pal}{175000\,(r_1^4 - r_2^4)} = \frac{10000.12.100}{175000\,(6^2+4^2)(6^2-4^2)} = \frac{12000}{175.52.20} = \frac{6^0}{91}$$
$= 4$ Minuten.

§. 218. Ueberſchreitet die Torſion eine gewiſſe Grenze, ſo werden die Faſern zerriſſen, und es wird, wie man ſagt, die Welle abgewürgt. Für den Augenblick des Zerreißens der von der Umdrehungsaxe entfernteſten Faſern iſt das Ausdehnungsverhältniß $\frac{\lambda}{l} = \frac{K}{E}$; aber $\frac{\lambda}{l}$ iſt auch $= \frac{s^2}{2 l^2}$, daher hat man für eine cylindriſche Welle, wo $s = \alpha r$ zu ſetzen iſt, Torſionsfeſtigkeit.

$$\frac{\alpha^2 r^2}{2 l^2} = \frac{K}{E}, \text{ oder } \frac{\alpha r}{l} = \sqrt{\frac{2K}{E}},$$

Torsionsfestigkeit.

und daher das Moment zum Abwürgen dieser Welle:

$$Pa = \frac{\alpha E \pi r^4}{4l} = \frac{\alpha r}{l} \cdot \frac{\pi E r^3}{4} = \sqrt{\frac{2K}{E}} \cdot \frac{\pi E r^3}{4}$$
$$= \frac{\pi r^3}{2} \sqrt{\frac{KE}{2}}.$$

Für eine quadratische Welle von der Seitenlänge b ist dagegen der Abstand der entferntesten Faser von der Axe $= b\sqrt{1/_2}$, daher

$$s = \alpha b \sqrt{1/_2},\ \frac{\lambda}{l} = \frac{\alpha^2 b^2}{4l^2} \text{ und } \frac{\alpha b}{2l} = \sqrt{\frac{K}{E}};$$

demnach ist das Moment zum Abwürgen dieser Welle:

$$Pa = \frac{\alpha E b^4}{12l} = \frac{\alpha b}{2l} \cdot \frac{Eb^3}{6} = \sqrt{\frac{K}{E}} \cdot \frac{Eb^3}{6} = \frac{b^3}{6}\sqrt{KE}.$$

Für eine hohle Welle mit den Halbmessern r_1 und r_2 ist:

$$Pa = \frac{\pi(r_1^4 - r_2^4)}{2r_1}\sqrt{\frac{KE}{2}}.$$

Da außerhalb der Elasticitätsgrenze die Proportionalität zwischen den Kräften und den von ihnen hervorgebrachten Ausdehnungen aufhört, so ist zu erwarten, daß die hier gefundenen Formeln wenigstens in quantitativer Beziehung mit den Erfahrungen nicht übereinstimmen, und deshalb nöthig, statt $\sqrt{KE}$ einen besondern, durch Versuche zu ermittelnden Werth zu setzen. Nach den Versuchen von Bramah und Rennie ist für Gußeisen $K_1 = \sqrt{\frac{KE}{2}} = 30000$ bis 66000 Pf., nimmt man den mittleren Werth und 5fache Sicherheit, so erhält man:

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{KE}{2}} = 12600,$$

und daher für runde Wellen aus Gußeisen:

$Pa = 12600\, r^3$, dagegen für quadratische:

$Pa = 1900\, b^3$.

Für Wellen aus Schmiedeeisen gelten dieselben Formeln, für solche aus Kanonenmetall nimmt man K_1 nur halb, und für solche aus Holz K_1 nur ein Zehntel so groß. Hiernach hat man also für jene:

$Pa = 6300\, r^3 = 950\, b^3$, und für diese

$Pa = 1260\, r^3 = 190\, b^3$.

Beispiele. 1) Die eiserne stehende Welle einer Turbine übt am Umfange eines auf ihr sitzenden Zahnrades von 15 Zoll Halbmesser eine Kraft von 2500 Pf. aus, welche Dicke muß man derselben geben? Es ist $Pa = 2500 \cdot 15 = 37500$, und setzen wir $r^3 = \frac{Pa}{12600} = \frac{37500}{12600} = \frac{375}{126}$, so bekommen wir $r = \sqrt[3]{\frac{375}{126}} = 1{,}44$ Zoll, daher die Wellenstärke $2r = 2{,}88$ Zoll, wofür 3 Zoll

zu nehmen sein möchte. Ist die Entfernung des Zahnrades vom Wasserrade 60 Zoll, so fällt die Verdrehung dieser Welle $= \alpha^0 = \frac{Pal}{175000\,r^4} = \frac{37500.60}{175000.1,44^4}$ $= \frac{375.6}{175.4,28} = \frac{45}{14,98} = 3^0$, also sehr bedeutend aus. 2) Bei einer vierkantigen Welle aus Fichtenholz wirkt die Kraft $P = 500$ Pf. an einem Hebelarme von 20 Fuß, während die Last an einem Hebelarme von 2 Fuß in einer nach der Axenrichtung gemessenen Entfernung $l = 10$ Fuß angreift; wie dick ist diese Welle zu machen und wie groß ist diese Verdrehung? Es ist $Pa = 500 . 20 . 12 = 120000$ Zollpf. Die Seite b der Welle ist bestimmt durch $b^3 = \frac{Pa}{190} = \frac{120000}{190} = 632$, daher $b = \sqrt[3]{632} = 8,6$ Zoll. Die Verdrehung beträgt $\alpha^0 = \frac{Pal}{1650.b^4} = \frac{120000.12.10}{1650.8,6^4} = \frac{144000}{165.547} = 1,6^0$. In der Regel läßt man kleinere Torsionen zu, und macht deshalb die Wellen viel stärker. Meist beträgt dieser Winkel noch nicht ½ Grad. Setzen wir $\alpha^0 = \frac{1}{4}^0$, so bekommen wir für diesen Fall $b^4 = \frac{1440000}{165.\frac{1}{4}} = 34950$, daher

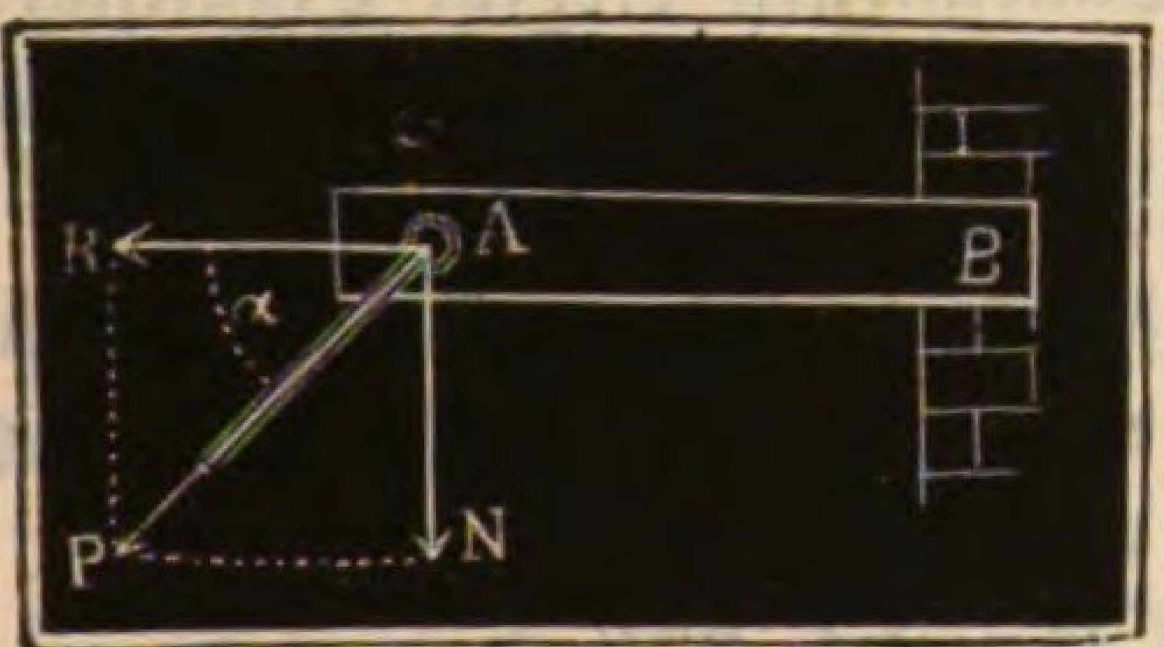
$b = \sqrt[4]{34900} = 13,5$ Zoll. Nach Gerstner soll der Torsionswinkel einer Welle nicht mehr als 0,1 Grad betragen

Torsionsfestigkeit.

§. 219. Wenn ein an einem Ende B festgehaltener Körper AB, Fig. 300, von einer Kraft P ergriffen wird, die weder in der Axenrichtung des Körpers, noch rechtwinkelig darauf wirkt, so werden zweierlei Festigkeiten, nämlich die relative und die absolute oder, nach Befinden, die rückwirkende Festigkeit, in Anspruch genommen. Schließt die Kraft P mit der verlängerten Axenrichtung des Körpers den spitzen Winkel $PAR = \alpha$ ein, so ist die von der relativen Festigkeit aufzunehmende oder die den Körper biegende Kraft $N = P\, sin.\alpha$, und die von der absoluten Festigkeit auszuhaltende, den Körper dehnende Kraft, $R = P\, cos.\alpha$. Behalten wir nun die seither gebrauchten Bezeichnungen bei, so erhalten wir für die Ausdehnung λ_1 der äußersten Faser in Folge der Wirkung von N:

Zusammengesetzte Festigkeit.

Fig. 300.



$$\frac{\lambda_1}{l} = \frac{e}{r} = \frac{Nel}{WE} = \frac{Pel\, sin.\alpha}{WE},$$

und dagegen für die Ausdehnung aller Fasern durch die Zugkraft R:

$$\frac{\lambda_2}{l} = \frac{R}{FE} = \frac{P\, cos.\alpha}{FE}.$$

Hiernach ist die ganze Ausdehnung:

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{l} = \frac{Pel\, sin.\alpha}{WE} + \frac{P\, cos.\alpha}{FE}.$$

Zusammengesetzte Festigkeit.

Soll nun $\frac{\lambda}{l}$ die Elasticitätsgrenze erreichen, so hat man $\frac{\lambda}{l} = \frac{T}{E}$, wo T den Tragmodul bezeichnet, daher

$$\frac{T}{E} = \left(\frac{e\, l\, sin.\alpha}{W} + \frac{cos.\alpha}{F}\right)\frac{P}{E}, \text{ oder}$$

$$T = \left(\frac{e\, l\, sin.\alpha}{W} + \frac{cos.\alpha}{F}\right) P \text{ sich ergiebt.}$$

Für ein Parallelepiped hat man $W = \frac{bh^3}{12}$, $F = bh$, $e = \frac{h}{2}$, daher

$$T = \left(\frac{6\, l\, sin.\alpha}{bh^2} + \frac{cos.\alpha}{bh}\right) P$$

$$= \left(\frac{6\, l\, sin.\alpha}{h} + cos.\alpha\right)\frac{P}{bh};$$

für den Cylinder hingegen stellt sich, da $e = r$, $W = \frac{\pi r^4}{4}$ und $F = \pi r^2$ ist,

$$T = \left(\frac{4\, l\, sin.\alpha}{r} + cos.\alpha\right)\frac{P}{\pi r^2} \text{ heraus.}$$

Mit Hülfe dieser Formeln kann man entweder die Kraft bestimmen, bei welcher ein Körper von gegebenen Dimensionen bis zur Elasticitätsgrenze verändert wird, oder Dimensionen berechnen, bei welchen der Körper von einer gegebenen Kraft bis zur Elasticitätsgrenze gestreckt wird.

Führen wir statt des Tragmoduls T die Sicherheitsmodul K_1 und K_2 für das Zerreißen und für das Abbrechen ein, so erhalten wir die Ausdrücke

$$bh = \left(\frac{cos.\alpha}{K_1} + \frac{6\, l\, sin.\alpha}{hK_2}\right) P \text{ und}$$

$$r^2 = \left(\frac{cos.\alpha}{K_1} + \frac{4\, l\, sin.\alpha}{rK_2}\right)\frac{P}{\pi}.$$

Für Holz ist $K_1 = 1200$ und $\frac{K_2}{6} = 200$ einzusetzen, weshalb man erhält:

$$bh = \left(\frac{cos.\alpha}{1200} + \frac{l\, sin.\alpha}{200\, h}\right) P \text{ und}$$

$$r^2 = \left(\frac{cos.\alpha}{3770} + \frac{l\, sin.\alpha}{940\, r}\right) P.$$

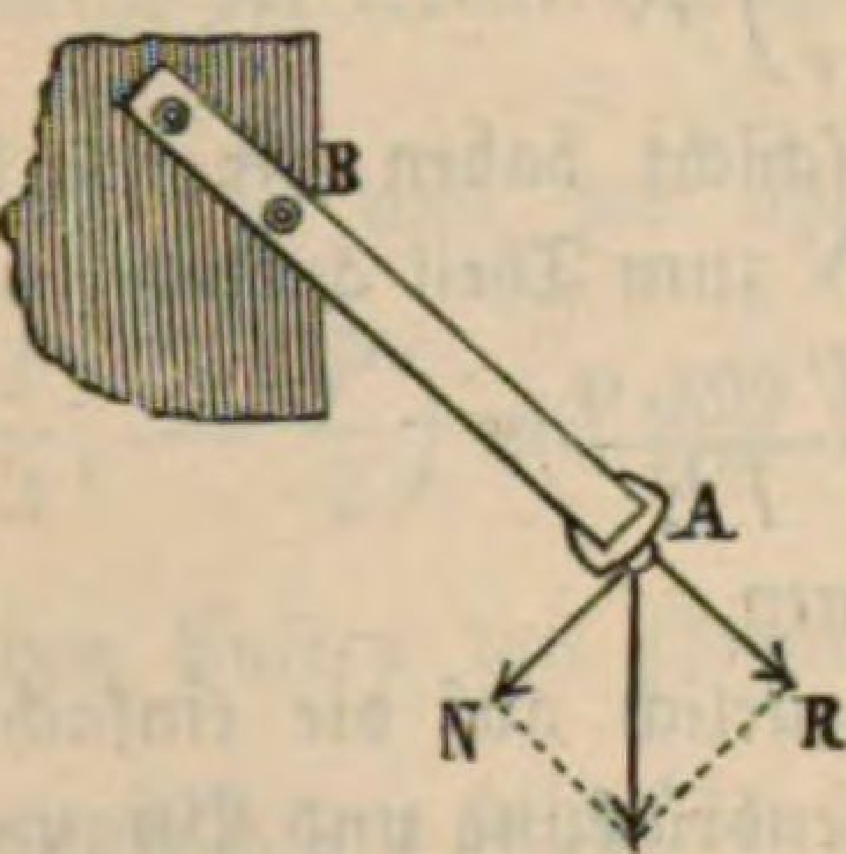
Für Gußeisen ist $K_1 = 3000$ und $\frac{1}{6}K_2 = 1700$, daher

$$bh = \left(\frac{cos.\alpha}{3000} + \frac{l\, sin.\alpha}{1700\, h}\right) P \text{ und}$$

$$r^2 = \left(\frac{cos.\alpha}{9400} + \frac{l\, sin.\alpha}{8000\, r}\right) P.$$

Beispiel. Welche Stärken muß man einem schief liegenden Balken AB, Fig. 301, aus Fichtenholz geben, wenn derselbe eine Länge von 9 Fuß und eine Neigung α_1 von 50 Grad gegen den Horizont hat und an seinem Ende A eine Last P von 6000 Pfund tragen soll? Bei dem Dimensionsverhältnisse $\frac{h}{b} = \frac{7}{5}$ hat man nach dem ersten der vorstehenden vier Ausdrücke, da hier $\alpha = 90 - \alpha_1 = 40$ ist: Zusammengesetzte Festigkeit.

Fig. 301.



$$\frac{5}{7} h^2 = \left(\frac{cos. 40}{1200} + \frac{108 \,.\, sin. 40^0}{200 h}\right) . 6000,$$

folglich

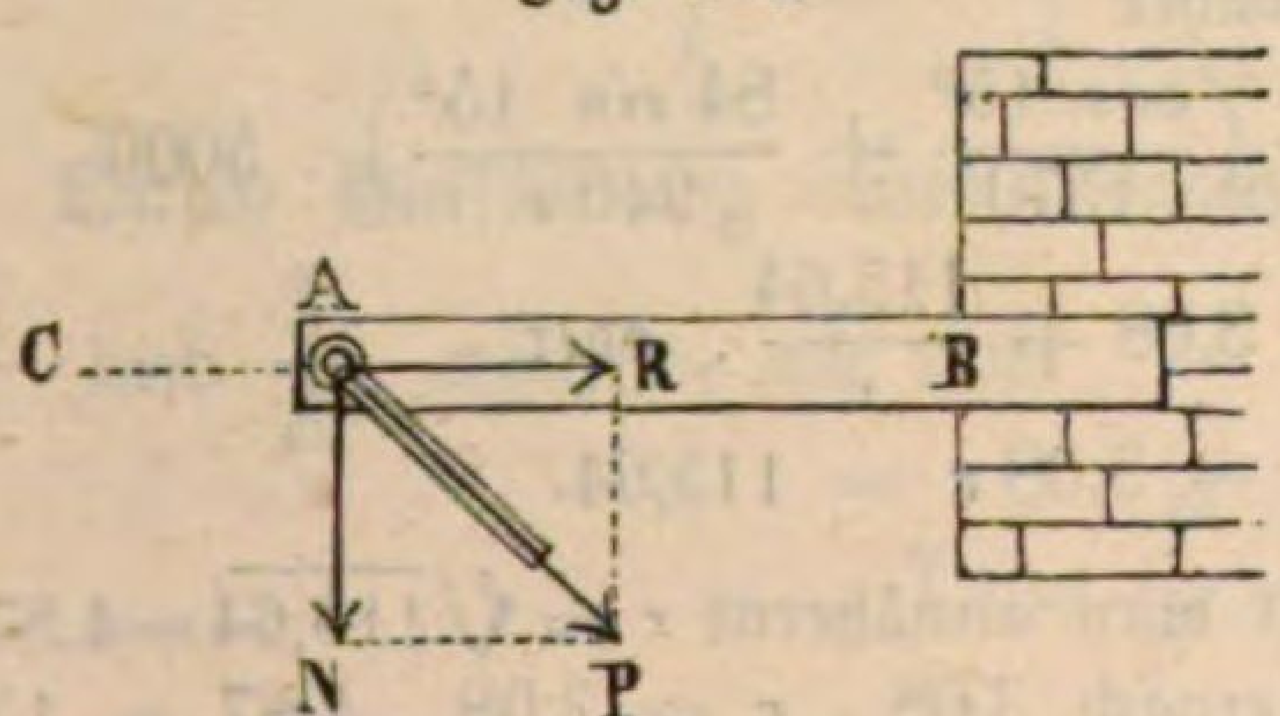
$$h^2 = \frac{7 . 30}{5}\left(\frac{0,766}{6} + \frac{108 . 0,643}{h}\right) = 5,36 + \frac{2917}{h}$$

oder $h^3 - 5,36 h = 2917$. Nimmt man annähernd $h = \sqrt[3]{2917} = 14,3$, so erhält man $5,36 . h = 77$ und nun genauer

$h = \sqrt[3]{2917 + 77} = \sqrt[3]{2994} = 14,4$ Zoll, und $b = \frac{5}{7} h = 10,31$ Zoll.

§. 220. Wenn die Richtung der Kraft P, Fig. 302, mit der Axenrichtung BC des Balkens einen stumpfen Winkel einschließt, wenn also der eine Component R dieser Kraft nach dem Befestigungspunkte B hinwirkt, so wird außer der relativen Festigkeit noch die rückwirkende Festigkeit des Balkens in Anspruch genommen; es wird nämlich der Balken durch die Kraft $N = P \, sin. \alpha$ gebogen und durch die Kraft $R = P \, cos. \alpha$ zusammengedrückt. Bezeichnen wir wieder den spitzen Winkel PAB durch α, so haben wir für die größte Zusammendrückung der untersten Faserschicht:

Fig. 302.



$$\frac{\lambda}{l} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{l} = \frac{P e l \, sin. \alpha}{WE} + \frac{P \, cos. \alpha}{FE},$$

und es stellen sich so genau dieselben Formeln heraus, wie im vorigen Paragraphen, nur müssen wir hier für K_1 den Coefficienten K_3 der rückwirkenden Festigkeit einsetzen, da der Balken in diesem Falle nicht dem Zerreißen, sondern dem Zerdrücken ausgesetzt ist.

Für Holz $K_3 = 500$ und für Gußeisen $K_3 = 20000$ eingesetzt, erhalten wir:

für Holz $bh = \left(\frac{cos. \alpha}{500} + \frac{l \, sin. \alpha}{200 h}\right) P$ und

$$r^2 = \left(\frac{cos. \alpha}{1570} + \frac{l \, sin. \alpha}{940 r}\right) P,$$

Excentrische Kraft. dagegen für Gußeisen $bh = \left(\frac{cos.\,\alpha}{20000} + \frac{l\,sin\,\alpha}{1700h}\right) P$ und

$$r^2 = \left(\frac{cos.\alpha}{62800} + \frac{l\ sin.\,\alpha}{8000\,r}\right) P.$$

Für die größte Ausdehnung der obern Fasernschicht haben wir, da die Zusammendrückung von R die Ausdehnung von N zum Theil aufhebt, nur

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{l} = \frac{Pel\ sin.\,\alpha}{WE} - \frac{P\,cos.\,\alpha}{FE},$$

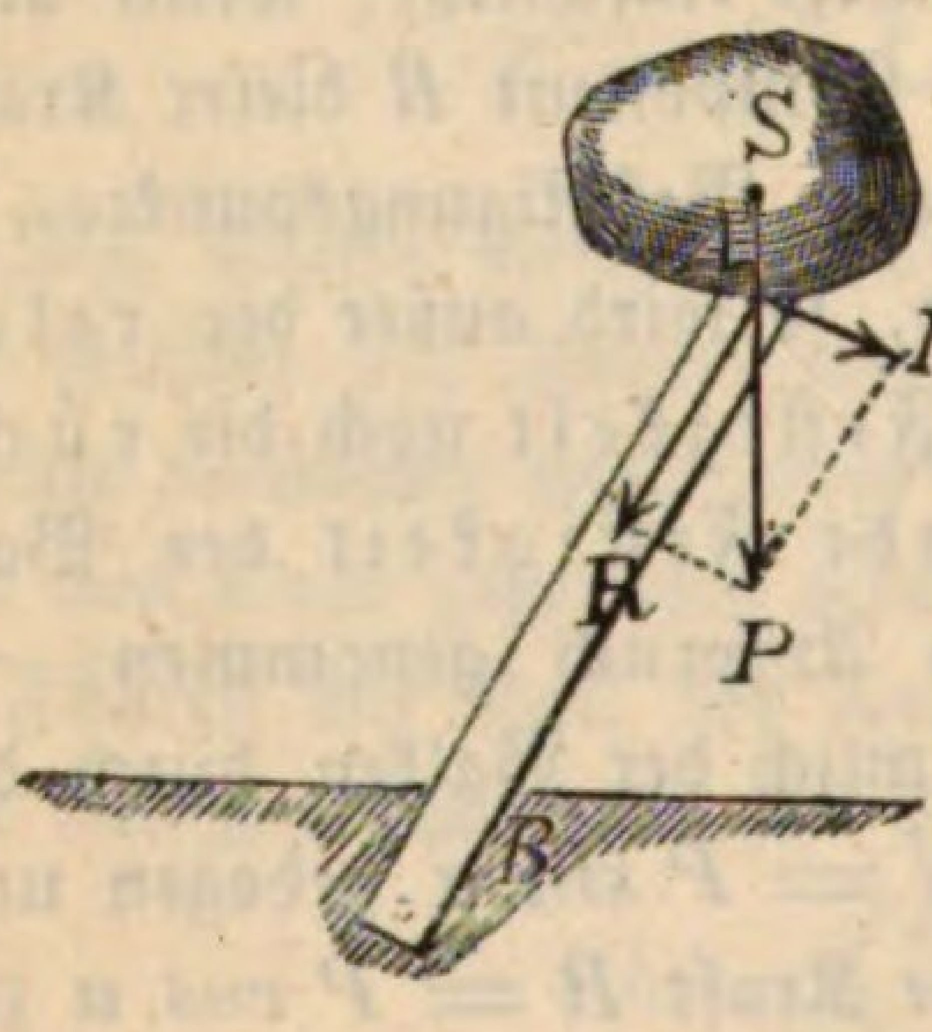
und daher hierauf nicht weiter Rücksicht zu nehmen.

Die vorstehenden Formeln reduciren sich natürlich auf die einfachen Ausdrücke für die einfache Ausdehnung, Zusammendrückung und Biegung, wenn man in ihnen $\alpha = 0$ oder 90^0, also

$$sin.\,\alpha = 0 \text{ und } cos.\,\alpha = 1, \text{ oder}$$
$$sin.\,\alpha = 1 \text{ und } cos.\,\alpha = 0 \text{ setzt.}$$

Beispiel. Welche Stärke hat man einer runden Säule AB, Fig. 303, von Tannenholz zu geben, welche bei einer Länge l von 7 Fuß und einer Neigung α_1 von 75° gegen den Horizont eine Last P von 5000 Pfund zu tragen hat? Es ist hier $\alpha = 90 - \alpha_1 = 15°$ und $l = 84$ Zoll, daher

Fig. 303.



$$r^2 = \left(\frac{cos.\,15^0}{1570} + \frac{84\,sin.\,15^0}{940\,r}\right) .\ 5000$$
$$= 3{,}08 + \frac{115{,}64}{r}, \text{ oder}$$
$$r^3 - 3{,}08\,r = 115{,}64.$$

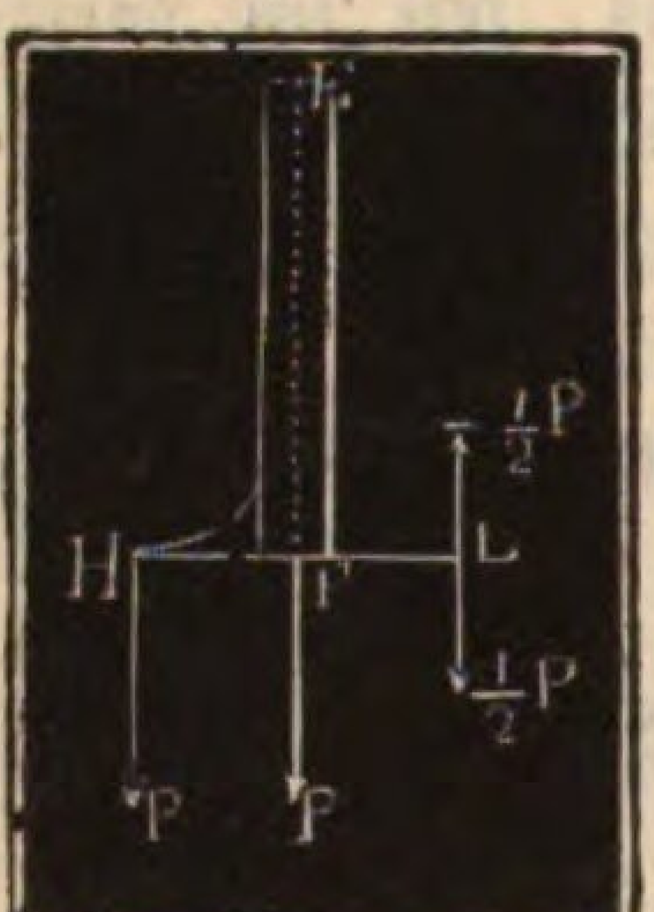
Setzt man annähernd $r = \sqrt[3]{115{,}64} = 4{,}87$, und hiernach $3{,}08\ .\ r = 3{,}08\ .\ 4{,}87 = 15$, so bekommt man schärfer

$$r = \sqrt[3]{115{,}64 + 15} = \sqrt[3]{130{,}64} = 5{,}07 \text{ Zoll},$$

und daher die gesuchte Stempelstärke $d = 2r = 10{,}15$ Zoll.

Excentrische Kräfte. §. 221. Wenn Säulen Kräfte aufnehmen, deren Richtungen nur mit den Säulenaxen parallel laufen, nicht aber mit diesen Axen zusammenfallen, so wird die zusammengesetzte Festigkeit ebenfalls in Anspruch genommen. Es sei EF, Fig. 304, eine Hängesäule mit einer excentrisch wirkenden Zugkraft P. und a der Abstand FH der Kraftrichtung von der Axenrichtung dieser Säule, übrigens aber seien die Bezeichnungen die seither stets in Anwendung gekommenen. Verlängern wir FH rückwärts, machen wir $FL = FH = a$, und denken wir uns in L noch zwei entgegengesetzte und sich selbst wieder aufhebende Kräfte $+\frac{P}{2}$ und $-\frac{P}{2}$ parallel

Fig. 304.



zu P wirkend. Aus $+\frac{P}{2}$ und der einen Hälfte von P entspringt dann eine in der Axenrichtung des Körpers ziehende Kraft $\frac{P}{2}+\frac{P}{2}=P$, und aus $-\frac{P}{2}$ und der andern Hälfte von P entspringt ein Kräftepaar $\left(\frac{P}{2}, -\frac{P}{2}\right)$ mit dem Momente Pa. Die Axenkraft P dehnt die sämmtlichen Fasern des Körpers gleichmäßig um $\frac{\lambda_1}{l}=\frac{P}{FE}$ aus, das Kräftepaar hingegen dehnt die Fasern auf der einen Seite aus und drückt dieselben auf der andern Seite zusammen, und es ist die von demselben hervorgebrachte größte Ausdehnung oder Zusammendrückung Zusammengesetzte Festigkeit.

$$\frac{\lambda_2}{l}=\frac{Pae}{WE}.$$

Durch Addition bekommen wir nun die größte Ausdehnung der von der neutralen Axe der Säule am meisten abstehenden Faser:

$$\frac{\lambda}{l}=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{l}=\frac{P}{FE}+\frac{Pae}{WE}.$$

Durch Einführung eines Tragmoduls T oder durch Gleichsetzen von $\frac{\lambda}{l}$ und $\frac{T}{E}$, erhalten wir nun

$$T=\frac{P}{F}+\frac{Pae}{W}.$$

Für eine parallelepipedische Säule ist, wenn a in der Ebene bh liegt,

$$bh=\left(1+\frac{6a}{h}\right)\frac{P}{T},$$

und für eine cylindrische Säule

$$r^2=\left(1+\frac{4r}{h}\right)\frac{P}{\pi T}.$$

Führt man aber, um der praktischen Anwendung mehr zu entsprechen, statt des Tragmoduls, Sicherheitscoefficienten K_1 und K_2 ein, so erhält man die Ausdrücke

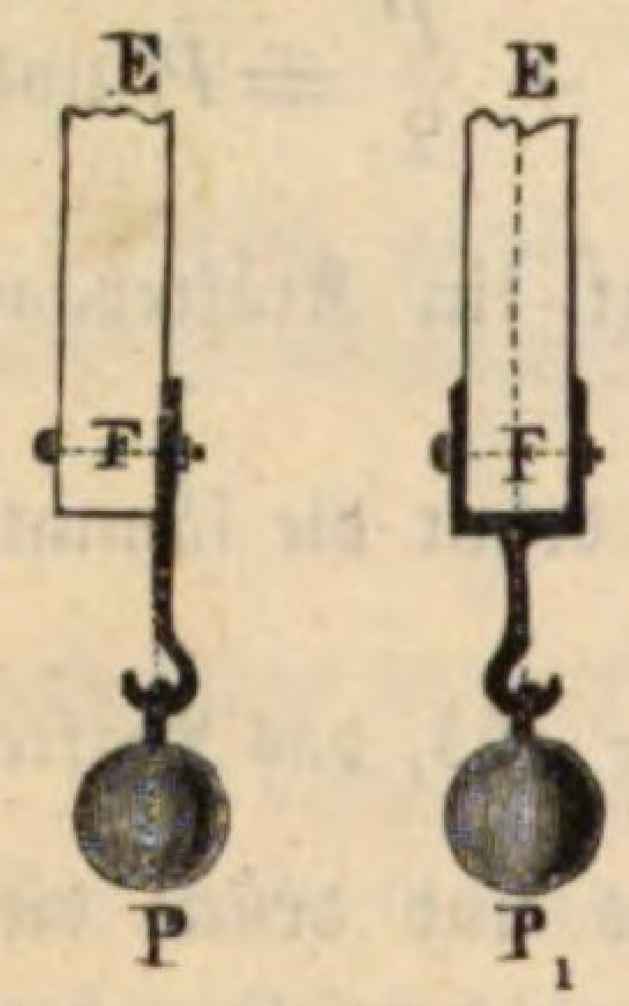
$$bh=\left(\frac{1}{K_1}+\frac{6a}{K_2h}\right)P \text{ und}$$

$$r^2=\left(\frac{1}{K_1}+\frac{4.a}{K_2r}\right)\frac{P}{\pi}.$$

Es läßt sich hiernach ermessen, daß durch die excentrische Wirkung einer Zugkraft P, Fig. 305 (a. folg. S.), die Festigkeit weit stärker in An-

Excentrische Kräfte. spruch genommen wird, als durch eine Zugkraft P_1, Fig. 306, in der Axenrichtung EF. Wirkt z. B. die Kraft am Umfange einer parallelepipedischen Säule, und zwar im Abstande $\frac{h}{2}$ von der Axe, so hat man

Fig. 305. Fig. 306.



$$b h = (1+3)\,\frac{P}{T},\ \text{daher}\ P = \frac{b h T}{4};$$

es ist also die Tragkraft P in diesem Falle nur ein Viertel von der Kraft, welche die Säule auszuhalten vermag, wenn ihr Angriffspunkt in die Axe der Säule fällt.

Für eine cylindrische Säule mit einer am Umfange derselben angreifenden Zugkraft ist $a = r$ und daher

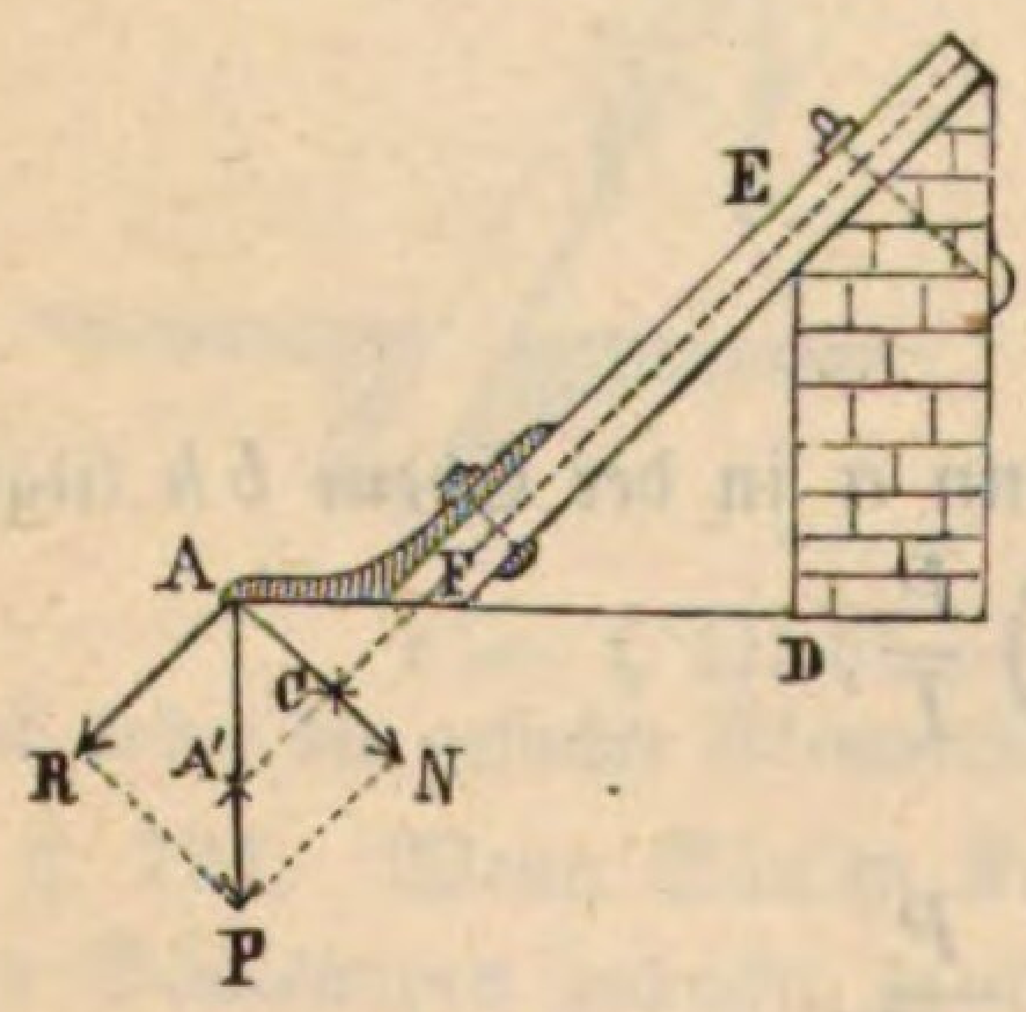
$$r^2 = (1+4)\,\frac{P}{\pi T},\ \text{d. i.}\ P = \tfrac{1}{5}\pi r^2 T,$$

also die Tragkraft nur ein Fünftel von der unmittelbar in der Axe ziehenden Kraft.

§. 222. Wirkt die Kraft P, Fig. 307, schief und excentrisch zugleich auf einen Balken EF, so erleiden dessen äußerste Fibern eine dreifache Ausdehnung. Der Component

$$N = P \sin.\alpha$$

Fig. 307.



dieser Kraft, welcher rechtwinkelig gegen die Axe EF des Balkens wirkt, bringt die gewöhnliche Biegung hervor, und der Component $R = P \cos.\alpha$ bewirkt eine Dehnung und Biegung, wie wir sie bereits im vorigen Paragraphen kennen gelernt haben. Die größte Ausdehnung, welche $N = P \sin.\alpha$ bewirkt, ist

$$\frac{\lambda_1}{l} = \frac{N e l}{W E} = \frac{P e l \sin.\alpha}{W E},$$

die Ausdehnungen der Kraft $R = P \cos.\alpha$ aber sind

$$\frac{\lambda_2}{l} = \frac{R}{F E} = \frac{P \cos.\alpha}{F E}\ \text{und}$$

$$\frac{\lambda_3}{l} = \frac{R e a}{W E} = \frac{P e a \cos.\alpha}{W E},$$

wofern nur a der Normalabstand AC des Angriffspunktes A von der Axenrichtung des Körpers und l das durch N von der Axe des Balkens abgeschnittene Stück EC bezeichnet, α, e u. s. w. aber die alten Bedeutungen behalten.

Hiernach folgt die größte Ausdehnung, und zwar der äußersten Faserschicht Excentrische Kraft.

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{l} = \left[\frac{e\,l\,sin.\alpha}{W} + \left(\frac{e\,a}{W} + \frac{1}{F}\right) cos.\alpha\right]\frac{P}{E};$$

und da für den Fall, daß mit dieser Ausdehnung die Elasticitätsgrenze erreicht wird, $\frac{\lambda}{l} = \frac{T}{E}$ ist, so erhält man für den Tragmodul

$$T = \left[\frac{e\,l\,sin.\alpha}{W} + \left(\frac{e\,a}{W} + \frac{1}{F}\right) cos.\alpha\right] P.$$

Ist der Balken parallelepipedisch, und führt man statt T einen Sicherheitsmodul (K_1) für das Zerreißen und einen für das Zerbrechen (K_2) ein, so erhält man für dessen Querschnitt den Ausdruck

$$bh = \left(\frac{cos.\alpha}{K_1} + \frac{6\,(l\,sin.\alpha + a\,cos.\alpha)}{h\,K_2}\right) P.$$

Denselben Ausdruck würden wir auch erhalten haben, wenn wir uns den Angriffspunkt A der Kraft nach A_1, in die Axenrichtung des Körpers verlegt gedacht und dann in den Formeln des §. 219 statt l, $A_1E = l_1$, also statt $l\,sin.\,\alpha$, $AD = l_1\,sin.\,\alpha$ eingeführt hätten. Thun wir das letztere, so erhalten wir die Formel

$$bh = \left(\frac{cos.\alpha}{K_1} + \frac{6\,l_1\,sin.\alpha}{h\,K_2}\right) P,$$

daher für Holz

$$bh = \left(\frac{cos.\alpha}{1200} + \frac{l_1\,sin.\alpha}{200\,h}\right) P,$$

und für Gußeisen

$$bh = \left(\frac{cos.\alpha}{3000} + \frac{l_1\,sin.\alpha}{1700\,h}\right) P.$$

Beispiel. Wenn der Angriffspunkt der Kraft $P = 6000$ Pfd. des im Beispiele zu §. 219 angegebenen Balkens, für welchen $l = 108$ Zoll, $\alpha = 40^0$, und $\frac{h}{b} = {}^7\!/_5$ ist, um $a = 20$ Zoll von der Axe dieses Balkens absteht, so hat man nach einer der letzten Formeln

$$^5\!/_7\,h^2 = \left(\frac{cos.\,40^0}{1200} + \frac{108\,sin.\,40 + 20\,cos.\,40^0}{200\,h}\right) .\,6000, \text{ oder}$$

$$h^2 = \frac{7\,.\,30}{5}\left(\frac{0{,}766}{6} + \frac{69{,}4 + 15{,}3}{h}\right) = 5{,}36 + \frac{3557}{h}, \text{ also}$$

$$h^3 - 5{,}36\,h = 3557.$$

Hiernach ist annähernd $h = \sqrt[3]{3557} = 15{,}3$ Zoll, daher genauer

$h = \sqrt[3]{3557 + 5{,}36\,.\,15{,}3} = \sqrt[3]{3639} = 15{,}38$ Zoll und

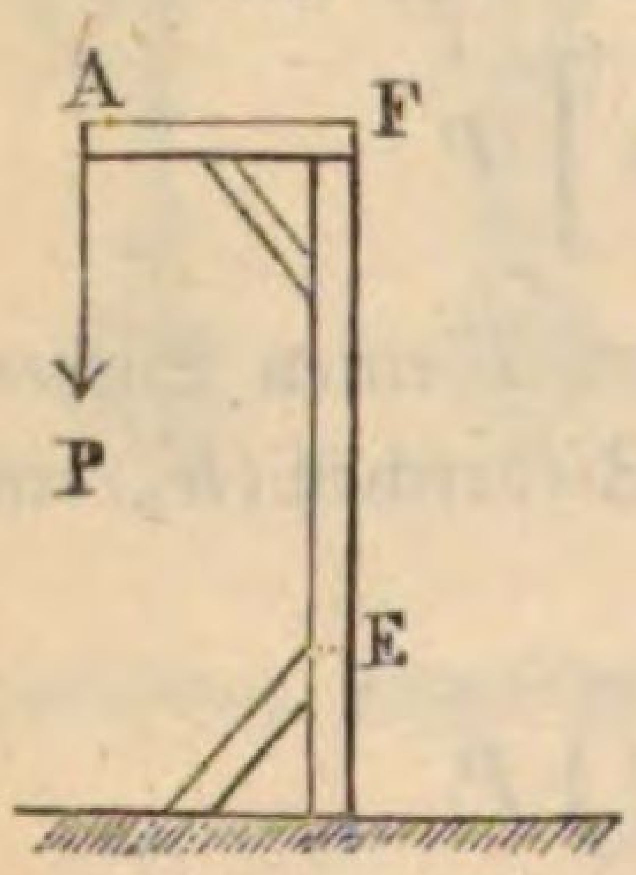
$b = {}^5\!/_7\,h = 10{,}98$ Zoll.

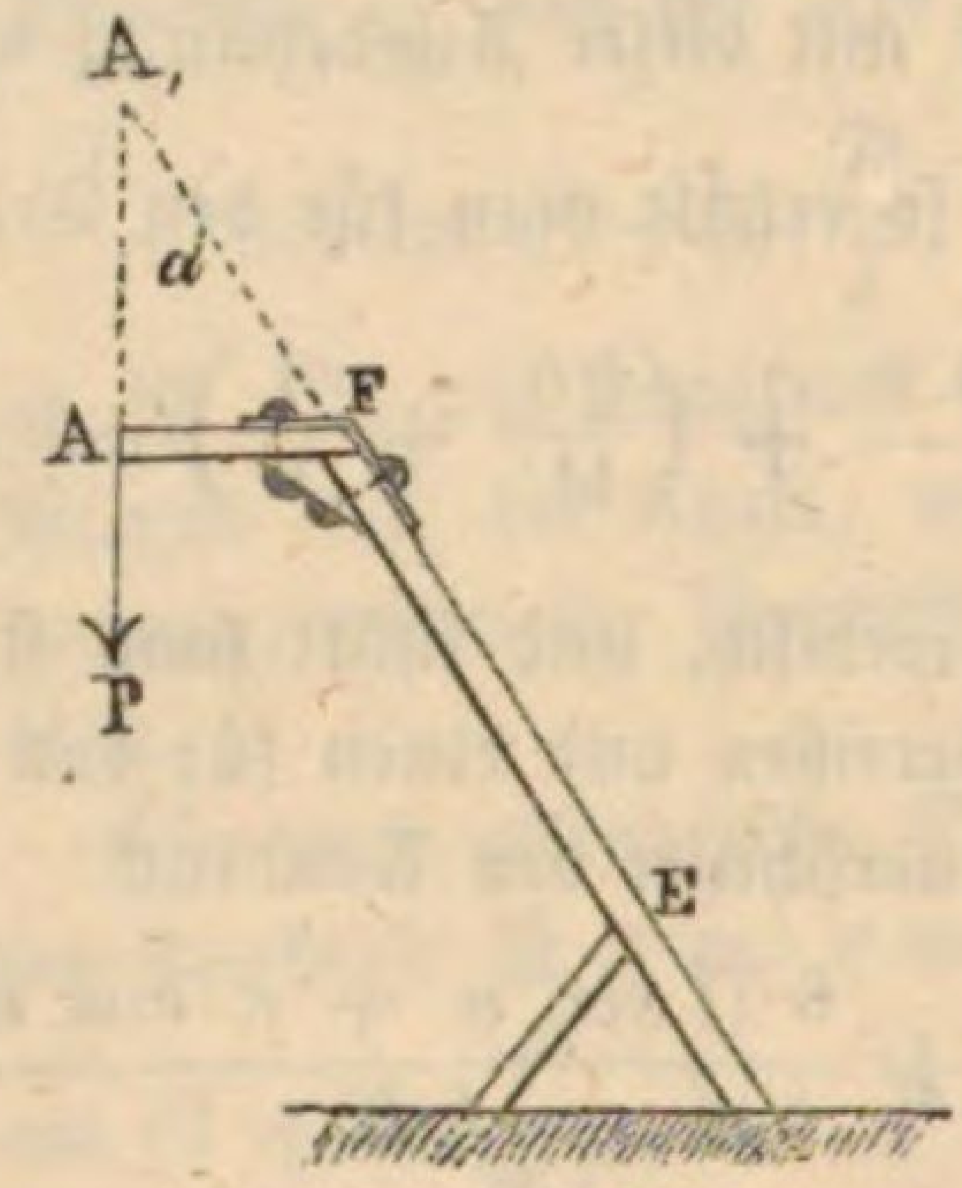
Säulen. §. 223. Für Trag- oder Standsäulen, wie EF, Fig. 308, 309 und 310, lassen sich ähnliche Formeln angeben, wie im Vorstehenden für Hängesäulen.

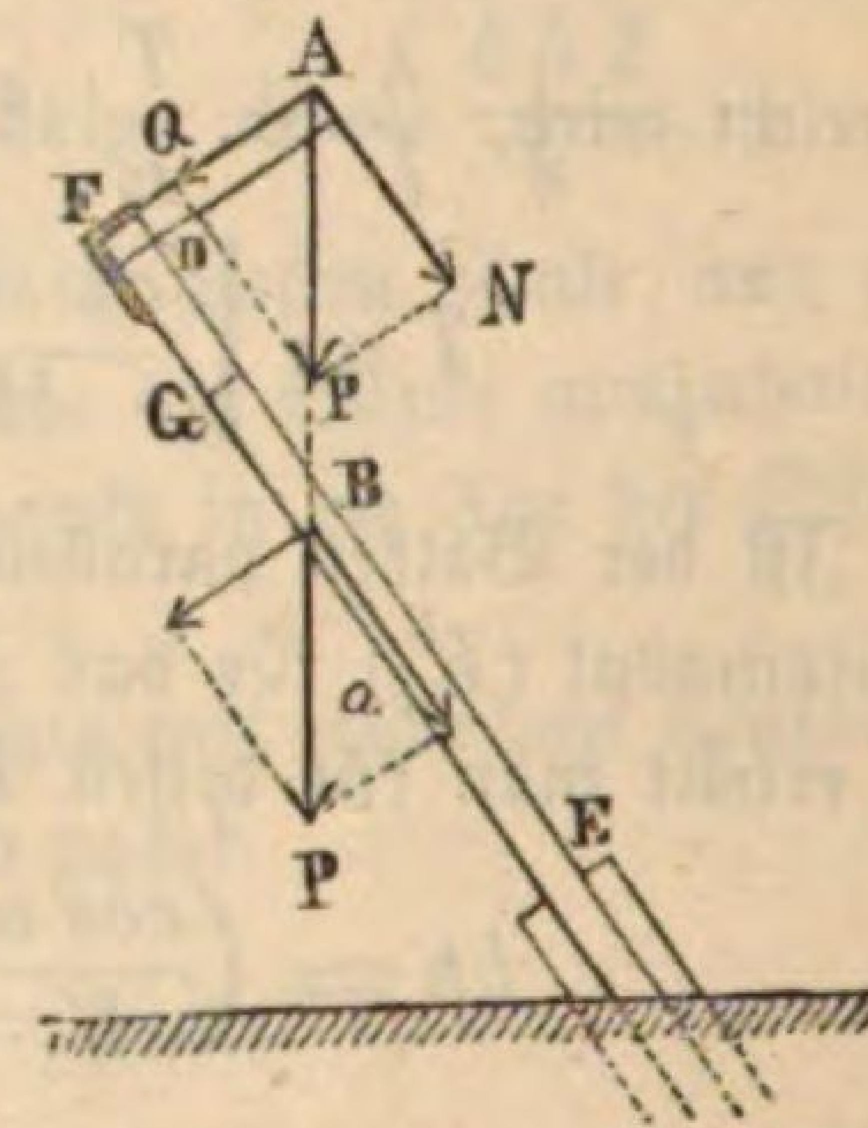
Fig. 309.

Fig 310.

Fig. 308.







Bei der vertikalen Säule EF, Fig. 308, hat man statt der Ausdehnungskraft eine Zusammendrückungskraft P, übrigens aber noch ein Kräftepaar, welches die bekannte Biegung oder einseitige Ausdehnung und Zusammendrückung hervorbringt, in Betracht zu ziehen; es ist daher die größte Zusammendrückung

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{P}{FE} + \frac{Pae}{WE},$$

und hiernach genau wie im §. 221

$$T = \frac{P}{F} + \frac{Pae}{W},$$

folglich für ein Parallelepiped

$$bh = \left(1 + \frac{6a}{h}\right)\frac{P}{T},$$

und für einen Cylinder

$$r^2 = \left(1 + \frac{4r}{h}\right)\frac{P}{T};$$

oder, wenn man die Sicherheitsmodul K_2 für das Abbrechen und K_3 für das Zerdrücken einführt:

$$bh = \left(\frac{1}{K_3} + \frac{6a}{K_2 h}\right) P \text{ und}$$

$$r^2 = \left(\frac{1}{K_3} + \frac{4a}{K_2 r}\right)\frac{P}{\pi}.$$

Steht die Säule schief, wie in Fig. 309, schließt also die Kraftrichtung mit der Axenrichtung einen Winkel $PA_1F = \alpha$ ein, so tritt im Wesentlichen wieder der Fall in Fig. 307 ein, nur hat man es hier mit einer

Zusammendrückung zu thun und daher statt K_1 den Coefficienten K_3 des Zerdrückens einzuführen. Es gelten daher hier die Formeln Säulen.

$$bh = \left(\frac{cos.\alpha}{K_3} + \frac{6\,(l\,sin.\alpha + a\,cos.\alpha)}{hK_2}\right) P \text{ und}$$

$$r^2 = \left(\frac{cos.\alpha}{K_3} + \frac{4\,(l\,sin.\alpha + a\,cos.\alpha)}{rK_2}\right) \frac{P}{\pi}.$$

In dem Falle, welcher Fig. 310 abgebildet ist, müssen wir in den letzten Formeln $FA = a$ negativ, oder statt $l_1 sin.\alpha = l\,sin.\alpha + a\,cos.\alpha$, $l_1 sin.\alpha = BE\,sin.\alpha = l\,sin.\alpha - a\,cos.\alpha$ setzen. Wir erhalten so die Formeln für das Abbrechen an der Befestigungsstelle E:

$$bh = \left(\frac{cos.\alpha}{K_3} + \frac{6\,(l\,sin.\alpha - a\,cos.\alpha)}{hK_2}\right) P,$$

$$r^2 = \left(\frac{cos.\alpha}{K_3} + \frac{4\,(l\,sin.\alpha - a\,cos.\alpha)}{rK_2}\right) \frac{P}{\pi}.$$

Für das Abbrechen in dem Punkte B, wo die Kraftrichtung durch die Säulenaxe geht, ist der Hebelarm von $P =$ Null, und daher nur

$$bh = \frac{P\,cos.\alpha}{K_3} \text{ und } r^2 = \frac{P\,cos.\alpha}{\pi K_3}.$$

Für eine Stelle G zwischen B und F ist, wenn $FG = l_2$ gesetzt wird,

$$bh = \left(\frac{cos.\alpha}{K_3} - \frac{6\,(a\,cos.\alpha - l_2\,cos.\alpha)}{hK_2}\right) P \text{ u. s. w.,}$$

und endlich für das Abbrechen des Armes oder Schnabels AF in F ist wenn b_1 und h_1 die Querschnittsdimensionen desselben sind,

$$b_1 h_1 = \left(\frac{sin.\alpha}{K_3} + \frac{6\,a\,cos.\alpha}{h_1 K_2}\right) P.$$

Beispiel. Welche Querschnittsdimensionen sind den Hölzern galgenartiger Gerüste in Fig. 310 zu geben, wenn die Last $P = 7500$ Pfd., die Balkenlänge $EF = l = 20$ Fuß, die Armlänge $FA = a = 5$ Fuß, und der Neigungswinkel α_1 der Säule gegen den Horizont $= 70^0$ ist? Ist der Querschnitt der Säule kreisförmig, so erhalten wir für den Halbmesser derselben in E:

$$r^2 = \left(\frac{cos.\,20^0}{1570} + \frac{240\,sin.20^0 - 60\,cos.20^0}{940\,r}\right).7500 = 4,5 + \frac{25,70\,.\,750}{94r},$$

daher $r^3 - 4,5\,r = 205$, und hieraus annähernd

$$r = \sqrt[3]{205} = 5,9, \text{ und genauer}$$

$$r = \sqrt[3]{231} = 6,14 \text{ Zoll, also die Stärke} = 12,28 \text{ Zoll.}$$

An der Stelle B, und zwar $x = 60\,cotg.\,20^0 = 165$ Zoll über E ist r^2 nur $= \frac{P\,cos.\,\alpha}{\pi K_3} = 4,5$, daher $r = 1,65$, also die Stärke $= 2,3$ Zoll nöthig, endlich ist für den Querschnitt des Schnabels AF, wenn wir $h_1 = {}^7/_5\, b_1$ nehmen,

$$^5/_7\, h_1{}^2 = \left(\frac{sin.\,20^0}{1570} + \frac{60\,cos.\,20^0}{940\,h_1}\right).\,7500$$

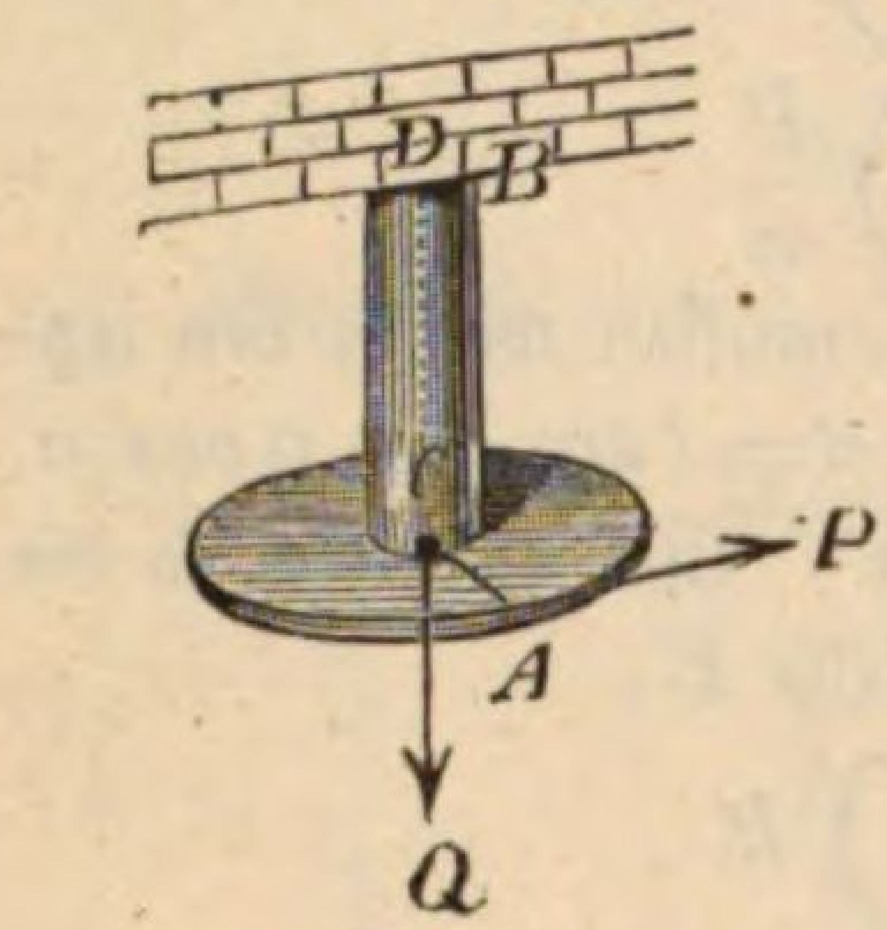
$$= 1,63 + \frac{450}{h_1}, \text{ daher}$$

$$h_1{}^3 - 2,28\,h_1 = 630, \text{ woraus nun}$$

$$h_1 = 8,66 \text{ Zoll und } b_1 = 6,19 \text{ Zoll folgt.}$$

Säulen. §. 224. Wenn eine Säule CD, Fig. 311, von einer Axenkraft Q und von einer an einem Hebelarme $CA = a$ wirkenden Umdrehungskraft P zugleich ergriffen wird, so findet eine Zusammensetzung der absoluten und der Torsionselasticität statt, indem sich die Ausdehnungen, welche beide Kräfte hervorbringen, vereinigen. Es ist die Ausdehnung, welche Q gleichmäßig im ganzen Querschnitte von CD bewirkt, $\frac{\lambda_1}{l} = \frac{Q}{FE}$, und dagegen die Ausdehnung, welche die Torsionskraft am Umfange von CD hervorbringt, da der Torsionsbogen nach §. 216

Fig. 311.



$\alpha = \frac{2\,Pal}{WE}$, also $s = e\alpha = \frac{2\,Pael}{WE}$ und $\lambda_1 = \frac{s^2}{2l} = \frac{(e\alpha)^2}{2l}$ ist, $\frac{\lambda_2}{l} = 2\left(\frac{Pae}{WE}\right)^2$; daher die vollständige oder Maximal-Ausdehnung

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{l} = \frac{Q}{FE} + 2\left(\frac{Pae}{WE}\right)^2.$$

Setzen wir jetzt $\frac{\lambda}{l} = \frac{T}{E}$, so erhalten wir für diesen Fall der zusammengesetzten Festigkeit

$$T = \frac{Q}{F} + \frac{2}{E}\left(\frac{Pae}{W}\right)^2.$$

Für eine parallelepipedische Säule ist

$$F = bh,\ W = (b^2+h^2)\frac{bh}{12} \text{ und } e = \tfrac{1}{2}\sqrt{b^2+h^2},$$

daher folgt hier

$$T = \frac{Q}{bh} + \frac{2}{E}\,\frac{P^2a^2(b^2+h^2)}{4\,(b^2+h^2)^2\,\frac{b^2h^2}{144}} = \frac{Q}{bh} + \frac{72\,P^2a^2}{(b^2+h^2)\,b^2h^2E},$$

und hiernach

$$bh = \frac{Q}{T} + \frac{72\,P^2a^2}{(b^2+h^2)\,bhE},$$

oder, wenn man statt T zwei Sicherheitscoefficienten, einen, nämlich K_1, für das Zerreißen, und einen zweiten, nämlich $\sqrt{EK} = K_4$ für die Torsionsfestigkeit annimmt, so erhält man

$$bh = \frac{Q}{K_1} + \frac{72\,P^2a^2}{(b^2+h^2)\,bhK_4^2}.$$

Für einen Cylinder ist $F = \pi r^2$, $W = \frac{\pi r^4}{2}$ und $e = r$, daher

$$r^2 = \frac{Q}{\pi K_1} + \frac{8\,P^2a^2}{\pi^2r^4K_4^2}.$$

Durch Substitution der gegebenen Werthe von K_1 und K_4 erhalten wir nun folgende Ausdrücke: Säulen.

1) für Holz, bei quadratischem Querschnitte, wo $h = b$ ist,

$$b^6 = \frac{Q b^4}{1200} + \left(\frac{Pa}{190}\right)^2,$$

und bei kreisförmigem Querschnitte

$$r^6 = \frac{Q r^4}{3770} + \left(\frac{Pa}{1260}\right)^2.$$

2) für Gußeisen im ersten Falle:

$$b^6 = \frac{Q b^4}{3000} + \left(\frac{Pa}{1900}\right)^2, \text{ und im zweiten}$$

$$r^6 = \frac{Q r^4}{9400} + \left(\frac{Pa}{12600}\right)^2.$$

Wirkt die Axenkraft zusammendrückend, so hat man die Ausdehnung am äußeren Umfange

$$\frac{\lambda}{l} = 2\left(\frac{Pae}{WE}\right)^2 - \frac{Q}{FE} \text{ und daher } T = \frac{2}{E}\left(\frac{Pae}{W}\right)^2 - \frac{Q}{F},$$

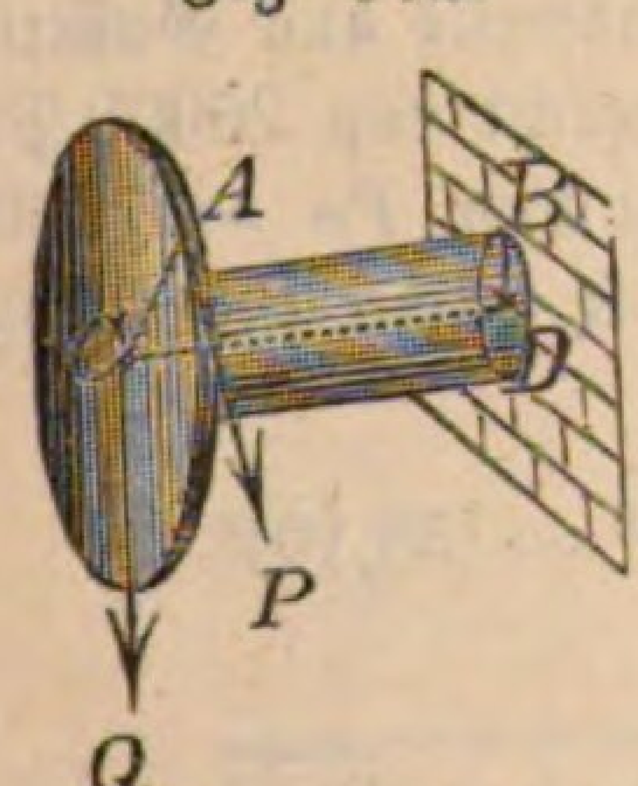
und dagegen die Zusammendrückung im Kerne

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{Q}{FE}, \text{ folglich } T = \frac{Q}{F}, \text{ oder } F = \frac{Q}{K_3}.$$

Es wirkt also hier jedenfalls die Axenkraft der Torsion entgegen.

§. 225. Liegende Radwellen haben nicht allein das Gewicht der Räder, sondern auch die Umdrehungskräfte derselben aufzunehmen, und müssen deshalb nicht allein durch ihre relative, sondern auch durch ihre Torsionsfestigkeit widerstehen. Denken wir uns, um die Verhältnisse des Zusammenwirkens dieser zwei Kräfte zu erforschen, einen prismatischen Körper *CDB*, Fig. 312, welcher an einem Ende *BD* festgehalten wird, und am anderen Ende *C* zwei Kräfte *P* und *Q* aufnimmt, von denen die eine als Umdrehungskraft am Hebelarme $CA = a$ wirkt, die andere aber als Biegungskraft in der Axe *CD* des Körpers selbst angreift. Es ist, nach dem Vorhergehenden, die von der ersten Kraft hervorgebrachte Ausdehnung Wellen

Fig. 312.



$$\frac{\lambda_1}{l} = 2\left(\frac{Pae}{WE}\right)^2, \text{ und, nach dem Frühern, die der}$$

zweiten Kraft entsprechende Ausdehnung:

$$\frac{\lambda_2}{l} = \frac{Q e_1 l}{W_1 E}, \text{ und daher die größte Ausdehnung:}$$

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{l} = 2\left(\frac{Pae}{WE}\right)^2 + \frac{Q e_1 l}{W_1 E}, \text{ und}$$

$$T = \frac{2}{E}\left(\frac{Pae}{W}\right)^2 + \frac{Q e_1 l}{W_1}.$$

Wellen. folglich für einen parallelepipedischen Balken, da hier $W = \frac{(b^2+h^2)bh}{12}$

und $e = \frac{\sqrt{b^2+h^2}}{2}$, ferner $W_1 = \frac{bh^3}{12}$ und $e_1 = \frac{h}{2}$ ist,

$$T = \frac{72\,P^2a^2}{(b^2+h^2)\,b^2h^2E} + \frac{6\,Ql}{bh^2},$$

und für einen Cylinder, wo $W = \frac{\pi r^4}{2}$, $W_1 = \frac{\pi r^4}{4}$ und $e = e_1 = r$ ist,

$$T = \frac{8\,P^2a^2}{\pi^2 r^6 E} + \frac{4\,Ql}{\pi r^3}.$$

Führt man zweierlei Sicherheitscoefficienten K_2 und K_4 ein, so erhält man im ersten Falle

$$(bh)^3 = \frac{6\,Qlb^2h}{K_2} + \frac{72\,P^2a^2}{\left(\frac{b}{h}+\frac{h}{b}\right)K_4},$$

und im zweiten

$$r^6 = \frac{4\,Qlr^4}{\pi K_2} + \frac{8\,P^2a^2}{\pi^2 K_4}.$$

Hiernach für Holz, wenn man noch $b = h$ setzt:

$$b^6 = \frac{Ql}{200}b^3 + \left(\frac{Pa}{190}\right)^2 \text{ und}$$

$$r^6 = \frac{Ql}{940}r^3 + \left(\frac{Pa}{1260}\right)^2;$$

dagegen für Gußeisen:

$$b^6 = \frac{Ql}{1700}b^3 + \left(\frac{Pa}{1900}\right)^2 \text{ und}$$

$$r^6 = \frac{Ql}{8000}r^3 + \left(\frac{Pa}{12600}\right)^2.$$

Beispiel. Welche Stärke muß eine cylindrische Radwelle aus Gußeisen erhalten, wenn dieselbe eine Länge von 10 Fuß hat, ein Gewicht von 20000 Pfd. und ein Kraftmoment von 40000 Fußpf. besitzt. Wir haben hier $Pa = 20000$, und Ql, wenn wir annehmen, daß jeder der Stützpunkte die Hälfte des Radgewichtes trägt $= 10000 \cdot 60 = 600000$, daher

$$r^6 = \frac{600000}{8000}r^3 + \left(\frac{40000\cdot 12}{12600}\right)^2, \text{ d. i. } r^6 - 75\,r^3 = (38{,}10)^2$$

und nun (nach Ingenieur S. 125)

$$r = \sqrt[3]{37{,}5 + \sqrt{(37{,}5)^2 + (38{,}1)^2}} = \sqrt[3]{37{,}5 + \sqrt{2857}}$$

$$= \sqrt[3]{90{,}95} = 4{,}5, \text{ also die Wellenstärke}$$

$$d = 2r = 9 \text{ Zoll.}$$

Aus dem Radgewicht allein folgt

$$r = \sqrt[3]{75} = 4{,}22, \text{ also } d = 8{,}44 \text{ Zoll},$$

und aus der Umdrehungskraft allein

$$r = \sqrt[3]{38{,}10} = 3{,}36 \text{ Zoll.}$$

Schlußanmerkung. Obgleich über keinen Gegenstand der Mechanik bis jetzt so viele Versuche angestellt worden sind, als über die Elasticität und Festigkeit, so bleibt doch noch Vieles zu untersuchen und manche Unsicherheit zu beseitigen übrig. Wir haben Versuche hierüber von Ardant, Banks, Barlow, Bevan, Brix, Buffon, Burg, Duleau, Ebbels, Eytelwein, Finchan, Gerstner, Girard, Gauthey, Fairbairn und Hodgkinson, Lagerjhelm, Muſſchenbroek, Morveau, Navier, Rennie, Rondelet, Tredgold, Wertheim u. s. w. Die älteren Versuche werden sehr ausführlich abgehandelt in Eytelwein's Handbuch der Statik fester Körper, Bd. II., nächstdem in von Gerstner's Handbuch der Mechanik, Bd. I. Eine umfänglichere Abhandlung über diesen Gegenstand liefert auch Burg im 19ten und 20sten Bande der Jahrbücher des polytechn. Instituts zu Wien. Man findet in diesen Schriften zum Theil auch abweichende Theorien abgehandelt. Der Versuche von Brix und Lagerhjelm ist schon oben (S. 250) gedacht worden. Eine einfache Theorie der Biegung von Brix findet man in der Abhandlung »elementare Berechnung des Widerstandes prismatischer Körper gegen die Biegung«, welche aus den Verhandlungen des preußischen Gewerbevereins besonders abgedruckt ist. Der neuesten Untersuchungen über die Elasticität von Wertheim ist ebenfalls schon oben (S. 296) gedacht worden. Ueber Hodgkinson's Versuche findet man einen Auszug in Moseley's Mechanical Principles of Engineering and Architecture. Tredgold handelt in einer besondern Abhandlung »über die Stärke des Gußeisens und anderer Metalle«, welche in Leipzig 1826 auch deutsch erschienen ist. Uebrigens ist zum Studium zu empfehlen: Poncelet's Introduction à la Mécanique industrielle, ferner Navier's Résumé des leçons sur l'application de la Mécanique, Part. I., zu welcher Schrift Poncelet in seiner Theorie von dem Widerstande fester Körper (S. dessen Lehrbuch der Anwendung der Mechanik, deutsch von Schnuse) Ergänzungen liefert. Die Theorie der zusammengesetzten Festigkeit ist zuerst von dem Verfasser in der Zeitschrift für das gesammte Ingenieurwesen (dem Ingenieur) von Bornemann u. s. w. Bd. I., abgehandelt worden. Weitere Ausführungen der Lehre von der Elasticität und Festigkeit kommen im Folgenden bei der Theorie der Schwingungen und der des Stoßes vor.

Vierter Abschnitt.

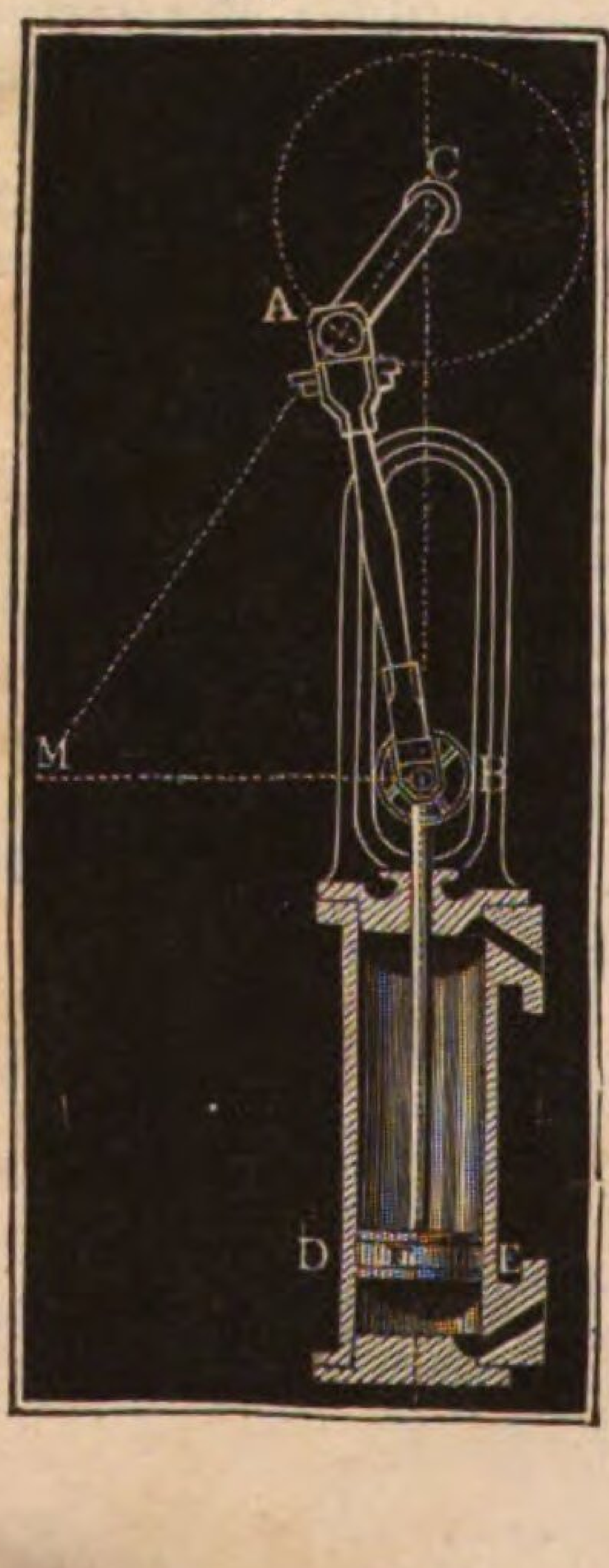
Dynamik fester Körper.

Erstes Kapitel.

Die Lehre von den Trägheitsmomenten.

Bewegungsarten. §. 226. Die Bewegung eines festen Körpers ist entweder fortschreitend, oder drehend, oder beides zugleich. Bei der fortschreitenden oder progressiven Bewegung (franz. mouvement de translation, engl. motion of translation) sind die gleichzeitig zurückgelegten Wege der Körpertheile unter sich parallel und gleich, bei der drehenden oder rotirenden Bewegung (franz. mouvement de rotation, engl. motion of rotation) hingegen beschreiben die Theile des Körpers um eine gewisse gerade Linie, die man die Umdrehungsaxe (franz. axe de rot., engl. axis of revolution) nennt, concentrische Kreisbögen. Die zusammengesetzte Bewegung läßt sich als eine drehende Bewegung um eine bewegliche Axe ansehen. Letztere ist wieder entweder veränderlich oder unveränderlich.

Fig. 313.



In progressiver Bewegung befindet sich der Kolben DE und die Kolbenstange BF einer Pumpe oder Dampfmaschine, Fig. 313, in drehender Bewegung aber ist die Kurbel oder der Krummzapfen AC, in zusammengesetzter Bewegung endlich die Kurbelstange AB, denn

das eine Ende B derselben hat eine fortschreitende, und das andere Ende A eine drehende Bewegung. Bei einem sich wälzenden Cylinder ist die Umdrehungsaxe unveränderlich, bei der Kurbelstange AB hingegen ist dieselbe veränderlich, denn sie ist der Durchschnitt M zwischen dem Perpendikel BM zur Axenrichtung CB der Kolbenstange und der Verlängerung des Kurbelarmes CA (siehe §. 96).

§. 227. Bei der geradlinig fortschreitenden Bewegung eines Körpers finden die §. 81 u. s. w. gefundenen Bewegungsgesetze eines materiellen Punktes ihre unmittelbare Anwendung. Die Massentheile M_1, M_2, M_3 u. s. w. eines mit der Acceleration p fortschreitenden Körpers widerstehen der Bewegung vermöge ihrer Trägheit mit den Kräften M_1p, M_2p, M_3p u. s. w. (§. 53), und da die Bewegungen aller dieser Theile in parallelen Linien erfolgen, so sind auch die Richtungen dieser Kräfte unter sich parallel; es ist daher die Mittelkraft von allen diesen aus der Trägheit entspringenden Kräften gleich der Summe $M_1p + M_2p + M_3p + \ldots = (M_1 + M_2 + M_3 + \ldots)\, p = Mp$, wo M die Masse des ganzen Körpers bezeichnet, und es fällt auch der Angriffspunkt derselben mit dem Schwerpunkte des Körpers zusammen. Um also einen übrigens frei beweglichen Körper von der Masse M oder dem Gewichte $G = Mg$ in eine geradlinig fortschreitende Bewegung von der Acceleration p zu versetzen, ist eine Kraft $P = Mp = \frac{Gp}{g}$ nöthig, deren Richtung den Schwerpunkt S des Körpers enthält. Geht in Folge der Einwirkung der Kraft P die Geschwindigkeit c während der Zurücklegung des Weges s in die Geschwindigkeit v über, so ist die von der Masse in sich aufgenommene mechanische Arbeit (§. 71): Geradlinige Bewegung.

$$Ps = \left(\frac{v^2 - c^2}{2}\right) M = \left(\frac{v^2 - c^2}{2g}\right) G = (h - h_1)\, G.$$

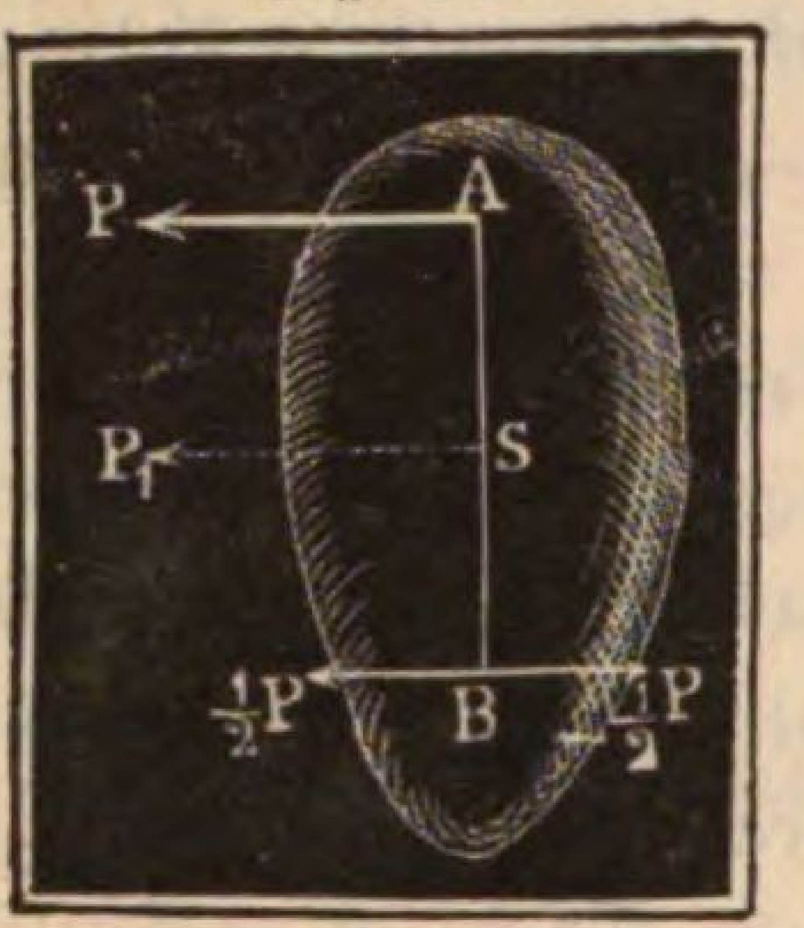
Beispiel. Der Kolben sammt Stange von einer Pumpe, Dampfmaschine, Gebläsemaschine u. s. w. hat eine ungleichförmige Bewegung, bei seinem höchsten und tiefsten Stande ist er ohne Geschwindigkeit, und nahe bei seinem mittleren Stande ist die Geschwindigkeit desselben am größten. Ist das Gewicht des Kolbens und seiner Stange $= G$, und seine größte Geschwindigkeit in der Mitte seines Auf- oder Nierderganges $= v$, so ist hiernach die Arbeit, welche er vermöge seiner Trägheit in der ersten Hälfte seines Weges in sich aufnimmt und in der zweiten Hälfte desselben wieder ausgiebt $= \frac{v^2}{2g} G$. Für $G = 800$ Pf. und $v = 5$ Fuß ist diese Arbeit $= 0{,}016 \,.\, 5^2 \,.\, 800 = 320$ Fßpf.; wäre nun noch der halbe Kolbenweg $s = 4$ Fuß, so hätte man die mittlere Kraft, welche nöthig ist, um den Kolben in der ersten Hälfte dieses Weges zu beschleunigen, und welche derselbe in der zweiten Hälfte durch seine Verzögerung ausübt:

$$P = \frac{v^2}{2gs} \cdot G = \frac{320}{4} = 80 \text{ Pf.}$$

Drehende Bewegung.

§. 228. Geht die bewegende Kraft P eines Körpers AB, Fig. 314, nicht durch den Schwerpunkt S, so nimmt der Körper eine Drehung um diesen Punkt an, und es schreitet dieser fort, als wenn die Kraft unmittelbar in ihm angriffe, wie sich folgendergestalt beweisen läßt. Man fälle vom Schwerpunkte S ein Perpendikel SA gegen die Kraftrichtung, verlängere dasselbe rückwärts, mache die Verlängerung SB dem Perpendikel gleich und lasse zwei sich das Gleichgewicht haltende und parallel mit P wirkende Kräfte, die eine $+ \frac{1}{2} P$ und die andere $- \frac{1}{2} P$ in B angreifen. Die Kraft $+ \frac{1}{2} P$ giebt in Vereinigung mit der einen Hälfte der in A angreifenden Kraft P die im Schwerpunkte S angreifende Kraft $P_1 = \frac{1}{2} P + \frac{1}{2} P = P$, wogegen die Kraft $- \frac{1}{2} P$ mit der zweiten Hälfte von der in A angreifenden Kraft P ein Kräftepaar bildet; es resultirt also aus der excentrisch wirkenden Kraft P eine durch den Schwerpunkt gehende Kraft P, welche diesen Punkt sammt dem ganzen Körper progressiv bewegt, und ein Kräftepaar $(\frac{1}{2}P, - \frac{1}{2}P)$, welches den Körper um den Schwerpunkt dreht, ohne einen Druck in demselben zu erzeugen. Das statische Moment dieses Kräftepaares ist aber $= SA . \frac{1}{2} P + SB . \frac{1}{2} P = SA . P$ gleich dem statischen Momente der in A angreifenden Kraft P, es ist folglich auch die resultirende Umdrehung dieselbe, als wenn der Schwerpunkt S festgehalten würde, und P allein wirkte.

Fig. 314.



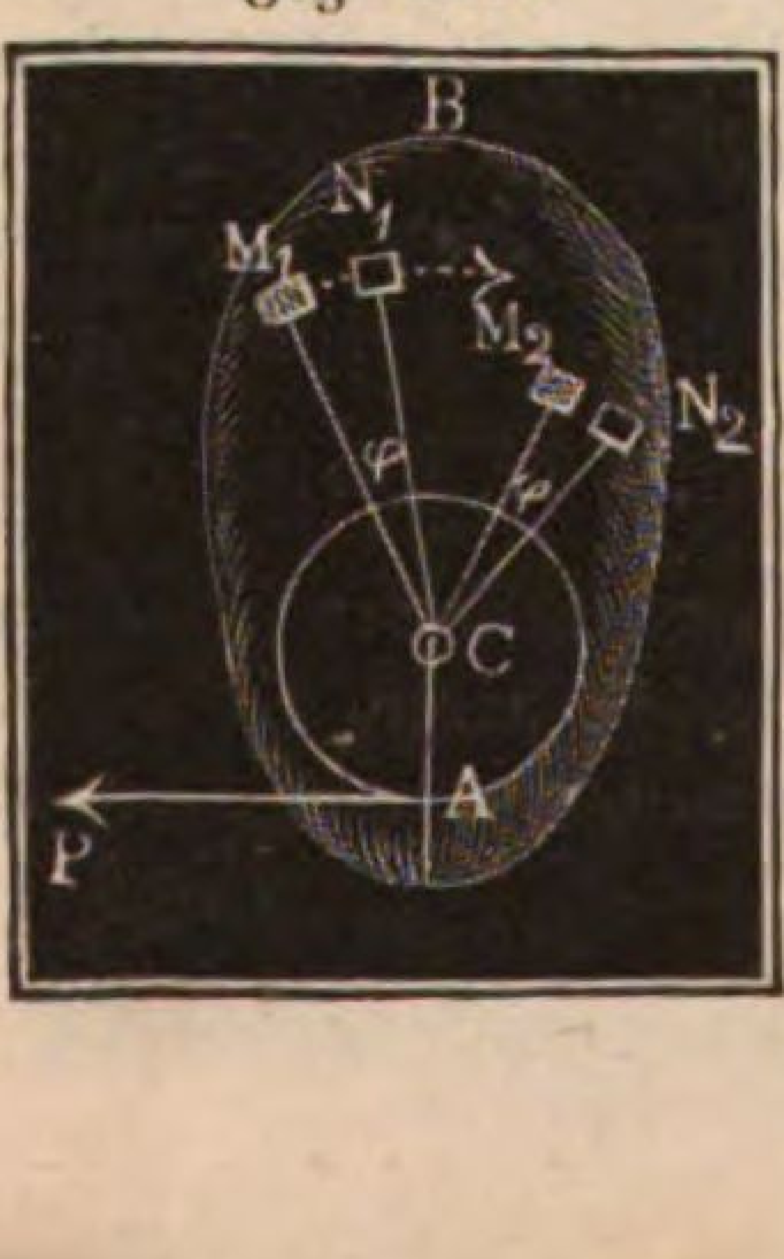
Diesem zufolge ertheilt also jede beliebig gerichtete Kraft einem Körper zwei Bewegungen, eine progressive und eine drehende, und es ist daher nöthig, die Gesetze der letzteren kennen zu lernen.

Wird endlich ein Körper durch eine Bahn oder eine Führung gezwungen, eine progressive Bewegung anzunehmen, so giebt eine excentrische Kraft dieselbe Wirkung, wie eine im Schwerpunkt angreifende, weil die Umdrehungskräfte durch die Führung aufgenommen werden.

Trägheitsmomente.

§. 229. Bei der Drehung eines Körpers AB, Fig. 315, um eine feste Axe C legen alle Punkte desselben in gleichen Zeiten gleiche Winkel zurück. Dreht sich der Körper in einer gewissen Zeit um den Winkel φ^0 oder Bogen $\varphi = \frac{\varphi^0}{180^0} . \pi$, so legen die Körperelemente $M_1, M_2 \ldots$ in den Abständen $CM_1 = y_1$, $CM_2 = y_2$ u. s. w. von der Axe die Wege φy_1, φy_2 u. s. w. zurück.

Fig. 315.



Ist ebenso die **Winkelgeschwindigkeit** (franz. vitesse angulaire, engl. angular velocity), d. i. die Geschwindigkeit derjenigen Punkte des Körpers, welche um die Längeneinheit (einen Fuß) von der Umdrehungsaxe abstehen, $= \omega$, so sind die gleichzeitigen Geschwindigkeiten der Massenelemente in den Entfernungen y_1, y_2 u. s. w. $= \omega y_1$, ωy_2 u. s. w., daher deren lebendige Kräfte $(\omega y_1)^2 M_1$, $(\omega y_2)^2 M_2$ u. s. w., und es ist die Summe derselben, oder die lebendige Kraft des ganzen Körpers: Trägheitsmomente.

$$(\omega y_1)^2 M_1 + (\omega y_2)^2 M_2 + \ldots = \omega^2 (M_1 y_1^2 + M_2 y_2^2 + \ldots).$$

Man nennt die Summe $M_1 y_1^2 + M_2 y_2^2 + \ldots$ der Producte aus den Massentheilen und den Quadraten ihrer Entfernungen von der Umdrehungsaxe das **Trägheits-, Drehungs- oder Massenmoment** (franz. moment d'inertie, engl. moment of inertia) des Körpers. Bezeichnen wir dasselbe durch T, setzen wir also $T = M_1 y_1^2 + M_2 y_2^2 + \ldots$, so erhalten wir für die lebendige Kraft eines mit der Winkelgeschwindigkeit ω sich drehenden Körpers $= \omega^2 T$. Um daher einem vorher in Ruhe befindlichen Körper eine Winkelgeschwindigkeit ω beizubringen, ist die Arbeit $Ps = \frac{1}{2}\omega^2 T$ zu verrichten, sowie umgekehrt ein Körper diese Arbeit vollbringt, wenn er aus dieser Winkelgeschwindigkeit in Ruhe übergeht. Ist allgemein die anfängliche Winkelgeschwindigkeit eines rotirenden Körpers $= \varepsilon$ und die endliche Winkelgeschwindigkeit $= \omega$, so hat man für die consumirte Arbeit $Ps = \left(\frac{\omega^2 - \varepsilon^2}{2}\right) T$, und umgekehrt, die einer aufgewendeten oder angehäuften Arbeit Ps entsprechende Endgeschwindigkeit:

$$\omega = \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{2\, Ps}{T}}.$$

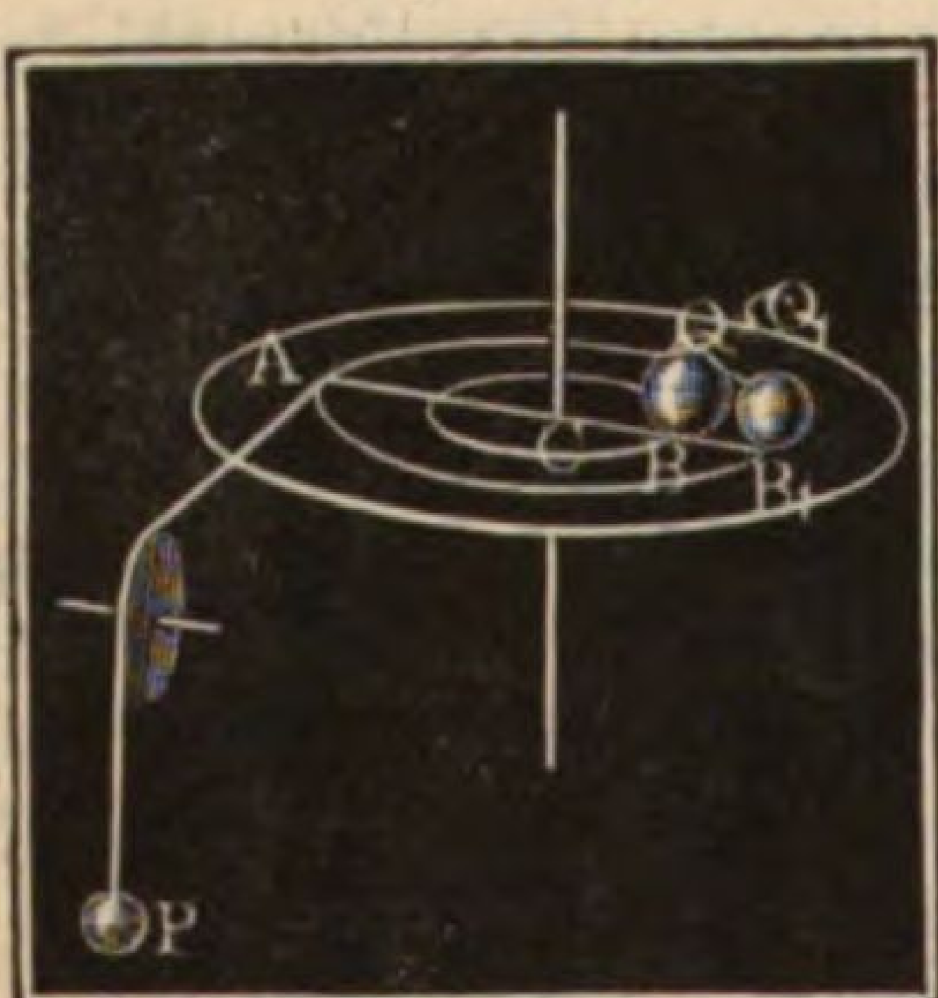
Beispiel. Wenn der um eine feste Axe C drehbare und anfänglich ruhende Körper AB, Fig. 315, ein Trägheitsmoment von 50 Fßpf. besitzt und mittels eines um eine Rolle liegenden Seiles mit einer Kraft $P = 20$ Pf. und auf einem Wege $s = 5$ Fuß in Umdrehung gesetzt wird, so ist die erlangte Winkelgeschwindigkeit dieses Körpers $\omega = \sqrt{\frac{2\,Ps}{T}} = \sqrt{\frac{2.20.5}{50}} = \sqrt{4} = 2$ Fuß, d. h. jeder Punkt in der Entfernung eines Fußes von der Umdrehungsaxe legt nach Aufnahme dieser Arbeit in jeder Secunde zwei Fuß zurück. Die Zeit einer Umdrehung ist $t = \frac{2\pi}{\omega} = 3{,}1416$ Secunden, und die Zahl der Umdrehungen in der Minute $u = \frac{60}{t} = \frac{60}{3{,}1416} = 19{,}1$. Geht die gefundene Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2$ Fuß in die Geschwindigkeit $\varepsilon = \frac{3}{4}$ Fuß über, so verrichtet diese Masse die Arbeit $P_1 s_1 = \left[2^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2\right] \cdot \frac{50}{2} = \left(4 - \frac{9}{16}\right).25$ $= \frac{55}{16} \cdot 25 = 85{,}93$ Fßpf.; hebt also z. B. ein Gewicht P_1 von 10 Pf., 8,593 Fuß hoch.

Reduction träger Massen.

§. 230. Sind die Winkelgeschwindigkeiten zweier Massen M_1 und M_2 unter sich gleich, gehören z. B. diese Massen einem und demselben rotirenden Körper an, so verhalten sich ihre lebendigen Kräfte, wie ihre Trägheitsmomente $T_1 = M_1 y_1^2$ und $T_2 = M_2 y_2^2$, und sind nun auch diese unter sich gleich, so besitzen die Massen gleiche lebendige Kräfte. Zwei Massen haben also hiernach gleichen Einfluß auf den Bewegungszustand eines sich umdrehenden Körpers, und es kann eine durch die andere ersetzt werden, ohne daß dadurch eine Aenderung im Bewegungszustande vor sich geht, wenn sie gleiche Trägheitsmomente $M_1 y_1^2$ und $M_2 y_2^2$ besitzen, sich also zu einander umgekehrt wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Umdrehungsaxe verhalten. Mit Hülfe der Formel $M_1 y_1^2 = M_2 y_2^2$ läßt sich eine Masse von einer Entfernung auf eine andere reduciren, d. h. es läßt sich eine Masse M_2 angeben, die in der Entfernung y_2 eben den Antheil an dem Bewegungszustande des drehenden Körpers nimmt, als die gegebene Masse M_1 in der Entfernung y_1; es ist nämlich $M_2 = \frac{M_1 y_1^2}{y_2^2} = \frac{T_1}{y_2^2}$, d. i. die auf die Entfernung y_2 reducirte Masse ist der Quotient aus dem Trägheitsmomente der Masse und dem Quadrate jener Entfernung.

Zwei an einer Radwelle ACB, Fig. 316, festsitzende Gewichte Q und Q_1 mit den Hebelarmen $CB = b$ und $CB_1 = a$ haben also vermöge ihrer Massen auf die Bewegung der Radwelle gleichen Einfluß, wenn $Q_1 a^2 = Q b^2$, also $Q_1 = \frac{Qb^2}{a^2}$ ist. Wirkt daher eine Kraft P am Hebelarme $CA = CB_1 = a$, um eine Masse vom Gewichte Q im Abstande $CB = b$ in Umdrehung zu setzen, so hat man die letztere auf den Hebelarm a der Kraft P zu reduciren, also statt $Q, Q_1 = \frac{Qb^2}{a^2}$

Fig. 316.



und die von P bewegte Masse $= \left(P + \frac{Qb^2}{a^2}\right) : g$ zu setzen, weshalb nun die Acceleration des Gewichtes P,

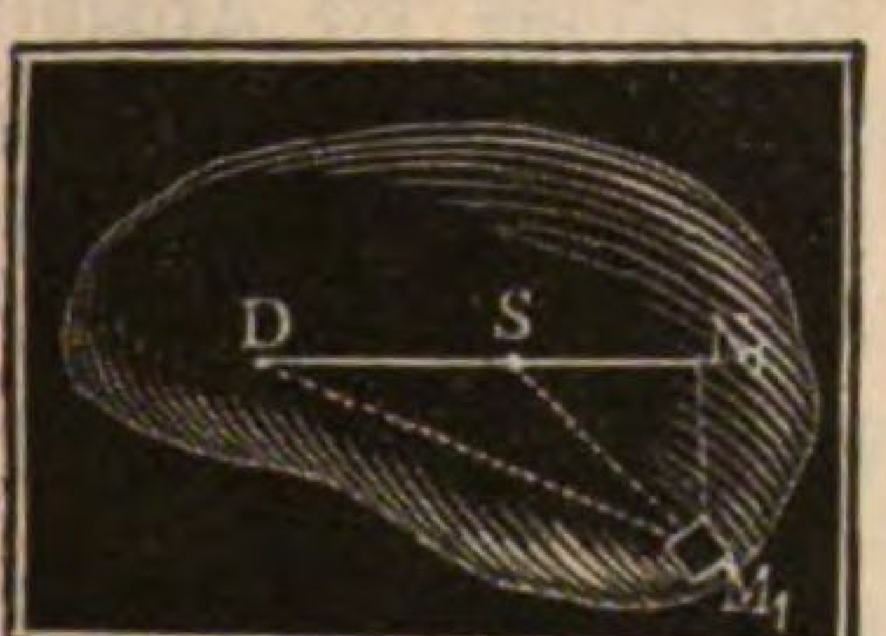
$$p = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}} = \frac{P}{P + Q\,\frac{b^2}{a^2}} \cdot g = \frac{Pa^2}{Pa^2 + Qb^2} \cdot g$$

und die Winkelacceleration $\frac{p}{a} = \frac{Pa}{Pa^2 + Qb^2} \cdot g$ sich ergiebt.

Beispiel. Ist das Gewicht der rotirenden Masse $Q = 360$ Pf., ihr Abstand von der Drehaxe $b = 2,5$ Fuß, das die bewegende Kraft ausmachende Gewicht $P = 24$ Pf. und dessen Hebelarm $a = 1,5$ Fuß, so folgt die von P beschleunigte träge Masse $= \left[P + \left(\frac{2,5}{1,5}\right)^2 Q\right] : g = 0,032 \left(24 + \frac{25}{9} . 360\right)$ $= 0,032 . 1024 = 32,77$ Pf., und daher die Beschleunigung des Gewichtes: $p = \frac{24}{32,77} = 0,732$ Fuß, dagegen die Acceleration der Masse $Q, = \frac{b}{a} . p = \frac{25}{15} p = \frac{5 . 0,732}{3} = 1,22$ Fuß, und die Winkelacceleration $= \frac{p}{a} = 0,488$ Fuß. Nach 4 Secunden ist die erlangte Winkelgeschwindigkeit $\omega = 0,488 . 4 = 1,952$ Fuß, und der entsprechende Weg $= \frac{1,952 . 4}{2} = 3,904$ Fuß, folglich der Umdrehungswinkel $\varphi^0 = \frac{3,904}{\pi} . 180^0 = 1,84 . 180^0 = 223^0,7$, endlich der von dem Gewichte P zurückgelegte Weg $s = \frac{pt^2}{2} = \frac{0.732 . 4^2}{2} = 5,86$ Fuß. Reduction träger Massen.

§. 231. Kennt man das Trägheitsmoment eines Körpers oder eines Systems von Körpern in Hinsicht auf eine durch den Schwerpunkt S des Körpers gehende Axe, so läßt sich daraus leicht das Trägheitsmoment in Hinsicht auf eine andere mit jener parallel laufende Axe finden. Es sei S, Fig. 317, die erste durch den Schwerpunkt gehende und D die zweite Drehungsaxe, für welche das Trägheitsmoment des Körpers bestimmt werden soll; ferner sei $SD = e$ die Entfernung beider Axen, und es seien $SN_1 = x_1$ und $N_1M_1 = y_1$ die rechtwinkeligen Coordinaten eines Massentheiles M_1 des ganzen Körpers. Das Trägheitsmoment dieses Theiles in Beziehung auf D ist nun $= M_1 . \overline{DM_1}^2 = M_1 (\overline{DN_1}^2 + \overline{N_1M_1}^2) = M_1 [(e + x_1)^2 + y_1^2]$, und in Beziehung auf $S, = M_1 . \overline{SM_1}^2 = M_1 . (\overline{SN_1}^2 + \overline{N_1M_1}^2) = M_1 (x_1^2 + y_1^2)$; daher die Differenz beider Momente $= M_1(e^2 + 2ex_1 + x_1^2 + y_1^2) - M_1 (x_1^2 + y_1^2)$ $= M_1 e^2 + 2 M_1 e x_1$. Für einen andern Massentheil M_2 ist sie $= M_2 e^2 + 2 M_2 e x_2$, für einen dritten $= M_3 e^2 + 2 M_3 e x_3$ u. s. w., daher für alle Massentheile zusammen $= (M_1 + M_2 + M_3 + \ldots) e^2 + 2e (M_1 x_1 + M_2 x_2 + M_3 x_3 + \ldots)$. Nun ist aber $M_1 + M_2 + \ldots$ die Summe M aller Massen und $M_1 x_1 + M_2 x_2 + \ldots$ die Summe Mx ihrer statischen Momente, es folgt daher die Differenz zwischen dem Trägheitsmomente T_1 des ganzen Körpers in Beziehung auf die Axe D und dem Trägheitsmomente T in Beziehung auf S: Reduction der Trägheitsmomente.

Fig. 317.



$$T_1 - T = M e^2 + 2 e M x.$$

Reduction der Trägheitsmomente.

Da aber endlich für jede Ebene durch den Schwerpunkt die Summe der statischen Momente der Theile auf der einen Seite so groß ist, als die der Momente auf der andern Seite, die algebraische Summe aller Momente also = Null ist, so hat man auch $Mx = 0$, und daher $T_1 - T = Me^2$, d. i. $T_1 = T + Me^2$.

Es ist also das Trägheitsmoment eines Körpers für eine excentrische Axe gleich dem Trägheitsmomente in Beziehung auf eine durch den Schwerpunkt gehende Parallelaxe vergrößert um das Product aus der Masse des Körpers und dem Quadrate des Abstandes beider Axen.

Man ersieht auch hieraus, daß von allen Trägheitsmomenten in Beziehung auf lauter parallele Axen dasjenige am kleinsten ausfällt, dessen Axe die Schwerlinie des Körpers ist.

Trägheitshalbmesser.

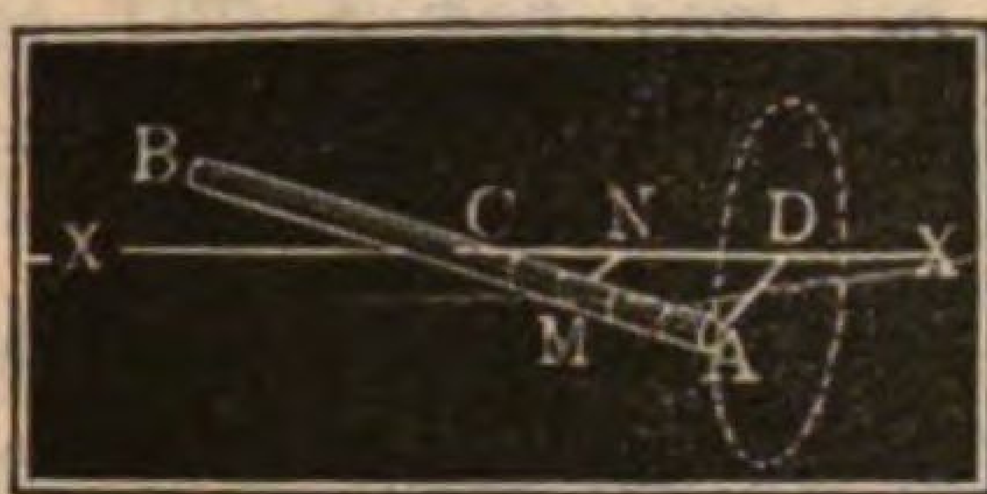
§. 232. Es ist nöthig, die Trägheitsmomente von den vorzüglichsten Körpern der Geometrie kennen zu lernen, weil dieselben bei den Untersuchungen der Mechanik sehr oft zur Anwendung kommen. Sind diese Körper homogen, wie wir im Folgenden stets voraussetzen wollen, so sind die Massentheile M_1, M_2 u. s. w. den entsprechenden Volumentheilen V_1, V_2 u. s. w. proportional, und es läßt sich daher das Maaß des Trägheitsmomentes, was man auch wohl Trägheitsmoment schlechtweg nennt, durch die Summe aus den Volumtheilen und den Quadraten ihrer Entfernungen von der Umdrehungsaxe ersetzen. Auch lassen sich in diesem Sinne die Trägheitsmomente von Linien und Flächen angeben.

Denkt man sich die ganze Masse eines Körpers in einen Punkt zusammengedrängt, so läßt sich die Entfernung desselben von der Axe unter der Voraussetzung bestimmen, daß die so concentrirte Masse mit der im Raume vertheilten Masse einerlei Trägheitsmoment besitze. Man nennt diese Entfernung den Drehungs- oder Trägheitshalbmesser (franz. rayon d'inertie, engl. radius of gyration). Ist T das Trägheitsmoment, M die Masse und r der Trägheitshalbmesser, so hat man $Mr^2 = T$, und daher $r = \sqrt{\frac{T}{M}}$. Uebrigens ist zu erinnern, daß dieser Halbmesser keineswegs einen bestimmten Punkt, sondern nur einen Kreis angiebt, in dessen Umfang die Masse beliebig vertheilt angenommen werden kann.

Führt man in der Formel $T_1 = T + Me^2$, $T = Mr^2$ und $T_1 = Mr_1^2$ ein, so erhält man $r_1^2 = r^2 + e^2$, d. h. es ist das Quadrat des Drehungshalbmessers in Beziehung auf eine Axe gleich dem Quadrate des Drehungshalbmessers in Beziehung auf die parallele Schwerlinie plus Quadrat der Entfernungen beider Axen.

§. 233. Von einer Stange AB, Fig. 318, welche sich um eine Axe $\overline{XX}$ durch ihre Mitte C dreht, bestimmt sich das Trägheitsmoment auf folgende Weise. Es sei der Querschnitt der Stange $= F$, die halbe Länge CA derselben $= l$, und der Winkel, welchen ihre Axe mit der Drehungsaxe einschließt, d. i. $ACX = \alpha$. Theilen wir die halbe Länge in n Theile, Stange.

Fig. 318.



so erhalten wir auch n Stücke, jedes von dem Inhalte $\frac{Fl}{n}$; die Entfernungen dieser Stücke von der Mitte C sind $\frac{l}{n}, \frac{2l}{n}, \frac{3l}{n}$ u. s. w., daher die Abstände derselben von der Axe $\overline{XX}$, wie z. B. MN, $= \frac{l}{n} sin. \alpha, \frac{2l}{n} sin. \alpha$. $\frac{3l}{n} sin. \alpha$ u. s. w. und ihre Quadrate $= \left(\frac{l\, sin.\alpha}{n}\right)^2, 4\left(\frac{l\, sin.\alpha}{n}\right)^2$, $9\left(\frac{l\, sin.\alpha}{n}\right)^2$ u. s. w. Durch Multiplication dieser mit dem Inhalte $\frac{Fl}{n}$ eines Elementes und durch Addition aller Producte ergiebt sich nun das Trägheitsmoment der halben Stange:

$$T = \frac{Fl}{n}\left[\left(\frac{l\, sin.\alpha}{n}\right)^2 + 4\left(\frac{l\, sin.\alpha}{n}\right)^2 + 9\left(\frac{l\, sin.\alpha}{n}\right)^2 + \dots\right]$$

$= \frac{Fl^3 sin.\alpha^2}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\dots+n^2)$, oder, da $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{n^3}{3}$ ist, $T = \frac{Fl^3 sin.\alpha^2}{3}$. Da aber Fl das als Masse M zu behandelnde Volumen der halben Stange ist, so folgt endlich

$$T = \frac{1}{3} Ml^2 sin.\alpha^2.$$

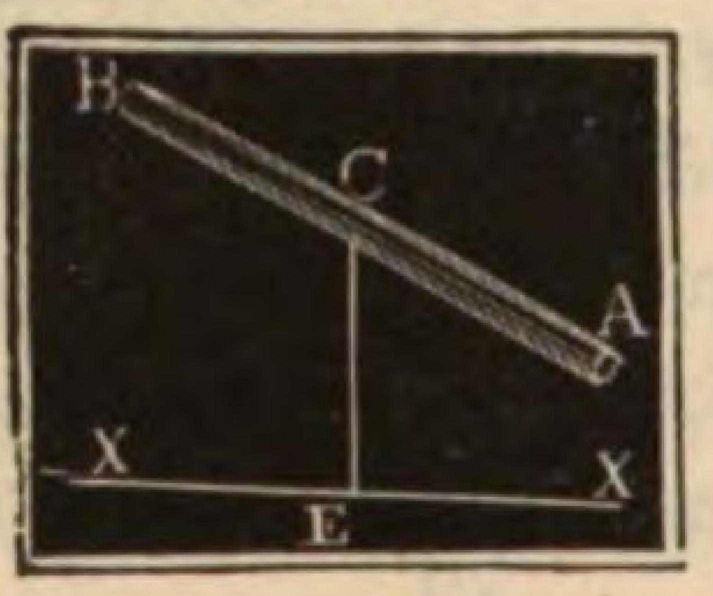
Der Abstand des Stangenendes von der Axe $\overline{XX}$ ist $AD = a = l\, sin.\alpha$, daher folgt einfacher $T = \frac{1}{3} Ma^2$, welche Formel auch auf die ganze Stange AB anzuwenden ist, wenn man unter M die Masse der ganzen Stange versteht. Eine Masse M_1 am Endpunkte A der Stange hat das Trägheitsmoment $M_1 a^2$, macht man daher $M_1 = \frac{1}{3} M$, so hat sie mit der Stange einerlei Trägheitsmoment. Ob also die Masse auf die Stange gleichförmig vertheilt, oder ihr dritter Theil im Endpunkte A concentrirt ist, dies kommt in Hinsicht auf die Trägheit auf eins hinaus.

Setzt man $T = Mr^2$, so bekommt man $r^2 = \frac{1}{3}a^2$, und daher den Trägheitshalbmesser der Stange: $r = a\sqrt{\frac{1}{3}} = 0{,}5773\,.a$.

Steht die Stange senkrecht auf der Drehungsaxe, so ist $a = l$, daher

Stange. $T = \frac{1}{3} Ml^2$. Befindet sich endlich die Stange AB, Fig. 319, mit der Drehungsaxe nicht in einerlei Ebene, und ist der kürzeste Abstand CE beider Axen $= e$, so hat man nach §. 231 das Trägheitsmoment $T_1 = T + Me^2 = M(e^2 + \frac{1}{3} a^2)$.

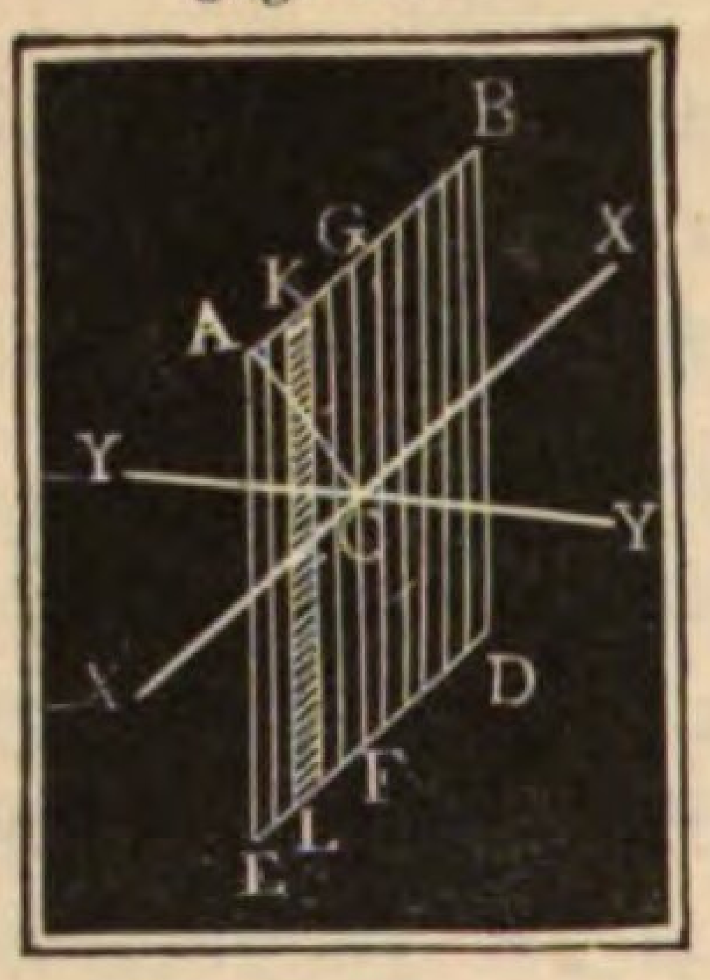
Fig. 319.



Rechteck und Parallelepiped.

§. 234. Die Trägheitsmomente von ebenen Flächen bestimmen sich genau so wie die Biegungsmomente $W = F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + \ldots$ derselben. Deshalb lassen sich auch die im vorigen Kapitel für verschiedene Flächen gefundenen Werthe von W als T hier benutzen.

Fig. 320.



Für das Rechteck $ABDE$, Fig. 320, ist das Trägheitsmoment in Hinsicht auf eine Axe $X\overline{X}$, welche parallel mit einer Seite läuft, und durch die Mitte C dieser Figur geht, nach §. 196, $T = \frac{bh^3}{12}$, wo b die Breite $AB = DE$ parallel zur Umdrehungsaxe, und h die Höhe $AE = BD$ der Fläche bezeichnet.

Nun ist aber der Inhalt bh dieses Rechteckes als Masse M desselben einzusetzen, daher das Trägheitsmoment

$$T = \frac{Mh^2}{12} = \frac{M}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^2,$$

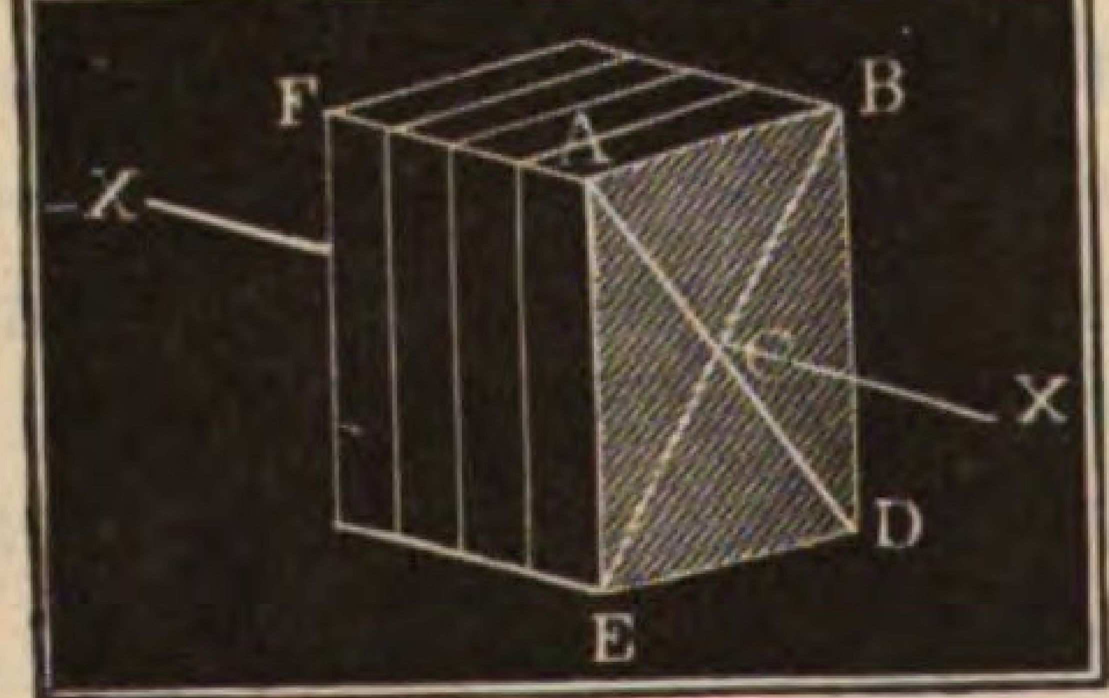
d. i. so groß als das des dritten Theiles dieser Masse, im Abstande $CF = CG = \frac{h}{2}$ von der Drehungsaxe angebracht.

Dreht sich dieses Rechteck um eine Axe $Y\overline{Y}$, welche rechtwinkelig gegen die Ebene desselben steht und ebenfalls durch die Mitte C der Figur geht, so hat man nach §. 217:

$$T = \frac{Mh^2}{12} + \frac{Mb^2}{12} = \frac{M(h^2 + b^2)}{12} = \frac{M}{3}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right] = \frac{M}{3}\left(\frac{d}{2}\right)^2,$$

wenn d die Diagonale $AD = BE$ des Rechteckes bezeichnet. Man kann sich also in diesem Falle den dritten Theil der Masse des Rechteckes in einem der Eckpunkte A, B . . angebracht denken.

Fig. 321.

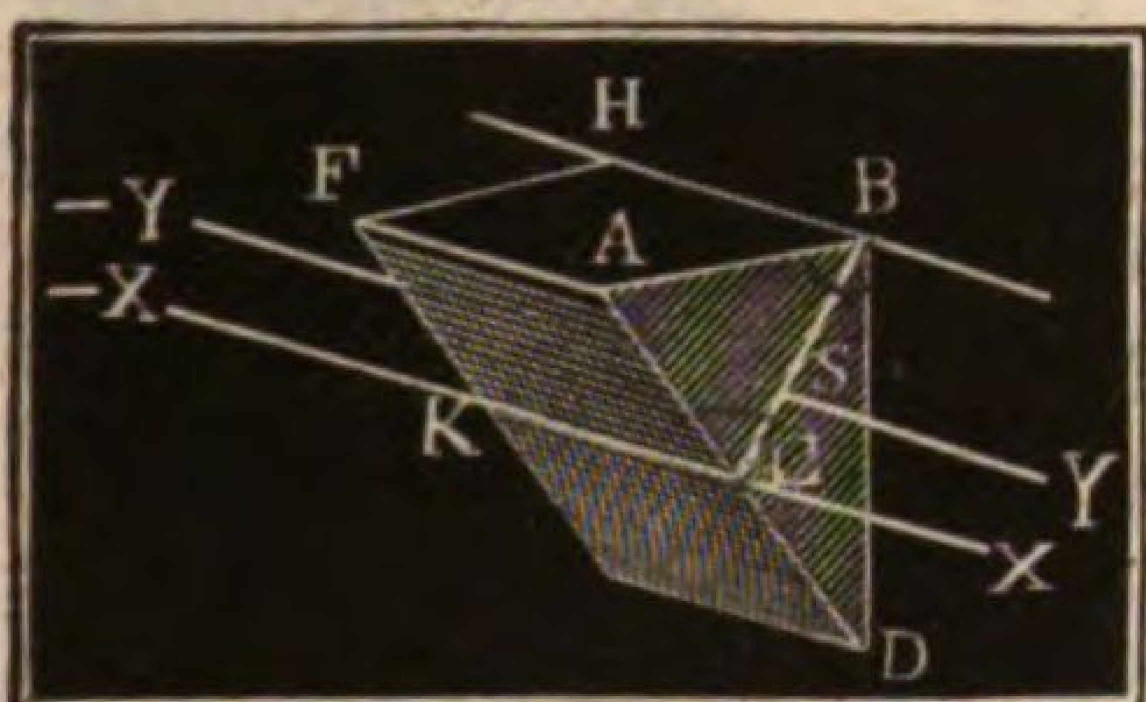


Da sich ferner ein Parallelepiped BEF, Fig. 321, durch Parallelebenen in lauter gleiche rectanguläre Blätter zerlegen läßt, so gilt diese Formel auch für dieses, wenn die Umdrehungsaxe

durch die Mittelpunkte von je zwei gegenüber liegenden Flächen geht. Uebrigens folgt auch aus dieser Formel, daß das Trägheitsmoment des Parallelepipedes gleich ist dem Trägheitsmomente des in einem der Eckpunkte A angebrachten dritten Theiles seiner Masse. Rechteck und Parallelepiped.

§. 235. Mit Hülfe der Formel für das Trägheitsmoment eines Parallelepipedes läßt sich auch das eines dreiseitigen Prisma's berechnen. Die Diagonalebene ADF theilt das Parallelepiped in zwei gleiche dreiseitige Prismen mit rechtwinkelig triangulären Grundflächen ABD, Fig. 322; es ist daher für die Drehung um eine durch die Mittelpunkte C und K der Hypotenuse gehende Axe $X\overline{X}$ das Trägheitsmoment $= \frac{1}{12} Md^2$. Benutzt man nun den Lehrsatz in §. 231, so erhält man das Trägheitsmoment in Beziehung auf eine durch die Schwerpunkte S und S_1 der Grundfläche gehende Axe YY: Prisma und Cylinder.

Fig. 322.



$$T = \frac{1}{12} M d^2 - M . \overline{CS}^2 = M \left[\frac{d^2}{12} - (\tfrac{1}{3}\overline{CB})^2\right] = M\left[\frac{d^2}{12} - \left(\frac{d}{6}\right)^2\right]$$

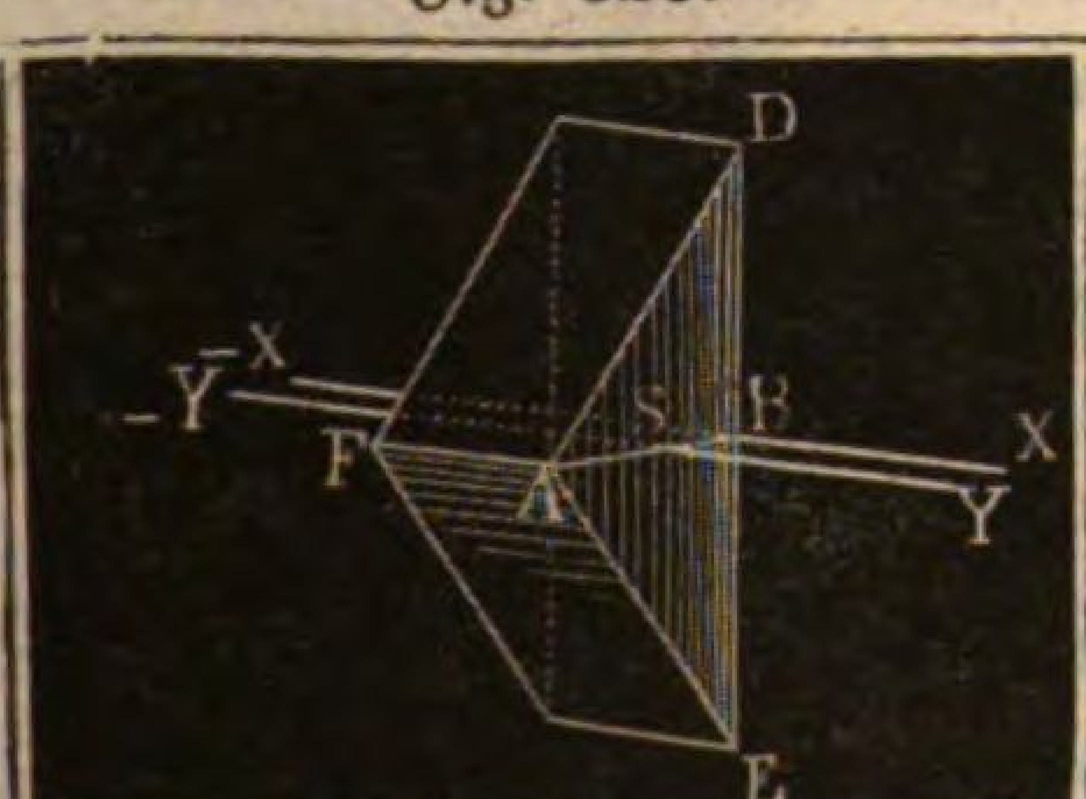
$= \frac{1}{18} Md^2$, und es folgt auch das Trägheitsmoment in Beziehung auf die Seitenkante BH:

$$T_1 = T + M . \overline{SB}^2 = \tfrac{1}{18} Md^2 + M(\tfrac{1}{3} d)^2 = \tfrac{3}{18} Md^2 = \tfrac{1}{6} Md^2,$$

wobei d allemal die Hypotenuse AD der triangulären Grundfläche bezeichnet.

Für ein Prisma $ADFE$, Fig. 323, mit gleichschenkelig triangulären Grundflächen ist das Trägheitsmoment in Beziehung auf eine Axe $X\overline{X}$, welche die Mittelpunkte der Grundlinien verbindet, $T = \frac{1}{6} Md^2$, wenn d die Seite AD einer Grundfläche bezeichnet, weil sich diese Fläche durch die Höhenlinie AB in zwei gleiche rechtwinkelige Dreiecke zerlegen läßt. Ist nun die Höhe AB der gleichschenkelig triangulären Basis $= h$, so hat man das Trägheitsmoment dieses Prisma's in Beziehung auf die Axe $Y\overline{Y}$ durch die Schwerpunkte der Grundflächen:

Fig. 323.



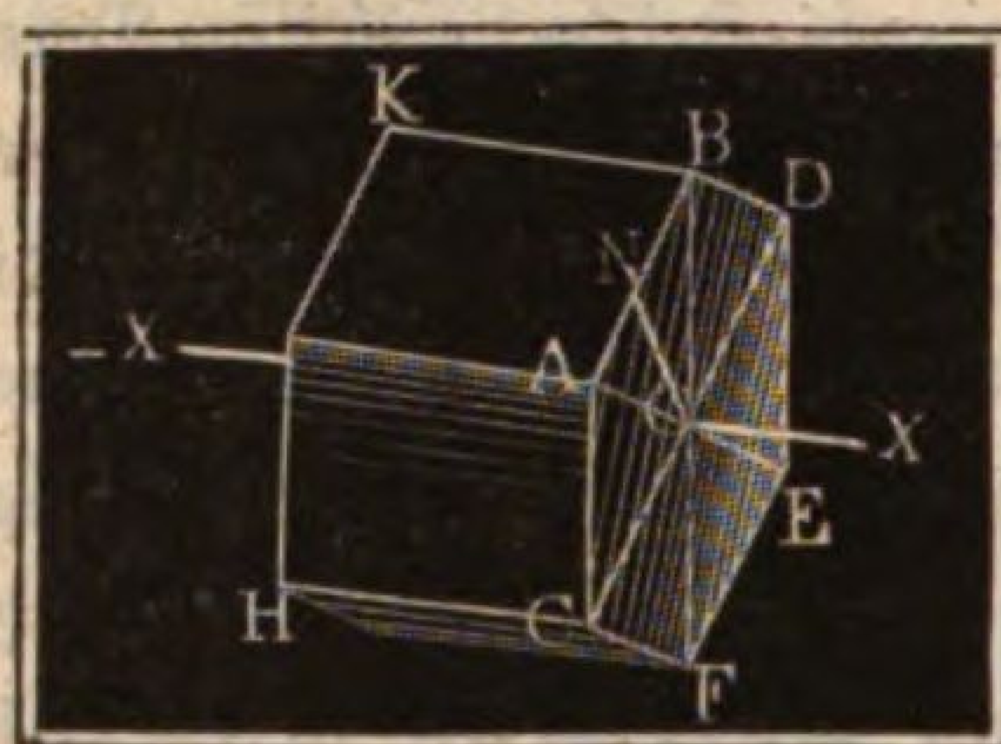
$$T = \tfrac{1}{6} Md^2 - M\left(\frac{h}{3}\right)^2 = M(\tfrac{1}{6} d^2 - \tfrac{1}{9} h^2) = \tfrac{1}{3} M(\tfrac{1}{2} d^2 - \tfrac{1}{3} h^2),$$

und endlich das Trägheitsmoment in Beziehung auf die Kante durch die Spitzen A und F der Grundflächen:

Prisma und Cylinder. $$T_1 = T + M\,(2/_3 h)^2 = M\left(\frac{d^2}{6} - \frac{h^2}{9} + \frac{4\,h^2}{9}\right) = 1/_3 M(1/_2 d^2 + h^2).$$

Hiernach läßt sich auch das Trägheitsmoment eines geraden regelmäßigen, sich um seine geometrische Axe drehenden Prisma's finden. Ist h die Höhe CN, Fig. 324, von einem der Ergänzungsdreiecke, $CA = CB = d = r$ der Halbmesser der Grundfläche oder eines Ergänzungsdreieckes der Basis, und M die Masse des ganzen Prisma's, so hat man nach der letzten Formel:

Fig. 324.



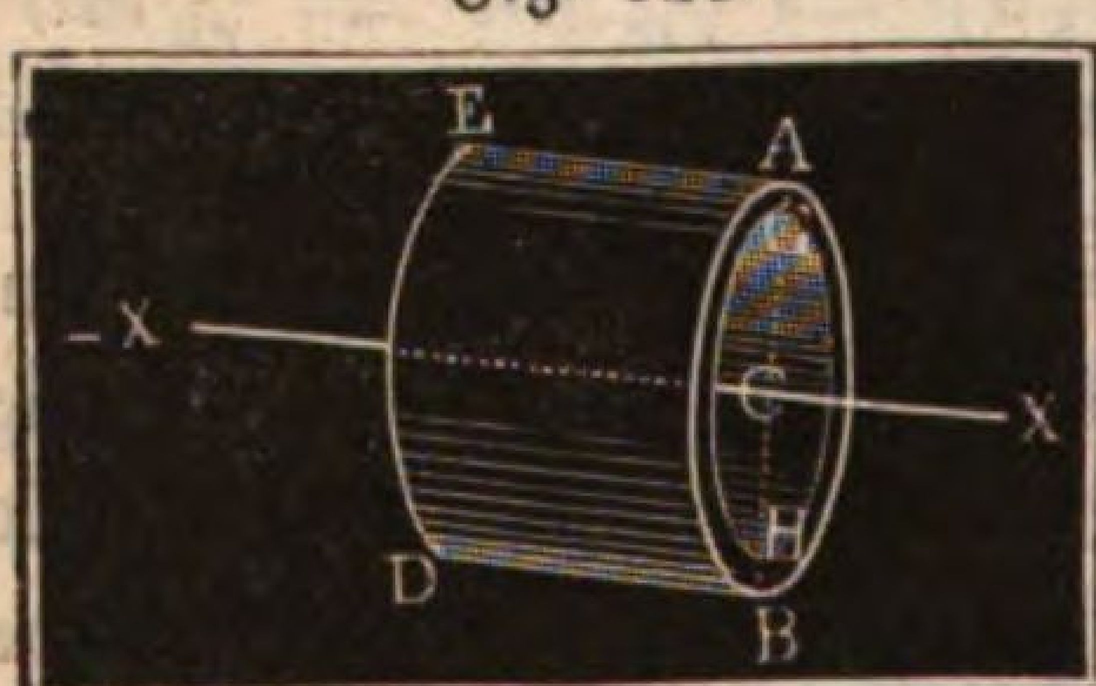
$$T = 1/_3 M\left(\frac{r^2}{2} + h^2\right).$$

Das reguläre Prisma wird zu einem Cylinder, wenn $h = r$, daher ist das Trägheitsmoment eines geraden Cylinders in Beziehung auf seine geometrische Axe:

$$T = 1/_3\, M\left(\frac{r^2}{2} + r^2\right) = 1/_2\, Mr^2.$$

Das Trägheitsmoment eines Cylinders ist also gleich dem Trägheitsmomente der halben Cylindermasse concentrirt in dem Umfange desselben, oder gleich dem Trägheitsmomente der ganzen Masse befindlich im Abstande $r\,\sqrt{1/_2} = 0{,}7071\,.\,r$.

Fig. 325.



Hat man es mit einem hohlen Cylinder $ABDE$, Fig. 325, zu thun, so ist das Trägheitsmoment des leeren Raumes von dem des massiven Cylinders abzuziehen. Ist der äußere Halbmesser $CA = r_1$ und der innere Halbmesser $CG = r_2$, so hat man, nach dem Vorigen, das Trägheitsmoment des hohlen Cylinders:

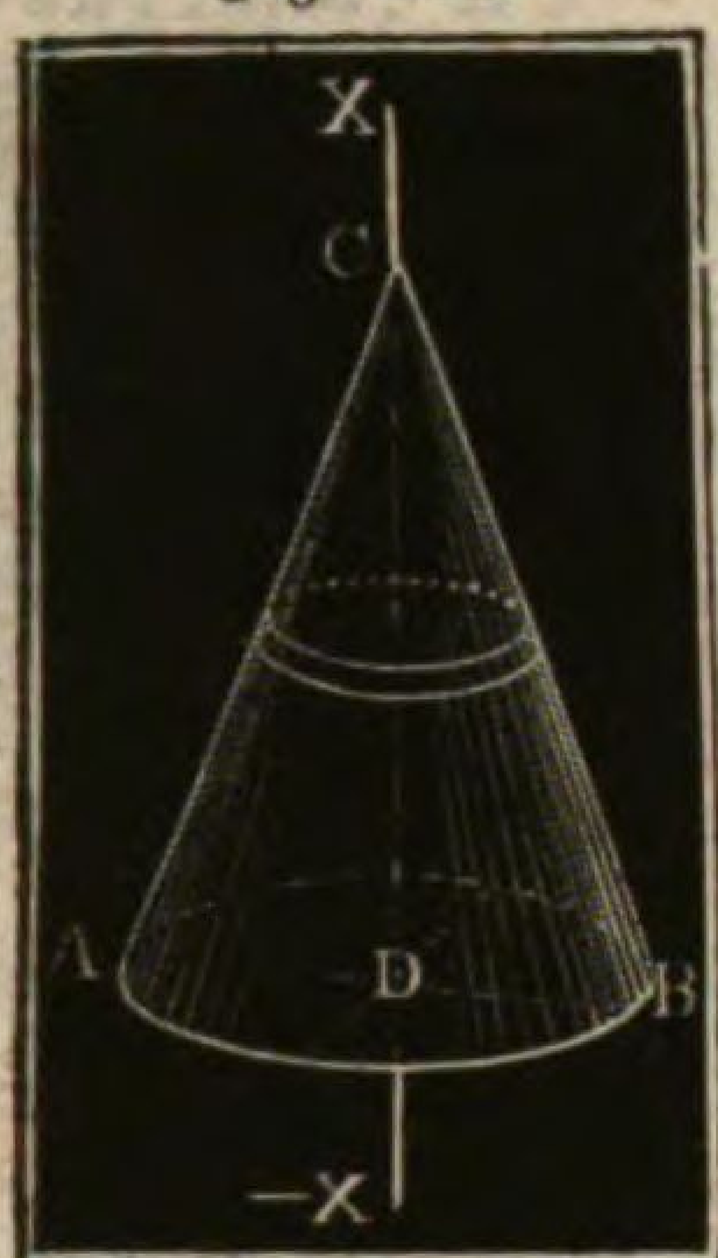
$$T = 1/_2\,(M_1 r_1^2 - M_2 r_2^2) = 1/_2 \pi (r_1^2 . r_1^2 - r_2^2 . r_2^2) = 1/_2 \pi (r_1^4 - r_2^4)$$
$$= 1/_2 \pi (r_1^2 - r_2^2)\,(r_1^2 + r_2^2) = 1/_2 M (r_1^2 + r_2^2),$$

weil das als Masse zu behandelnde Volumen $= \pi\,(r_1^2 - r_2^2)$ ist. Ist r der mittlere Halbmesser $\frac{r_1 + r_2}{2}$ und b die Breite $r_1 - r_2$ der Ringfläche, so hat man auch $T = M\left(r^2 + \frac{b^2}{4}\right)$.

Kegel und Pyramide. §. 236. Mit Hülfe der Formel für das Trägheitsmoment eines Cylinders läßt sich nun auch das Trägheitsmoment eines geraden Kegels, sowie das einer Pyramide berechnen. Es sei ACB, Fig. 326, ein sich um seine geometrische Axe drehender Kegel, $DA = DB = r$ der Halbmesser seiner Basis, und $CD = h$ seine in die Axe fallende Höhe. Führen wir in

gleichen Höhenabständen n Schnitte parallel zur Basis, so bekommen wir lauter dünne Scheiben von den Halbmessern $\frac{r}{n}, 2\frac{r}{n}, 3\frac{r}{n} \ldots n\frac{r}{n}$ und der gemeinschaftlichen Höhe $\frac{h}{n}$. Die halben Volumina dieser Scheiben sind $\pi\left(\frac{r}{n}\right)^2 \cdot \frac{h}{2n}$, $\pi\left(\frac{2r}{n}\right)^2 \cdot \frac{h}{2n}$, $\pi \cdot \left(\frac{3r}{n}\right)^2 \cdot \frac{h}{2n}$ u. s. w., und daher die Trägheitsmomente derselben: $\pi\left(\frac{r}{n}\right)^4 \cdot \frac{h}{2n}$, $\pi\left(\frac{2r}{n}\right)^4 \frac{h}{2n}$, $\pi\left(\frac{3r}{n}\right)^4 \frac{h}{2n}$ u. s. w.; die Summe dieser Werthe giebt endlich das Trägheitsmoment des ganzen Kegels Kegel und Pyramide.

Fig. 326.



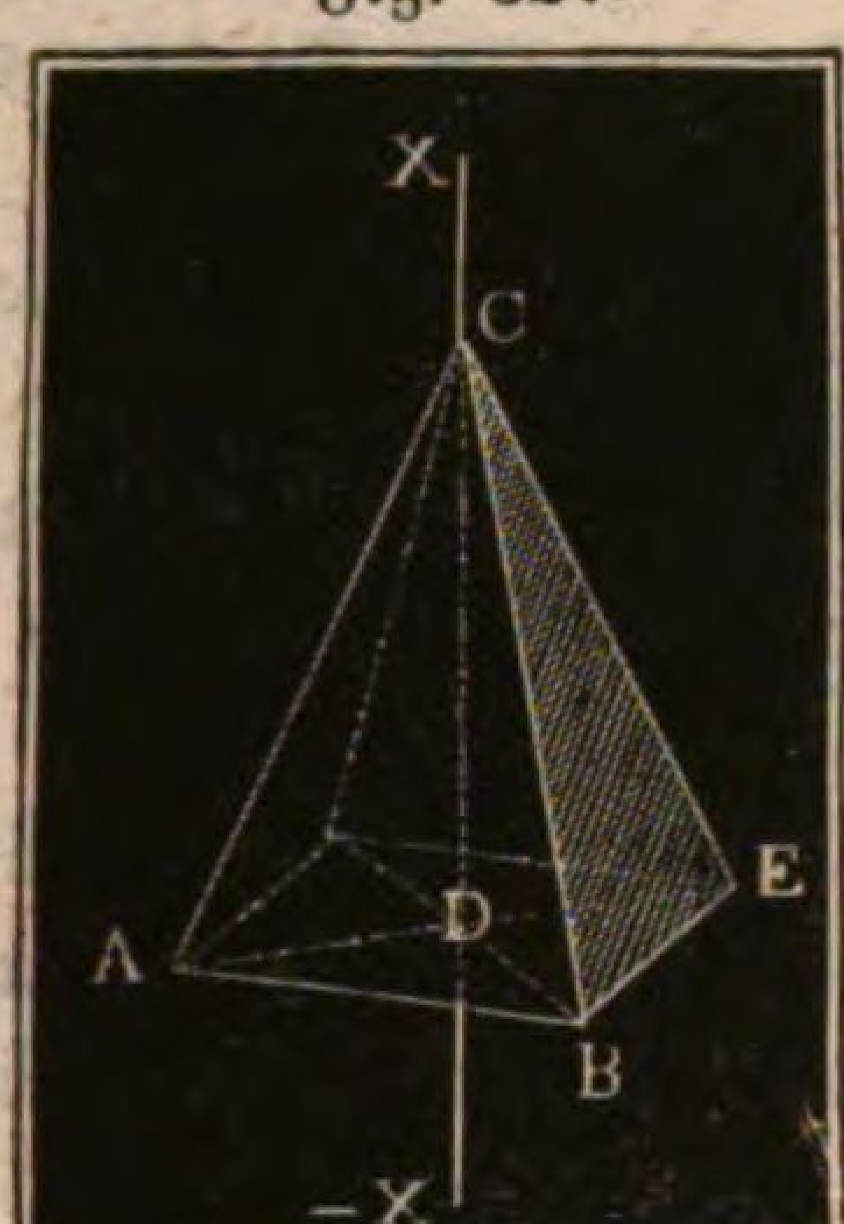
$$T = \frac{\pi r^4 h}{2n^5}(1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4),$$

d. i., da $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \frac{n^5}{5}$ ist,

$$T = \frac{\pi r^4 h}{10} = \frac{3}{10} \cdot \frac{\pi r^2 h}{3} \cdot r^2 = \frac{3}{10} M r^2.$$

Ebenso ist für die gerade Pyramide ACE, Fig. 327, mit rectangulärer Basis, unter denselben Verhältnissen $T = \frac{1}{5} M d^2$, wenn d die halbe Diagonale DA der Basis bezeichnet.

Fig. 327.



Auch ergiebt sich durch Subtraction von zwei Trägheitsmomenten das Trägheitsmoment eines geraden abgekürzten Kegels, dessen Halbmesser r_1 und r_2 und Höhen h_1 und h_2 sind:

$$T = \frac{\pi}{10}(r_1^4 h_1 - r_2^4 h_2) = \frac{\pi h_1}{10 r_1}(r_1^5 - r_2^5),$$

oder, da die Masse

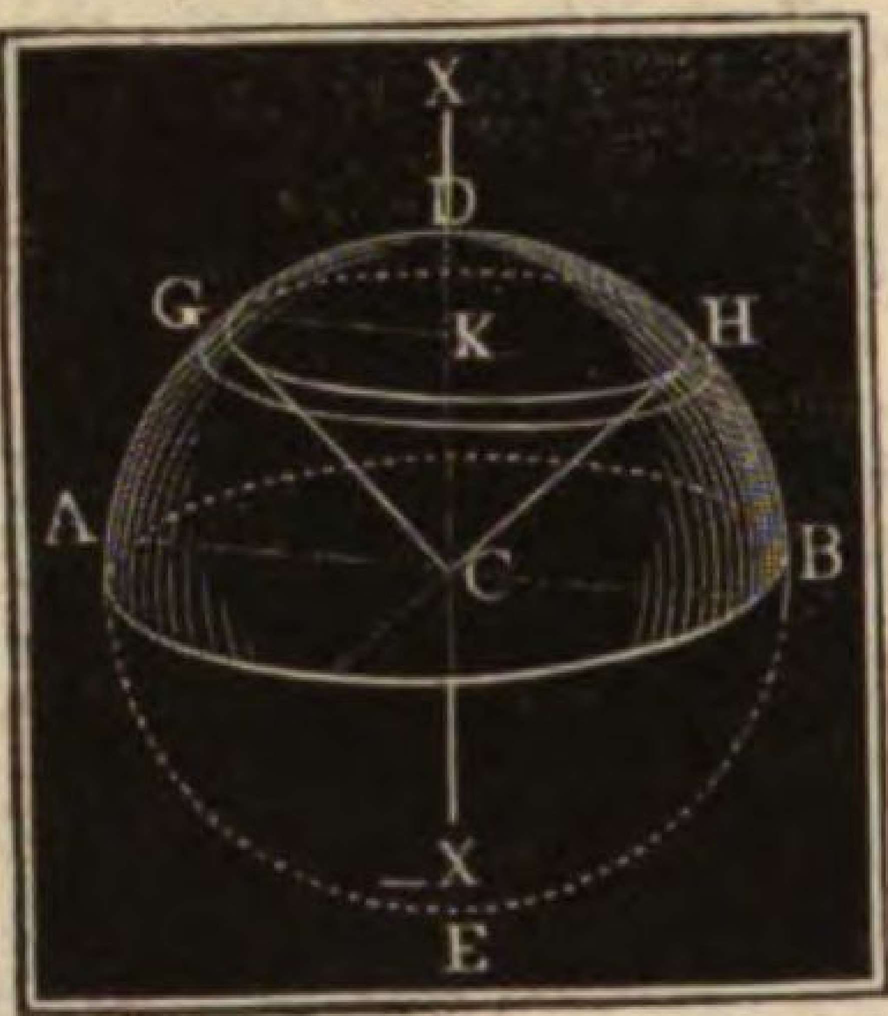
$$M = \frac{\pi}{3}(r_1^2 h_1 - r_2^2 h_2) = \frac{\pi h_1}{3 r_1}(r_1^3 - r_2^3)$$

ist, $T = \frac{3}{10} M \left(\frac{r_1^5 - r_2^5}{r_1^3 - r_2^3}\right)$.

§. 237. Auf gleiche Weise bestimmt sich das Trägheitsmoment einer Kugel, welche sich um einen ihrer Durchmesser $DE = 2r$ dreht. Theilen wir die Halbkugel ADB, Fig. 328 (a. f. S.), durch Schnitte parallel zur Basis ACB in n gleich dicke Scheiben wie GKH u. s. w., und bestimmen wir die Mo- Kugel.

Kugel. mente dieser. Das Quadrat $\overline{GK}^2$ des Halbmessers einer solchen Scheibe ist $= \overline{CG}^2 - \overline{CK}^2 = r^2 - \overline{CK}^2$, daher das Trägheitsmoment derselben $= \frac{1}{2}\pi . \frac{r}{n}(r^2 - \overline{CK}^2)^2$,

Fig. 328.



$$= \frac{\pi r}{2n}(r^4 - 2r^2\overline{CK}^2 + \overline{CK}^4).$$

Setzen wir nun für CK nach und nach $\frac{r}{n}$, $\frac{2r}{n}$, $\frac{3r}{n}$ u. s. w. bis $\frac{nr}{n}$ ein, und addiren wir die Ergebnisse, so folgt das Trägheitsmoment der Kugel:

$$T = \frac{\pi r}{2n}\left[n.r^4 - 2r^2\left(\frac{r}{n}\right)^2(1^2+2^2+3^2+..+n^2) + \left(\frac{r}{n}\right)^4(1^4+2^4+3^4+..+n^4)\right] = \frac{\pi r}{2n}\left[nr^4 - \frac{2r^4}{n^2}.\frac{n^3}{3} + \left(\frac{r}{n}\right)^4.\frac{n^5}{5}\right],$$

d. i. $T = \frac{\pi r^5}{2}(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}) = \frac{4\pi r^5}{15}$.

Nun ist der Inhalt einer Halbkugel $M = \frac{2}{3}\pi r^3$, es läßt sich daher setzen:

$$T = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3}\pi r^3 . r^2 = \frac{2}{5}Mr^2,$$

und nimmt man M für die ganze Kugel, so gilt die Formel auch für diese.

Der Drehungshalbmesser ist $= r\sqrt{\frac{2}{5}} = 0,6324 . r$; zwei Fünftel der Kugelmasse um den Kugelhalbmesser von der Drehungsaxe abstehend, haben dasselbe Trägheitsmoment wie die ganze Kugel.

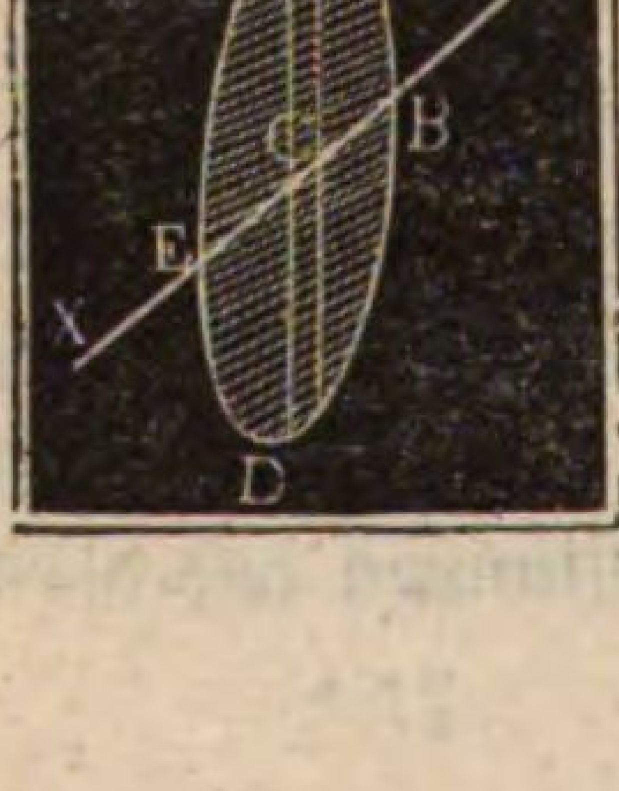
Die Formel $T = \frac{2}{5}Mr^2$ gilt auch für ein Sphäroid, dessen Aequatorhalbmesser $= r$ ist. S. §. 117.

Dreht sich die Kugel um eine andere, von ihrem Mittelpunkte um e abstehende Axe, so hat man das Trägheitsmoment

$$T = M(e^2 + \frac{2}{5}r^2).$$

Blätter. §. 238. Das Trägheitsmoment von einem **kreisrunden Blatte** $ABDE$, Fig. 329, welches sich um seinen Durchmesser BE dreht, ergiebt sich wie das Biegungsmoment eines Cylinders (s. §. 199) $= \frac{\pi r^4}{4} = \frac{Mr^2}{4}$, es ist folglich der Halbmesser der Trägheit $= r\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}r$, d. i. die Hälfte vom Halbmesser des Kreises.

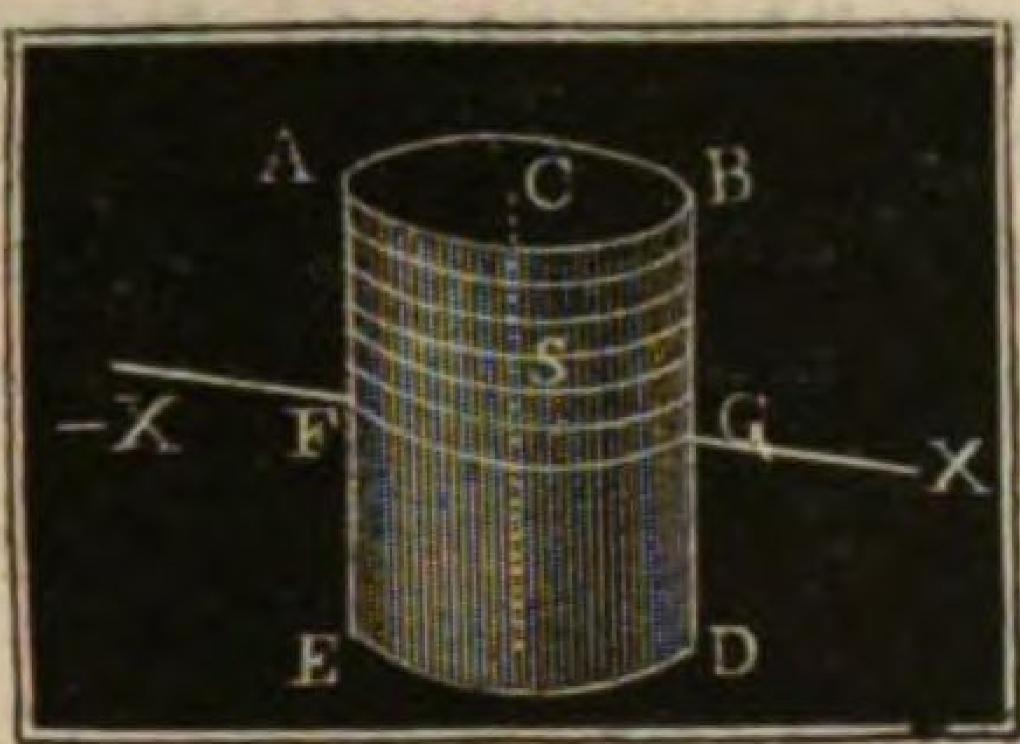
Fig. 329.



Hieraus läßt sich nun auch das Trägheitsmoment eines **Cylinders** $ABDE$, Fig. 330, finden, der sich um einen durch den Schwerpunkt S gehen-

den Durchmesser FG dreht. Ist l die halbe Höhe und r der Halbmesser des Cylinders, so hat man das Volumen des halben Cylinders $= \pi r^2 l$, und führt man Schnitte parallel zur Basis und in gleichen Abständen, so zerlegt man diesen Körper in n gleiche Theile, wovon jeder $= \frac{\pi r^2 l}{n}$ ist, und der erste um $\frac{l}{n}$, der zweite um $\frac{2l}{n}$, der dritte um $\frac{3l}{n}$ u. s. w. vom Schwerpunkte S absteht. Mittels der Formel in § 231 folgen nun die Trägheitsmomente dieser Blätter oder Scheiben: Blätter.

Fig. 330.



$$\frac{\pi r^2 l}{n}\left[{}^1\!/_4 r^2 + \left(\frac{l}{n}\right)^2\right], \frac{\pi r^2 l}{n}\left[{}^1\!/_4 r^2 + \left(\frac{2l}{n}\right)^2\right],$$

$$\frac{\pi r^2 l}{n}\left[{}^1\!/_4 r^2 + \left(\frac{3l}{n}\right)^2\right]$$

u. s. w., deren Summe das Trägheitsmoment des halben Cylinders:

$$T = \frac{\pi r^2 l}{n}\left[\frac{n r^2}{4} + \left(\frac{l}{n}\right)^2 (1^2 + 2^2 + 3^2 + .. + n^2)\right]$$

$$= \pi r^2 l \left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{n^3} \cdot \frac{n^3}{3}\right) = M\left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3}\right)$$

liefert, und das auch für den ganzen Cylinder gilt, wenn M die Masse desselben bezeichnet.

Fig. 331.

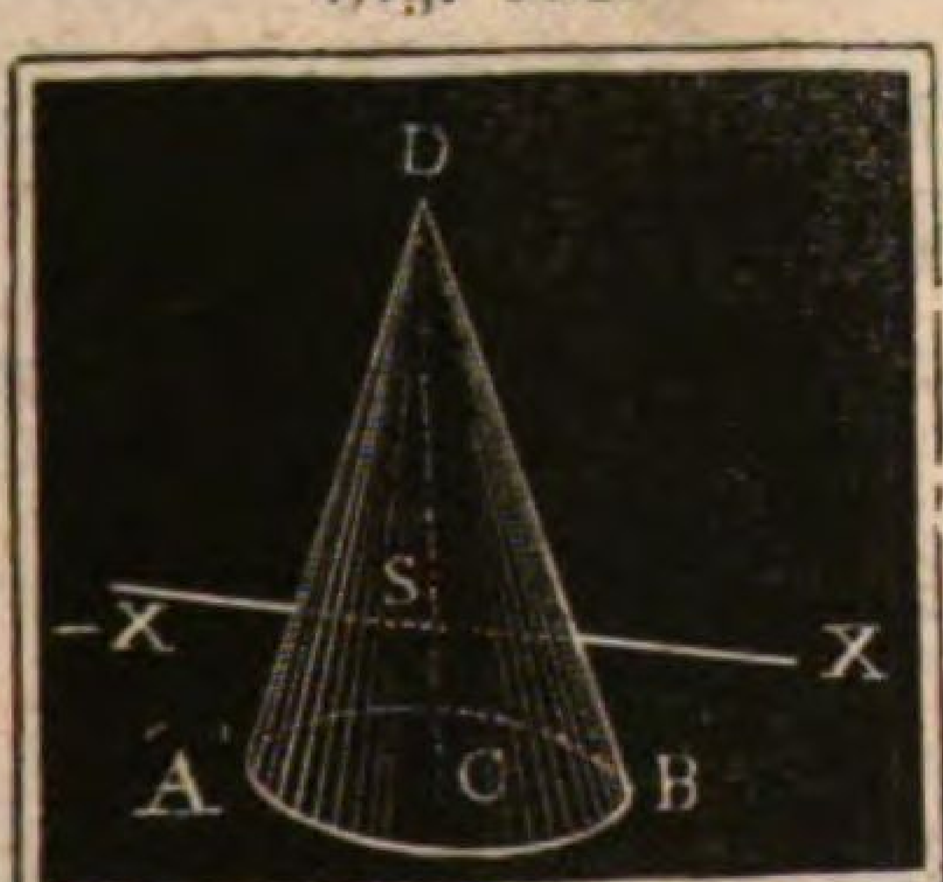


Fig. 332.



Auf gleiche Weise findet man für den geraden Kegel ABD, Fig. 331, dessen Umdrehungsaxe durch den Schwerpunkt desselben geht und auf der geometrischen Axe CD winkelrecht steht,

$$T = {}^3\!/_{20} M \left(r^2 + \frac{h^2}{4}\right).$$

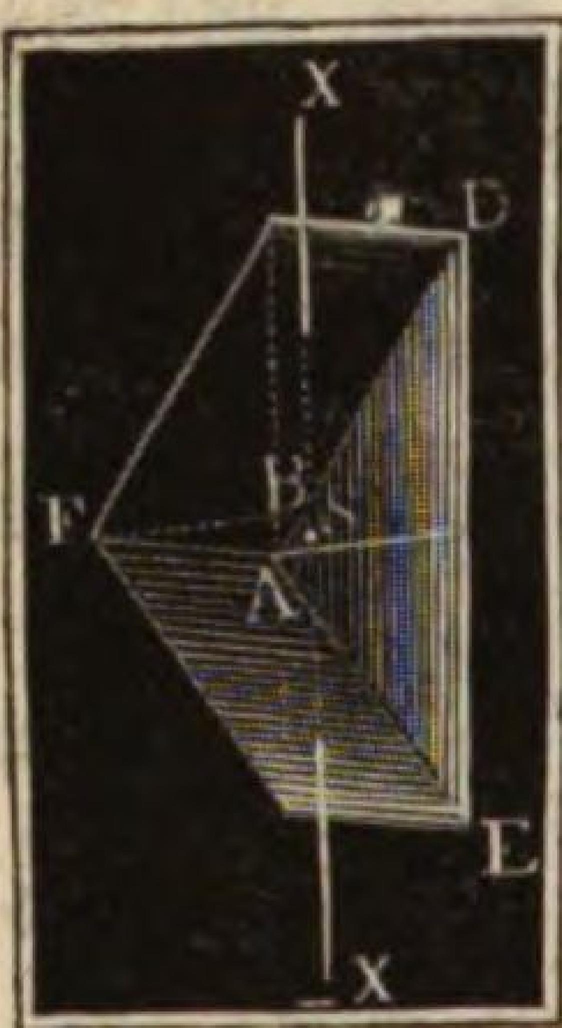
Für ein Blatt ABC, Fig. 332, in Form eines rechtwinkeligen Dreieckes ist in Hinsicht auf eine durch den Schwerpunkt S und mit einer Kathete AC parallel gehende Axe nach §. 197:

$$T = \frac{bh^3}{36} = \frac{bh}{2} \cdot \frac{h^2}{18} = {}^1\!/_{18} M h^2,$$

wenn b die Breite parallel zur Umdrehungsaxe und h die Höhe recht-

winkelig darauf angiebt. Diese Formel gilt selbst für ein schiefwinkeliges Dreieck, wenn die Axe parallel zur Grundlinie läuft und h die Höhe des Dreieckes bezeichnet. Hieraus läßt sich nun das Trägheitsmoment eines dreiseitigen Prisma's $ADEF$, Fig. 333, finden, wenn die Umdrehungsaxe $\overline{XX}$ durch den Schwerpunkt S desselben und parallel zur Seite DE einer Grundfläche läuft; es folgt auf dem oben beim Cylinder eingeschlagenen Wege

Fig. 333.

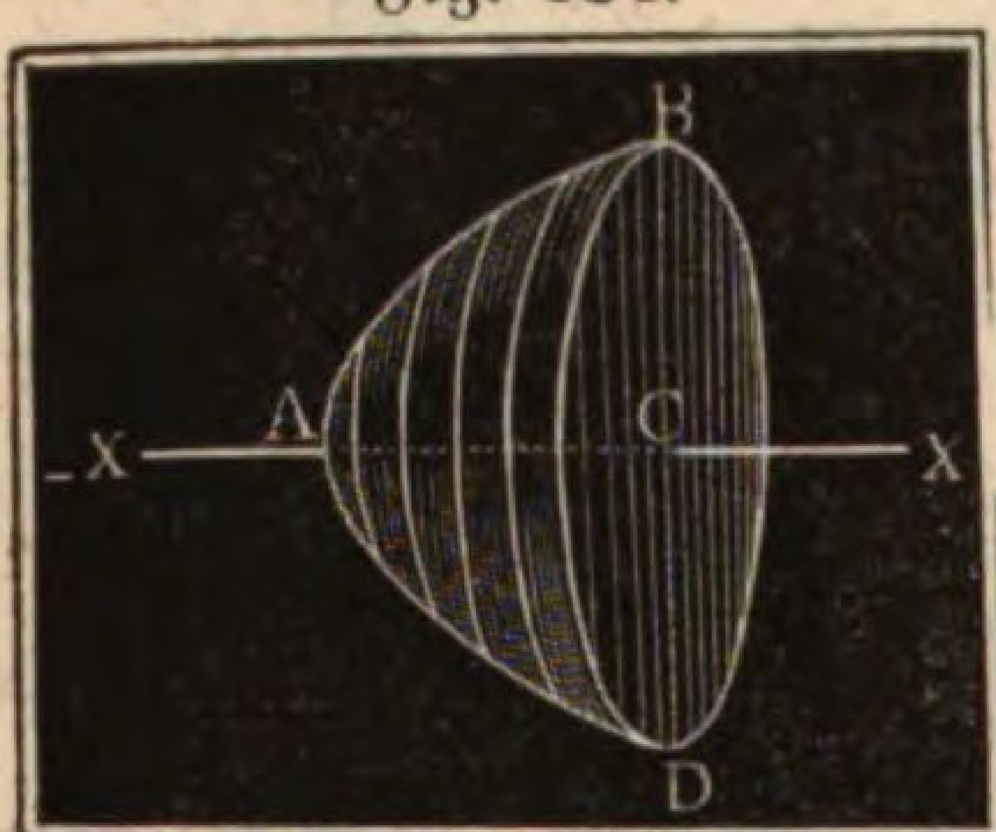


$$T = M\left(\frac{1}{18}h^2 + \frac{l^2}{3}\right),$$

wo l die halbe Länge des Prisma's bezeichnet.

Segmente. §. 239. Das Trägheitsmoment eines Rotationsparaboloides BAD, Fig. 334, welches sich um seine Rotationsaxe AC dreht, wird ähnlich wie das einer Kugel bestimmt. Ist der Halbmesser der Basis $CB = CD = a$, die Höhe $CA = h$, und läßt man den Körper aus n Scheiben, jede von der Höhe $\frac{h}{n}$ bestehen, so hat man die Inhalte dieser

Fig. 334.



$$= \frac{h}{n}\,.\,\pi\,.\,\frac{1}{n}a^2, \frac{h}{n}\pi\,.\,\frac{2}{n}a^2, \frac{h}{n}\,\pi\,.\frac{3}{n}\;a^2$$

u. s. w., weil sich die Quadrate der Halbmesser wie die Höhen verhalten. Hieraus ergeben sich die Trägheitsmomente

$$= \frac{h}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a^4}{n^2}, \frac{h}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{4a^4}{n^2}, \frac{h}{n}\,\frac{\pi}{2}\cdot\frac{9a^4}{n^2}$$

u. s. w., und daher folgt endlich das Trägheitsmoment des ganzen Paraboloides:

$$T = \frac{\pi a^4 h}{2n^3}\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + .. + n^2) = \frac{\pi a^4 h}{2n^3}\cdot\frac{n^3}{3} = \frac{\pi a^4 h}{6} =$$

$$\frac{\pi a^2 h}{2}\cdot\frac{a^2}{3} = \frac{1}{3}Ma^2,$$

weil das Volumen dieses Körpers $M = \frac{\pi a^2 h}{2}$ ist.

Für ein niedriges Kugelsegment läßt sich dieselbe Formel anwenden, ist aber die Höhe h gegen a nicht sehr klein, so hat man für das Trägheitsmoment einer Scheibe

$$= \frac{\pi h}{2n}\cdot a^4 = \frac{\pi h}{2n}\cdot h^2\,(2r - h)^2 = \frac{\pi h}{2n}\cdot(4r^2h^2 - 4rh^3 + h^4)$$

zu setzen, wobei r den Kugelhalbmesser bezeichnet.

Nimmt man nun successiv statt h die Werthe $\frac{h}{n}$, $\frac{2h}{n}$, $\frac{3h}{n}$ u. s. w., so Segmente.
erhält man das Trägheitsmoment des Kugelabschnittes:

$$T = \frac{\pi h}{2n}\left[4r^2\left(\frac{h}{n}\right)^2\cdot\frac{n^3}{3} - 4r\left(\frac{h}{n}\right)^3\cdot\frac{n^4}{4} + \left(\frac{h}{n}\right)^4\cdot\frac{n^5}{5}\right]$$

$$= \frac{\pi h^3}{30}\,(20r^2 - 15rh + 3h^2).$$

Der Inhalt des Segmentes ist $M = \pi h^2\,(r - 1/_3 h)$, daher

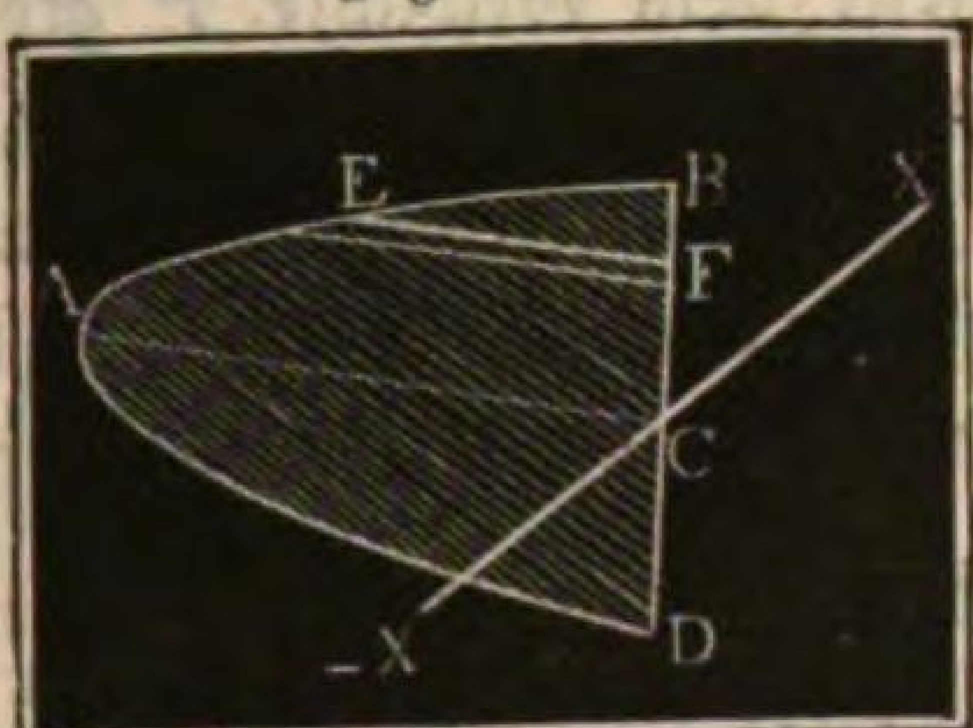
$$T = \pi h^2\,(r - 1/_3 h)\cdot\frac{2h}{3}\left(r - 5/_{12} h + 1/_{90}\cdot\frac{h^2}{r - 1/_3 h}\right)$$

$$= 2/_3 Mh\left(r - 5/_{12} h + 1/_{90}\cdot\frac{h^2}{r - 1/_3 h}\right).$$

Meist ist genügend genau $T = 2/_3 Mh\,(r - 5/_{12} h)$. Diese Formel findet ihre Anwendung bei den Pendellinsen.

Für eine Parabelfläche ABD, Fig. 335, welche sich um eine Axe $X\overline{X}$ dreht, die durch die Mitte C der Sehne BD geht und winkelrecht auf der Fläche steht, erhält man das Trägheitsmoment, wenn man die Fläche in lauter gleich breite Streifen, wie EF, zerlegt und die Momente dieser addirt. Es sei $AC = l$ die Länge und $CB = b$ die halbe Breite der Fläche, $CF = x$ die Abscisse und $EF = y$ die Ordinate oder Länge eines Elementes. Das Trägheitsmoment desselben

Fig. 335.



ist dann $= \frac{b}{n}\,y\left(x^2 + \frac{y^2}{3}\right)$; da aber $\frac{x^2}{b^2} = \frac{l - y}{l}$, also $y = l\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)$ ist, so folgt dieses Moment $= \frac{b}{n}\left[lx^2\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right) + l^3\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)^3\right]$. Setzen wir nun nach und nach $x = \frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, \frac{3b}{n}$ u. s. w., und addiren wir die Ergebnisse, so bekommen wir das Trägheitsmoment der halben Parabelfläche:

$$T = bl\left[\frac{l^2}{3n}\left(n - n + 3/_5 n - \frac{n}{7}\right) + \frac{b^2}{3} - \frac{b^2}{5}\right]$$

$$= bl\left(\frac{16\,l^2}{3\,.\,35} + \frac{2b^2}{3\,.\,5}\right) = 2/_3\,bl\,(8/_{35}\,l^2 + 1/_5\,b^2),$$

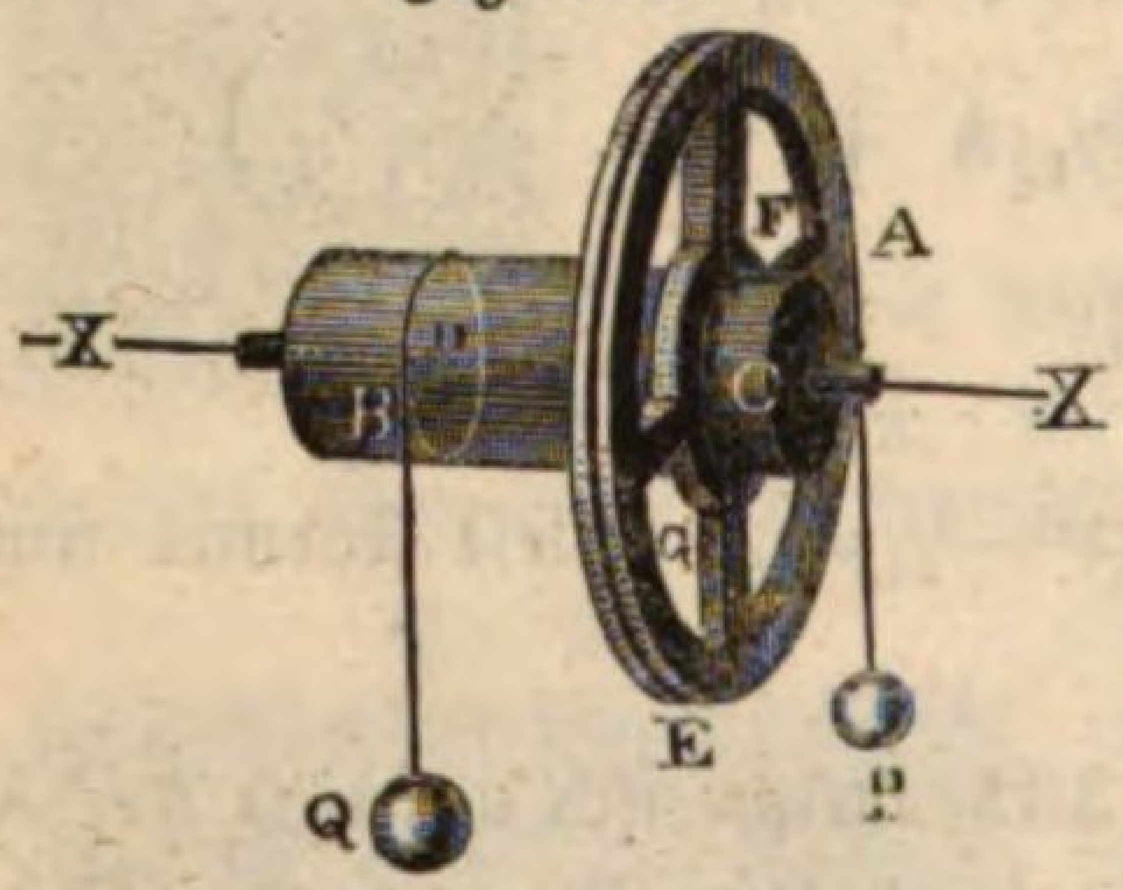
d. i. $T = 1/_5\,M\,(8/_7\,l^2 + b^2)$, weil die halbe Parabelfläche $M = 2/_3\,bl$ ist.

Diese auch für die ganze Parabelfläche geltende Formel läßt sich auch auf ein Prisma mit parabolischen Grundflächen, namentlich auf schwingende Balanciers, anwenden.

Radwelle. §. 240. Die Theorie der Trägheitsmomente findet gerade bei Maschinen und Instrumenten die häufigsten Anwendungen, weil an diesen meist rotirende Bewegungen um eine feste Axe vorkommen. Es werden deshalb in der Folge noch vielfache Anwendungen dieser Lehre vorkommen, und möge daher genügen, zunächst nur einige einfache Fälle derselben abzuhandeln.

Wirken an einer Radwelle $ACDB$, Fig. 336, mit den Hebelarmen $CA = a$ und $DB = b$ zwei Gewichte P und Q mittelst vollkommen biegsamer Schnüre, und ist der Zapfenhalbmesser hinreichend dünn, um die Zapfenreibung vernachlässigen zu können, so bleibt dieselbe im Gleichgewichte, wenn die statischen Momente $P \,.\, CA$ und $Q \,.\, DB$, einander gleich sind, also $Pa = Qb$ ist. Ist aber das Moment vom Gewichte P größer als von Q, also $Pa > Qb$, so sinkt P und Q steigt, und ist $Pa < Qb$, so steigt P und Q sinkt. Untersuchen wir nun die Bewegungsverhältnisse in einem der letzteren Fälle, setzen wir z. B. voraus, daß $Pa > Qb$ sei. Die dem Gewichte Q entsprechende und am Arme b wirkende Kraft erzeugt am Hebelarme a eine Kraft $\frac{Qb}{a}$, die der dem Gewichte P entsprechenden Kraft entgegenwirkt, und daher als bewegende und in A angreifende Kraft $P - \frac{Qb}{a}$ übrig läßt. Die Masse $\frac{Q}{g}$ reducirt sich beim Versetzen aus dem Abstande b in den Abstand a auf $\frac{Qb^2}{ga^2}$, es ist daher die von $P - \frac{Qb}{a}$ bewegte Masse $M = \left(P + \frac{Qb^2}{a^2}\right) : g$, oder, wenn das Trägheitsmoment der Radwelle $= \frac{Gl^2}{g}$ und daher die auf A reducirte träge Masse derselben $= \frac{Gl^2}{ga^2}$ ist, schärfer:

Fig. 336.



$$M = \left(P + \frac{Qb^2}{a^2} + \frac{Gl^2}{a^2}\right) : g = (Pa^2 + Qb^2 + Gl^2) : ga^2.$$

Hieraus folgt nun die Acceleration des Gewichtes P sammt Radumfang

$$p = \frac{\text{Bewegende Kraft}}{\text{Masse}} = \frac{P - \frac{Qb}{a}}{Pa^2 + Qb^2 + Gl^2} \cdot ga^2$$

$$= \frac{Pa - Qb}{Pa^2 + Qb^2 + Gl^2} \cdot ga;$$

dagegen die Acceleration des steigenden Gewichtes Q oder des Wellenumfanges: Radwelle.

$$q = \frac{b}{a} p = \frac{Pa - Qb}{Pa^2 + Qb^2 + Gl^2} \; gb.$$

Die Spannung des Seiles von P ist $S = P - \frac{Pp}{g} = P\left(1 - \frac{p}{g}\right)$ (S. §. 73.), die des Seiles von Q, $T = Q + \frac{Qq}{g} = Q\left(1 + \frac{q}{g}\right)$, der Zapfendruck daher

$$S + T = P + Q - \frac{Pp}{g} + \frac{Qq}{g} = P + Q - \frac{(Pa - Qb)^2}{Pa^2 + Qb^2 + Gl^2}.$$

Es ist also der Druck im Zapfen bei einer umlaufenden Radwelle kleiner als bei einer im Gleichgewichte stehenden Radwelle

Aus den Accelerationen p und q lassen sich endlich die übrigen Bewegungsverhältnisse finden; es ist nach t Secunden die Geschwindigkeit von P, $v = pt$, von Q, $v_1 = qt$, und der durchlaufene Weg von P, $s = \frac{1}{2} pt^2$, von Q, $s_1 = \frac{1}{2} qt^2$.

Beispiel. Es sei das Gewicht am Rade, $P = 60$ Pf., das an der Welle $Q = 160$ Pf., der Hebelarm von jenem $CA = a = 20$ Zoll, und von diesem $DB = b = 6$ Zoll; es bestehe ferner die Welle aus einem massiven Cylinder von 10 Pf. Gewicht, das Rad aber aus zwei eisernen Ringen und vier Armen, jene zu 40 und 12 Pfund, diese zusammen von 15 Pf. Gewicht; endlich seien die Halbmesser des größeren Radringes AE, $= 20$ und 19 Zoll und die des kleineren Ringes FG, $= 8$ und 6 Zoll. Man soll die Bewegungsverhältnisse dieser Maschine angeben. Die bewegende Kraft am Radumfange ist

$$P - \frac{b}{a} Q = 60 - \frac{6}{20} \cdot 160 = 60 - 48 = 12 \text{ Pf.},$$

und das Trägheitsmoment der Maschine, wenn man noch die Zapfen und Seilmassen unberücksichtigt läßt, gleich Trägheitsmoment der Welle $= \frac{Wb^2}{2} = \frac{10 \cdot 6^2}{2} = 180$, plus Moment des kleineren Ringes $= \frac{R_1 (r_1^2 + r_2^2)}{2} = \frac{12 \cdot (8^2 + 6^2)}{2} = 600$, plus Moment des größeren Ringes

$$= \frac{R_2 (r_3^2 + r_4^2)}{2} = \frac{40 \cdot (20^2 + 19^2)}{2} = 15220,$$

plus Moment der Arme, annähernd $= \frac{A (r_4^3 - r_1^3)}{3 (r_4 - r_1)} = \frac{A (r_1^2 + r_1 r_4 + r_4^2)}{3} = \frac{15 \cdot (19^2 + 19 \cdot 8 + 8^2)}{3} = 2885$, daher zusammen $Gl^2 = 180 + 600 + 15220 + 2885 = 18885$, oder für Fußmaaß $= \frac{18885}{144} = 131,14$. Die gesammte, auf den Radumfang reducirte Masse ist

$$M = \left(P + \frac{Qb^2 + Gl^2}{a^2}\right) : g = \left[60 + 160 \left(\frac{6}{20}\right)^2 + \frac{18885}{20^2}\right] : g$$

$$= \left(60 + 160 \cdot 0{,}09 + \frac{18885}{400}\right) \cdot 0{,}032 = (60 + 14{,}4 + 47{,}21) \cdot 0{,}032 = 121{,}61 \cdot 0{,}032$$

$= 3{,}8915$ Pf.

Radwelle. Hiernach folgt die Acceleration des Gewichtes P sammt der des Radumfanges

$$p = \frac{P - \frac{b}{a} Q}{\frac{P + Qb^2 + Gl^2}{a^2}} \cdot g = \frac{12}{3,8915} = 3,084 \text{ Fß., dagegen die von } Q: q = \frac{b}{a}\, p$$

$= \frac{6}{20} \cdot 3,084 = 0,925$ Fuß; ferner die Seilspannung von $P, = \left(1 - \frac{p}{g}\right) P$ $= \left(1 - \frac{3,084}{31,25}\right) \cdot 60 = (1 - 0,099) \cdot 60 = 54,06$ Pfund, dagegen von Q, $q = \left(1 + \frac{q}{g}\right) \cdot Q = (1 + 0,925 \cdot 0,032) \cdot 160 = 1,030 \cdot 160 = 164,8$ Pf.; und folglich der Zapfendruck $S + T = 54,06 + 164,80 = 218,86$ Pf. oder einschließlich das Gewicht der Maschine $= 218,86 + 77 = 295,86$ Pf. Nach 10 Sec. hat P die Geschwindigkeit $v = pt = 3,084 \cdot 10 = 30,84$ Fuß erlangt, und den Weg $s = \frac{vt}{2} = 30,84 \cdot 5 = 154,2$ Fuß zurückgelegt, und es ist Q um

$$s_1 = \frac{b}{a}\, s = 0,3 \cdot 154,2 = 46,26 \text{ Fß. gestiegen.}$$

§. 241. Das Gewicht P, welches dem Gewichte Q die Acceleration $q = \frac{Pab - Qb^2}{Pa^2 + Qb^2 + Gl^2} \cdot g$ ertheilt, kann auch durch ein anderes Gewicht P_1 ersetzt werden, ohne die Acceleration von Q zu verändern, wenn dasselbe an einem Hebelarme a_1 wirkt, für welchen ist

$$\frac{P_1 a_1 - Qb}{P_1 a_1^2 + Qb^2 + Gl^2} = \frac{Pa - Qb}{Pa^2 + Qb^2 + Gl^2}.$$

Die Größe $\frac{Pa^2 + Qb^2 + Gl^2}{Pa - Qb}$ durch k bezeichnet, erhält man $a_1^2 - ka_1$ $= - \frac{Qb\,(b + k) + Gl^2}{P_1}$, und den in Frage stehenden Hebelarm

$$a_1 = \tfrac{1}{2} k \pm \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 - \frac{Qb\,(b + k) + Gl^2}{P_1}}.$$

Auch läßt sich mit Hülfe der Differenzialrechnung finden, daß Q vom Gewichte P dann am stärksten accelerirt wird, wenn der Hebelarm des letzten der Gleichung $Pa^2 - 2Qab = Qb^2 + Gl^2$ entspricht, also

$$a = \frac{bQ}{P} + \sqrt{\left(\frac{bQ}{P}\right)^2 + \frac{Qb^2 + Gl^2}{P}} \text{ ist.}$$

Die im Vorstehenden gefundenen Formeln nehmen eine complicirtere Gestalt an, wenn auf die Reibung der Zapfen und Steifigkeit der Seile Rücksicht genommen wird. Setzen wir den Inbegriff der statischen Momente beider Widerstände $= Fr$, so ist statt der bewegenden Kraft $P - \frac{b}{a} Q$, der Werth $P - \frac{Qb + Fr}{a}$ zu substituiren, weshalb z. B. die Beschleu-

nigung von Q, $q = \frac{(Pa - Fr)\,b - Qb^2}{Pa^2 + Qb^2 + Gl^2} \cdot g$ und Radwelle.

$$a = \frac{Qb + Fr}{P} + \sqrt{\left(\frac{Qb + Fr}{P}\right)^2 + \frac{Qb^2 + Gl^2}{P}} \text{ ausfällt.}$$

Beispiele. 1) Wenn die Gewichte $P = 30$ Pf. $Q = 80$ Pf., an den Hebelarmen $a = 2$ Fß. und $b = \frac{1}{2}$ Fß. einer Radwelle wirken und das Trägheitsmoment dieser $Gl^2 = 60$ beträgt, so ist die Beschleunigung des steigenden Gewichtes Q:

$$q = \frac{30 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} - 80 \cdot (\frac{1}{2})^2}{30 \cdot 2^2 + 80 \cdot (\frac{1}{2})^2 + 60} \cdot g = \frac{30 - 20}{120 + 20 + 60} \cdot 31{,}25 = \frac{312{,}5}{200}$$

$= 1{,}5625$ Fß. Soll aber ein Gewicht $P_1 = 45$ Pf. dieselbe Beschleunigung von Q hervorbringen, so ist der Hebelarm von P_1:

$$a_1 = -\frac{k}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 - \frac{80 \cdot \frac{1}{2}\,(\frac{1}{2} + k) + 60}{45}}, \text{ oder da } k = \frac{200}{60 - 40} = 10$$

ist, $a_1 = 5 \pm \sqrt{25 - \frac{32}{3}} = 5 \pm \frac{1}{3} \cdot 11{,}358 = 5 \pm 3{,}786 = 8{,}786$ Fß. oder 1,214 Fuß.

2) Die Beschleunigung von Q fällt am größten aus, wenn der Hebelarm der Kraft oder der Halbmesser des Rades

$$a = \frac{\frac{1}{2} \cdot 80}{30} + \sqrt{\left(\frac{40}{30}\right)^2 + \frac{20 + 60}{30}} = \frac{4}{3} + \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{24}{9}} = \frac{4 + \sqrt{40}}{3}$$

$= 3{,}4415$ Fß. beträgt und es ist $q = \left(\frac{30 \cdot 1{,}7207 - 20}{30 \cdot (3{,}4415)^2 + 80}\right) g = \frac{31{,}621}{435{,}32} \cdot g$
$= 2{,}270$ Fß.

3) Ist das statische Moment der Reibung sammt Seilsteifigkeit $Fr = 8$, so hat man statt Qb, $Qb + Fr = 40 + 8 = 48$ zu setzen, weshalb folgt: $a = \frac{48}{30} + \sqrt{\left(\frac{48}{30}\right)^2 + \frac{8}{3}} = 1{,}6 + \sqrt{5{,}227} = 3{,}886$ und die entsprechende Maximalbeschleunigung $q = \frac{30 \cdot 1{,}943 - 8 \cdot \frac{1}{2} - 20}{30 \cdot (3{,}886)^2 + 80} \cdot g = \frac{34{,}29}{533} \cdot 31{,}25$
$= 2{,}01$ Fß.

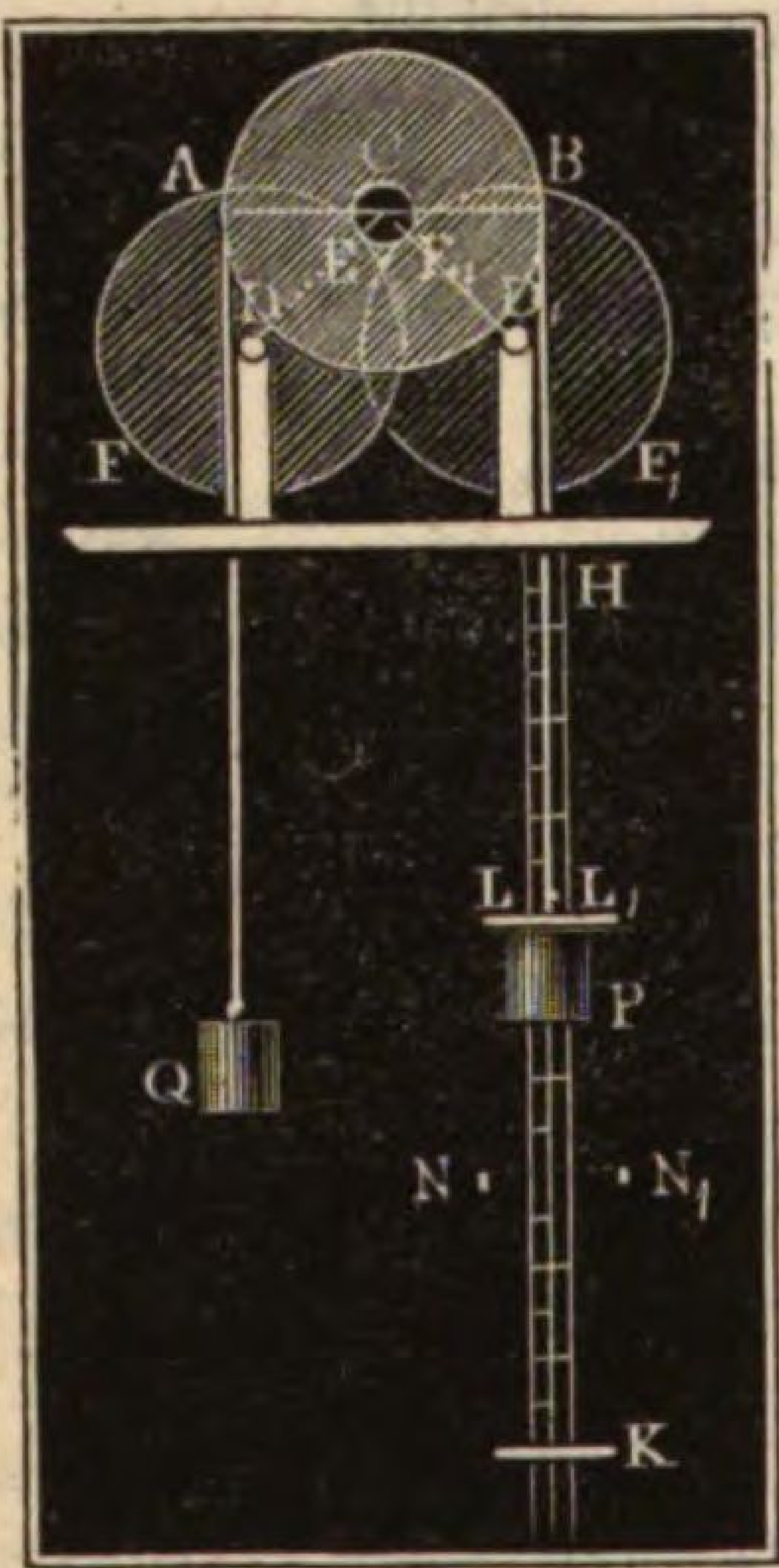
§. 242. Die §. 240. gefundenen Formeln für die Radwelle gelten auch für die einfache feste Rolle, denn setzt man $b = a$, so geht die Radwelle in eine Rolle oder Welle über. Behält man die übrige Bezeichnung des angeführten Paragraphen bei, so hat man für die Beschleunigung, mit welcher P sinkt und Q steigt: $p = q = \frac{(P - Q)\,a^2}{(P + Q)a^2 + Gl^2} \cdot g$, Fallmaschine.
oder mit Berücksichtigung der Reibung:

$$p = q = \frac{(P - Q)\,a^2 - Far}{(P + Q)\,a^2 + Gl^2} \cdot g.$$

Um die Zapfenreibung herabzuziehen, legt man die Zapfen C der Rolle AB, Fig. 337 (a.f.S.), auf Friktionsräder DEF und $D_1E_1F_1$. Sind nun die Trägheitsmomente dieser $G_1\,l_1^2$ und ihre Halbmesser $DE = D_1E_1 = a_1$,

Fallmaschine. so hat man zu setzen: $p = q = \dfrac{(P-Q)\,a^2 - Far}{(P+Q)\,a^2 + G\,l^2 + G_1\,\dfrac{l_1^{\,2}\,r^2}{a_1^{\,2}}} \cdot g,$

Fig. 337.



weil die auf den Umfang der Frictionsräder oder der Radzapfen reducirte träge Masse dieser Räder $= \dfrac{G_1\,l_1^{\,2}}{a_1^{\,2}}$ beträgt. Durch Umkehrung erhält man die Beschleunigung der Schwere:

$$g = \frac{(P+Q)\,a^2 + G\,l^2 + G_1\,\dfrac{l_1^{\,2}\,r^2}{a_1^{\,2}}}{(P-Q)\,a^2 - Far} \cdot p.$$

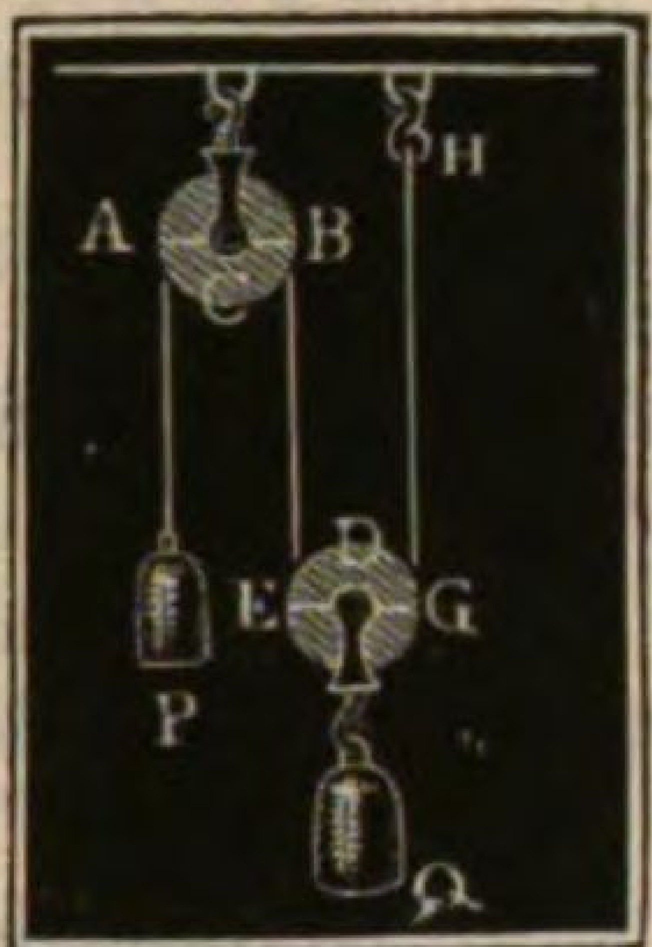
Bei einer kleinen Differenz $P-Q$ beider Gewichte fällt die Beschleunigung p klein aus, es geht daher die Bewegung langsam vor sich und es ist der Widerstand, welchen die Luft den Gewichten entgegensetzt, unbedeutend, weshalb sich mit Hülfe von Versuchen über das Sinken von Gewichten an einer solche Vorrichtung die Beschleunigung der Schwere mit ziemlicher Sicherheit ermitteln läßt, was bei einem frei fallenden Körper geradezu unmöglich ist. Versuche der Art hat zuerst der Engländer Atwood (s. Atwood's Treatise on Rectilinear and Rotary Motion) angestellt, weshalb der Apparat unter dem Namen der Atwood'schen Fallmaschine bekannt ist. Zur Bestimmung der Fallräume dient eine Scala HK, an der das Gewicht P niedersinkt. Aus dem Fallraume s und der entsprechenden Zeit t folgt allerdings schon $p = \dfrac{2\,.\,s}{t^2}$; hebt man aber die bewegende Kraft während des Fallens auf, indem man ein ihr gleiches und einen hohlen Ring bildendes Gewicht LL_1 von einem festen engeren Ringe NN_1 auffangen läßt, so wird der übrige Theil s_1 des Fallraumes gleichförmig durchlaufen und es ergiebt sich nun mit Hülfe der an einer guten Uhr beobachteten Zeit t_1 die Geschwindigkeit $v = \dfrac{s_1}{t_1}$ und die Acceleration $p = \dfrac{v}{t} = \dfrac{s_1}{tt_1}$. Macht man endlich $t_1 = t = 1$, so giebt der Versuch unmittelbar $p = s_1$. Setzt man den so gefundenen Werth von p in die obige Formel, so giebt diese die Beschleunigung der Schwere.

Rollen. §. 243. Die Accelerationen der Gewichte P und Q, welche an einer Verbindung aus einer festen Rolle AB und einer losen Rolle EG,

Fig. 338, hängen, ergeben sich auf folgende Weise. Es seien die Gewichte der Rollen AB und EG, $= G$ und G_1, die Trägheitsmomente derselben $G\,l^2$ und $G_1 l_1^2$ und die Halbmesser $CA = a$ und $DE = a_1$, also die auf die Umfänge reducirten Massen $M = \frac{G}{g} \cdot \frac{l^2}{a^2}$ und $M_1 = \frac{G_1}{g} \cdot \frac{l_1^2}{a_1^2}$. Sinkt das Gewicht P um einen gewissen Weg s, so steigt $Q + G_1$ auf $\frac{1}{2} s$ (§. 151), es wird daher die Arbeit $Ps - (Q + G_1)\frac{s}{2}$ verrichtet; hat bei diesem Sinken P die Geschwindigkeit v angenommen, so ist $Q + G_1$ in die Geschwindigkeit $\frac{v}{2}$ versetzt worden und es hat die Rolle AB die Umfangsgeschwindigkeit v und die Rolle EG, da bei der rollenden Bewegung progressive Bewegung und drehende einander gleich sind, die Umfangsgeschwindigkeit $\frac{v}{2}$ erlangt. Die Summe der diesen Massen und Geschwindigkeiten entsprechenden lebendigen Kräfte ist $\frac{P}{g} \cdot v^2 + \frac{Q + G_1}{g} \cdot \left(\frac{v}{2}\right)^2 + \frac{G\,l^2}{a^2} \cdot v^2 + \frac{G_1 l_1}{a_1^2} \cdot \left(\frac{v}{2}\right)^2$, und setzt man nun ihre Hälfte der aufgewendeten Arbeit gleich, so bekommt man die Gleichung

Rollen.

Fig. 338.



$$\left(P - \frac{(Q+G_1)}{2}\right) s = \left(P + \frac{Q + G_1}{4} + \frac{G\,l^2}{a^2} + \frac{G_1 l_1^2}{4 a_1^2}\right) \frac{v^2}{2g}.$$

Hiernach ist die dem von P zurückgelegten Raume s entsprechende Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{2\,gs\left(P - \frac{Q + G_1}{2}\right)}{P + \frac{Q + G_1}{4} + \frac{G\,l^2}{a^2} + \frac{G_1 l_1^2}{4 a_1^2}}}$$

Für die Acceleration ist $ps = \frac{v^2}{2}$, daher hier

$$p = \left(\frac{P - \frac{Q + G_1}{2}}{P + \frac{Q+G_1}{4} + \frac{G\,l^2}{a^2} + \frac{G_1 l_1^2}{4 a_1^2}}\right) g.$$

Die Acceleration von $Q + G_1$ ist $= \frac{p}{2}$, und ebenso groß ist auch die drehende Acceleration von G_1.

Rollen. Die Spannung des beide Rollen verbindenden Seiles BE ist $S = P - \left(P + \frac{G l^2}{a^2}\right)\frac{p}{g}$, weil die Kraft $\left(P + \frac{G l^2}{a^2}\right)\frac{p}{g}$ auf die Beschleunigung von P und G verwendet wird; die Spannung des befestigten Seiles GH hingegen: $S_1 = S - \frac{G_1 l_1^2}{a_1^2} \cdot \frac{p}{2g}$, weil die Rolle EG durch die Differenz $S - S_1$ der Seilspannungen in Umdrehung gesetzt wird.

Beispiel. An der Rollenverbindung in Fig. 338 hängen die Gewichte $P = 40$ Pf. und $Q = 66$ Pf. und es wiegt jede der massiven Rollen 6 Pf.; man sucht die Beschleunigungen dieser Gewichte. Die bewegende Kraft ist $P - \frac{Q + G_1}{2} = 40 - \frac{66+6}{2} = 4$ Pf., die Masse einer Rolle auf ihren Umfang reducirt: $\frac{G l^2}{g a^2} = \frac{G_1 l_1^2}{g a_1^2} = \frac{G}{2g} = \frac{6}{2g} = \frac{3}{g}$ (§. 235), und die gesammte träge Masse

$$= \left(P + \frac{Q+G_1}{4} + \frac{G l^2}{a^2} + \frac{G_1 l_1^2}{4a^2}\right) : g = \left(40 + \frac{72}{4} + 3 + \frac{3}{4}\right) : g = \frac{247}{4g},$$

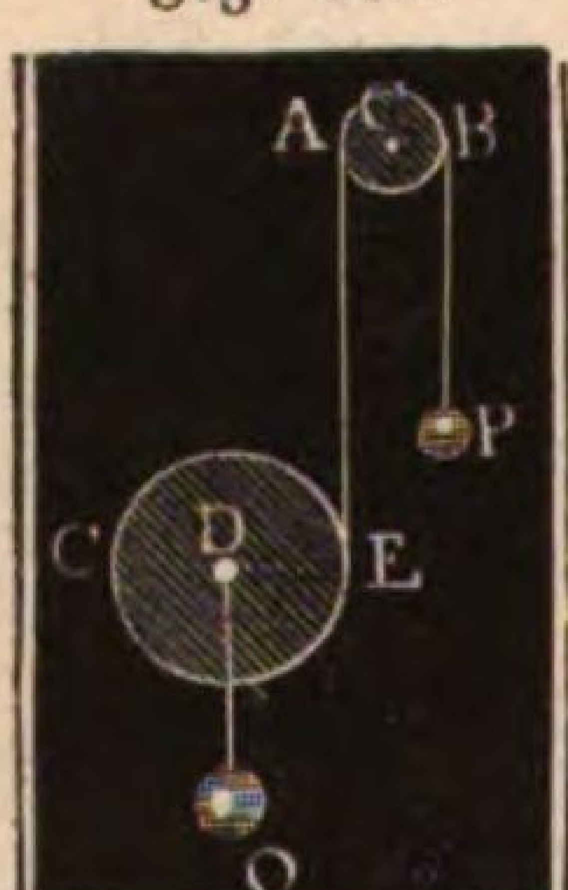
daher die Beschleunigung des sinkenden Gewichtes: $p = \frac{4}{247} \cdot 4g = \frac{16 \cdot g}{247}$ $= \frac{16 \cdot 31,25}{247} = \frac{500}{247} = 2,024$ Fß.; dagegen die Acceleration des steigenden Gewichtes: $\frac{p}{2} = 1,012$ Fß. Die Spannung des Seiles BE ist

$$S = P - \left(P + \frac{G}{2}\right)\frac{p}{g} = 40 - 43 \cdot \frac{2,024}{31,25} = 40 - 2,785 = 37,215 \text{ Pf.};$$

die des Seiles GH, $= S - \frac{G}{2} \cdot \frac{p}{2g} = 37,215 - 3 \cdot \frac{1,012}{31,25} = 37,118$ Pf.

§. 244. Zusammengesetzter ist die Bewegung, wenn die Rolle EG, Fig. 339, nur an einem umgeschlagenen Seile hängt. Nehmen wir an,

Fig. 339.



daß P mit der Acceleration p sinkt, und Q mit q steigt, so erhalten wir die Acceleration der drehenden Bewegung am Umfang der losen Rolle $q_1 = p - q$ (§. 42). Setzen wir nun die Spannung des Seiles $AE = S$, so erhalten wir $P - S = \left(P + \frac{G l^2}{a^2}\right)\frac{p}{g}$, ferner $S - (Q + G_1) = (Q + G_1)\frac{q}{g}$, da nach §. 228 angenommen werden kann, daß S in dem Schwerpunkte D von EG angreift, und endlich $S = \frac{G_1 l_1^2}{a_1^2} \cdot \frac{q_1}{g}$, da auch anzunehmen ist, daß der Schwerpunkt D festgehalten und die Rolle durch S in Umdrehung gesetzt wird. Die letzten drei Formeln geben die Accelerationen

$p = \frac{P-S}{P+\frac{Gl^2}{a^2}}\,g$, $q = \left(\frac{S-(Q+G_1)}{Q+G_1}\right) g$ und $q_1 = \frac{Sa_1^2}{G_1 l_1^2}\,g$; und alle drei in die Gleichung $q_1 = p - q$ eingesetzt, erhält man Rollen.

$$\frac{Sa_1^2}{G_1 l_1^2}\,g = \frac{P-S}{P+\frac{Gl^2}{a^2}}\,g - \frac{S-(Q+G_1)}{Q+G_1}\,g,$$

woraus nun die Seilspannung

$$S = \frac{2\,Pa^2 + Gl^2}{\left(\frac{a_1^2}{G_1 l_1^2} + \frac{1}{Q+G_1}\right)(Pa^2 + G\,l^2) + a^2}$$

folgt. Aus dem Werthe für S ergeben sich nun auch durch Anwendung obiger Formeln die Beschleunigungen.

Vernachlässigen wir die Masse G der festen Rolle, und setzen wir auch $Q =$ Null, so erhalten wir einfach

$$S = \frac{2\,Pa^2\,.\,G_1 l_1^2}{P(a_1^2+l_1^2)a^2 + Ga_1^2 l_1^2} = \frac{2\,PG_1 l_1^2}{G_1 l_1^2 + P(a_1^2+l_1^2)}.$$

Ist das Seilende AE, statt daß es über die Rolle AB weggeht, fest, so hat man die Beschleunigung $p = o$, daher $g_1 = -q$ und folglich die Spannung

$$S = \frac{(Q+G_1)G_1 l_1^2}{(Q+G_1)a_1^2 + G_1 l_1^2}; \text{ für } Q = \text{Null},$$

$$S = \frac{G_1 l_1^2}{a_1^2 + l_1^2}.$$

Ist der rollende Körper G_1 ein massiver Cylinder, so hat man $\frac{G_1 l_1^2}{a_1^2} = \frac{1}{2}\,G_1$, und es ergiebt sich die Spannung für den ersten Fall $S = \frac{2PG_1}{3P+G_1}$, und für den zweiten $S = \frac{G_1}{3}$. Soll im ersten Falle das Gewicht P sinken, so hat man p negativ, also $S > P$, d. i. $2\,PG_1 l_1^2 > PG_1 l_1^2 + P^2(a_1^2 + l_1^2)$, einfach $\frac{G_1}{P} > 1 + \frac{a_1^2}{l_1^2}$; damit ferner G_1 sinke, ist nöthig, daß $S < G_1$ also $\frac{G_1}{P} > 1 - \frac{a_1^2}{l_1^2}$ sei.

Beispiel. Wenn bei der Rollenverbindung in Fig. 338 das Seil GH plötzlich reißt, so wird wenigstens anfänglich das Seil BE gespannt durch die Kraft

$$S = \frac{2\,P + \frac{G\,l^2}{a^2}}{\left(\frac{a_1^2}{G_1\,l_1^2} + \frac{1}{Q+G_1}\right)\left(P + \frac{G\,l^2}{a^2}\right) + 1} = \frac{2\,.\,40+3}{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{72}\right)(40+3)+1}$$

$$= \frac{83\,.\,72}{25\,.\,43+72} = \frac{5976}{1147} = 5{,}210 \text{ Pf.}$$

Rollen. Es folgt die Beschleunigung des sinkenden Gewichtes P:

$$p = \left(\frac{P - S}{P + \frac{G l^2}{a^2}}\right) g = \left(\frac{40 - 5{,}210}{40 + 3}\right) . 31{,}25 = \frac{34{,}79}{43} . 31{,}25 = 25{,}283 \text{ Fß.},$$

ferner die Beschleunigung der sinkenden Rolle:

$$q = \left(\frac{Q + G_1 - S}{Q + G_1}\right) g = \left(\frac{72 - 5{,}210}{72}\right) . 31{,}25 = \frac{66{,}79}{72} . 31{,}25 = 29{,}0 \text{ Fß.},$$

und die Umdrehungsacceleration dieser Rolle:

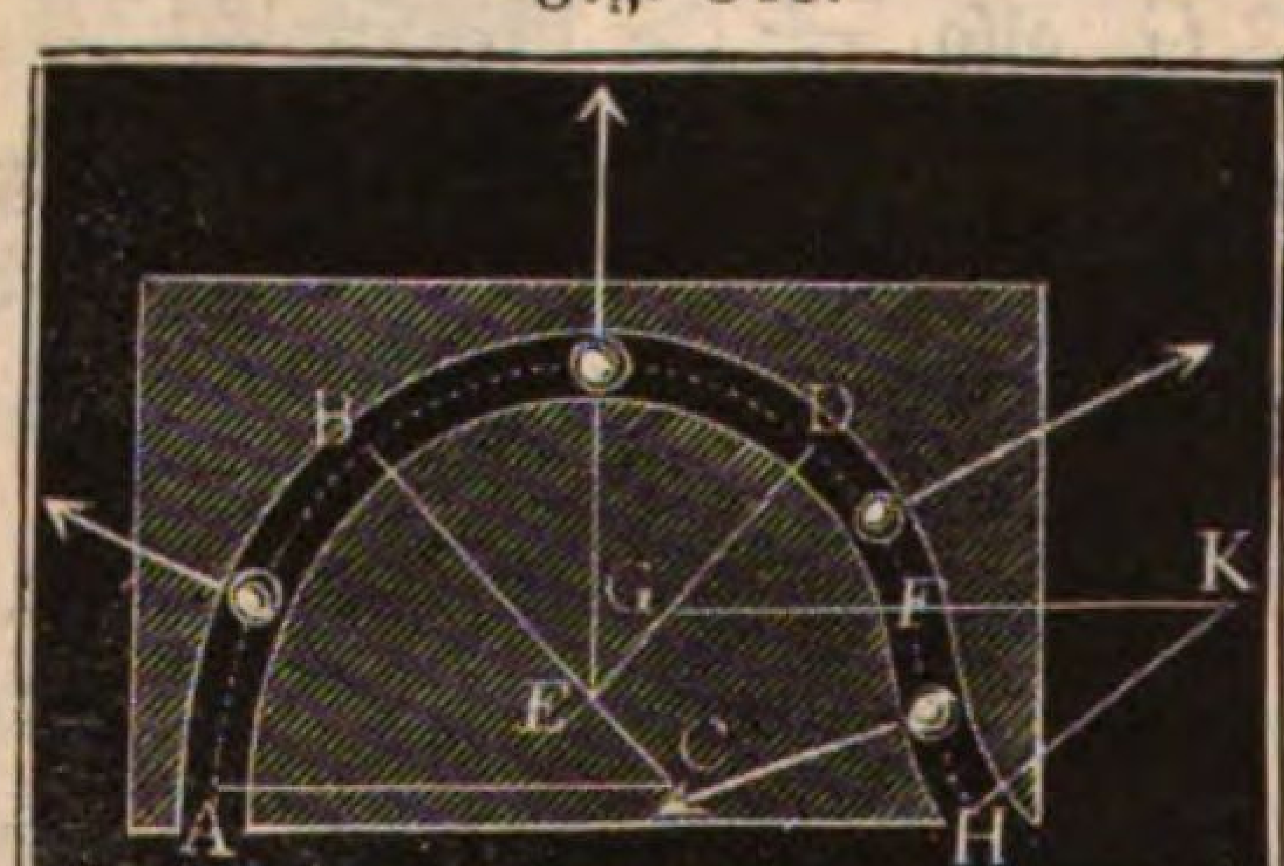
$$q_1 = \frac{S a_1^2}{G_1 l_1^2} \cdot g = \frac{5{,}210}{3} . 31{,}25 = 54{,}27 \text{ Fß.}$$

Zweites Kapitel.

Von der Centrifugalkraft.

Normalkraft. §. 245. Bewegt sich ein materieller Punkt in einer krummen Linie, so hat derselbe an jeder Stelle eine von der jedesmaligen Bewegungsrichtung ablenkende Acceleration, die wir in der Phoronomie unter dem Namen **Normalacceleration** kennen gelernt haben. Ist der Krümmungshalbmesser an einer Stelle der Bahn des bewegten Punktes $= r$ und die Geschwindigkeit von diesem $= v$, so hat man für die Normalacceleration $p = \frac{v^2}{r}$ (§. 41.). Ist nun die Masse des Punktes $= M$, so entspricht dieser Normalacceleration eine Kraft, $Mp = \frac{Mv^2}{r}$, die wir als die erste Ursache, weshalb der Punkt an jeder Stelle seine Bewegungsrichtung ändert, ansehen müssen. Hat der Punkt außer der Normalkraft keine andere (Tangential-) Kraft, so ist die Geschwindigkeit v desselben unveränderlich $= c$, und daher die Normalkraft $P = \frac{Mc^2}{r}$ nur abhängig von der jedesmaligen Krümmung oder von dem Krümmungshalbmesser, und zwar kleiner bei wenig Krümmung oder großem Krümmungshalbmesser, und größer bei großer Krümmung oder kleinerem Krümmungshalbmesser; bei doppeltem Krümmungshalbmesser ist z. B. die Normalkraft nur halb so groß als bei einfachem Krümmungshalbmesser. Wird ein materieller Punkt M durch eine horizontale Bahn, Fig. 340,

Fig. 340.



gezwungen, eine krumme Linie $ABDFH$ zu durchlaufen, so behält derselbe, wenn wir die Reibung außer Acht lassen, an allen Stellen einerlei Geschwindigkeit c, und übt an jeder Stelle einen der Normalkraft gleichen Druck gegen die concave Seitenwand aus. Während der Durchlaufung des Bogens AB ist dieser Druck $= \frac{Mc^2}{\overline{CA}}$, während der Durchlaufung von BD ist er $= \frac{Mc^2}{\overline{EB}}$, für den Bogen DF ist er $= \frac{Mc^2}{\overline{GD}}$ und für den Bogen $FH = \frac{Mc^2}{\overline{KF}}$, wenn CA, EB, GD und KF die Krümmungshalbmesser der Wegtheile AB, BD, DF und FH sind. Normalkraft.

§. 246. Bewegt sich ein materieller Punkt oder Körper im Kreise, so wirkt die Normalkraft radial einwärts, weshalb sie denn Centripetal- oder Annäherungskraft (franz. force centripède, engl. centripetal force) genannt wird, während die Kraft, mit welcher der Körper vermöge seiner Trägheit entgegengesetzt, d. i. radial auswärts wirkt, den Namen Centrifugal-, Flieh- oder Schwungkraft (franz. force centrifuge, engl. centrifugal force) erhalten hat. Centripetalkraft ist die auf den Körper einwirkende und Centrifugalkraft ist die vom Körper zurückwirkende Gegenkraft. Beide sind an Größe einander gleich und in der Richtung entgegengesetzt (§. 62.). Centripetal- und Centrifugalkraft.

Bei der Umdrehung der Planeten um die Sonne besteht die Centripetalkraft in einer Anziehungskraft der Sonne; wird aber der Körper durch eine Führung oder Leitung, ähnlich wie Fig. 340 angiebt, gezwungen, eine Kreisbahn zu durchlaufen, so wirkt die Führung durch ihre Starrheit als Centripetalkraft und der Centrifugalkraft des Körpers entgegen, ist endlich der umlaufende Körper durch einen Faden oder durch eine Stange mit dem Drehungspunkte verbunden, so ist es die Elasticität der Stange, welche sich mit der Centrifugalkraft des Körpers in's Gleichgewicht setzt und eben dadurch als Centripetalkraft wirkt.

Ist G das Gewicht des in Umdrehung befindlichen Körpers, also dessen Masse $M = \frac{G}{g}$, ist der Halbmesser des Kreises, in welchem die Umdrehung vor sich geht, $= r$ und die Umdrehungsgeschwindigkeit $= v$, so hat man nach dem letzten §. die Centrifugalkraft

$$P = \frac{Mv^2}{r} = \frac{Gv^2}{gr} = 2 \cdot \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{G}{r}, \text{ also auch } P : G = 2 \cdot \frac{v^2}{2g} : r,$$

d. h. die Centrifugalkraft verhält sich zum Gewichte des Körpers, wie die doppelte Geschwindigkeitshöhe zum Umdrehungshalbmesser.

Centripetal- und Centrifugalkraft.

Ist die Bewegung gleichförmig, was allemal eintritt, wenn außer der Centripetalkraft keine andere Kraft (Tangentialkraft) auf den Körper wirkt, so läßt sich die Geschwindigkeit $v = c$ durch die Umdrehungszeit T ausdrücken, indem man setzt $c = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}} = \frac{2\pi r}{T}$, und man erhält hiernach für die Centrifugalkraft

$$P = \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 \frac{M}{r} = \frac{4\pi^2}{T^2} \, . \, Mr = \frac{4\pi^2}{g T^2} \, . \, Gr.$$

Da $4\pi^2 = 39{,}4784$ und für Fußmaaß $\frac{1}{g} = 0{,}032$ ist, so hat man für die Rechnungen bequemer

$$P = \frac{39{,}4784}{T^2} \, . \, Mr = 1{,}2633 \, . \, \frac{Gr}{T^2}.$$

Oft giebt man die Zahl n der Umdrehungen in der Minute, und ersetzt deshalb T durch $\frac{60''}{n}$, weshalb folgt

$$P = \frac{39{,}4784}{3600} \, n^2 Mr = 0{,}010966 \, n^2 Mr = 0{,}0003509 \, n^2 Gr.$$

Hiernach folgt, daß bei gleichen Umdrehungszeiten oder bei gleich viel Umdrehungen in einer gewissen Zeit die Centrifugalkraft wie das Product aus Masse und Drehungshalbmesser wächst, und daß sie unter übrigens gleichen Umständen den Quadraten der Umdrehungszeiten umgekehrt, oder den Quadraten der Umlaufszahlen direct proportional ist. Da $\frac{2\pi}{T}$ die Winkelgeschwindigkeit ω ist, so läßt sich auch endlich setzen:

$$P = \omega^2 \, . \, Mr.$$

Beispiele. 1) Wenn ein Körper von 50 Pf. Gewicht einen Kreis von 3 Fuß Halbmesser in der Minute 400mal durchläuft, so ist seine Centrifugalkraft $P = 0{,}0003509 \, . \, 400^2 \, . \, 50 \, . \, 3 = 3{,}509 \, . \, 16 \, . \, 50 \, . \, 3 = 350{,}9 \, . \, 24 = 8422$ Pf. Ist dieser Körper durch ein Hanfseil mit der Axe verbunden, und der Festigkeitsmodul für Hanfseile (§. 189) 7000 Pf., so folgt $8422 = 7000 \, . \, F$, daher der Querschnitt dieses Seiles: $F = \frac{8422}{7000} = 1{,}203$ Quadratzoll und der Durchmesser desselben: $d = \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = 0{,}5642\sqrt{4{,}812} = 0{,}5642 \, . \, 2{,}193 = 1{,}24$ oder $1\frac{1}{4}$ Zoll. Bei dreifacher Sicherheit ist aber $d = 1{,}24 \, . \, \sqrt{3} = 1{,}24 \, . \, 1{,}732 = 2{,}15$ Zoll zu nehmen. 2) Aus dem Erdhalbmesser $r = 20\frac{1}{4}$ Million Fuß und der Umdrehungszeit oder Tageslänge $T = 24$ St. $= 24 \, . \, 60 \, . \, 60 = 86400$ Sec. folgt die Centrifugalkraft eines Körpers unter dem Aequator der Erde $P = 1{,}2633 \, . \, \frac{G \, . \, 20'250000}{86400^2} = \frac{2558}{864^2} \, . \, G = \frac{1}{290} \, . \, G$, wäre aber die Tageslänge 17mal so klein, also $\frac{24}{17} = 1$ St. $24' \, 42''$, so würde diese Kraft $17^2 = 289$ mal so groß, also ungefähr dem Gewichte des Körpers gleich sein. Unter dem

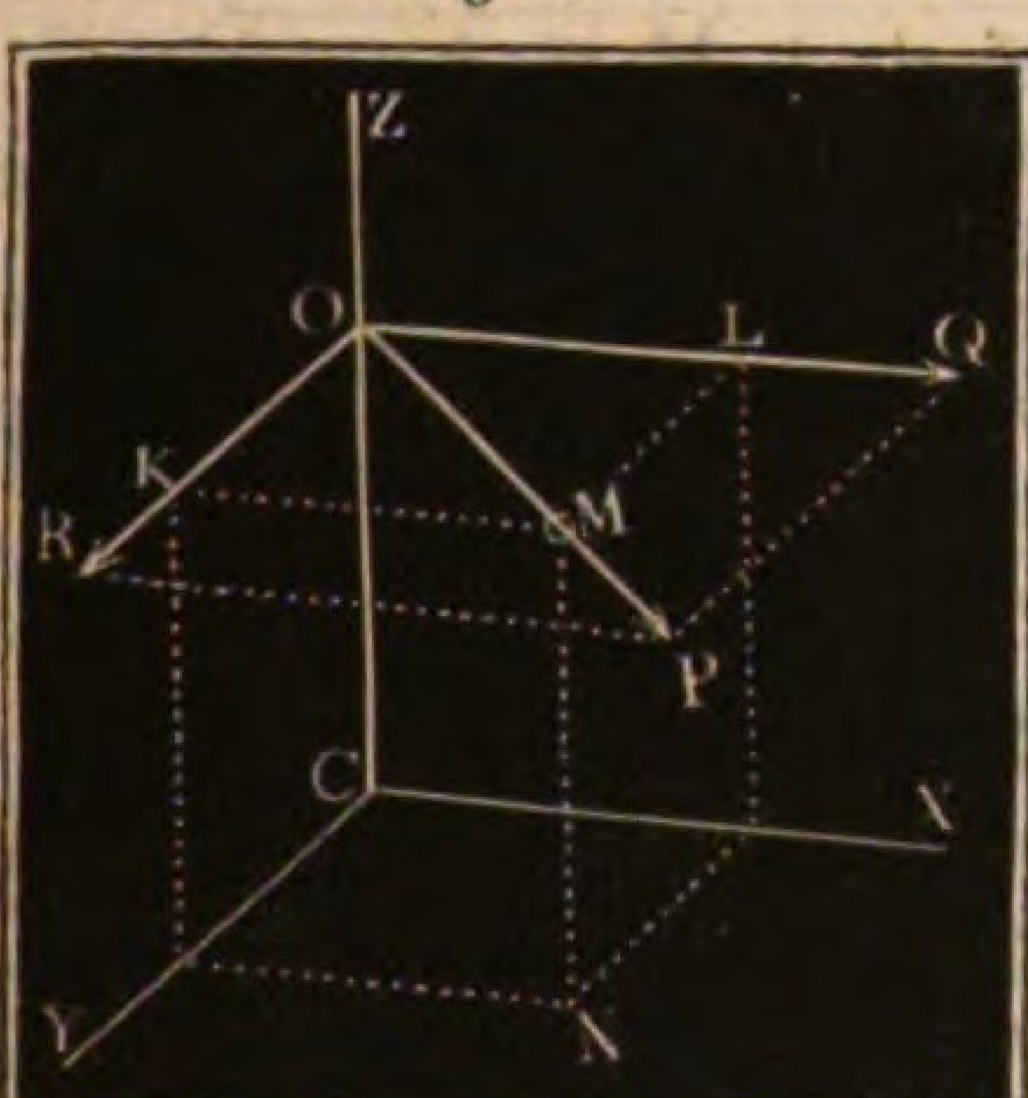
Aequator wäre dann die Centrifugalkraft der Schwerkraft gleich und Körper daselbst würden ebenso wenig niederfallen als in die Höhe steigen. 3) Bei der Umdrehung des Mondes um die Erde wird die Centrifugalkraft desselben von der Anziehungskraft der Erde aufgehoben. Ist G das Gewicht des Mondes, r seine Entfernung von der Erde und T seine Umdrehungszeit um dieselbe, so folgt die Centrifugalkraft dieses Weltkörpers $= 1,2633 \,.\, \frac{Gr}{T^2}$. Ist a der Erdhalbmesser und nimmt man an, daß die Schwerkraft in verschiedenen Entfernungen vom Mittelpunkte der Erde umgekehrt wie eine Potenz dieser Entfernungen wachse, so hat man die Schwere des Mondes oder die Anziehungskraft der Erde $= G\left(\frac{a}{r}\right)^n$, und setzen wir beide Kräfte einander gleich, so bekommen wir $\left(\frac{a}{r}\right)^n = 1,2633 \,.\, \frac{r}{T^2}$. Nun ist $\frac{a}{r} = \frac{1}{60}$, $r = 1215$ Million Fuß, und $T = 27$ Tage 7 St. 42 Min. $=$ 39342 Min. $=$ 39342 . 60 Sec., es folgt daher $\left(\frac{1}{60}\right)^n = \frac{1,2633 \,.\, 1215}{393,4^2 \,.\, 36} = \frac{1}{3600} = \left(\frac{1}{60}\right)^2$ und es ist hiernach $n = 2$, d. h. die Schwerkraft der Erde steht im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung.

Centripetal- und Centrifugalkraft.

Centrifugalkräfte ausgedehnter Massen.

§. 247. Auf einen Inbegriff von Massen oder auf eine Masse von endlicher Ausdehnung ist die oben gefundene Formel für die Centrifugalkraft nicht unmittelbar anwendbar, weil man im Voraus nicht weiß, welcher Drehungshalbmesser r in der Rechnung einzuführen ist. Um diesen zu finden, schlagen wir aber folgenden Weg ein. Es sei in Fig. 341 CZ die Umdrehungsaxe, CX und CY aber seine zwei rechtwinkeligen Coordinatenaxen; es sei ferner M ein Massentheil, und $MK = x$, $ML = y$ und $MN = z$ seien dessen Abstände von den Coordinatebenen YZ, XZ und XY. Da die Centrifugalkraft P radial wirkt, so läßt sich ihr Angriffspunkt nach dem Durchschnittspunkte O mit der Drehungsaxe verlegen. Zerlegen wir nun diese Kraft nach den Axenrichtungen CX und CY, so erhalten wir die Seitenkräfte $OQ = Q$ und $OR = R$, für welche gilt $OQ : OP = OL : OM$ und $OR : OP = OK : OM$, weshalb nun $Q = \frac{x}{r}\, P$ und $R = \frac{y}{r}\, P$ folgt, wobei r die Entfernung OM des Massentheilchens von der Umdrehungsaxe bezeichnet. Gehen wir auf gleiche Weise mit allen Massentheilchen zu Werke, so erhalten wir zwei Systeme von Parallelkräften, eins in der Ebene XZ und das andere in der Ebene

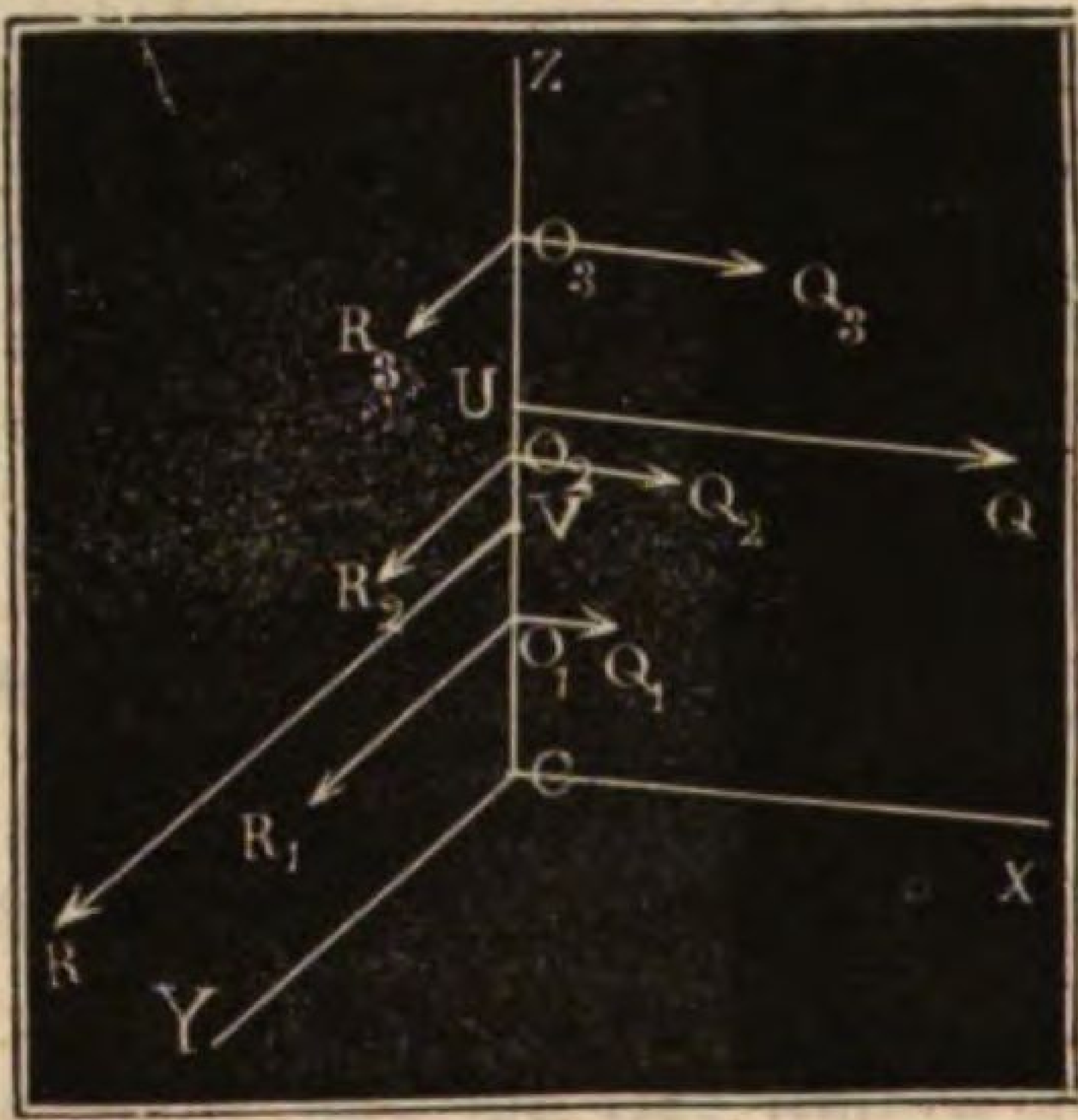
Fig. 341.



Centrifugalkräfte ausgedehnter Massen.

YZ, jedes aber auf die Axe CZ winkelrecht wirkend. Bedienen wir uns zur Unterscheidung der Indexzahlen 1, 2, 3 u. s. w., setzen wir also die Massentheile M_1, M_2, M_3, und ihre Abstände x_1, x_2, x_3 u. s. w., so bekommen wir hiernach die Mittelkraft des einen Systemes, Fig. 342,

Fig. 342



$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \cdots$ $= \frac{P_1 x_1}{r_1} + \frac{P_2 x_2}{r_2} + \frac{P_3 x_3}{r_3} + \ldots =$ $\omega^2 . (M_1 x_1 + M_2 x_2 + \ldots)$ und die des andern $R = R_1 + R_2 + \ldots$ $= \omega^2 . (M_1 y_1 + M_2 y_2 + \ldots)$. Setzen wir endlich die Abstände der Massentheile von der Ebene XY, CO_1, CO_2 u. s. w., $= z_1$, z_2 u. s. w., so erhalten wir für die Angriffspunkte U und V dieser Mittelkräfte die Abstände $CU = u$ und $CV = v$ durch die Gleichungen $(Q_1 + Q_2 + \ldots)\, u = Q_1 z_1 + Q_2 z_2 + \ldots$ und $(R + R_2 + \ldots)\, v = R_1 z_1 + R_2 z_2 + \ldots$. weshalb folgt

$$u = \frac{Q_1 z_1 + Q_2 z_2 + \ldots}{Q_1 + Q_2 + \ldots} = \frac{M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \ldots}{M_1 x_1 + M_2 x_2 + \ldots} \text{ und}$$

$$v = \frac{R_1 z_1 + R_2 z_2 + \ldots}{R_1 + R_2 + \ldots} = \frac{M_1 y_1 z_1 + M_2 y_2 z_2 + \ldots}{M_1 y_1 + M_2 y_2 + \ldots}.$$

Es werden also hiernach im Allgemeinen die Centrifugalkräfte eines Massensystemes oder eines ausgedehnten Körpers auf zwei Kräfte zurückgeführt, die sich, so lange u und v ungleich sind, nicht zu einer einzigen vereinigen lassen.

Beispiel. Sind die Massen eines Systemes

$M_1 = 10$ Pf, $M_2 = 15$ Pf., $M_3 = 18$ Pf., $M_4 = 12$ Pf.
und ihre Abstände $x_1 = 0$ Zoll, $x_2 = 4$ Zoll, $x_3 = 2$ Zoll, $x_4 = 6$ Zoll,
$y_1 = 3$ » $y_2 = 1$ » $y_3 = 5$ » $y_4 = 3$ »
$z_1 = 2$ » $z_2 = 3$ » $z_3 = 3$ » $z_4 = 0$ »

so hat man folgende mittleren Centrifugalkräfte
$Q = \omega^2 . (10.0 + 15.4 + 18.2 + 12.6) = 168 . \omega^2$ und
$R = \omega^2 . (10.3 + 15.1 + 18.5 + 12.3) = 171 . \omega^2$, und die Abstände ihrer Angriffspunkte von dem Anfangspunkte C:

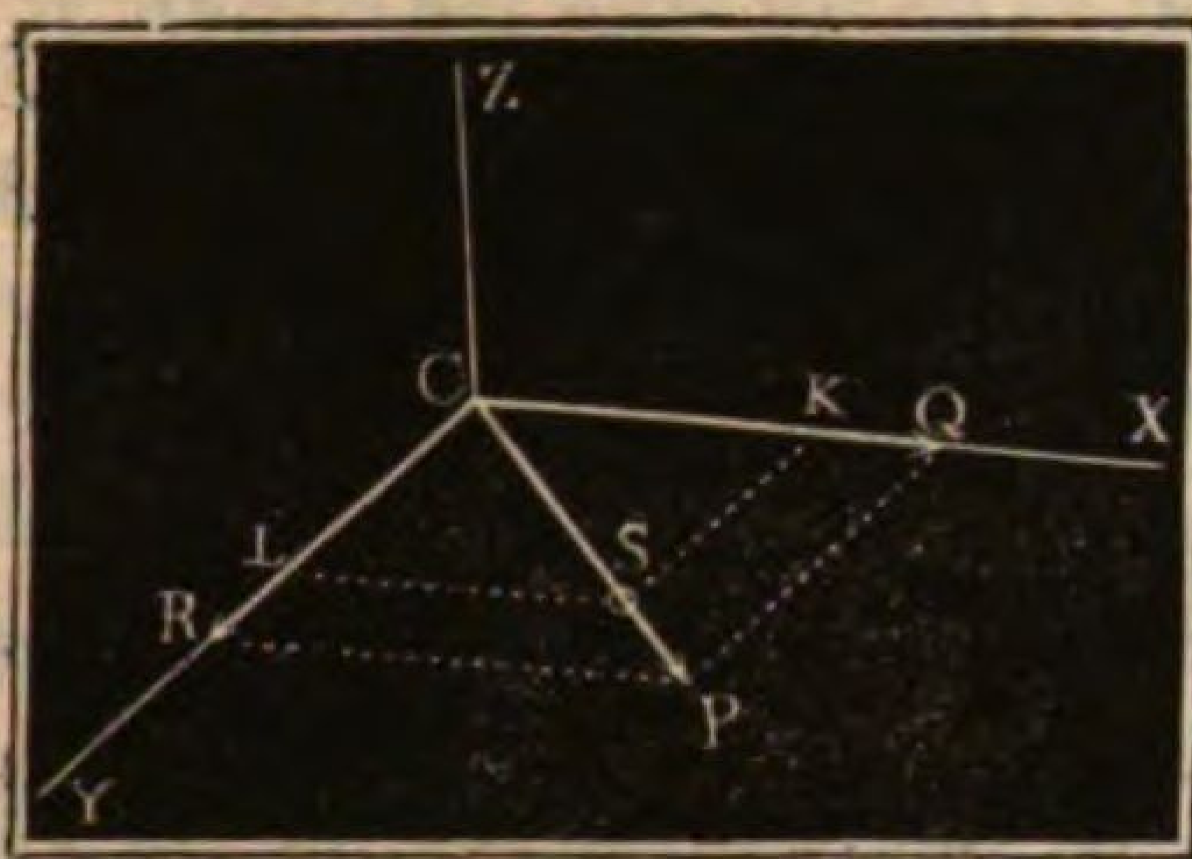
$$u = \frac{10.0.2 + 15.4.3 + 18.2.3 + 12.6.0}{10.0 + 15.4 + 18.2 + 12.6} = \frac{288}{168} = \frac{12}{7} = 1{,}714 \text{ Zoll, und}$$

$$v = \frac{10.3.2 + 15.1.3 + 18.5.3 + 12.3.0}{10.3 + 15.1 + 18.5 + 12.3} = \frac{375}{171} = \frac{125}{57} = 2{,}193 \text{ Zoll.}$$

Die Verschiedenheit dieser Werthe von u und v zeigt an, daß die Centrifugalkräfte durch eine einzige Kraft nicht ersetzt werden können.

§ 248. Befinden sich die Massentheile in einer Ebene winkelrecht

Fig. 343.



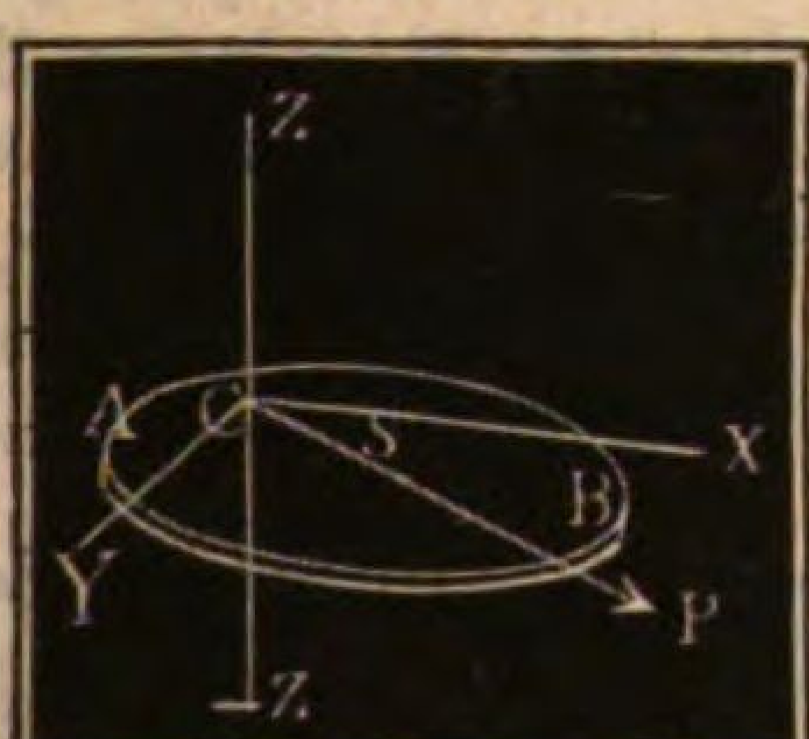
zur Axe der Umdrehung, Fig. 343, so lassen sich ihre Centrifugalkräfte in eine einzige vereinigen, weil sich ihre Richtungen in einem einzigen Punkte der Axe schneiden. Behalten wir die Bezeichnungen des vorigen §. bei, so erhalten wir die resultirende Centrifugalkraft in diesem Falle: Centrifugalkräfte ausgedehnter Massen.

$$P = \sqrt{Q^2 + R^2} = \omega^2 \sqrt{[(M_1 x_1 + M_2 x_2 + \ldots)^2 + (M_1 y_1 + M_2 y_2 + \ldots)^2]}.$$

Sind nun $CK = x$ und $CL = y$ die Coordinaten des Schwerpunktes vom Massensysteme $M = M_1 + M_2 + \ldots$, so hat man $M_1 x_1 + M_2 x_2 + \ldots = Mx$ und $M_1 y_1 + M_2 y_2 + \ldots = My$, und es folgt daher die Centrifugalkraft $P = \omega^2 \sqrt{M^2 x^2 + M^2 y^2} = \omega^2 M \sqrt{x^2 + y^2} = \omega^2 Mr$, wofern noch $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ den Abstand CS des Schwerpunktes von der Umdrehungsaxe $\overline{CZ}$ bezeichnet.

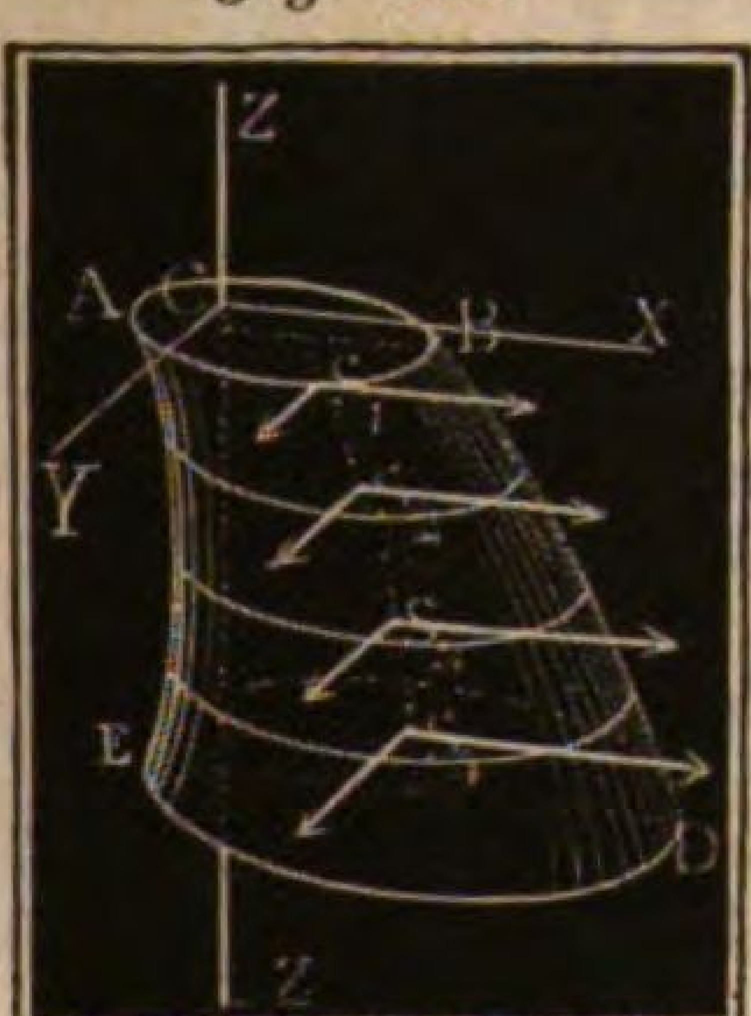
Für den Winkel $PCX = \alpha$, welchen diese Kraft mit der Axe CX einschließt, ist $tang. \alpha = \frac{R}{Q} = \frac{My}{Mx} = \frac{y}{x}$; es geht daher die Richtung der Centrifugalkraft durch den Schwerpunkt des Systemes und es ist dieselbe genau so groß, als wenn die sämmtlichen Massen im Schwerpunkte vereinigt wären.

Fig 344.



Für eine auf der Umdrehungsaxe $\overline{ZZ}$ rechtwinkelig stehende Scheibe AB, Fig. 344, ist hiernach die Centrifugalkraft ebenfalls $= \omega^2 Mr$, wenn M ihre Masse und r die Entfernung CS ihres Schwerpunktes S von der Axe bezeichnet. Um die Centrifugalkraft eines andern Körpers $ABDE$, Fig. 345, zu finden, zerlegen wir denselben durch Ebenen winkelrecht zur Axe $\overline{ZZ}$ in scheibenförmige Elemente, ermitteln die Schwerpunkte S_1, S_2 u. s. w. dieser, bestimmen mit Hülfe der letzteren die Centrifugalkräfte, zerlegen jede derselben nach den Axenrichtungen CX und CY in Seitenkräfte, und vereinigen die Seitenkräfte in der Ebene ZCX zu einer Mittelkraft Q, sowie die in der Ebene ZCY zu einer Mittelkraft R.

Fig. 345.



Befinden sich die Schwerpunkte sämmtlicher Scheiben in einer Parallellinie zur Um-

Centrifugalkräfte ausgedehnter Massen.

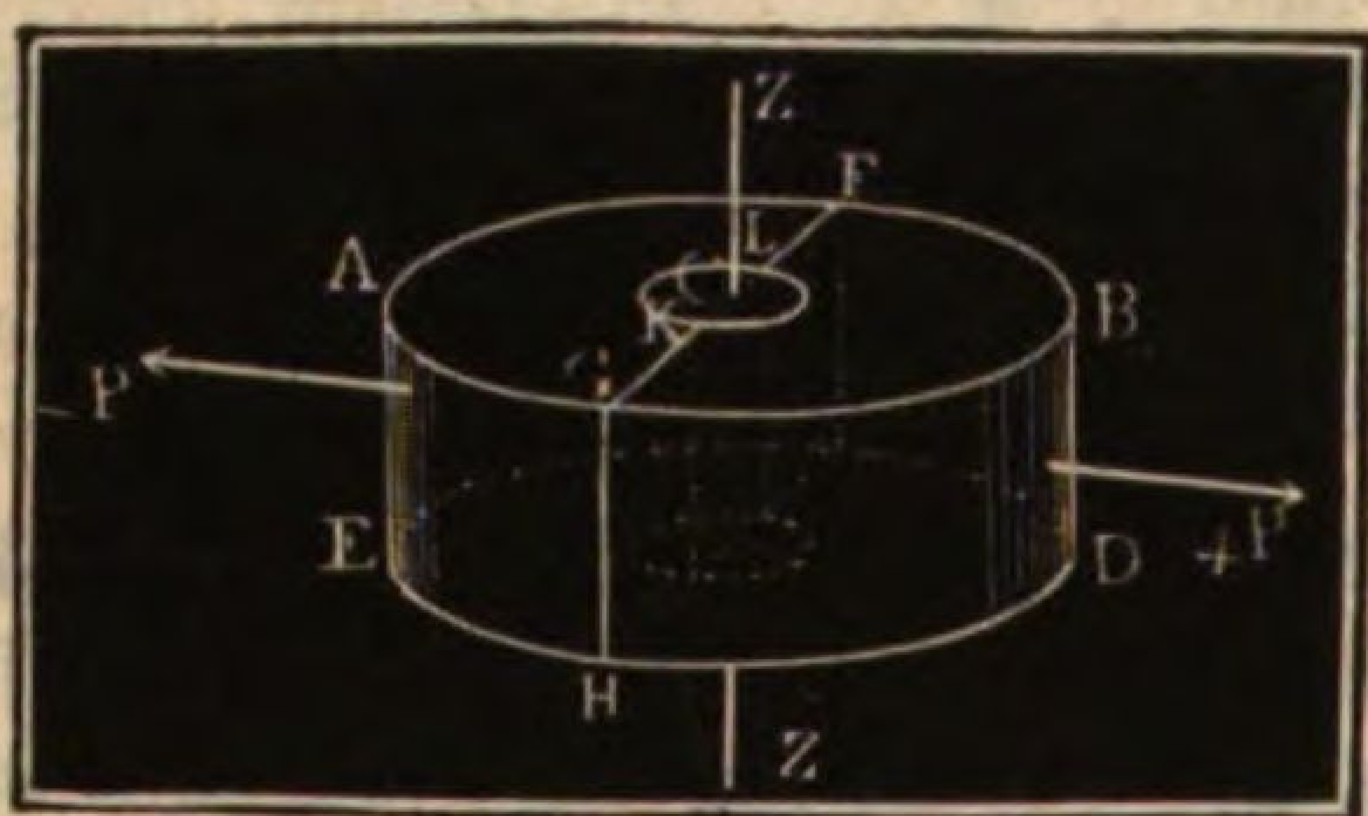
drehungsaxe, so ist $x = x_1 = x_2$ u. s. w., sowie $y = y_1 = y_2$ u. s. w. und daher auch $r = r_1 = r_2$ u. s. w.; es folgt daher die Centrifugalkraft des ganzen Körpers, $P = \omega^2 (M_1 r + M_2 r + \ldots) = \omega^2 M r$, und für den Abstand ihres Angriffspunktes von der Ebene XY:

$$z = \frac{(M_1 z_1 + M_2 z_2 + \ldots) r}{(M_1 + M_2 + \ldots) r} = \frac{M_1 z_1 + M_2 z_2 + \ldots}{M_1 + M_2 + \ldots}.$$

Diesen Gleichungen zufolge ist die Centrifugalkraft eines Körpers, dessen Elemente in eine Linie parallel zur Axe fallen, gleich der Centrifugalkraft der auf den Schwerpunkt dieses Körpers reducirten Masse, und es fällt auch ihr Angriffspunkt mit diesem Schwerpunkte zusammen. Hiernach lassen sich die Centrifugalkräfte aller Rotationskörper, deren geometrische Axe mit der Umdrehungsaxe parallel läuft, finden. Fällt die geometrische Axe eines solchen Körpers mit der Umdrehungsaxe zusammen, so ist die Centrifugalkraft sogar Null.

Beispiel. Es sind die Dimensionen, die Dichtigkeit und Festigkeit eines Mühlsteines $ABDE$, Fig. 346, gegeben, man soll die Winkelgeschwindigkeit ω finden, bei welcher das Zerreißen desselben in Folge der Centrifugalkraft eintritt. Setzen wir den Halbmesser CG des Mühlsteines $= r_1$, den Halbmesser CK seines Auges $= r_2$, die Höhe $AE = GH = l$, die Dichtigkeit $= \gamma$ und den Festigkeitsmodul $= K$, so erhalten wir die Kraft zum Zerreißen in einer diametralen Ebene $= 2(r_1 - r_2)\, lK$, das Gewicht des Steines $G = \pi\,(r_1^2 - r_2^2)\, l\gamma$ und den Umdrehungshalbmesser für jede Hälfte des Steines, d. i. die Entfernung ihres Schwerpunktes von der Umdrehungsaxe (§. 109.), $r = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}$. Im Augenblicke des Zerreißens ist die Centrifugalkraft von einer Hälfte des Steines der Festigkeit gleich, wir bekommen daher die Bestimmungsgleichung $\omega^2 \cdot \frac{1}{2} \frac{Gr}{g} = 2(r_1 - r_2)\, lK$, d. i. $\omega^2 \cdot \frac{2}{3} (r_1^3 - r_2^3) \frac{l\gamma}{g} = 2\,(r_1 - r_2)\, lK$, oder $2l$ zu beiden Seiten aufgehoben, folgt $\omega = \sqrt{\frac{3g\,(r_1 - r_2)\,K}{(r_1^3 - r_2^3)\gamma}} = \sqrt{\frac{3gK}{(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)\gamma}}$. Ist $r_1 = 2$ Fuß $= 24$ Zoll, $r_2 = 4$ Zoll, $K = 750$ Pfund und das specifische Gewicht der Mühlsteinmasse $= 2{,}5$, also das Gewicht eines Cubikzolles Masse desselben $= \frac{66 \cdot 2{,}5}{1728} = 0{,}0955$ Pf., so folgt die Winkelgeschwindigkeit beim Eintreten des Zerreißens:

Fig. 346.



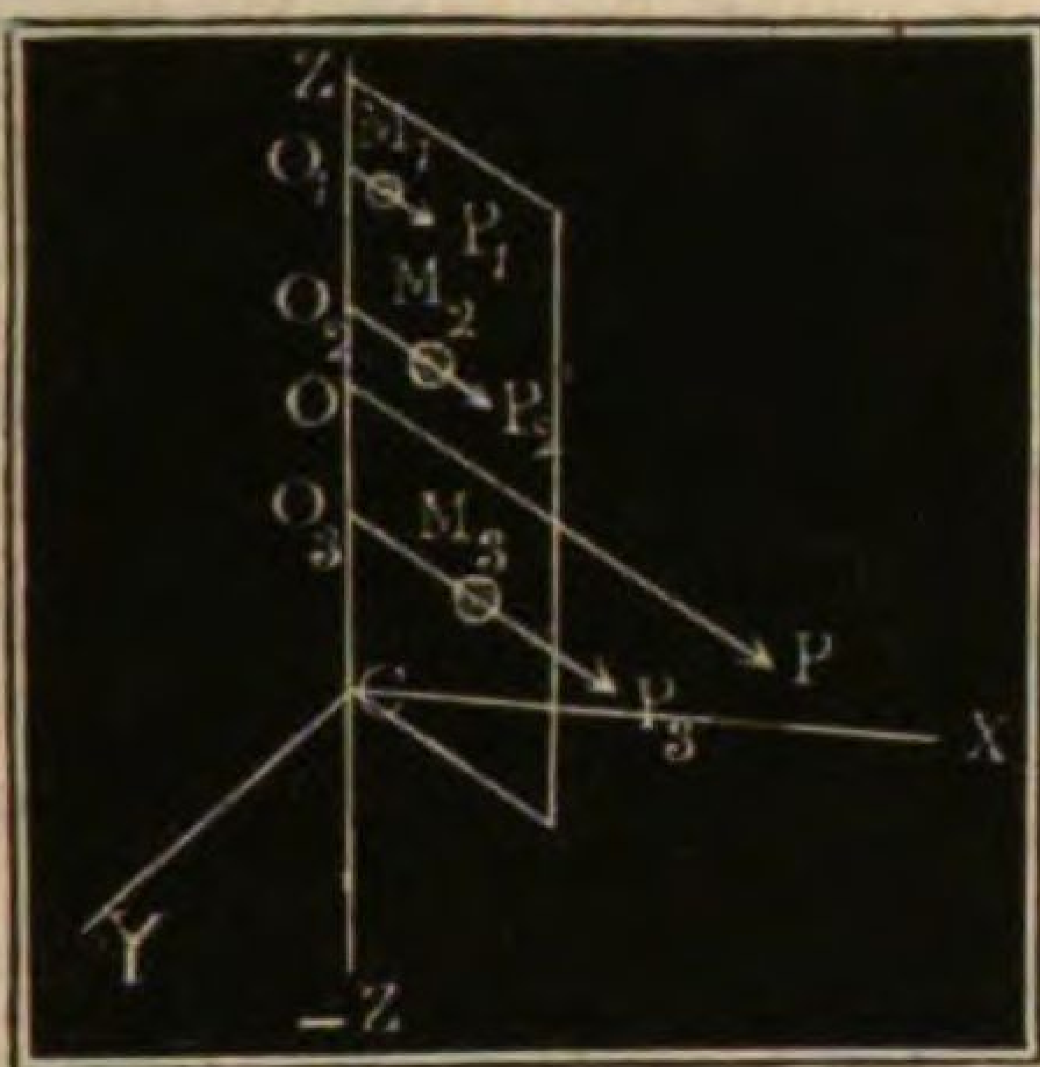
$$\omega = \sqrt{\frac{3 \cdot 12 \cdot 31{,}25 \cdot 750}{688 \cdot 0{,}0955}} = \sqrt{\frac{210937}{16{,}426}} = 113{,}3 \text{ Zoll.}$$

Ist die Zahl der Umdrehungen in einer Minute $= n$, so hat $\omega = \frac{2\pi n}{60}$, daher umgekehrt $n = \frac{30\omega}{\pi}$, hier aber $= \frac{30 . 113,3}{\pi} = 1082$. Die gewöhnliche Umdrehungszahl eines solchen Mühlsteines ist nur 120, also 9mal so klein.

Centrifugalkräfte ausgedehnter Massen.

§. 249. Befinden sich die sämmtlichen Theile M_1, M_2 eines Massensystemes, Fig. 347, oder die Schwerpunkte der Elemente eines Körpers in einer durch die Umdrehungsaxe gehenden Ebene, so bilden die Centrifugalkräfte ein System von Parallelkräften und es lassen sich daher dieselben in der Regel auf eine einzige Kraft zurückführen. Sind die Entfernungen der Massentheile oder Elemente von der Umdrehungsaxe $\overline{ZZ}$: $O_1M_1 = r_1$, $O_2M_2 = r_2$ u. s. w., so erhält man für ihre Centrifugalkräfte: $P_1 = \omega^2 M_1 r_1$, $P_2 = \omega^2 M_2 r_2$ u. s. w., und daher die mittlere Centrifugalkraft $P = \omega^2 (M_1 r_1 + M_2 r_2 + ..) = \omega^2 M r$,

Fig. 347.

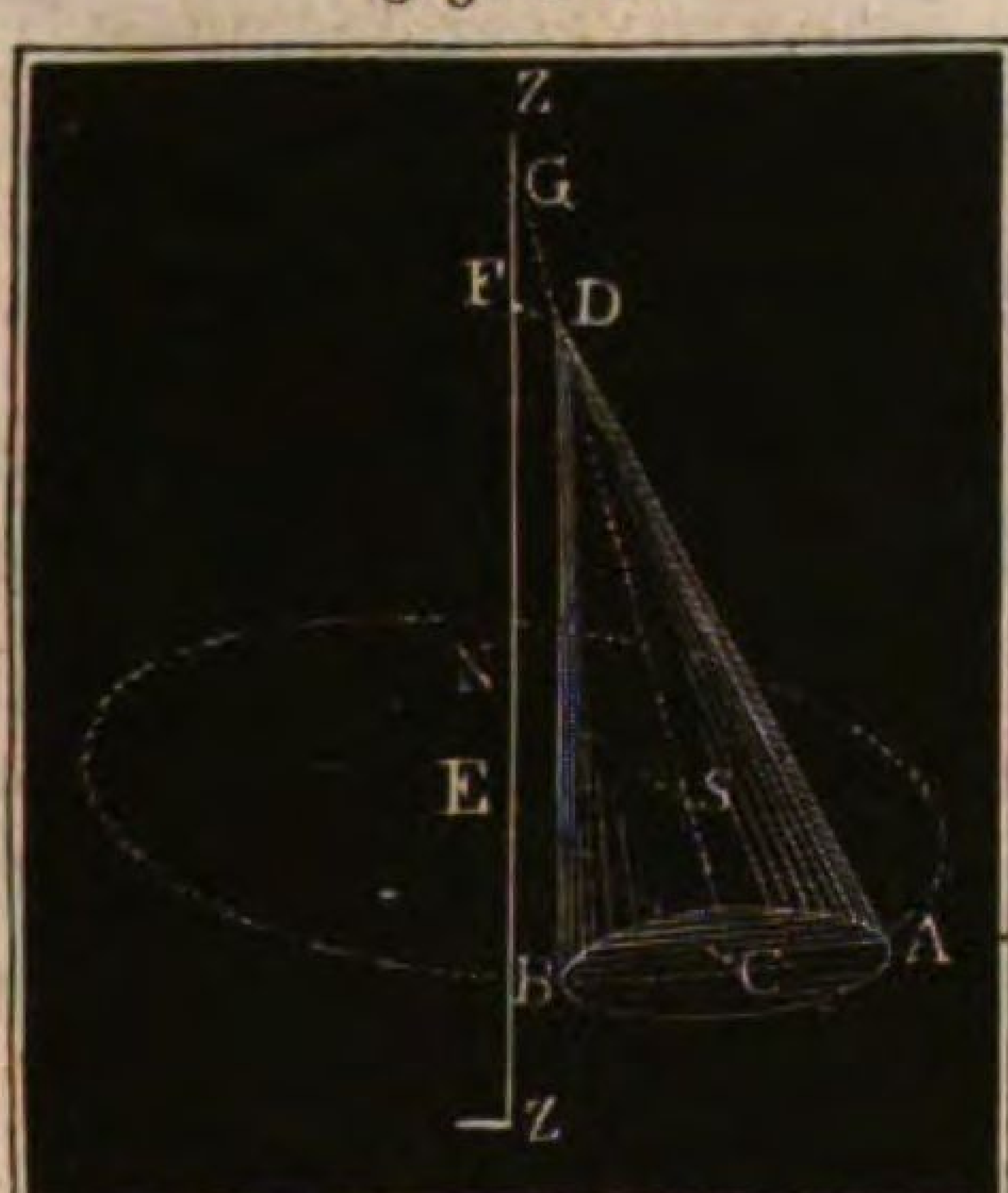


wofern r den Abstand des Schwerpunktes der ganzen Masse M von der Umdrehungsaxe bezeichnet. Es ist also auch hier der Abstand des Schwerpunktes von der Umdrehungsaxe als Drehungshalbmesser anzusehen. Um aber den Angriffspunkt O der resultirenden Centrifugalkraft zu finden, setzen wir die Abstände der Massentheile von der Normalebene: $CO_1 = z_1$, $CO_2 = z_2$ u. s. w. in die Formel

$$CO = z = \frac{M_1 r_1 z_1 + M_2 r_2 z_2 + \dots}{M_1 r_1 + M_2 r_2 + \dots}.$$

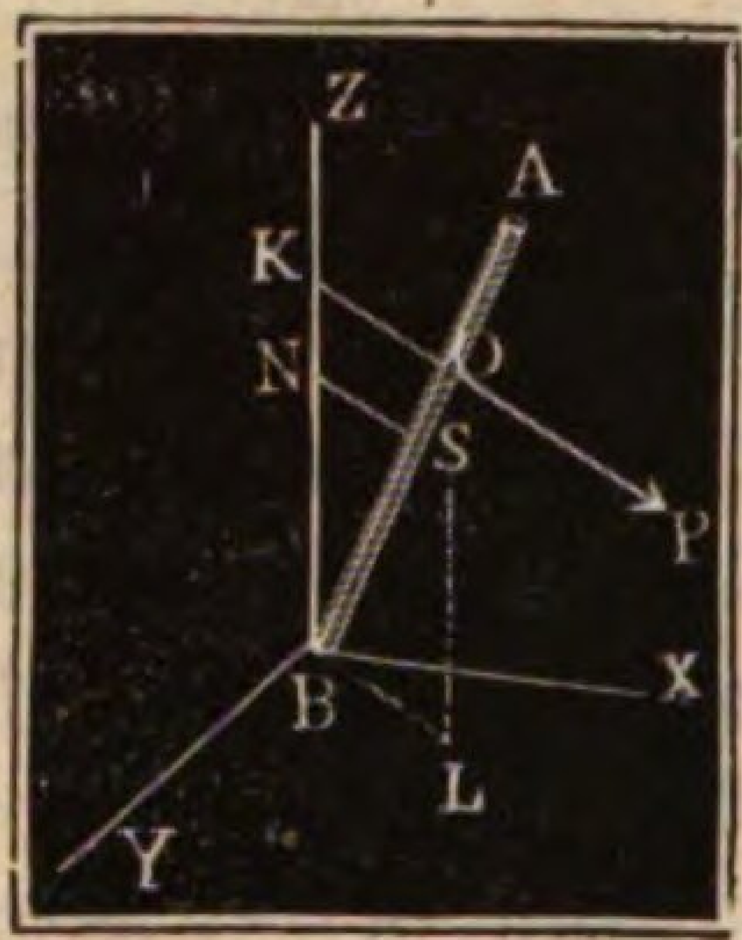
Mit Hülfe der Formel $P = \omega^2 Mr$ lassen sich die Centrifugalkräfte von Rotationskörpern und von anderen Körpern der Geometrie finden, wenn die Axen dieser mit der Umdrehungsaxe in eine Ebene fallen. So ergiebt sich z. B. die Centrifugalkraft des geraden Kegels ADB, Fig. 348, wenn man den Abstand SN seines Schwerpunktes S von der Umdrehungsaxe $\overline{ZZ}$ als r in die Formel einsetzt. Ist die Kegelhöhe $CD = h$, der Abstand DF der Spitze D von der Umdrehungsaxe $= a$, und der Winkel CGE, um welchen die geometrische Axe CD von der Umdrehungsaxe $\overline{ZZ}$ abweicht, $= \alpha$, so hat man $r = a + \frac{3}{4} h \sin. \alpha$.

Fig. 348.



Centrifugalkräfte ausgedehnter Massen.

Fig. 349.



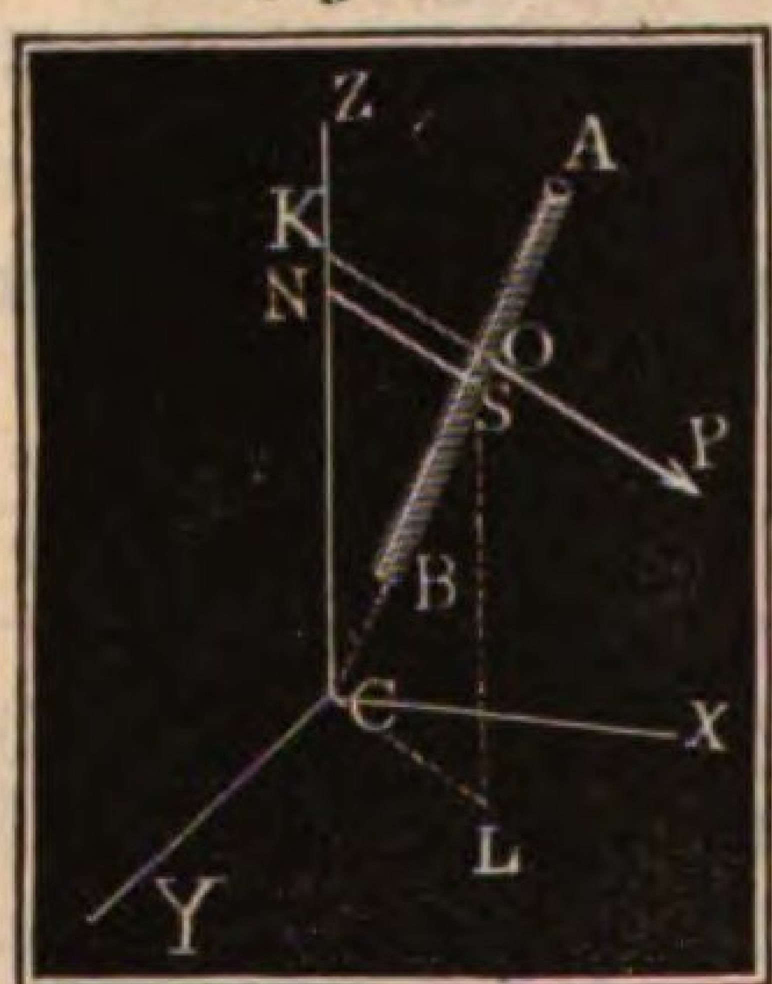
Für eine Stange AB, Fig. 349, deren Länge $AB = l$ und Neigungswinkel ABZ gegen die Umdrehungsaxe $BZ, = \alpha$ ist, hat man $r = SN = \frac{1}{2} l \sin. \alpha$, also die Centrifugalkraft $P = \omega^2 . \frac{1}{2} M l \sin. \alpha$; um aber den Angriffspunkt O dieser Kraft zu finden, setzen wir in dem Ausdrucke $\omega^2 . \frac{M}{n} x \sin. \alpha . x \cos. \alpha = \omega^2 . \frac{M}{n} x^2 \sin. \alpha \cos. \alpha$ für das Moment vom Elemente $\frac{M}{n}$ der Stange, statt x nach und nach $\frac{l}{n}, \frac{2l}{n}, \frac{3l}{n}$ u. s. w. und vereinigen die Ergebnisse durch Addition. Auf diese Weise ergiebt sich das Moment der ganzen Stange:

$$Pz = \omega^2 \frac{M}{n} \sin. \alpha \cos. \alpha \frac{l^2}{n^2} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)$$

$= \frac{1}{3} \omega^2 M l^2 \sin. \alpha \cos. \alpha$, daher der Hebelarm BK oder

$z = \frac{1}{3} \omega^2 M l^2 \sin. \alpha \cos. \alpha : \frac{1}{2} \omega^2 M l \sin. \alpha = \frac{2}{3} l \cos. \alpha$, und die Entfernung des Angriffspunktes O von dem in der Axe liegenden Stangenende B, $BO = \frac{2}{3} l$.

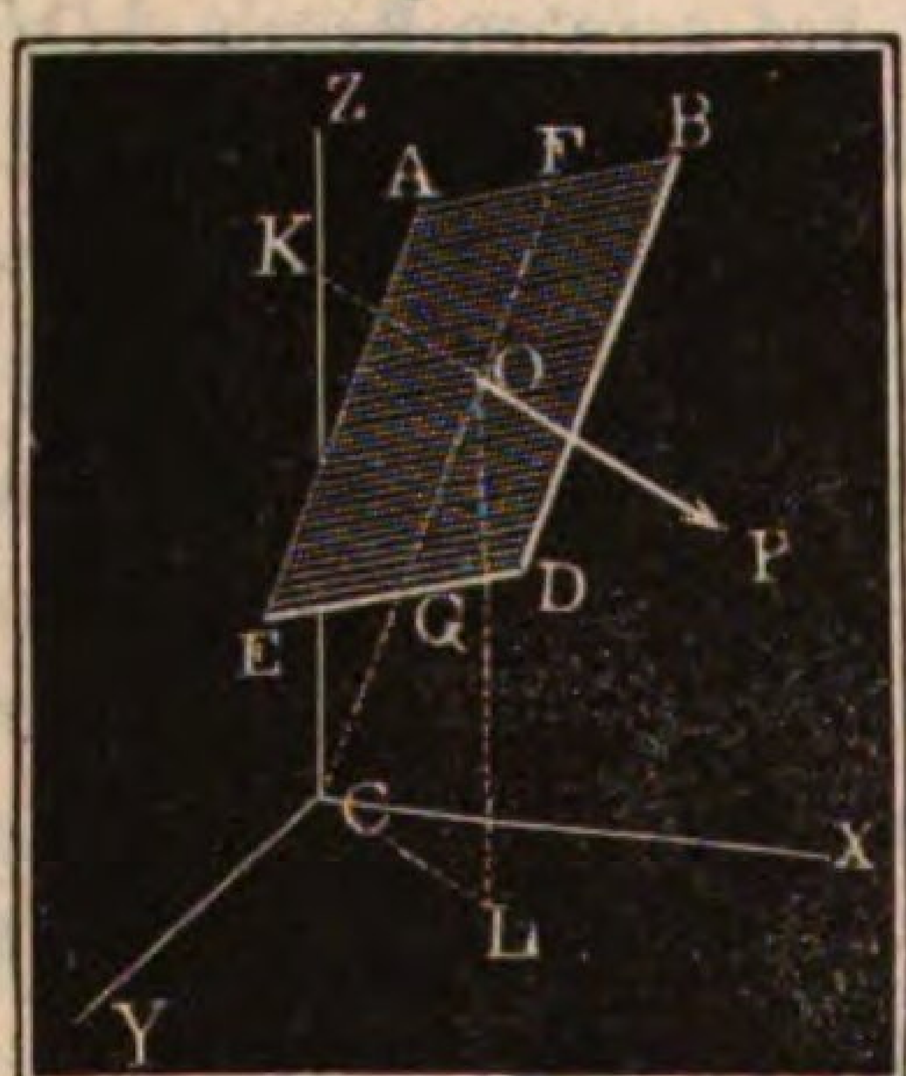
Fig. 350.



Reicht die Stange AB, Fig. 350, nicht bis zur Axe, so hat man

$P = \frac{1}{2} \omega^2 F l_1^2 \sin. \alpha - \frac{1}{2} \omega^2 F l_2^2 \sin. \alpha$
$= \frac{1}{2} \omega^2 F \sin. \alpha (l_1^2 - l_2^2)$, und das Moment
$Pz = \frac{1}{3} \omega^2 F \sin. \alpha \cos. \alpha (l_1^3 - l_2^3)$, weil die Masse von CA, = Querschnitt mal Länge = Fl_1 und die Masse von CB, $= Fl_2$ ist, es folgt daher die Entfernung des Angriffspunktes O vom Durchschnitte C mit der Axe:

Fig. 351.



$$CO = \frac{2}{3} \frac{l_1^3 - l_2^3}{l_1^2 - l_2^2} = l + \frac{(l_1 - l_2)^2}{12 l},$$

wo l die Entfernung CS des Schwerpunktes $l_1 - l_2$ aber die Länge der Stange AB ausdrückt.

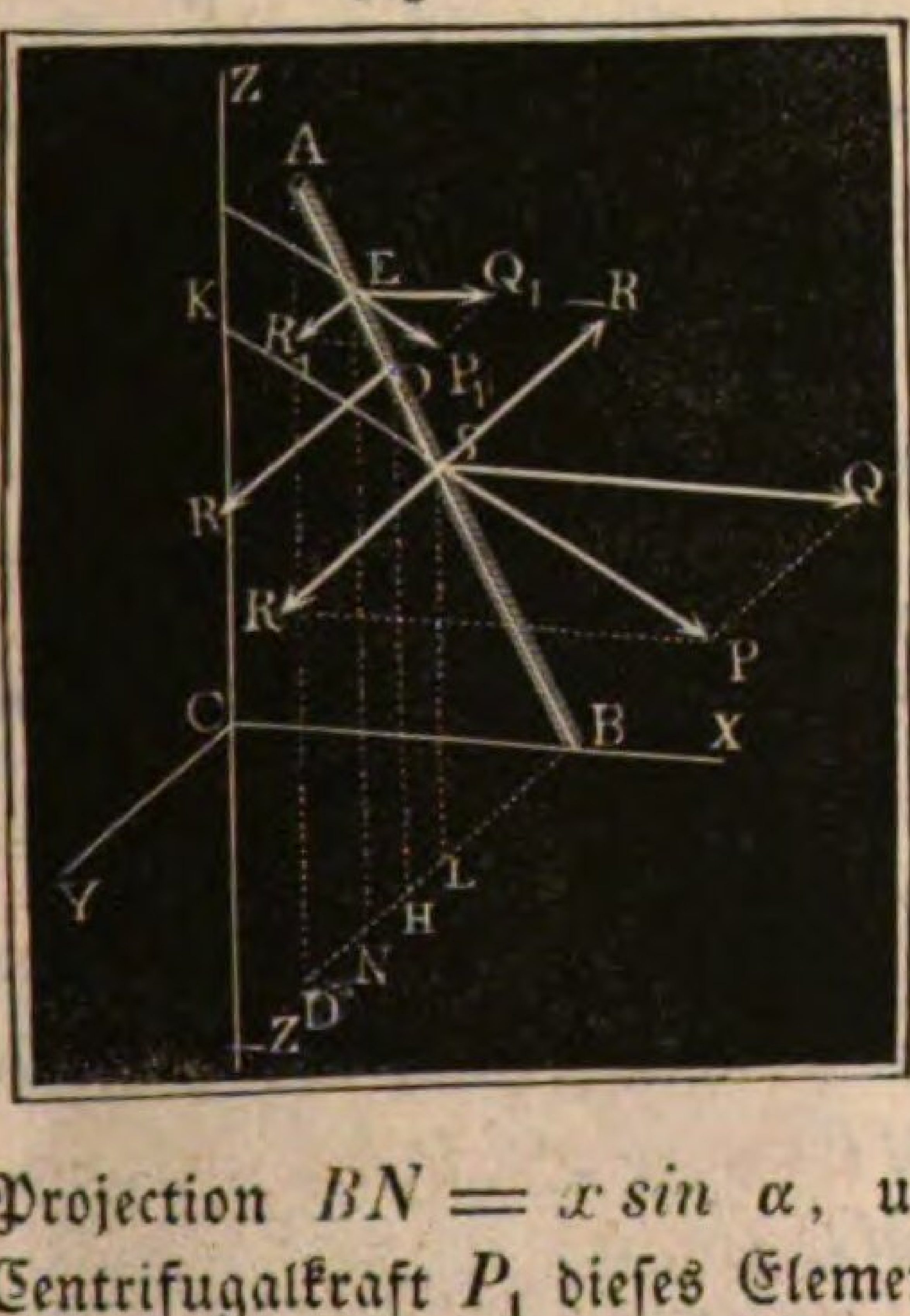
Diese Formel gilt auch für ein rectanguläres Blatt $ABDE$, Fig. 351, welches sich durch die Axenebene COZ in zwei congruente Rechtecke theilen läßt, weil von jedem der Elemente, welche sich durch Schnitte normal zu CZ ergeben, die Centrifugalkraft in der Mitte

angreift. Sind also die Entfernungen CF und CG der beiden Grundlinien AB und DE von dem Axpunkte C, l_1 und l_2, so hat man auch hier $CO = \frac{2}{3} \cdot \frac{l_1^3 - l_2^3}{l_1^2 - l_2^2}$. Centrifugalkräfte ausgedehnter Massen.

§. 250. In dem Falle, wenn die Körpertheile weder in einer Normalebene zur Umdrehungsaxe, noch in einer Ebene durch die Umdrehungsaxe enthalten sind, lassen sich die resultirenden Centrifugalkräfte $Q = \omega^2 (M_1 x_1 + M_2 x_2 + ..)$ und $R = \omega^2 (M_1 y_1 + M_2 y_2 + ..)$ nicht in eine einzige Kraft verwandeln, wohl aber ist es möglich, diese Kräfte durch eine im Schwerpunkte angreifende Kraft $P = \sqrt{Q^2 + R^2} = \omega^2 Mr$ und durch ein aus Q und R zusammengesetzes Kräftepaar zu ersetzen. Bringen wir nämlich im Schwerpunkte S vier sich das Gleichgewicht haltende Kräfte $+ Q$ und $- Q$, sowie $+ R$ und $- R$ an, so geben die positiven Theile die Mittelkraft $P = \omega^2 \sqrt{Q^2 + R^2}$, wogegen die negativen Theile $- Q$ und $- R$ mit d n in U und V (s. Fig. 342) angreifenden Centrifugalkräften die Kräftepaare $(Q, -Q)$ und $(R, -R)$ bilden, die sich zu einem einzigen Kräftepaare zusammensetzen lassen.

Um mit dieser Zurückführung der Centrifugalkräfte eines umlaufenden Körpers bekannt zu werden, nehmen wir folgenden einfachen Fall vor.

Fig. 352.



Die Stange AB, Fig. 352, welche sich um die Axe $Z\overline{Z}$ dreht, liege parallel zur Ebene YZ und ruhe mit dem Ende B in der Axe CX. Setzen wir die Länge AB dieser Stange $= l$, ihr Gewicht $= G$, den Winkel BAD, um welchen sie von der Drehaxenrichtung abweicht $= \alpha$, und ihren Abstand CB von der Ebene YZ, welches auch ihr kürzester Abstand von der Axe $Z\overline{Z}$ ist, $= a$. Ist nun E ein Element $\frac{M}{n}$ der Stange, und $BE = x$, dessen Entfernung vom Ende B, so hat man die Projection $BN = x \sin \alpha$, und daher die für die Componenten der Centrifugalkraft P_1 dieses Elementes:

$Q_1 = \omega^2 \cdot \frac{M}{n} . CB = \omega^2 \cdot \frac{M}{n} a$ und $R_1 = \omega^2 . \frac{M}{n} . BN = \omega^2 . \frac{M}{n} x \sin. \alpha$, dagegen ihre Momente in Beziehung auf die Grundebene XCY: $Q_1 z_1 = \omega^2 . \frac{M}{n} . CB . EN = \omega^2 . \frac{M}{n} a x \cos \alpha$ und $R_1 z_1 = \omega^2 . \frac{M}{n} x^2 . \sin. \alpha \cos. \alpha$.

Die sämmtlichen Seitenkräfte parallel zur Ebene XZ geben die

Centrifugalkräfte ausgedehnter Massen.

Resultirende $Q = Q_1 + Q_2 + \ldots = n \,.\, \omega^2 \,.\, \frac{M}{n} a = \omega^2 \,.\, Ma$, und ihr Moment $Qu = Q_1 z_1 + Q_2 z_2 + \ldots = \omega^2 \,.\, \frac{M}{n} a \cos.\alpha\,(x_1 + x_2 + \ldots)$, oder, da $x_1 = \frac{l}{n}$, $x_2 = 2\,\frac{l}{n}$, $x_3 = \frac{3\,l}{n}$ u. s. w. zu nehmen ist,

$$Qu = \omega^2 . \frac{M}{n} a \cos.\alpha \,.\, \frac{l}{n}(1+2+3+\ldots+n) = \omega^2 . \frac{M}{n} a \cos.\alpha \,.\, \frac{l}{n} \,.\, \frac{n^2}{2}$$

$= \frac{1}{2}\omega^2 \,.\, Mal \cos.\alpha$; es ist also der Abstand des Angriffspunktes dieser Seitenkraft von der Grundebene XY:

$$LS = u = \frac{\frac{1}{2}\,\omega^2\, Mal \cos.\alpha}{\omega^2 Ma} = \frac{1}{2}\, l \cos.\alpha,$$

d. h. es fällt derselbe mit dem Schwerpunkte der Stange zusammen. Die Seitenkräfte, welche parallel zu YZ wirken, geben die Resultirende $R = R_1 + R_2 + \ldots = \omega^2 \,.\, \frac{M}{n} \sin.\alpha\,(x_1 + x_2 + \ldots)$

$= \omega^2 \,.\, \frac{M}{n} \sin\alpha \frac{l}{n} \,.\, \frac{n^2}{2} = \frac{1}{2}\,\omega^2\, Ml \sin.\alpha$ mit dem Momente

$$\omega^2 . \frac{M}{n} \sin.\alpha \cos.\alpha\,(x_1^2 + x_2^2 + \ldots) = \omega^2 . \frac{M}{n} \sin.\alpha \cos.\alpha . \left(\frac{l^2}{n^2} + \frac{4l^2}{n^2} + \ldots\right)$$

$$= \omega^2 . \frac{M}{n} \frac{l^2}{n^2} \sin.\alpha \cos.\alpha\,(1+4+9+\ldots+n^2) = \omega^2 . \frac{M}{n} . \frac{l^2}{n^2} \sin.\alpha \cos.\alpha \frac{n^3}{3}$$

$= \frac{1}{3}\,\omega^2\, Ml^2 \sin.\alpha \cos.\alpha$; es ist der Abstand des Angriffspunktes O dieser Kraft von der Grundebene XY:

$$HO = v = \frac{\frac{1}{3}\omega^2 Ml^2 \sin.\alpha \cos.\alpha}{\frac{1}{2}\omega^2 Ml \sin.\alpha} = \frac{2}{3}\, l \cos.\alpha,$$

d. i. dieser Angriffspunkt liegt um $(\frac{2}{3} - \frac{1}{2})\, l \cos.\alpha = \frac{1}{6}\, l \cos.\alpha$ senkrecht, oder überhaupt um ein Sechstel der Stangenlänge AB über dem Schwerpunkte S der Stange.

Aus den Kräften $Q = \omega^2\, Ma$ und $R = \frac{1}{2}\,\omega^2\, Ml \sin.\alpha$ folgt die im Schwerpunkte der Stange angreifende Endresultirende: $P = \sqrt{Q^2 + R^2} = \omega^2 M \sqrt{a^2 + \frac{1}{4} l^2 \sin.\alpha^2}$ und das Kräftepaar $(R, -R)$ mit dem Momente $R \,.\, \overline{SO} = \frac{1}{2}\,\omega^2\, Ml \sin.\alpha \,.\, \frac{1}{6}\, l$
$= \frac{1}{12}\,\omega^2\, Ml^2 \sin.\alpha.$

Freie Axen. §. 251. Im Allgemeinen üben zwar die Centrifugalkräfte eines sich um eine Axe gleichförmig umdrehenden Körpers einen Druck auf die Axe aus, es ist jedoch auch möglich, daß diese Kräfte sich gegenseitig aufheben und deshalb die Axe gar keinen Druck auszuhalten hat. Dieser Fall kommt z. B. vor bei jedem sich um seine geometrische oder symmetrische Axe drehenden Rotationskörper, bei einer Radwelle und einem Wasserrade

insbesondere, u. s. w. Wenn auf einen unter diesen Umständen sich umdrehenden Körper oder auf ein solches Massensystem keine äußeren Kräfte einwirken, so bleibt der Körper ohne Ende in dieser Umdrehung begriffen, ohne daß es nöthig ist, die Umdrehungsaxe festzuhalten. Man nennt deshalb diese Umdrehungsaxe eine freie Axe (franz. axe libre, engl. free axis). Aus dem Vorhergehenden folgen sogleich die Bedingungen, unter welchen eine Drehaxe eine freie Axe ist. Es ist nöthig, daß nicht nur die Mittelkräfte P und Q aus den parallel den Axenebenen XZ und YZ wirkenden Componenten der Centrifugalkräfte, sondern auch die Summe der statischen Momente von jedem der beiden Kräftesysteme = Null ist, also hiernach: Freie Axen.

1) $M_1x_1 + M_2x_2 + \ldots = 0$,

2) $M_1y_1 + M_2y_2 + \ldots = 0$, ferner

3) $M_1x_1z_1 + M_2x_2z_2 + \ldots = 0$, und

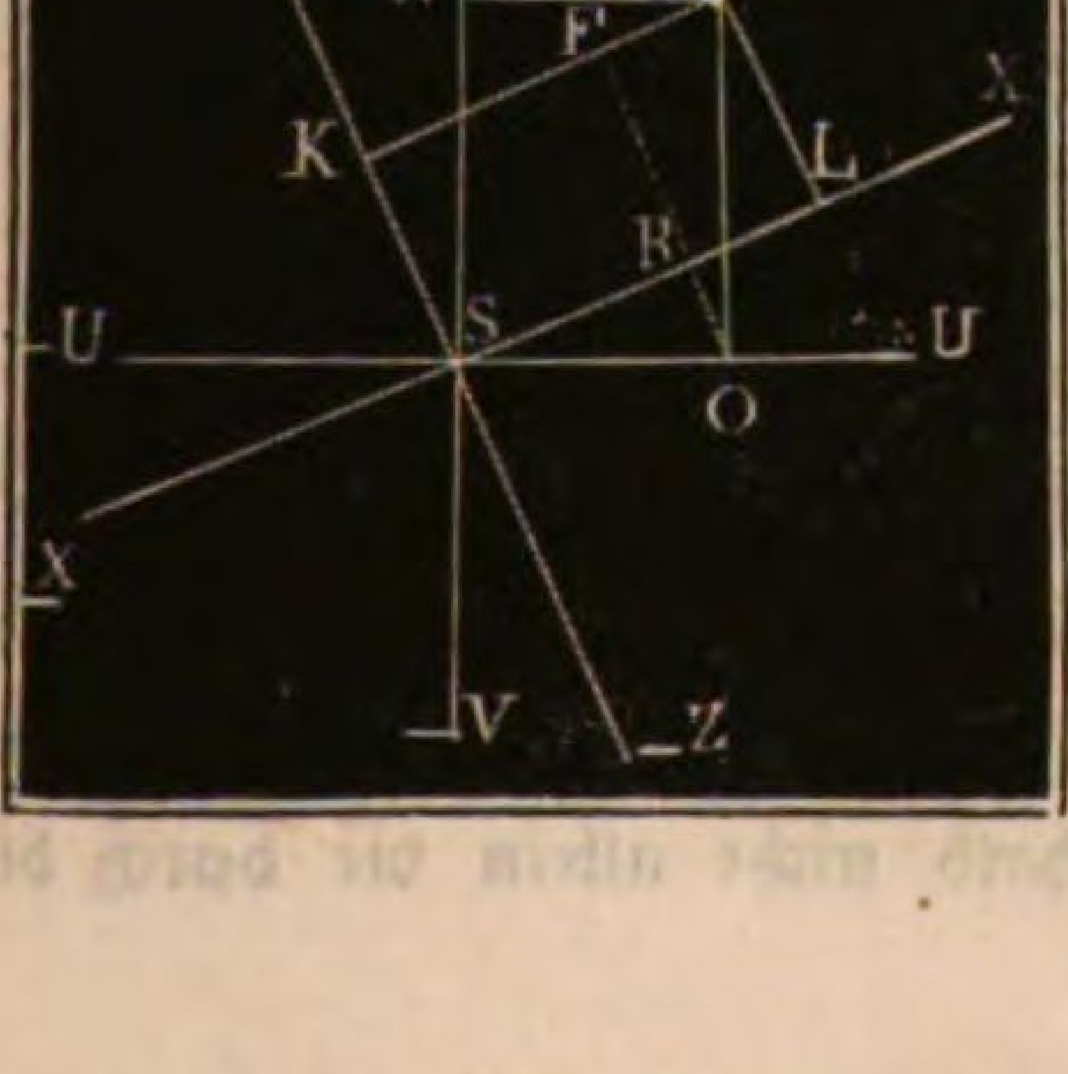
4) $M_1y_1z_1 + M_2y_2z_2 + \ldots = 0$.

Die beiden ersten Gleichungen bedingen, daß die freie Axe durch den Schwerpunkt des Körpers oder Massensystemes geht. Die beiden letzteren aber liefern die Elemente zur Bestimmung der Lage dieser Axe. Es läßt sich übrigens nachweisen, daß jeder Körper oder jedes Massensystem mindestens drei freie Axen hat, und daß diese Axen im Schwerpunkte des Systemes unter rechten Winkeln zusammenstoßen.

Die höhere Mechanik unterscheidet von den freien Axen noch andere Axen, welche mit diesen Axen parallel laufen und sich in irgend einem Punkte des Systemes durchkreuzen, und nennt diese Axen Hauptaxen (franz. axes principaux, engl. principal axes). Man beweist auch, daß das Trägheitsmoment eines Körpers in Beziehung auf eine der Hauptaxen ein Maximum, in Beziehung auf die zweite ein Minimum, und in Beziehung auf die dritte Axe keines von beiden ist.

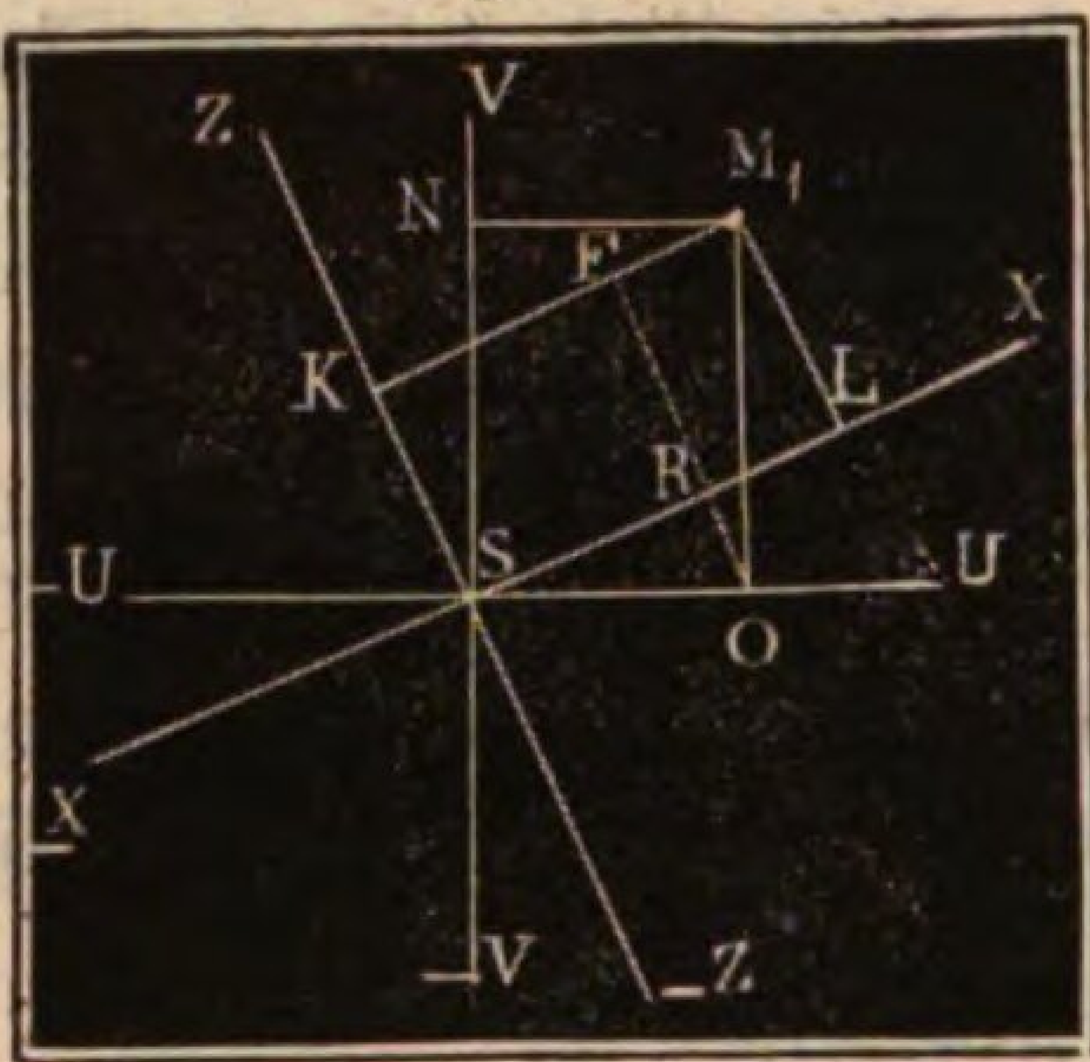
§. 252. Befinden sich die Theile einer Masse in einer Ebene, bildet z. B. die Masse eine dünne Platte oder ebene Figur, so ist die gerade Linie durch den Schwerpunkt der ganzen Masse, und normal zur Ebene derselben eine freie Axe der Masse, denn es ist in diesem Falle die Masse ohne Drehungshalbmesser, und daher die einzig mögliche Centrifugalkraft = Null. Um aber die beiden anderen freien Axen zu finden, schlagen wir folgenden Weg ein. Sei S, Fig. 353, der Schwerpunkt einer Masse, und seien $U\bar{U}$ und $V\bar{V}$ zwei in der Massenebene befindliche Coordinataxen, bestimmen wir die Massentheile durch Coordinaten parallel zu diesen Axen,

Fig. 353.



Freie Axen. z. B. das Massentheilchen M_1 durch die Coordinaten $M_1 N = u_1$ und $M_1 O = v_1$. Sei dagegen $X\overline{X}$ eine freie Axe, $Z\overline{Z}$ eine Axe winkelrecht gegen dieselbe, ferner der zu bestimmende Winkel XSU, um welchen die freie Axe von der Coordinataxe SU abweicht, $= \varphi$, und setzen wir die Coordinaten der Massentheile in Hinsicht auf die Axen $X\overline{X}$ und $Z\overline{Z}$: $x_1, x_2 \ldots, z_1, z_2 \ldots$, also für den Massentheil M_1: $M_1 K = x_1$ und $M_1 L = z_1$. Hiernach ergiebt sich sehr leicht:

Fig. 354.



$$x_1 = M_1 K = SR + RL = SO\, cos.\varphi + OM_1 sin.\varphi = u_1 cos.\varphi + v_1 sin.\varphi$$
$$z_1 = M_1 L = -OR + OF = -SO\, sin.\varphi + OM_1\, cos.\varphi$$
$= - u_1\, sin.\, \varphi + v_1\, cos.\, \varphi$; und daher das Product:

$$x_1 z_1 = (u_1 cos.\varphi + v_1\, sin.\varphi)\,(- u_1\, sin.\varphi + v_1\, cos.\varphi)$$
$$= -(u_1^2 - v_1^2)\, sin.\varphi\, cos.\varphi + u_1 v_1 (cos.\varphi^2 - sin.\varphi^2)$$

oder, da $sin.\varphi\; cos.\varphi = \frac{1}{2} sin. 2\varphi$ und $cos.\varphi^2 - sin.\varphi^2 = cos. 2\varphi$ ist, $x_1 z_1 = -\frac{1}{2}(u_1^2 - v_1^2)\, sin. 2\varphi + u_1 v_1\, cos.\, 2\varphi$, und daher das Moment des Massentheiles M_1:

$M_1 x_1 z_1 = -\frac{M_1}{2}(u_1^2 - v_1^2)\; sin.\; 2\varphi + M_1 u_1 v_1\; cos.\; 2\; \varphi$, ebenso das Moment des Massentheiles M_2:

$$M_2 x_2 z_2 = -\frac{M_2}{2}\,(u_2^2 - v_2^2)\; sin.\; 2\varphi + M_2\, u_2\, v_2\; cos.\; 2\varphi$$

u. s. w., und die Summe der Momente aller Massentheile, oder das Moment der ganzen Masse:

$$M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \ldots = -\tfrac{1}{2} sin. 2\varphi\; [(M_1 u_1^2 + M_2 u_2^2 + \ldots)$$
$$- (M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 + \ldots)] + cos. 2\varphi\; (M_1 u_1 v_1 + M_2 u_2 v_2 + \ldots).$$

Damit $X\overline{X}$ eine freie Axe werde, muß aber nach dem vorigen §. dieses Moment $=$ Null sein; wir müssen daher setzen

$$\tfrac{1}{2}\, sin.\; 2\varphi\; [(M_1 u_1^2 + M_2 u_2^2 + \ldots) - (M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 + \ldots)]$$
$$- cos. 2\varphi\; (M_1 u_1 v_1 + M_2 u_2 v_2 + \ldots) = 0,$$

und erhalten hiernach als Bedingungsgleichung:

$$tang. 2\varphi = \frac{sin.\; 2\varphi}{cos.\; 2\varphi} = \frac{2\,(M_1 u_1 v_1 + M_2 u_2 v_2 + \ldots)}{(M_1 u_1^2 + M_2 u_2^2 + \ldots) - M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 + \ldots)}$$
$$= \frac{\text{Doppeltes Moment der Centrifugalkraft}}{\text{Differenz der Trägheitsmomente}}.$$

Durch diese Formel ergeben sich zwei Werthe für 2φ, welche von einander um 180^0, und also auch zwei Werthe von φ, welche von einander um 90^0 abweichen; es ist deshalb nicht allein die durch die-

sen Winkel φ bestimmte Axe $X\overline{X}$ eine freie Axe, sondern auch die gegen sie winkelrecht gerichtete Axe $Z\overline{Z}$. Freie Axen.

§. 253. Von vielen Flächen und Körpern lassen sich die freien Axen ohne alle Rechnung angeben. Bei einer symmetrischen Figur ist z. B. die Symmetrieaxe eine freie Axe, das Perpendikel im Schwerpunkte die zweite, und die Axe winkelrecht gegen die Ebene der Figur die dritte freie Axe. Bei einem Rotationskörper AB, Fig. 355, ist die Rotationsaxe $Z\overline{Z}$ eine freie Axe, ebenso auch jede Normale $X\overline{X}$, $Y\overline{Y}$ .. zu dieser durch den Schwerpunkt S. Bei einer Kugel ist jeder Durchmesser eine freie Axe, bei einem geraden, von 6 Rechtecken begrenzten Parallelepipede ABD,

Fig. 355.

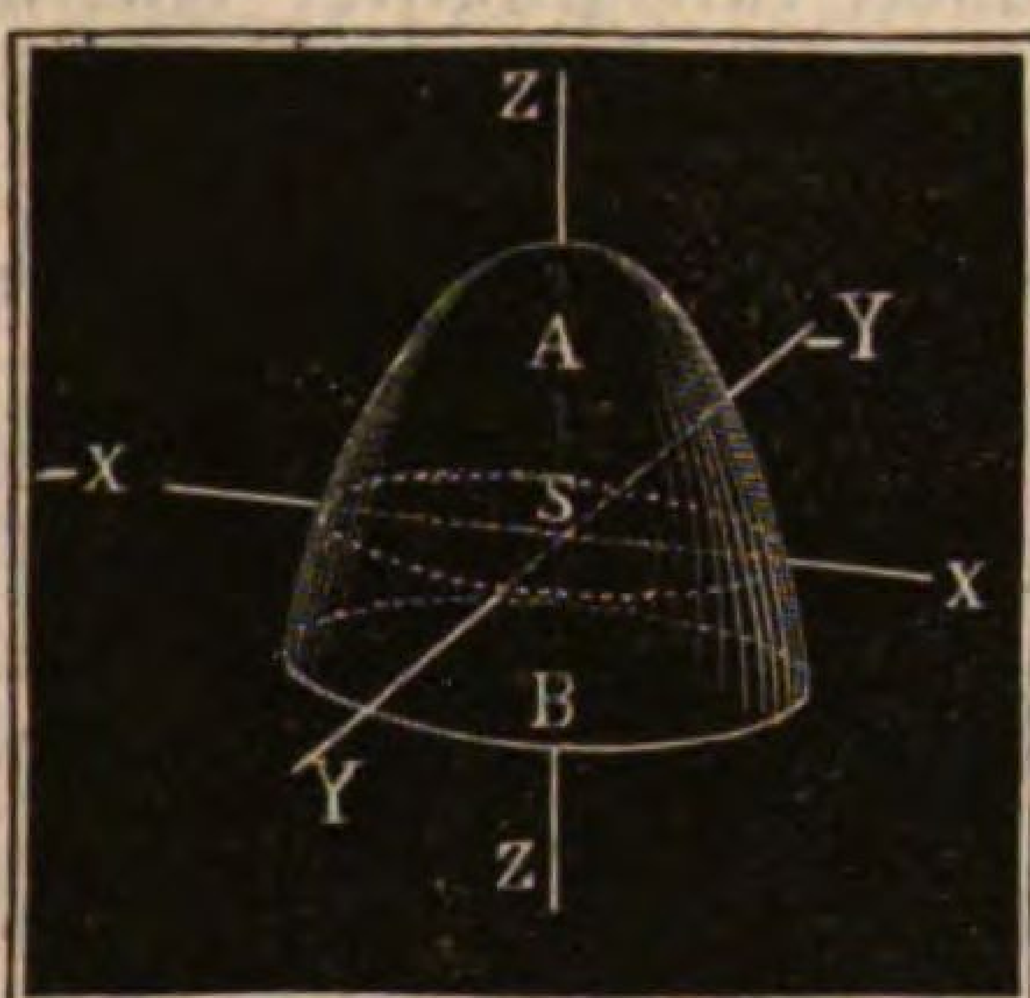


Fig. 356.

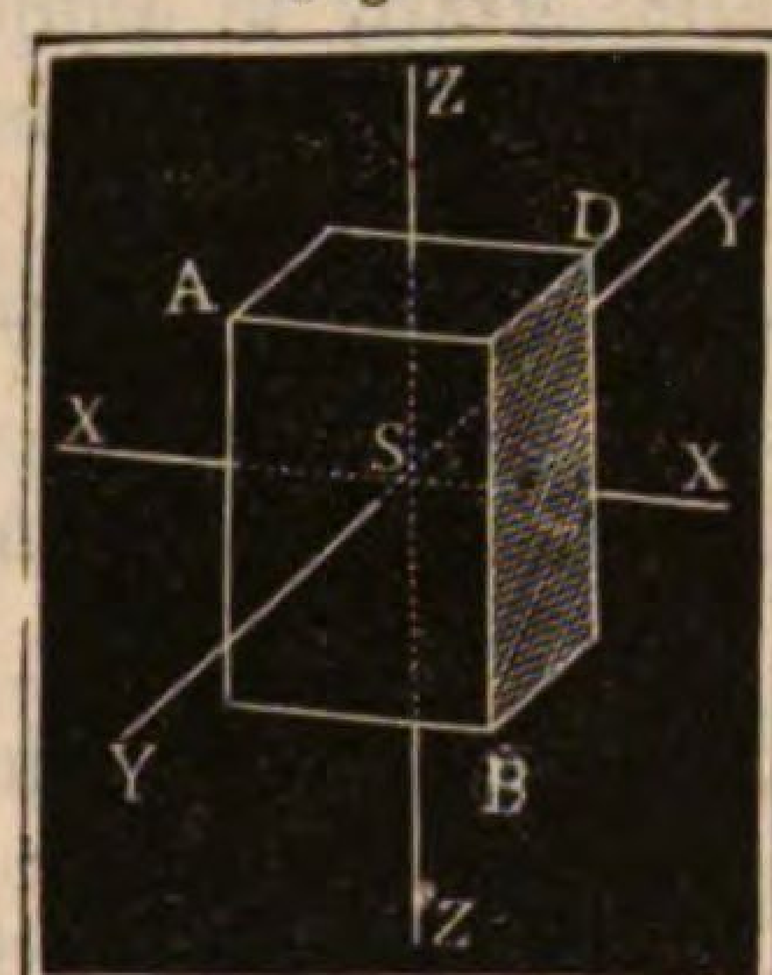
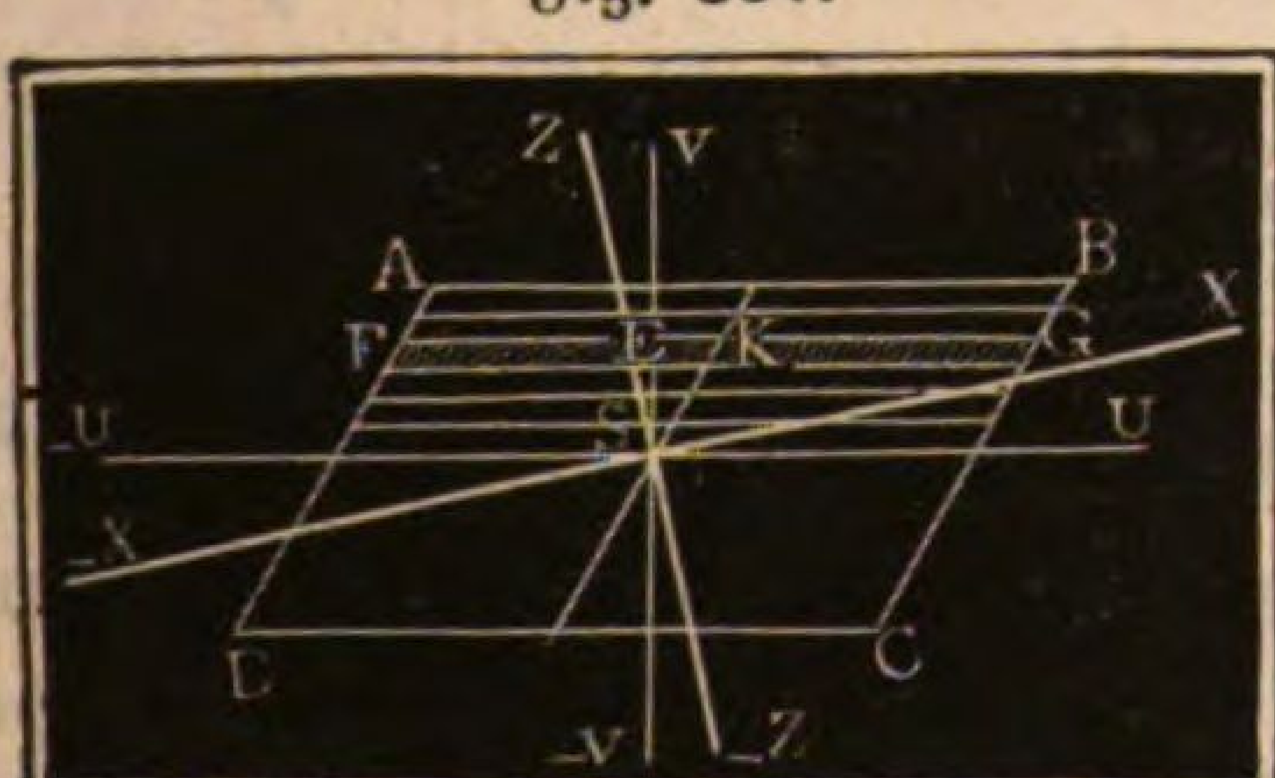


Fig. 356, aber sind es die drei durch den Schwerpunkt S gehenden und auf den Seitenflächen BD, AB und AD normal stehenden oder mit den Kanten parallel laufenden Axen $X\overline{X}$, $Y\overline{Y}$ und $Z\overline{Z}$.

Bestimmen wir noch die freien Axen von einem schiefwinkeligen Parallelogramme $ABCD$, Fig. 357. Legen wir durch den Schwerpunkt S desselben die unter sich rechtwinkelig stehenden Coordinataxen $U\overline{U}$ und $V\overline{V}$ so, daß die eine der Seite AB des Parallelogrammes parallel läuft, und zerlegen wir das Parallelogramm durch Parallellinien in $2n$ gleiche Streifen, wie z. B. FG. Ist nun die eine Seite $AB = 2a$, die andere Seite $AD = 2b$, und der spitze Winkel ADC zwischen je zwei Seiten $= \alpha$, so erhalten wir

Fig. 357.



für den um $SE = x$ von $U\overline{U}$ abstehenden Streifen FG die Länge des einen Theiles $EG = KG + EK = a + x\, cotg.\, \alpha$, und die des andern Theiles $EF = a - x\, cotang.\, \alpha$, und, da $\frac{b}{n} sin.\, \alpha$ die Breite

Freie Axen. beider ist, die Inhalte dieser Streifen $= \frac{b \sin. \alpha}{n} (a + x \cotg. \alpha)$ und $\frac{b \sin. \alpha}{n} (a - x \cotg. \alpha)$; auch folgen die Maaße der Centrifugalkräfte von diesen Theilen in Hinsicht auf die Axe $\overline{VV}$:

$$= \frac{b \sin. \alpha}{n} (a + x \cotg. a) \cdot \tfrac{1}{2}(a + x \cotg. \alpha) = \frac{b \sin. \alpha}{2n} (a + x \cotg. \alpha)^2$$

und $\frac{b \sin. \alpha}{2n} (a - x \cotg. \alpha)^2$, und ihre Momente in Hinsicht auf die Axe $\overline{UU}$: $\frac{b \sin. \alpha}{2n} (a + x \cotg. \alpha)^2 x$ und $\frac{b \sin. \alpha}{2n} (a - x \cotg. \alpha)^2 x$.

Da beide Kräfte in Hinsicht auf $\overline{VV}$ einander entgegengesetzt wirken, so giebt die Vereinigung ihrer Momente die Differenz:

$$\frac{b x \sin. \alpha}{2n} [(a + x \cotg. \alpha)^2 - (a - x \cotg. \alpha)^2] = \frac{2}{n} a b x^2 \cos. \alpha.$$

Setzen wir in dieser Formel für x nach und nach $\frac{b \sin. \alpha}{n}$, $\frac{2 b \sin. \alpha}{n}$, $\frac{3 b \sin. \alpha}{n}$ u. s. w. ein, und addiren wir die Ergebnisse, so bekommen wir das Maaß für das Moment der Centrifugalkraft des halben Parallelogrammes:

$$\frac{2ab}{n} \cos. \alpha . \frac{b^2 \sin. \alpha^2}{n^2} (1^2 + 2^2 + 3^2 + .. + n^2) = 2 a b^3 \sin. \alpha^2 \cos. \alpha . \frac{n^3}{3n^3}$$

$= \tfrac{2}{3}\, a b^3 \sin. \alpha^2 \cos. \alpha$, und also für das ganze Parallelogramm, oder $M_1 u_1 v_1 + M_2 u_2 v_2 + \ldots = \tfrac{4}{3}\, a b^3 \sin. \alpha^2 \cos. \alpha$. Das Trägheitsmoment in Hinsicht auf die Axe $\overline{VV}$ ist für einen Streifen FG

$$= \frac{b \sin. \alpha}{n} \left(\frac{(a + x \cotg. \alpha)^3}{3} + \frac{(a - x \cotg. \alpha)^3}{3} \right)$$

$$= \frac{2 b \sin. \alpha}{3n} (a^3 + 3 a x^2 \cotg. \alpha^2) = \tfrac{2}{3} \frac{ab}{n} \sin. \alpha (a^2 + 3 x^2 \cotg. \alpha^2);$$

setzt man nun für x successiv $\frac{b \sin. \alpha}{n}$, $\frac{2 b \sin. \alpha}{n}$, $\frac{3 b \sin. \alpha}{n}$ u. s. w., und summirt man die sich ergebenden Werthe, so folgt das Trägheitsmoment der einen Hälfte $= \tfrac{2}{3}\, ab \sin. \alpha\, (a^2 + b^2 \cos. \alpha^2)$, und daher das des Ganzen $= \tfrac{4}{3}\, ab \sin. \alpha\, (a^2 + b^2 \cos. \alpha^2)$. In Hinsicht auf die Umdrehungsaxe $\overline{UU}$ ist hingegen das Trägheitsmoment des Parallelogrammes $= 4\, ab \sin. \alpha . \frac{b^2 \sin. \alpha^2}{3} = \tfrac{4}{3}\, a b^3 \sin. \alpha^3$ (§. 234); es ergiebt sich daher die gesuchte Differenz der Trägheitsmomente, d. i.

$(M_1 u_1^2 + M_2 u_2^2 + \dots) - (M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 + \dots)$. Freie Axen.
$= \frac{4}{3}\, ab\, sin.\, \alpha\, (a^2 + b^2\, cos.\, \alpha^2) - \frac{4}{3}\, ab^3\, sin.\, \alpha^3$
$= \frac{4}{3}\, ab\, sin.\, \alpha\, [a^2 + b^2\, (cos.\, \alpha^2 - sin.\, \alpha^2)]$
$= \frac{4}{3}\, ab\, sin.\, \alpha\, (a^2 + b^2\, cos.\, 2\,\alpha)$.

Endlich folgt für den Winkel $USX = \varphi$, welchen die freie Axe $X\bar{X}$ mit der Coordinataxe $U\bar{U}$ oder der Seite AB einschließt, nach §. 252:

$$tang.\, 2\,\varphi = \frac{2\,(M_1 u_1 v_1 + M_2 u_2 v_2 + \dots)}{M_1 u_1^2 + M_2 u_2^2 + \dots) - (M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 + \dots)}$$
$$= \frac{2\,.\,\frac{4}{3}\, ab^3\, sin.\, \alpha^2\, cos.\, \alpha}{\frac{4}{3}\, ab\, sin.\, \alpha\, (a^2 + b^2\, cos.\, 2\,\alpha)} = \frac{b^2\, sin.\, 2\,\alpha}{a^2 + b^2\, cos.\, 2\,\alpha}.$$

Beim Rhombus ist $a = b$, daher

$$tang.\, 2\,\varphi = \frac{sin.\, 2\,\alpha}{1 + cos.\, 2\,\alpha} = \frac{2\, sin.\, \alpha\, cos.\, \alpha}{1 + cos.\, \alpha^2 - sin.\, \alpha^2} = \frac{2 sin\, \alpha cos.\, \alpha}{2\, cos.\, \alpha^2} = tg.\, \alpha,$$

also $2\,\varphi = \alpha$, und $\varphi = \frac{\alpha}{2}$. Da dieser Winkel die Richtung der Diagonale angiebt, so folgt, daß die Diagonalen freie Axen des Rhombus sind.

Beispiel. Bei dem schiefwinkeligen Parallelogramme $ABCD$, Fig. 356, messen die Seiten $AB = 2a = 16$ Zoll und $BC = 2b = 10$ Zoll, und ist der Umfangswinkel $ABC = \alpha = 60^\circ$, welche Richtungen haben dessen freie Axen? Es ist $tang. 2\varphi = \frac{5^2 . sin. 120^\circ}{8^2 + 5^2 . cos. 120^\circ} = \frac{25 . sin. 60^\circ}{64 - 25\, cos. 60^\circ} = \frac{25 . 0{,}86603}{64 - 25 . 0{,}5}$ $= 0{,}42040 = tang.\, 22^\circ, 48'$, oder $tang.\, 202^\circ, 48'$. Hiernach folgen $\varphi = 11^\circ, 24'$ und $101^\circ, 24'$ als Neigungswinkel von zwei freien Axen gegen die Seite AB. Die dritte freie Axe steht auf der Ebene des Parallelogrammes rechtwinkelig. Diese Winkel bestimmen auch die freien Axen eines geraden Parallelepipedes mit rhomboidalen Grundflächen.

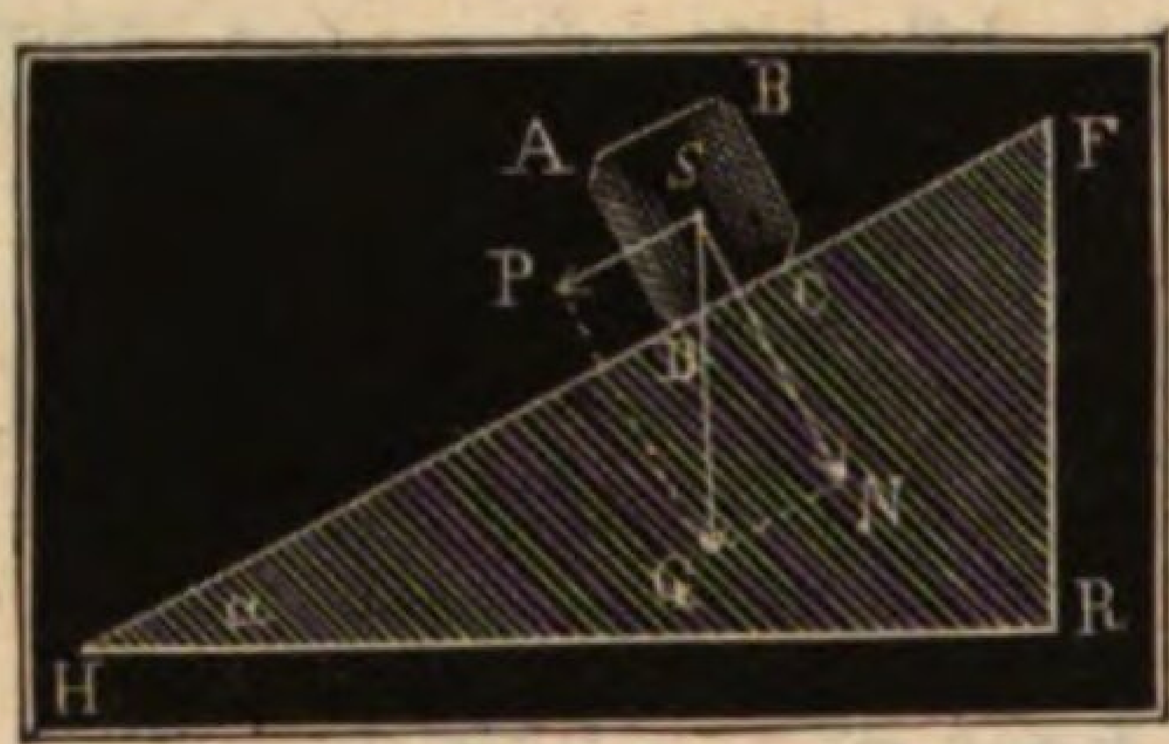
Drittes Kapitel.

Von den Wirkungen der Schwerkraft bei Bewegungen auf vorgeschriebenen Wegen.

§. 254. Ein schwerer Körper kann auf mancherlei Weise verhindert werden, frei zu fallen, betrachten wir indessen im Folgenden nur zwei Fälle, nämlich den Fall, wenn der Körper von einer geneigten Ebene unterstützt wird, und den Fall, wenn er um eine horizontale Axe drehbar ist. In beiden Fällen sind die Wege des Körpers in einer Vertikalebene ent- Schiefe Ebene.

Schiefe Ebene. halten. Befindet sich der Körper auf einer geneigten Ebene, so zerlegt sich das Gewicht desselben in zwei Seitenkräfte, von denen die eine normal gegen die Ebene gerichtet ist und von dieser aufgenommen wird, und die andere parallel zur Ebene und auf den Körper als bewegende Kraft wirkt. Ist G das Gewicht des Körpers $ABCD$, Fig. 358, und α die Neigung der schiefen Ebene FHR gegen den Horizont, so hat man nach §. 134 jenen Normaldruck: $N = G \cos. \alpha$, und diese bewegende Kraft $P = G \sin. \alpha$. Die Bewegung des Körpers kann nun entweder gleitend oder wälzend sein; berücksichtigen wir zunächst nur die erstere. In diesem Falle nehmen alle Theile des Körpers gleichen Antheil an der Bewegung des Körpers, und haben daher auch eine gemeinschaftliche Acceleration p, die sich durch die bekannte Formel:

Fig. 358.



$$p = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}}, = \frac{P}{M} = \frac{G \sin. \alpha}{G} . g = g \sin. \alpha$$

ergiebt. Es ist also $p : g = \sin. \alpha : 1$, d. h. **die Beschleunigung eines Körpers auf der schiefen Ebene verhält sich zur Beschleunigung des freien Falles wie der Sinus des Fallwinkels der schiefen Ebene zu Eins.** Wegen der hinzutretenden Reibung gewährt aber diese Formel selten hinreichende Genauigkeit; es ist daher nothwendig, in vielen Fällen der Anwendung auch auf diese Rücksicht zu nehmen.

Bewegt sich ein Körper auf einer krummen Fläche, so ist die Acceleration veränderlich und an jeder Stelle gleich der Acceleration, welche der Berührungsebene an die krumme Fläche entspricht.

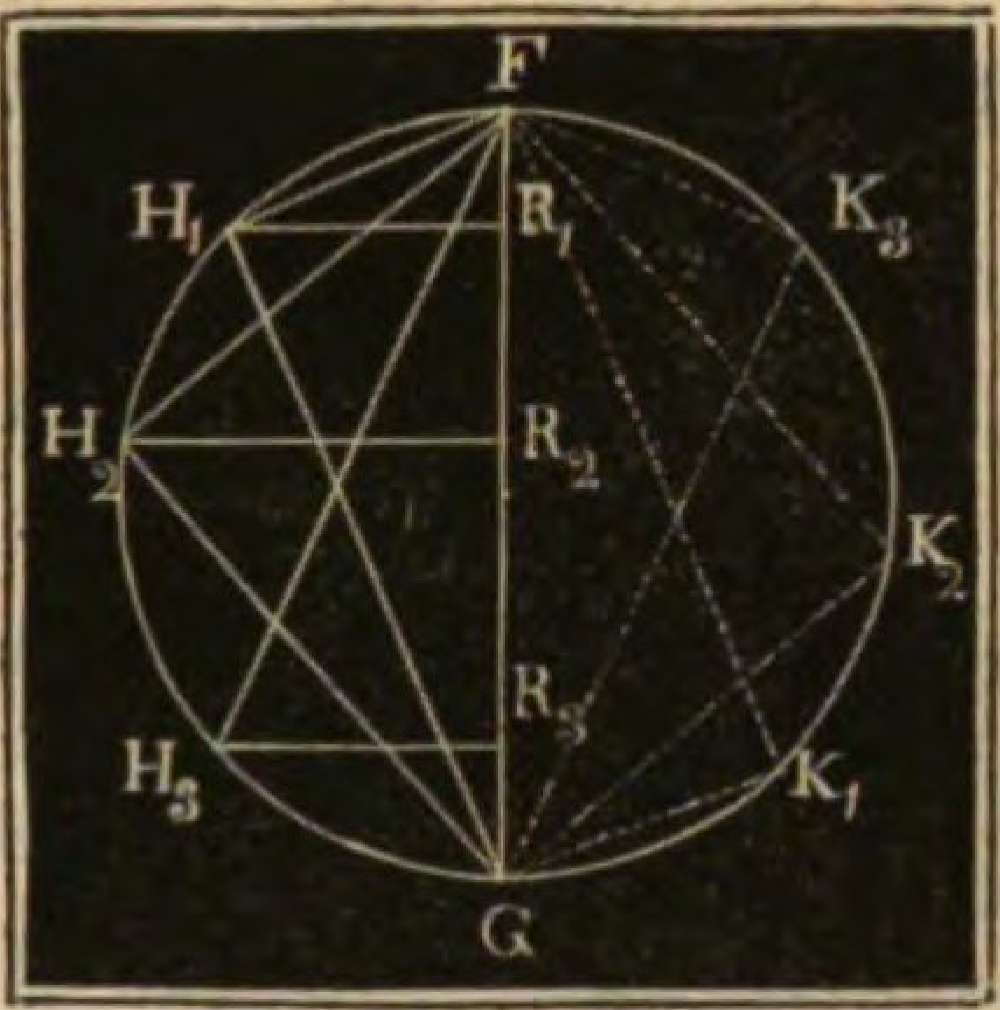
§. 255. Gleitet ein Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit Null auf einer geneigten Ebene ohne Reibung herab, so ist nach §. 10 die Endgeschwindigkeit nach t Secunden: $v = g \sin. \alpha . t = 31{,}25 \sin. \alpha . t$ Fuß, und der zurückgelegte Raum $s = \frac{1}{2} g \sin. \alpha . t^2 = 15{,}625 \sin. \alpha . t^2$ Fuß. Beim freien Fall ist $v_1 = gt$ und $s_1 = \frac{1}{2} g t^2$, es läßt sich daher setzen: $v : v_1 = s : s_1 = \sin. \alpha : 1$, d. h. **es verhalten sich die Endgeschwindigkeit und der Raum beim Fallen auf der schiefen Ebene zur Endgeschwindigkeit und dem Raume beim freien Fallen, wie der Sinus des Neigungswinkels der schiefen Ebene zur Einheit.**

In dem rechtwinkeligen Dreiecke FGH, Fig. 359, mit vertikaler Hypotenuse FG ist die Kathete $FH = FG \, sin. \, FGH = FG \, . \, sin. \, FHR = FG \, sin. \, \alpha$, wenn α die Neigung dieser Kathete gegen den Horizont bezeichnet; es ist daher $FH : FG = sin. \, \alpha : 1$, und es durchläuft ein Körper die vertikale Hypotenuse FG und die geneigte Kathete FH in einer und derselben Zeit. Es läßt sich hiernach zum Fallraum auf der schiefen Ebene der entsprechende Raum des freien Falles, und zu dem letztern der erstere durch Construction finden. Schiefe Ebene.

Fig. 359.



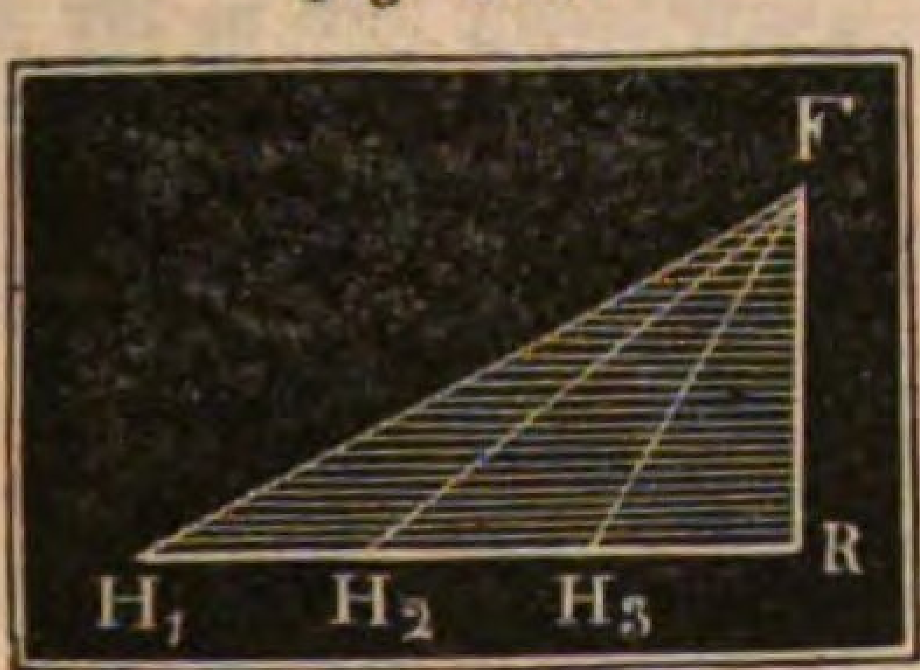
Fig. 360.



Da die auf dem Durchmesser FG, Fig. 360, stehenden Peripheriewinkel FH_1G, FH_2G u. s. w. lauter rechte sind, so schneidet der Halbkreis über FG von allen in F anfangenden schiefen Ebenen die mit dem Durchmesser und deshalb auch unter sich in gleichen Zeiten durchlaufenen Räume FH_1, FH_2 u. s. w. ab. Man sagt daher: die Sehnen eines Kreises und der Durchmesser desselben werden gleichzeitig oder isochron durchfallen. Uebrigens gilt dieser Isochronismus nicht allein für die Sehnen FH_1, FH_2 u. s. w., welche im höchsten Punkte F des Kreises anfangen, sondern auch für die Sehnen K_1G, K_2G u. s. w., welche in dem untersten Punkte G desselben auslaufen, denn es lassen sich durch F Sehnen FK_1, FK_2 u. s. w. ziehen, welche mit den Sehnen GH_1, GH_2 u. s. w. gleiche Lage und gleiche Länge haben.

§. 256. Aus der Gleichung $s = \frac{v^2}{2p} = \frac{v^2}{2g \, . \, sin. \, \alpha}$ folgt $s \, sin. \, \alpha = \frac{v^2}{2g}$, und umgekehrt $v = \sqrt{2 g s \, sin. \, \alpha}$. Nun ist aber $s \, sin. \, \alpha$ die Höhe FR der schiefen Ebene oder die Vertikalprojection s_1 des Weges $FH_1 = s$ auf derselben; es sind daher die Endgeschwindigkeiten von Körpern, welche mit Null Anfangsgeschwindigkeit von verschieden geneigten, gleich hohen Ebenen FH_1, FH_2 u. s. w., Fig. 361, herabfallen, unter sich gleich und

Fig. 361.



Schiefe Ebene. auch gleich der Geschwindigkeit, welche ein Körper erlangt, wenn er von der Höhe FR dieser Ebenen frei herabfällt

Aus der Gleichung $s = \frac{1}{2} g \sin. \alpha \,.\, t^2$ folgt die Formel für die Zeit:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g \sin. \alpha}} = \frac{1}{\sin. \alpha} \sqrt{\frac{2 s \sin. \alpha}{g}} = \frac{1}{\sin. \alpha} \,.\, \sqrt{\frac{2 \,.\, FR}{g}}.$$

Für den freien Fall durch die Höhe FR ist aber die Zeit $t_1 = \sqrt{\frac{2FR}{g}}$, es folgt demnach $t : t_1 = 1 : \sin. \alpha = FR : FH$; es verhält sich also die Zeit des Fallens auf der schiefen Ebene zur Zeit des freien Falles von der Höhe dieser Ebene wie die Länge zur Höhe der schiefen Ebene.

Fig. 362.

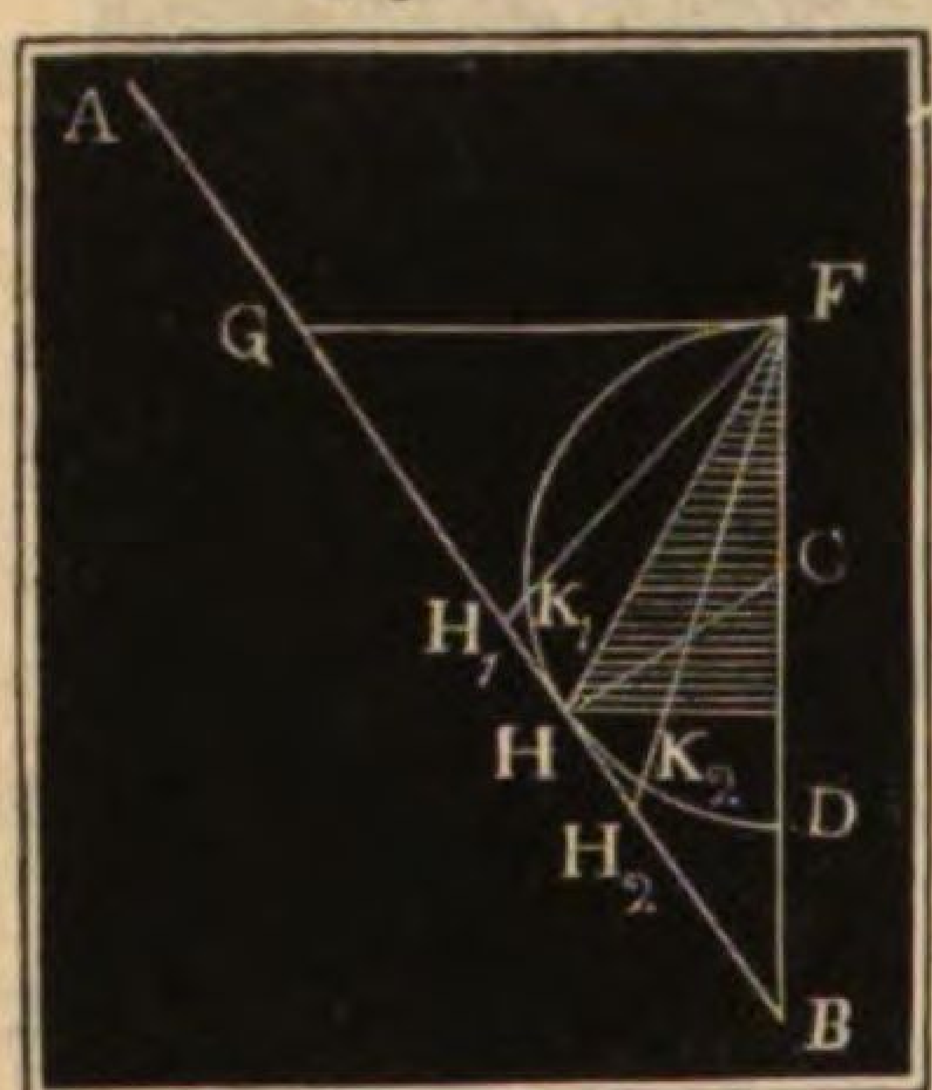
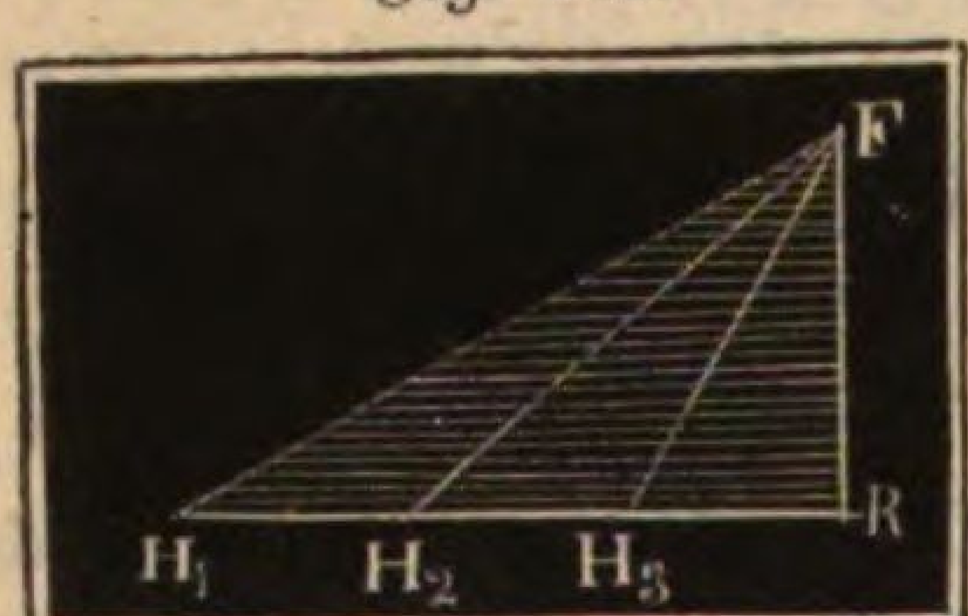


Fig. 363.



Beispiele. 1) Von einer schiefen Ebene FH, Fig. 362, ist der Anfangspunkt F gegeben und der Endpunkt H in einer gegebenen Linie AB so zu bestimmen, daß der Fall auf dieser Ebene in der kürzesten Zeit erfolge. Zieht man durch F die Horizontale FG bis zum Durchschnitt mit AB, und macht man $GH = GF$, so erhält man in H den gesuchten Punkt, und also in FH die Ebene der kürzesten Fallzeit; denn führt man durch F und H einen sich an FG und FH tangential anlegenden Kreis, so sind dessen isochron durchlaufene Sehnen FK_1, FK_2 u. s. w. kürzer als die Längen FH_1, FH_2 u. s. w. der entsprechenden schiefen Ebenen, es ist folglich auch die Fallzeit für jene Sehnen kleiner, als für diese Längen, und die Fallzeit für die schiefe Ebene FH, welche mit einer Sehne zusammenfällt, die kürzeste. 2) Man soll die Neigung derjenigen schiefen Ebene FH_1, Fig. 363, angeben, von welcher ein Körper in derselben Zeit herabfällt, als wenn er erst von der Höhe FR frei herabfiele und dann mit der erlangten Geschwindigkeit horizontal bis H_1 fortginge. Die Zeit zum Herabfallen von der senkrechten Höhe $FR = s_1$ ist $t_1 = \sqrt{\frac{2s_1}{g}}$, und die erlangte Geschwindigkeit in R ist $v = \sqrt{2gs_1}$. Tritt nun beim Uebergange aus der vertikalen Bewegung in die horizontale kein Geschwindigkeitsverlust ein, was erfolgt, wenn die Ecke R abgerundet ist, so wird der Weg $RH_1 = s_1 \, cotg. \alpha$ gleichförmig und in der Zeit $t_2 = \frac{s_1 \, cotg. \alpha}{v} = \frac{s_1 \, cotg. \alpha}{\sqrt{2gs_1}} = \frac{1}{2} cotg. \alpha \sqrt{\frac{2s_1}{g}}$ durchlaufen. Die Fallzeit für die schiefe Ebene ist $t = \frac{1}{\sin. \alpha} \sqrt{\frac{2s_1}{g}}$; setzen wir daher $t = t_1 + t_2$, so erhalten wir die Bestimmungsgleichung $\frac{1}{\sin. \alpha} = 1 + \frac{1}{2} cotg. \alpha$, deren Auf-

lösung auf $tang.\,\alpha = {}^3/_4$ führt. In der entsprechenden schiefen Ebene verhält Schiefe Ebene.
sich hiernach die Höhe zur Basis zur Länge wie 3 zu 4 zu 5, und es ist der Neigungswinkel $\alpha = 36^0,52',11''$. 3) Bei einer schiefen Ebene von der gegebenen Basis a ist die Zeit zum Herabgleiten:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g\,sin.\,\alpha}} = \sqrt{\frac{2a}{g\,sin.\,\alpha\,cos.\,\alpha}} = \sqrt{\frac{4a}{g\,sin.\,2\alpha}};$$

sie fällt daher am kleinsten aus, wenn $sin.\,2\alpha$ am größten, d. i. $= 1$, also $2\alpha^0 = 90^0$, oder $\alpha^0 = 45^0$ ist. Von Dächern mit 45^0 Neigung fließt daher das Wasser in der kürzesten Zeit herab.

§. 257. Geht die Bewegung auf einer schiefen Ebene mit einer gewissen Anfangsgeschwindigkeit c vor sich, so hat man die in §. 13 und §. 14 gefundenen Formeln in Anwendung zu bringen. Hiernach ist für einen auf der schiefen Ebene hinaufsteigenden Körper die Endgeschwindigkeit $v = c - g\,sin.\,\alpha\,.\,t$, und der zurückgelegte Weg $s = ct - {}^1/_2 g\,sin.\,\alpha\,.\,t^2$; dagegen für den von der schiefen Ebene herabsinkenden Körper

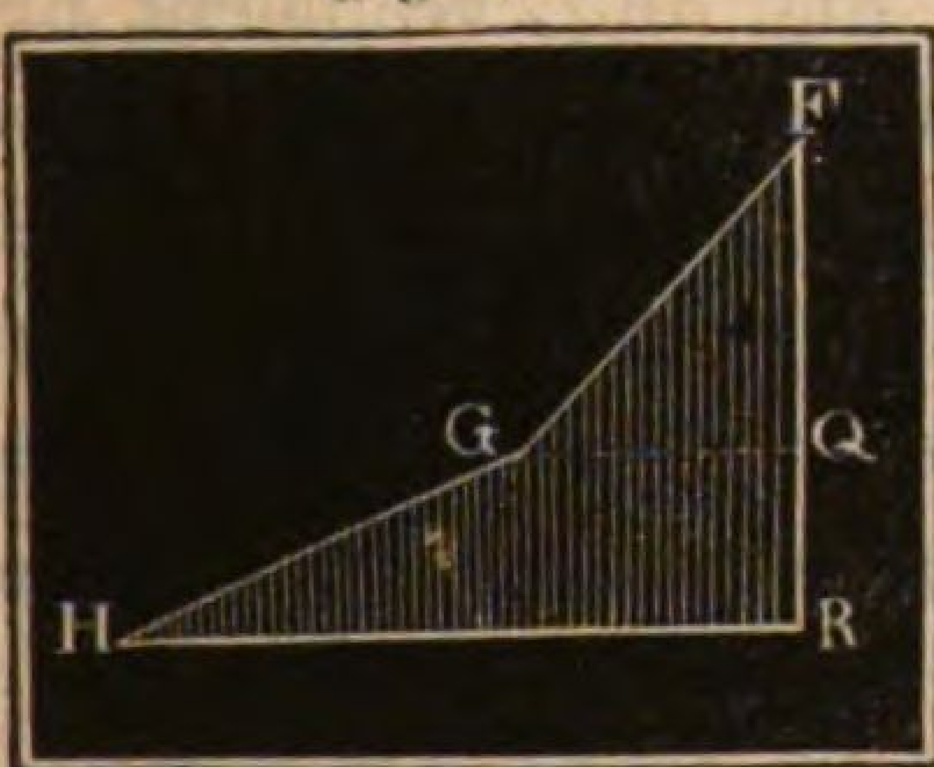
$$v = c + g\,sin.\,\alpha\,.\,t \text{ und } s = ct + {}^1/_2 g\,sin.\,\alpha\,.\,t^2.$$

Uebrigens gilt in beiden Fällen der Bewegung die Formel:

$$s = \frac{v^2 - c^2}{2g\,sin.\,\alpha}, \text{ oder } s\,sin.\,\alpha = \frac{v^2 - c^2}{2g} = \frac{v^2}{2g} - \frac{c^2}{2g}.$$

Es ist also stets die **Vertikalprojection** ($s\,sin.\,\alpha$) **des auf der schiefen Ebene zurückgelegten Weges** (s) **gleich der Differenz der Geschwindigkeitshöhen.**

Fig. 364.



Stoßen zwei schiefe Ebenen FGQ und GHR, Figur 364, in einer abgerundeten Kante an einander, so findet beim Uebergang des fallenden Körpers von der einen Ebene zur andern kein Stoß, und deshalb auch kein Geschwindigkeitsverlust statt; es gilt deshalb auch für das Herabfallen eines Körpers von dieser Verbindung zweier Ebenen die Regel: **Fallhöhe** (FR) **gleich Differenz der Geschwindigkeitshöhen.** Uebrigens ist leicht zu ermessen, daß diese Regel auch bei dem Sinken und Steigen auf einer derartigen Verbindung von beliebig vielen Ebenen, und beim Fallen und Aufsteigen auf krummen Linien oder Flächen ihre Richtigkeit behält (vergl. §. 82).

Beispiele. 1) Ein Körper steigt mit 21 Fuß Anfangsgeschwindigkeit auf einer schiefen Ebene von 22^0 Neigung hinauf, wie groß ist seine Geschwindigkeit und sein zurückgelegter Weg nach $1^1/_2$ Secunde? Es ist die Geschwindigkeit $v = 21 - 31{,}25\,.\,sin.\,22^0\,.\,1{,}5 = 21 - 31{,}25\,.\,0{,}3746\,.\,1{,}5 = 21 - 17{,}56 = 3{,}44$ Fuß, und der Weg

$$s = \frac{c + v}{2}\,.\,t = \frac{21 + 3{,}44}{2}\,.\,{}^3/_2 = \frac{24{,}44\,.\,3}{4} = 18{,}33 \text{ Fuß}.$$

2) Wie hoch steigt ein Körper mit 36 Fuß Anfangsgeschwindigkeit auf der schie-

Schiefe Ebene. fen Ebene von 48° Ansteigen? Es ist die senkrechte Höhe $s_1 = \frac{v^2}{2g} = 0{,}016 \cdot v^2 = 0{,}016 \cdot 36^2 = 20{,}736$ Fuß, daher der ganze Weg auf der schiefen Ebene: $s = \frac{s_1}{sin.\ \alpha} = \frac{20{,}736}{sin. 48^0} = 27{,}903$ Fuß. Die hierzu nöthige Zeit ist:

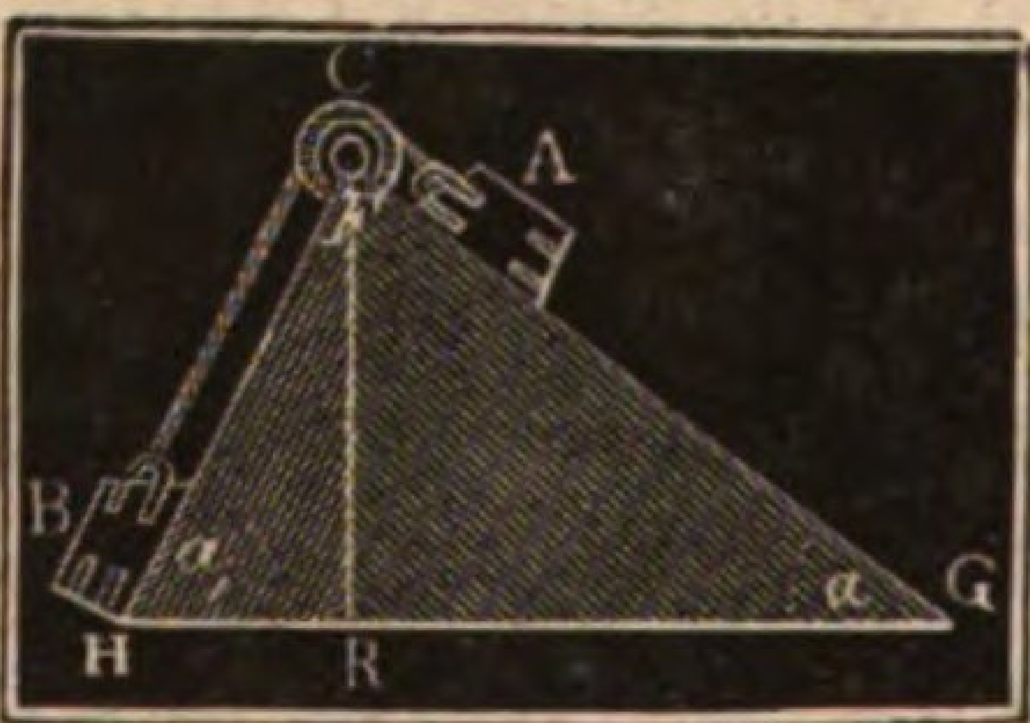
$$t = \frac{2\ .\ s}{v} = \frac{2 \cdot 27{,}903}{36} = \frac{27{,}903}{18} = 1{,}55 \text{ Secunden.}$$

§. 258. Die gleitende Reibung übt einen bedeutenden Einfluß auf das Fallen und Steigen eines Körpers auf einer schiefen Ebene aus. Aus dem Gewichte G des Körpers und aus dem Neigungswinkel α der schiefen Ebene folgt der Normaldruck $N = G\ cos.\ \alpha$, und hieraus wieder die Reibung $F = \varphi N = \varphi\ G\ cos.\ \alpha$. Subtrahirt man diese von der Kraft $P = G\ sin.\ \alpha$, mit welcher die Schwerkraft den Körper von der schiefen Ebene herabtreibt, so bleibt die bewegende Kraft $= G\ sin.\ \alpha - \varphi\ G\ cos.\ \alpha$, und es ergiebt sich die Beschleunigung des von der schiefen Ebene herabsinkenden Körpers:

$$p = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}} = \left(\frac{G\ sin. \alpha - \varphi\, G\ cos. \alpha}{G}\right) g = (sin. \alpha - \varphi\, cos.\ \alpha)\ g.$$

Bei einem auf der schiefen Ebene hinaufsteigenden Körper ist die bewegende Kraft negativ und $= G\ sin.\ \alpha + \varphi\ .\ G\ cos.\ \alpha$, daher auch die Acceleration p negativ und $= -(sin.\ \alpha + \varphi\ cos.\ \alpha)\ g$.

Fig. 365.



Sind zwei auf verschiedenen Ebenen FG und FH, Fig. 365, befindliche Körper durch eine über eine Leitrolle C gelegte, vollkommen biegsame Schnur mit einander verbunden, so ist es möglich, daß der eine von beiden Körpern sinkt und den andern mit emporzieht. Bezeichnen wir die Gewichte dieser Körper durch G und G_1, und die Neigungswinkel der schiefen Ebenen, auf welchen dieselben fortgleiten, durch α und α_1, und nehmen wir an, daß G sinke und G_1 mit emporziehe, so erhalten wir als bewegende Kraft:

$G\ sin. \alpha - G_1\ sin. \alpha_1 - \varphi\ G\ cos. \alpha - \varphi\ G_1\ cos.\ \alpha_1 = G\ (sin. \alpha - \varphi\ cos. \alpha) - G_1\ (sin. \alpha_1 + \varphi\ cos.\ \alpha_1)$, und als bewegte Masse $= \frac{G + G_1}{g}$, daher die Acceleration, mit welcher G sinkt und G_1 steigt:

$$p = \frac{G\ (sin. \alpha - \varphi\ cos. \alpha) - G_1\ (sin.\ \alpha_1 + \varphi\ cos. \alpha_1)}{G + G_1} \cdot g.$$

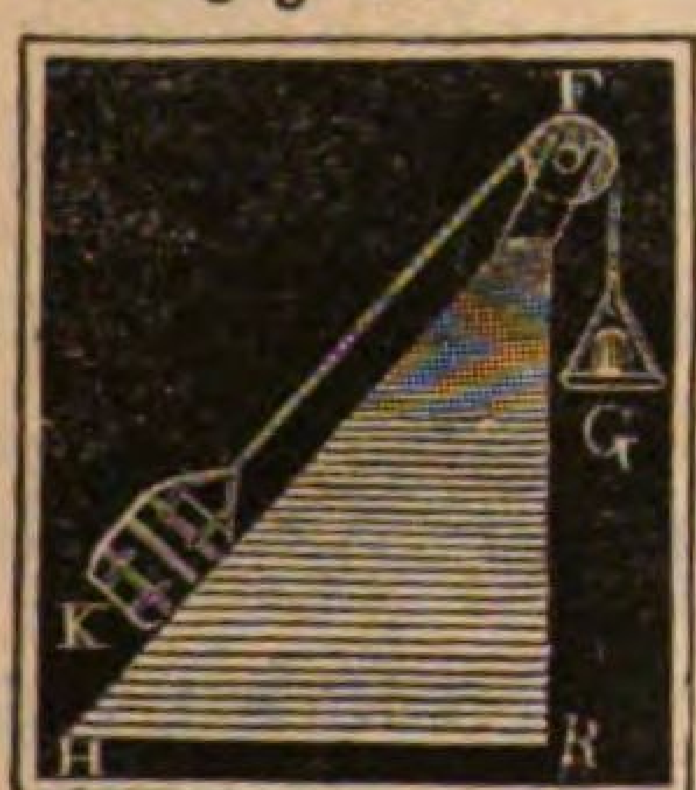
Da die Reibung als widerstehende Kraft keine Bewegung erzeugen kann, so ist für das Sinken von G und Steigen von G_1 nöthig, daß

$$G\ (sin.\ \alpha - \varphi\ cos.\ \alpha) > G_1\ (sin.\ \alpha_1 + \varphi\ cos.\ \alpha_1), \text{ also}$$

$\frac{G}{G_1} > \frac{sin.\,\alpha_1 + \varphi\, cos.\,\alpha_1}{sin.\,\alpha - \varphi\, cos.\,\alpha}$ ist. Soll hingegen G_1 sinken und G mit Schiefe Ebene.
emporziehen, so muß sein: $\frac{G_1}{G} > \frac{sin.\,\alpha + \varphi\, cos.\,\alpha}{sin.\,\alpha_1 - \varphi\, cos.\,\alpha_1}$, oder
$\frac{G}{G_1} < \frac{sin.\,\alpha_1 - \varphi\, cos.\,\alpha_1}{sin.\,\alpha + \varphi\, cos.\,\alpha}$. So lange aber $\frac{G}{G_1}$ innerhalb der Grenzen
$\frac{sin.\,\alpha_1 + \varphi\, cos.\,\alpha_1}{sin.\,\alpha - \varphi\, cos.\,\alpha}$ und $\frac{sin.\,\alpha_1 - \varphi\, cos.\,\alpha_1}{sin.\,\alpha + \varphi\, cos.\,\alpha}$ liegt, so lange wird die Reibung alle Bewegung verhindern.

Beispiele. 1) Ein Schlitten gleitet auf einer 150 Fuß langen und 20 Grad fallenden Schneebahn herab und geht, unten angekommen, auf einer horizontalen Schneebahn fort, bis ihn die Reibung in Ruhe versetzt. Wenn nun der Coefficient der Reibung zwischen Schnee und Schlitten = 0,03 ist, welchen Weg wird der Schlitten, ohne Rücksicht auf den Widerstand der Luft, auf der horizontalen Ebene zurücklegen? Es ist die Acceleration $p = (sin.\,\alpha - \varphi\, cos.\,\alpha)\, g$ $= (sin.\ 20^0 - 0{,}03\ .\ cos.\ 20)\ .\ 31{,}25 = (0{,}3420 - 0{,}03\ .\ 0{,}9397)\ .\ 31{,}25$ $= 0{,}3138 . 31{,}25 = 9{,}806$ Fuß, daher die Endgeschwindigkeit des Herabgleitens: $v = \sqrt{2ps} = \sqrt{2\,.\,9{,}806\,.\,150} = \sqrt{2941{,}8} = 54{,}24$ Fuß. Auf der horizontalen Ebene ist die Acceleration $p_1 = -\varphi g = -0{,}03\,.\,31{,}25 = 0{,}9375$ Fuß, daher der Weg $s_1 = \frac{v^2}{2\varphi g} = \frac{2941{,}8}{1{,}875} = 1569$ Fuß. Die Zeit zum Herabgleiten ist $t = \frac{2s}{v} = \frac{300}{54{,}24} = 5{,}5$ Secunden, und zum Fortgleiten $t_1 = \frac{2s_1}{v}$ $= \frac{3138}{54{,}24} = 57{,}8$ Secunden, daher die ganze Fahrzeit $t + t_1 = 63{,}3$ Secunden = 1 Minute 3,3 Secunden. 2) Ein gefüllter Kübel K, Fig. 366, mit 250 Pfd. Bruttogewicht soll durch ein senkrecht niederziehendes Gewicht G von 260 Pfd. auf einer schiefen Ebene FH von 70 Fuß Länge und 50° Neigung emporgezogen werden; welche Zeit wird dazu nöthig sein, wenn der Coefficient der Reibung des Kübels auf der Leitung 0,36 beträgt? Es ist die bewegende Kraft $= G - (sin.\ \alpha + \varphi\ cos.\ \alpha)\ K = 260$ $- (sin. 50^0 + 0{,}36\,.\,cos.\ 50^0)\,.\,250 = 260 - 0{,}9974\,.\,250$ $= 10{,}6$ Pfd.; daher die Beschleunigung $p = \frac{10{,}6}{250 + 260}$ $= \frac{10{,}6}{510} = 0{,}0208$ Fuß, ferner die Zeit $t = \sqrt{\frac{2s}{p}} = \sqrt{\frac{140}{0{,}0208}} = \sqrt{6731}$ $= 82{,}04$ Secunden = 1 Minute 22 Secunden, und die Endgeschwindigkeit $v = \frac{2s}{t} = \frac{140}{82} = 1{,}70$ Fuß.

Fig. 366.



§. 259. Bei einem von einer schiefen Ebene herabrollenden Wagen wirkt vorzüglich die Axenreibung der Beschleunigung entgegen; ist r der Axen-, und a der Radhalbmesser, so beträgt die Reibung: Rollende Bewegung.

Rollende Bewegung.

Fig. 367.



$\frac{\varphi r}{a} N = \frac{\varphi r}{a} G \cos. \alpha$, und daher die Beschleunigung $p = (\sin. \alpha - \frac{\varphi r}{a} \cos. \alpha)\, g$.

Wälzt sich ein runder Körper AB, z. B. ein Cylinder oder eine Kugel u. s. w., von einer schiefen Ebene FH, Fig. 367, herab, so hat man es mit einer progressiven und drehenden Bewegung zugleich zu thun. In der Regel ist die Acceleration p des Fortschreitens gleich der Acceleration des Drehens (§. 156); setzen wir daher das Trägheitsmoment des sich wälzenden Körpers $= G l^2$, und den Halbmesser CA des Wälzens $= a$, so erhalten wir für die Kraft $AK = K$, mit welcher die Walze in Folge des Eingreifens ihrer Theile in die Theile der schiefen Ebene in Umdrehung gesetzt wird: $K = p \cdot \frac{G l^2}{g a^2}$. Nun wirkt aber die Kraft K der Kraft $G \sin. \alpha$ zum Herablaufen entgegen; es folgt daher die bewegende Kraft für die progressive Bewegung $= G \sin. \alpha - K$, und die Beschleunigung $p = \frac{G \sin. \alpha - K}{G} \cdot g$. Eliminirt man K aus beiden Gleichungen, so erhält man $G p = G g \sin. \alpha - \frac{G l^2}{a^2} \cdot p$, folglich die gesuchte Acceleration:

$$p = \frac{g \sin. \alpha}{1 + \frac{l^2}{a^2}}.$$

Bei einem sich wälzenden homogenen Cylinder ist $l^2 = \frac{1}{2} a^2$ (§. 235), daher $p = \frac{g \sin. \alpha}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} g \sin. \alpha$; bei einer Kugel aber $l^2 = \frac{2}{5} a^2$ (§. 237), daher $p = \frac{g \sin. \alpha}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{5}{7} g \sin. \alpha$; es ist also bei dem rollenden Cylinder die Beschleunigung nur $\frac{2}{3}$, und bei der rollenden Kugel nur $\frac{5}{7}$ mal so groß, als bei einem ohne Reibung gleitenden Körper.

Die Kraft des Drehens ist:

$$K = \frac{g \sin. \alpha}{1 + \frac{l^2}{a^2}} \cdot \frac{G l^2}{g a^2} = \frac{G l^2 \sin. \alpha}{a^2 + l^2}.$$

So lange dieselbe kleiner ist, als die gleitende Reibung $\varphi G \cos. \alpha$, so lange geht auch der Körper vollkommen wälzend von der Ebene herab. Ist aber $K > \varphi G \cos. \alpha$, d. i. $\tang. \alpha > \varphi \left(1 + \frac{a^2}{l^2}\right)$, so ist die Rei-

bung nicht mehr ausreichend, dem Körper eine der fortschreitenden Geschwindigkeit gleiche Umdrehungsgeschwindigkeit zu ertheilen; es ist daher die Acceleration des Fortschreitens wie bei der gleitenden Reibung: Rollende Bewegung.

$$p = \frac{G \sin.\alpha - \varphi\, G \cos.\alpha}{G} \cdot g = (\sin.\alpha - \varphi \cos.\alpha)\, g,$$

und die der Umdrehung:

$$p_1 = \frac{\varphi\, G \cos.\alpha}{G l^2 : a^2} \cdot g = \varphi \frac{a^2}{l^2}\, g \cos.\alpha.$$

Bei einem Wagen vom Gewichte G mit Rädern vom Halbmesser a und dem Trägheitsmomente $G_1 l^2$ hat man:

$$K = p\,\frac{G_1 l^2}{g a^2} \text{ und } p = \frac{G \sin.\alpha - \varphi \frac{r}{a} G \cos.\alpha - K}{G} \cdot g, \text{ d. i.}$$

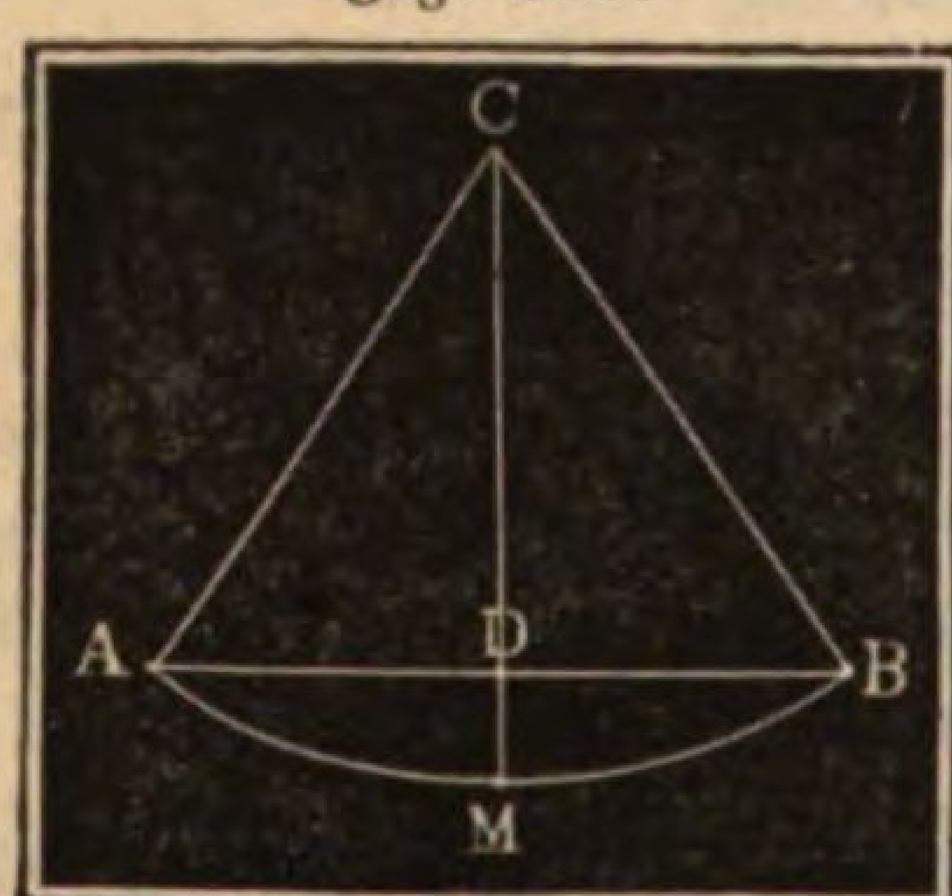
$$p = \frac{g\,(\sin.\alpha - \varphi \frac{r}{a} \cos.\alpha)}{1 + \frac{G_1 l^2}{G a^2}}.$$

Beispiele. 1) Ein belasteter Wagen von 3600 Pfd. Gewicht mit Rädern von 4 Fuß Höhe und 2000 Fußpf. Trägheitsmoment rollt von einer schiefen Ebene mit 12° Neigung herab, welches ist seine Acceleration, wenn der Coefficient der Axenreibung = 0,15, und die Stärke der Radaxen 3 Zoll beträgt? Es ist $\frac{G_1 l^2}{G a^2} = \frac{2000}{3600 . 2^2} = \frac{5}{36} = 0{,}139$ und $\varphi \frac{r}{a} = 0{,}15 . \frac{1}{4.4} = 0{,}0094$, daher die gesuchte Beschleunigung $p = \frac{31{,}25\,(\sin.\ 12^0 - 0{,}0094 . \cos.\ 12^0)}{1 + 0{,}139}$ $= \frac{31{,}25\,(0{,}2079 - 0{,}0094 . 0{,}978)}{1{,}139} = \frac{31{,}25 . 0{,}1987}{1{,}139} = 5{,}452$ Fuß. 2) Mit welchen Accelerationen rollt eine massive Walze von einer schiefen Ebene herab, deren Fallwinkel 40° beträgt? Ist der Coefficient für die gleitende Reibung der Walze auf der Ebene = 0,24, so hat man $\varphi \left(1 + \frac{a^2}{l^2}\right) = 0{,}24\ (1 + 2) = 0{,}72$; nun ist aber $tang.\ 40^0 = 0{,}839$; es fällt daher $tang.\ \alpha$ größer als $\varphi \left(1 + \frac{a^2}{l^2}\right)$, und die Acceleration der rollenden Bewegung kleiner als die der progressiven Bewegung aus. Die letztere ist $p = (\sin.\ \alpha - \varphi \cos.\ \alpha)\, g = (0{,}6428 - 0{,}24 . 0{,}7660) . 31.25 = 0{,}459 . 31{,}25 = 14{,}34$ Fuß, die erstere aber nur $p_1 = 0{,}24 . 2 . 31{,}25 \cos.\ 40^0 = 15 . 0{,}766 = 11{,}49$ Fuß.

§. 260. Ein an einer horizontalen Axe hängender Körper ist im Gleichgewichte, so lange sein Schwerpunkt senkrecht unter der Axe liegt; bringt man aber den Schwerpunkt aus der die Axe enthaltenden Vertikalebene, und überläßt man den Körper sich selbst, so nimmt derselbe eine **schwingende Bewegung** (franz. und engl. oscillation), d. i. eine hin- und hergehende Bewegung im Kreise, an. Im Allgemeinen heißt Kreispendel.

Kreispendel. aber ein um eine horizontale Axe schwingender Körper ein Pendel (franz. pendule; engl. pendulum). Ist der schwingende Körper ein materieller Punkt, und besteht die Verbindung desselben mit der Umdrehungsaxe in einer gewichtslosen Linie, so hat man es mit einem einfachen oder mathematischen Pendel (franz. und engl. p. simple) zu thun; besteht aber das Pendel in einem ausgedehnten Körper oder aus mehreren Körpern, so heißt dasselbe ein zusammengesetztes, physisches oder materielles Pendel (franz. p. composé, engl. composed p.). Ein solches Pendel läßt sich als eine feste Verbindung von lauter einfachen, um eine gemeinschaftliche Axe schwingenden Pendeln ansehen. Das einfache Pendel ist nur ein eingebildetes, seine Annahme gewährt aber besondere Vortheile, weil es leicht ist, die Theorie der Bewegung des zusammengesetzten Pendels auf die des einfachen Pendels zurückzuführen.

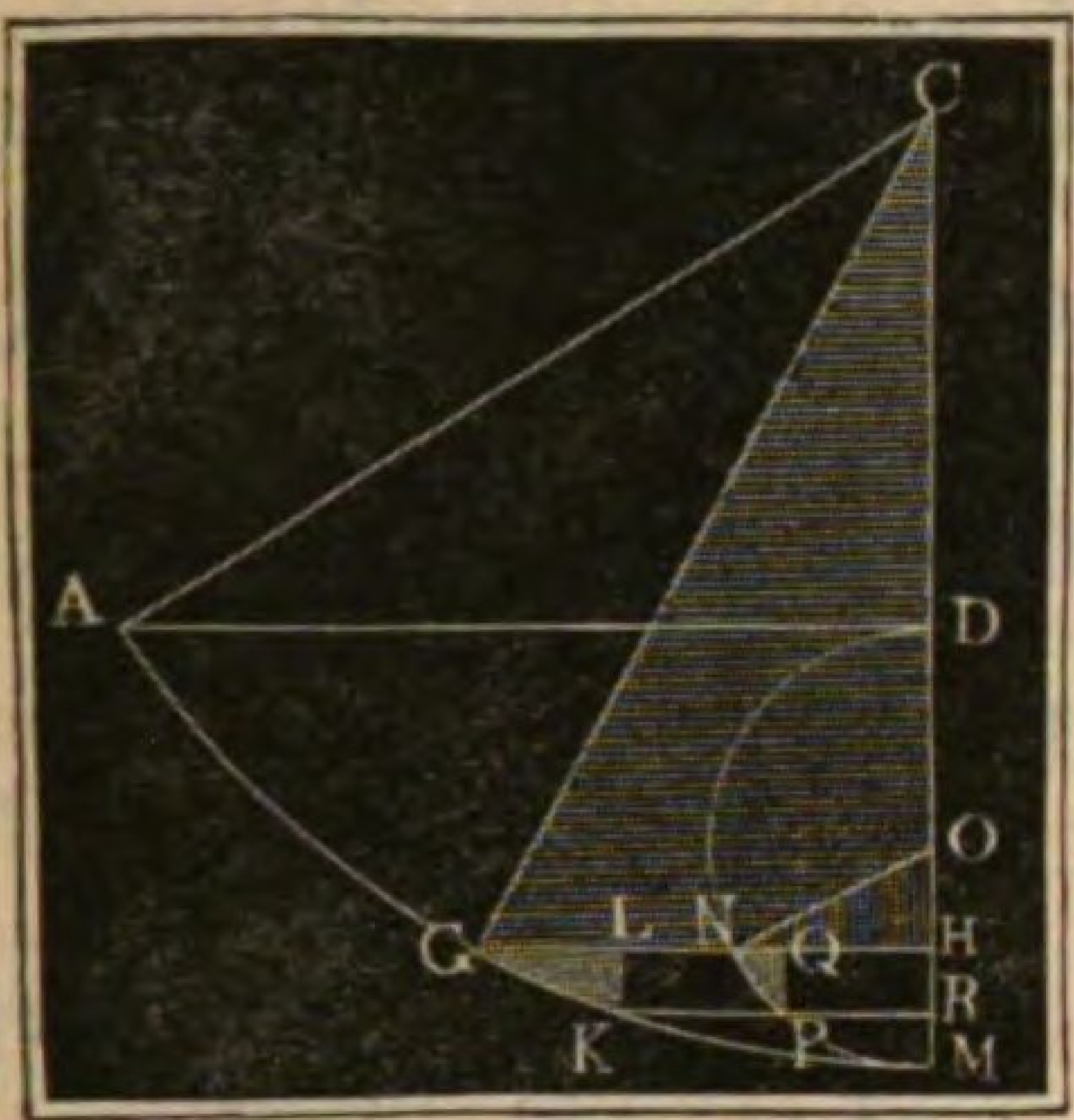
Fig. 368.



Wird das in C aufgehangene Pendel, Fig. 368, aus seiner vertikalen Lage CM in die Lage CA gebracht und nun sich selbst überlassen, so geht es vermöge seiner Schwere in einer beschleunigten Bewegung nach CM zurück, und es kommt dessen Masse im tiefsten Punkte M mit einer Geschwindigkeit v an, deren Höhe $\frac{v^2}{2g}$ der Fallhöhe DM gleich ist. In Folge dieser Geschwindigkeit durchläuft es nun auf der andern Seite den Bogen $MB = MA$, und steigt dabei wieder auf die Höhe DM. Von B aus fällt es von Neuem nach M und A zurück, und so geht es wiederholt im Kreisbogen AB hin und her. Wäre der Widerstand der Luft und die Axenreibung ganz beseitigt, so würde diese schwingende Bewegung des Pendels ohne Ende fortgehen, weil aber diese Hindernisse nie ganz wegzubringen sind, so werden die Schwingungsbögen mit der Zeit immer kleiner und kleiner, und es geht das Pendel endlich zur Ruhe über.

Die Bewegung des Pendels von A bis B nennt man einen Schwung oder Pendelschlag (franz. und engl. oscillation), den Bogen AB selbst aber den Schwingungsbogen (franz. und engl. amplitude); der den halben Schwingungsbogen messende Winkel, um welchen sich das Pendel zu beiden Seiten von der Lothlinie CM entfernt, heißt der Elongationswinkel, Ausschlagswinkel oder Ausschlag schlechtweg. Die Zeit, in welcher das Pendel eine Oscillation macht, heißt endlich Schwingungszeit oder Schwingungsdauer (franz. durée d'une oscillation; engl. time of oscillation).

Fig. 369.



§. 261. Wegen der häufigen Anwendung der Pendel im praktischen Leben, namentlich bei Uhren, ist es wichtig, die Schwingungszeiten derselben zu kennen; die Bestimmung derselben ist daher eine Hauptaufgabe der Mechanik. Setzen wir in der Absicht, diese Aufgabe zu lösen, die Pendellänge $AC = MC = r$, Fig. 369, und die einem ganzen Schwunge entsprechende Fall- oder Steighöhe $MD = h$. Nehmen wir nun an, daß das Pendel von A nach G gefallen sei, und setzen wir die dieser Bewegung entsprechende Fallhöhe $DH = x$, so können wir die erlangte Geschwindigkeit $v = \sqrt{2\,gx}$ und das Zeittheilchen, innerhalb dessen der Wegtheil GK durchlaufen wird, $\tau = \frac{GK}{v} = \frac{GK}{\sqrt{2gx}}$ setzen. Beschreiben wir nun aus der Mitte O von $MD = h$, und mit dem Halbmesser $OM = OD = \frac{1}{2}h$ einen Halbkreis MND, so können wir von diesem einen Bogentheil NP angeben, welcher mit GK gleiche Höhe $PQ = KL = RH$ hat und in einfacher Beziehung zu diesem Wegtheile GK steht. Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke GKL und CGH ist $\frac{GK}{KL} = \frac{CG}{GH}$, und wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke NPQ und ONH ist $\frac{NP}{PQ} = \frac{ON}{NH}$; dividiren wir daher diese beiden Proportionen durch einander und berücksichtigen wir, daß $KL = PQ$ ist, so erhalten wir das Verhältniß der genannten Bogentheile: $\frac{GK}{NP} = \frac{CG \,.\, NH}{GH \,.\, ON}$. Der Lehre vom Kreise, und insbesondere dem Theorem von der mittleren Proportionallinie zufolge ist aber $\overline{GH}^2 = MH\,(2CM - MH)$ und $\overline{NH}^2 = MH . DH$, es folgt daher $\frac{GK}{NP} = \frac{CG . \sqrt{DH}}{ON . \sqrt{2\,CM - MH}} = \frac{r\sqrt{x}}{\frac{1}{2}h\sqrt{2r - (h - x)}}$ und die Zeit zum Durchlaufen eines Wegelementes:

$$\tau = \frac{r\sqrt{x}}{\frac{1}{2}h\sqrt{2\,r - (h - x)}} \cdot \frac{NP}{\sqrt{2gx}} = \frac{2\,r}{h\,\sqrt{2g\,[2\,r - (h - x)]}} \,.\, NP$$

$$= \sqrt{\frac{r}{g}}\;\frac{NP}{h\sqrt{1 - \frac{h - x}{2\,r}}}.$$

Einfaches Pendel.

In den meisten Fällen der Anwendung gestattet man dem Pendel nur einen kleinen Ausschlag, und es ist deshalb $\frac{h}{2r}$, sowie $\frac{x}{2r}$, und also auch $\frac{h-x}{2r}$ eine so kleine Größe, daß wir sie, sowie ihre Potenzen, außer Acht lassen, und nun $\tau = \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{NP}{h}$ setzen können. Die Dauer eines halben Schwunges, oder die Zeit, innerhalb welcher das Pendel den Bogen AM zurücklegt, ist gleich der Summe aller den Elementen GK oder NP entsprechenden Zeittheilchen, oder, da $\frac{1}{h} \cdot \sqrt{\frac{r}{g}}$ ein constanter Factor ist, gleich $\frac{1}{h}\sqrt{\frac{r}{g}}$ mal Summe aller, den Halbkreis DNM bildenden Elemente, d. i. $= \frac{1}{h}\sqrt{\frac{r}{g}}$ mal Halbkreis $\left(\frac{\pi h}{2}\right)$ selbst, also

$$= \frac{1}{h}\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{\pi h}{2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Dieselbe Zeit braucht aber auch das Pendel beim Aufsteigen, weil hier die Geschwindigkeiten dieselben und nur in der Richtung entgegengesetzt vorkommen, und deshalb ist denn eine ganze Schwingungsdauer doppelt so groß,

d. i. $t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$.

§. 262*). Um die Schwingungsdauer mit größerer Genauigkeit zu bestimmen, was bei größeren Schwingungswinkeln nothwendig ist, verwandeln wir den Ausdruck:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{h-x}{2r}}} = \left(1-\frac{h-x}{2r}\right)^{-\frac{1}{2}} \text{ in die Reihe}$$

$$1 + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{h-x}{2r} + \tfrac{3}{8} \cdot \left(\frac{h-x}{2r}\right)^2 + \cdots,$$

so daß wir die Zeit für ein Wegelement

$$\tau = dt = \left[1 + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{h-x}{2r} + \tfrac{3}{8} \cdot \left(\frac{h-x}{2r}\right)^2 + \ldots\right]\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{NP}{h} \text{ erhalten.}$$

Setzen wir den Centriwinkel $DON = \varphi^0$, also den Bogen $DN = DO \cdot \varphi = \frac{h\varphi}{2}$, so erhalten wir das Bogenelement $NP = \frac{1}{2} h\, d\varphi$ und die Höhe

$$MH = h - x = MO - HO = \frac{h}{2} + \frac{h}{2} \cos.\varphi = (1 + \cos.\varphi)\, \frac{h}{2};$$

daher das Zeitelement

$$dt = \left[1 + \tfrac{1}{2}.(1+cos.\varphi)\frac{h}{4r} + \tfrac{3}{8}(1+cos.\varphi)^2\left(\frac{h}{4r}\right)^2 + ..\right]\sqrt{\frac{r}{g}}.\frac{d\varphi}{2}.$$ Einfaches Pendel.

Nun ist aber

$$(1+cos.\varphi)^2 = 1 + 2\,cos.\varphi + (cos.\varphi)^2 = 1 + 2\,cos.\varphi + \frac{1+cos.2\varphi}{2}$$

$$= \tfrac{3}{2} + 2\,cos.\varphi + \tfrac{1}{2}\,cos.2\varphi, \text{ und}$$

$$\int d\varphi = \varphi,$$

$$\int cos.\varphi\, d\varphi = sin.\varphi, \text{ und}$$

$$\int cos.2\varphi\, d\varphi = \tfrac{1}{2}\int cos.2\varphi\, d(2\varphi) = \tfrac{1}{2} sin.2\varphi,$$

(s. analytische Hülfslehren, Art. 20), daher folgt die Zeit zum Durchlaufen des Bogens AK:

$$t = \int dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}\int\left[1+\tfrac{1}{2}(1+cos.\varphi)\frac{h}{4r}+\tfrac{3}{8}(1+cos.\varphi)^2\left(\frac{h}{4r}\right)^2+..\right]d\varphi$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}\left[\varphi+\tfrac{1}{2}(\varphi+sin.\varphi)\frac{h}{4r}+\tfrac{3}{8}(\tfrac{3}{2}\varphi+2sin.\varphi+\tfrac{1}{4}sin.2\varphi)\left(\frac{h}{4r}\right)^2+..\right].$$

Die Zeit zum Durchlaufen des Bogens AM ist, da hier $\varphi = \pi$ und $sin.\,\pi = 0$ wird:

$$t_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}.\pi\left[1 + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{h}{4r} + \tfrac{3}{8}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\left(\frac{h}{4r}\right)^2 + ..\right]$$

$$= \left[1 + (\tfrac{1}{2})^2\cdot\frac{h}{2r} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\cdot\left(\frac{h}{2r}\right)^2 + ..\right]\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Da die Geschwindigkeit beim Steigen auf der andern Seite genau so abnimmt, wie sie beim Durchfallen der Bogenhälfte AM wächst, so ist die Zeit zum Durchlaufen des ganzen Bogens, oder die sogenannte Schwingungsdauer:

$$t = 2t_1 = \left[1 + (\tfrac{1}{2})^2\frac{h}{2r} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{h}{2r}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{h}{2r}\right)^3 + ..\right]\pi\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Schwingt das Pendel im Halbkreise, so hat man $h = r$, und daher die Schwingungszeit:

$$t = \left(1 + \tfrac{1}{8} + \frac{9}{256} + \frac{225}{18432} + ..\right)\pi\sqrt{\frac{r}{g}} = 1{,}180\,\pi\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

In den meisten Fällen der Anwendung ist der Schwingungsbogen viel kleiner als der Halbkreis, und die Formel

$$t = \left(1 + \frac{h}{8r}\right)\pi\sqrt{\frac{h}{g}} \text{ hinreichend genau.}$$

Aus dem Elongationswinkel α folgt $cos.\,\alpha = \frac{r-h}{r} = 1 - \frac{h}{r}$, also $\frac{h}{r} = 1 - cos.\alpha$, und daher $\frac{h}{8r} = \tfrac{1}{4}.\frac{1-cos.\alpha}{2} = \tfrac{1}{4}\left(sin.\frac{\alpha}{2}\right)^2$;

Einfaches Pendel.

es läßt sich folglich hiernach die einem gegebenen Elongationswinkel entsprechende Correction der Schwingungszeit finden. Ist z. B. dieser Winkel $= 15^0$, so hat man $\frac{h}{8r} = \frac{1}{4}\left(sin. \frac{15^0}{2}\right)^2 = 0{,}00426$, dagegen für $\alpha = 5^0$, $\frac{h}{8r} = 0{,}00047$; bei dem letzten Elongationswinkel ist also die Schwingungsdauer $t = 1{,}00047 \,.\, \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$.

Man kann also bei einem Ausschlag unter 5^0 ziemlich genau die Schwingungsdauer $t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{r} = 0{,}562 \sqrt{r}$ setzen.

§. 263. Da in der Formel $t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$ der Ausschlagswinkel gar nicht vorkommt, so folgt auch, daß die Dauer kleiner Pendelschwingungen gar nicht von diesem Winkel abhängt, daß also verschiedene, jedoch nicht weit ausschlagende gleich lange Pendel isochron schwingen oder gleiche Schwingungszeiten haben. Ein Pendel mit 4 Grad Ausschlag hat also (fast) dieselbe Schwingungsdauer, als ein Pendel mit 1 Grad Ausschlag.

Vergleichen wir die Schwingungsdauer t mit der Zeit des freien Falles, so stoßen wir auf Folgendes. Die Zeit zum freien Fallen von der Höhe r ist $t_1 = \sqrt{\frac{2r}{g}} = \sqrt{2}.\sqrt{\frac{r}{g}}$, daher ist $t : t_1 = \pi : \sqrt{2}$; die Zeit eines Pendelschwunges verhält sich also zur Zeit, in welcher ein Körper von der Pendellänge frei herabfällt, wie die Ludolph'sche Zahl π zur Quadratwurzel aus 2. Die Zeit zum Durchfallen von $2r$ ist

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 2r}{g}} = 2 \sqrt{\frac{r}{g}},$$

daher verhält sich auch die **Schwingungsdauer zur Zeit des Fallens von der doppelten Pendellänge**, wie π zu 2.

Setzen wir die den Pendellängen r und r_1 entsprechenden Schwingungszeiten t und t_1, so erhalten wir $t : t_1 = \sqrt{r} : \sqrt{r_1}$; es verhalten sich also bei einer und derselben Beschleunigung der Schwere **die Schwingungszeiten wie die Quadratwurzeln aus den Pendellängen.** Ist dagegen n die Zahl der Schwingungen, welche das eine Pendel in einer gewissen Zeit, z. B. in der Minute, macht, und n_1 die Zahl, welche in derselben Zeit vom andern Pendel gemacht werden, so hat man $t : t_1 = \frac{1}{n} : \frac{1}{n_1}$, daher umgekehrt $n : n_1 = \sqrt{r_1} : \sqrt{r}$, d. h. **die Schwingungszahlen verhalten sich umgekehrt, wie**

die Quadratwurzeln aus den Pendellängen. Das 4mal so lange Pendel giebt also die halbe Schwingungszahl. Einfaches Pendel.

Ein Pendel heißt ein Secundenpendel (franz. p. à seconde; engl. seconds pend.), wenn seine Schwingungsdauer eine Secunde beträgt. Setzen wir in der Formel $t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$, $t = 1$, so bekommen wir die Länge des Secundenpendels $r = \frac{g}{\pi^2}$, für das preußische Fußmaaß $r = 3{,}167$ Fuß $= 38$ Zoll; für das Metermaaß aber $r = 0{,}9938$ Meter.

Aus der Formel $t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$ folgt durch Umkehrung $g = \left(\frac{\pi}{t}\right)^2 r$; es läßt sich also hiernach aus der Länge r eines Pendels und aus der Schwingungsdauer t desselben die Beschleunigung der Schwere finden. Diese Methode ist sogar einfacher und sicherer, als die Anwendung der Atwood'schen Fallmaschine.

Anmerkung. Durch Pendelbeobachtungen hat man auch die Abnahme der Schwerkraft von den Polen nach dem Aequator zu nachgewiesen und deren Größe bestimmt. Diese Abnahme hat ihren Grund in dem Einflusse der Centrifugalkraft, welche aus der täglichen Umdrehung der Erde um ihre eigene Axe entspringt, und in der Zunahme der Erdhalbmesser von den Polen nach dem Aequator zu. Die Centrifugalkraft vermindert z. B. im Aequator die Schwere um $^1/_{290}$ ihres Werthes (§. 246), während sie unter den Polen selbst Null ist. Ist β die geographische Breite des Beobachtungsortes, so hat man, Pendelbeobachtungen zufolge, an diesem Orte die Acceleration der Schwere

$$g = 9{,}8056\,(1 - 0{,}00259\, cos.\, 2\beta)$$

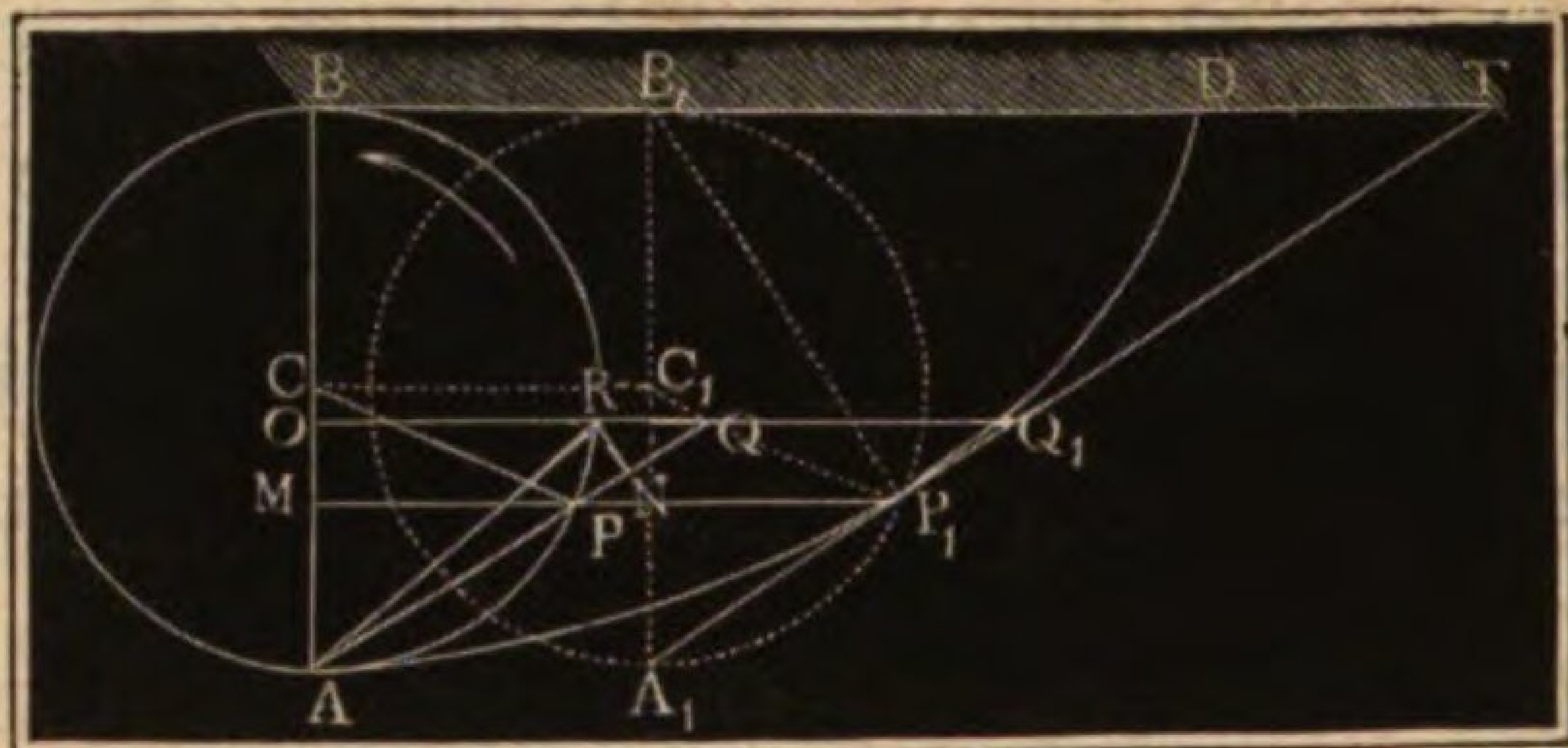
in Metern, also unter dem Aequator, wo $\beta = 0$, also $cos.\, 2\beta = 1$ ist, $g = 9{,}8056\,(1 - 0{,}00259) = 9{,}780$ Meter, und unter den Polen, wo $\beta = 90^0$, also $cos.\, 2\beta = cos.\, 180^0 = -1$ ist, $g = 9{,}8056 \,.\, 1{,}00259 = 9{,}831$ Meter. Uebrigens ist g auf Bergen und in Gruben kleiner, als im Niveau des Meeres.

§. 264. Man kann auf unendlich mannichfaltige Weise einen Körper in Schwingungen oder hin- und hergehende Bewegungen versetzen, nennt wohl auch jeden in einem dieser Bewegungszustände befindlichen Körper ein Pendel, und unterscheidet hiernach verschiedene Arten von Pendeln, wie z. B. das Kreispendel, welches wir in Vorstehendem betrachtet haben, ferner das Cycloidenpendel, wo der Körper in Folge seiner Schwere in einem Cycloidenbogen hin- und herschwingt, ferner das Torsionspendel, wo der Körper in Folge der Torsion eines Fadens oder Drahtes schwingt, u. s. w. Hier möge nur noch vom Cycloidenpendel die Rede sein. Cycloide.

Die Cycloide (fr. cycloide, engl. cycloid) AD, Fig. 370 (a. f. S.), ist eine krumme Linie, welche von jedem Punkte A eines Kreises APB beschrieben wird, der sich auf einer geraden Linie BD wälzt. Hat sich dieser Erzeugungskreis um $BB_1 = CC_1$ fortgewälzt, ist er also in die

Cycloide. Lage A_1B_1 gekommen, so hat er sich auch um den Bogen $AP = A_1P_1 = BB_1 = PP_1$ gedreht, es ist folglich die irgend einer Abscisse AM

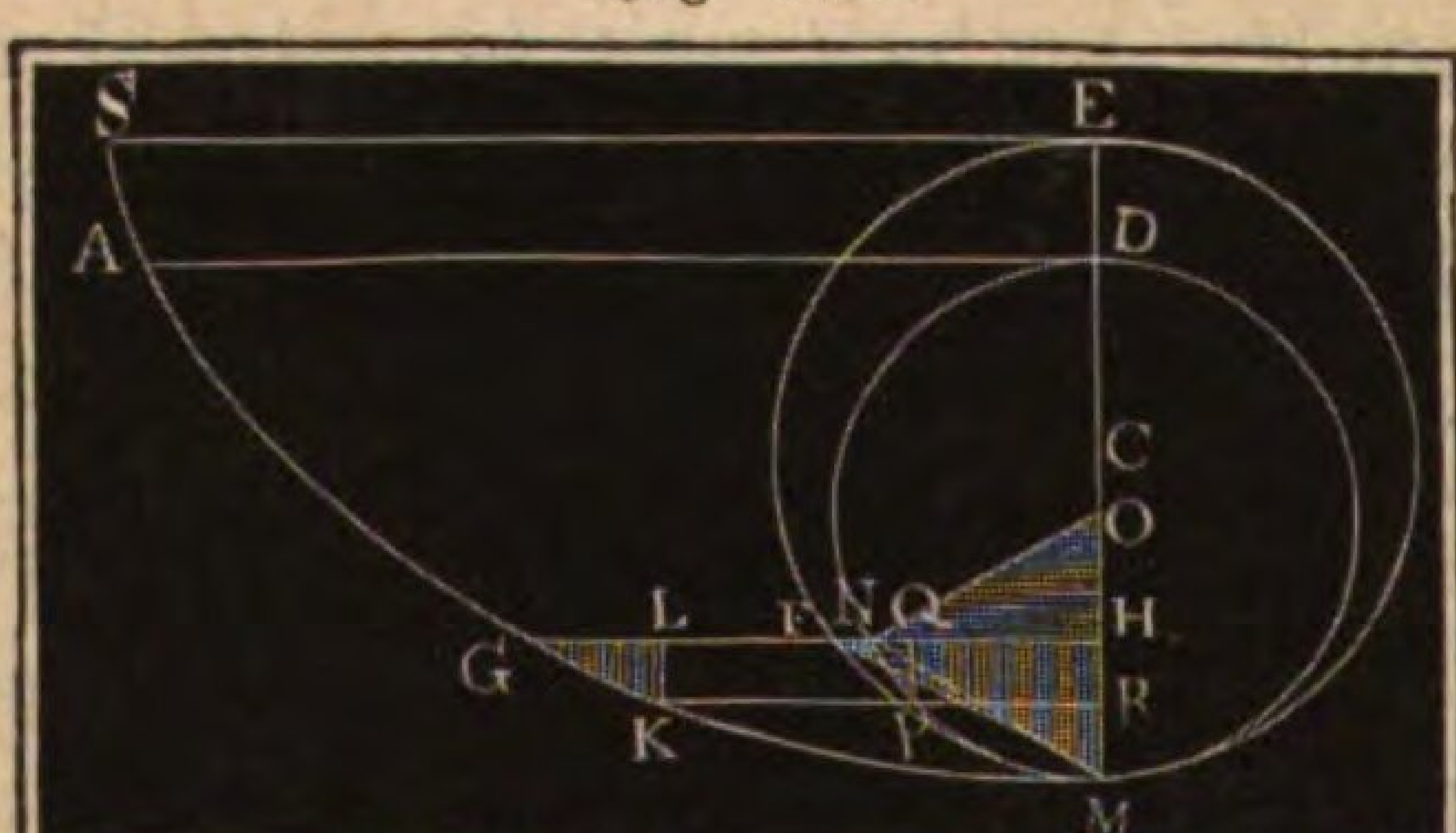
Fig. 370.



entsprechende Ordinate MP_1 = Ordinate MP des Kreises plus Drehungsbogen AP. Bei diesem Wälzen dreht sich der Erzeugungskreis um den jedesmaligen Berührungspunkt in der Grundlinie, steht er also in A_1B_1, so dreht er sich um B_1 und beschreibt dadurch das Bogenelement P_1Q_1 der Cycloide; es ist folglich die Sehne B_1P_1 die Richtung der Normale, und die Sehne A_1P_1 die der Tangente im Punkte P_1 der Cycloide. Die bis zur Ordinate OQ_1 reichende Verlängerung PQ der Sehne AP ist auch gleich dem Cycloidenelemente P_1Q_1; da ferner der Weg PR des Drehens gleich ist dem Wege RQ des Fortschreitens, so ist PQ Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreieckes PRQ und gleich der doppelten Linie PN, welche das Perpendikel RN abschneidet; endlich ist aber PN die Differenz von zwei benachbarten Sehnen AR und AP, und folglich das Cycloidenelement P_1Q_1 = der doppelten Sehnendifferenz $(AR - AP)$. Da die stetig auf einander folgenden Bogenelemente zusammen einen ganzen Bogen AP_1, und ebenso die sämmtlichen Sehnendifferenzen die ganze Sehne AP ausmachen, so ist hiernach die Länge des Cycloidenbogens AP_1 gleich dem Doppelten der ihm zugehörigen Kreissehne AP. Der halben Cycloide AP_1D entspricht der Durchmesser als Kreissehne; es ist daher die Länge der halben Cycloide gleich dem doppelten Durchmesser des Erzeugungskreises.

Cycloidenpendel. §. 265. Aus den im Vorstehenden entdeckten Eigenschaften der Cycloide läßt sich nun die Theorie des Cycloidenpendels, oder die Formel für die Zeit der Schwingung eines Körpers in einem Cycloidenbogen leicht entwickeln. Es sei AKM, Fig. 371, die Hälfte des Cycloidenbogens, in welchem ein Körper fällt und

Fig 371.



steigt oder oscillirt, und ME sei der Erzeugungskreis, also $CE = CM = r$ der Halbmesser desselben. Hat der Körper den Bogen AG durchlaufen, ist er also von der Höhe $DH = x$ herabgefallen (vergl. §. 261), so hat er die Geschwindigkeit $v = \sqrt{2\,g\,x}$ erlangt, mit welcher er das Bogenelement GK in der Zeit Cycloidenpendel.

$$\tau = \frac{GK}{v} = \frac{GK}{\sqrt{2gx}}$$

durchläuft. Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke GLK und FHM ist aber $\frac{GK}{KL} = \frac{FM}{MH}$, oder, da $\overline{FM}^2 = MH \,.\, ME$,

$\frac{GK}{KL} = \frac{\sqrt{MH\,.\,ME}}{MH} = \frac{\sqrt{ME}}{\sqrt{MH}}$; wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke NPQ und ONH ist $\frac{NP}{PQ} = \frac{ON}{NH}$, oder, da $\overline{NH}^2 = MH \,.\, DH$,

$\frac{NP}{PQ} = \frac{ON}{\sqrt{MH\,.\,DH}}$. Nun ist $KL = PQ$, daher folgt durch Division

$$\frac{GK}{NP} = \frac{\sqrt{ME}}{\sqrt{MH}} \cdot \frac{\sqrt{MH\,.\,DH}}{ON} = \frac{\sqrt{ME\,.\,DH}}{ON},$$

oder, da ON die halbe Fallhöhe $= \frac{h}{2}$, $ME = 2r$ und $DH = x$ ist,

$$\frac{GK}{NP} = \frac{\sqrt{2rx}}{\frac{1}{2}h} = \frac{2\sqrt{2rx}}{h}.$$

Setzt man nun $GK = \frac{2\sqrt{2rx}}{h} \,.\, NP$ in die Formel $\tau = \frac{GK}{\sqrt{2gx}}$, so erhält man:

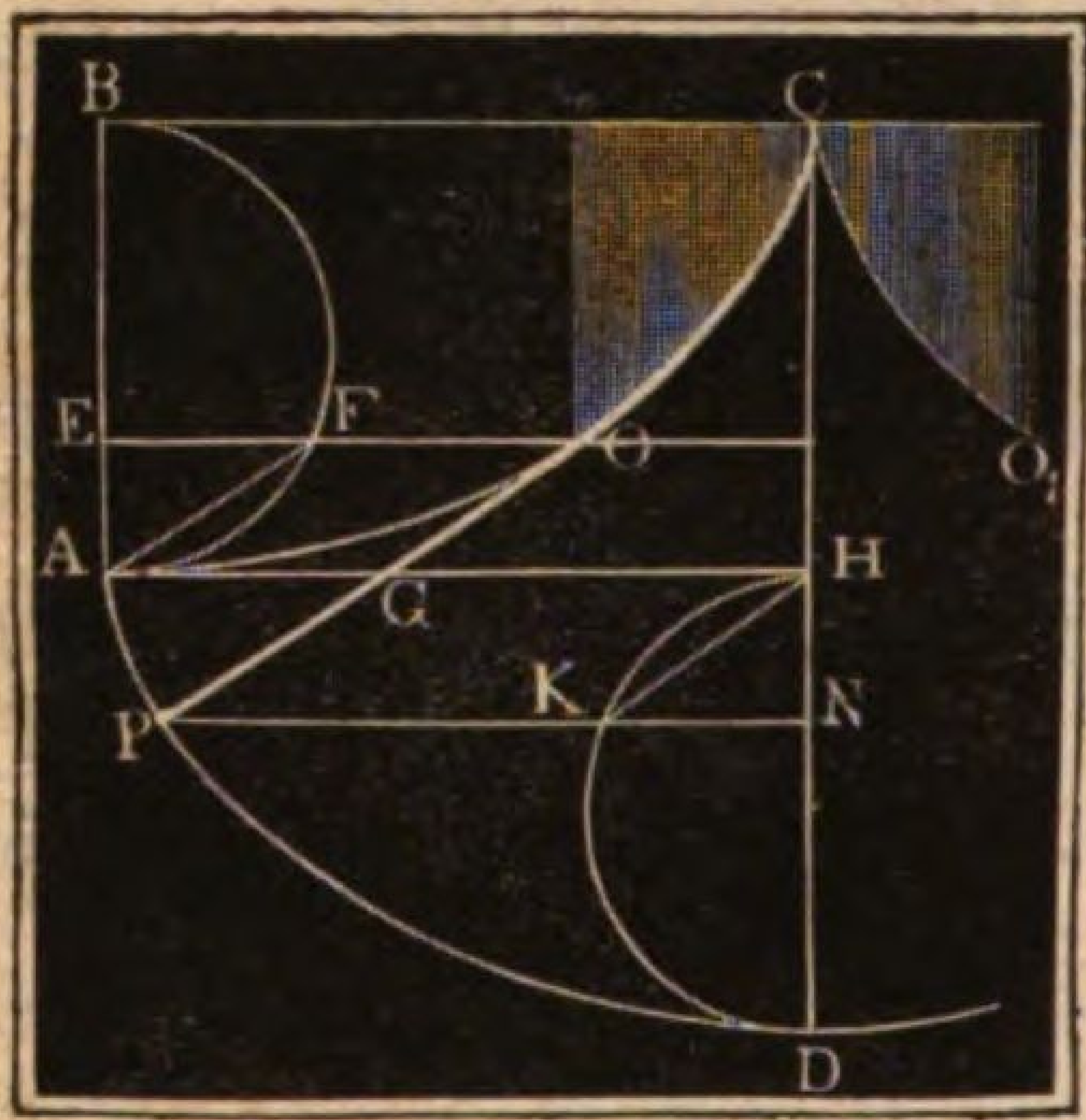
$$\tau = \frac{2\,\sqrt{2rx}}{\sqrt{2gx}\,.\,h}\,.\,NP = \frac{2}{h}\sqrt{\frac{r}{g}} \,.\, NP.$$

Die Zeit des Fallens von A bis M ist nun die Summe aller Werthe von τ, welche man erhält, wenn man für NP nach und nach alle Theile des Halbkreises DNM einführt, also $= \frac{2}{h}\sqrt{\frac{r}{g}}$ mal Halbkreis DNM $\left(\frac{\pi}{2}\,h\right)$ setzt. Auf diese Weise erhält man die Zeit zum Durchfallen des Bogens AM, $t_1 = \frac{\pi}{2} h \,.\, \frac{2}{h}\sqrt{\frac{r}{g}} = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}$, und da die Zeit des Steigens im Bogen MB ebenso groß ist, die Schwingungszeit oder Zeit zum Durchlaufen des ganzen Bogens AMB: $t = 2t_1 = 2\,\pi\sqrt{\frac{r}{g}} = \pi\sqrt{\frac{4r}{g}}$.

Da diese Größe ganz unabhängig ist von der Bogenlänge, so folgt, daß mathematisch genau die Schwingungszeiten für alle Bögen einer und der-

Cycloidenpendel. selben Cycloide gleich sind, das Cycloidenpendel also vollkommen isochron schwingt. Vergleichen wir diese Formel mit der Formel für die Schwingungsdauer eines Kreispendels, so folgt, daß die Schwingungszeiten für beide Pendelarten einander gleich sind, wenn die Länge des Kreispendels gleich ist dem vierfachen Halbmesser von dem Erzeugungskreise des Cycloidenpendels.

Fig. 372.



Anmerkung. Um einen an einem biegsamen Faden hängenden Körper in einem Cycloidenbogen schwingen lassen zu können und dadurch ein Cycloidenpendel herzustellen, hängt man denselben zwischen zwei Cycloidenbögen CO und CO_1, Fig 372, auf, so daß sich der Faden bei jedem Ausschlage von dem einen Bogen ab- und auf den andern aufwickelt. Daß bei diesem Ab- und Aufwickeln des Fadens COP der Endpunkt P desselben eine der gegebenen Cycloide gleiche Curve beschreibt, daß also die Evolvente der Cycloide eine gleiche Cycloide in umgekehrter Lage ist, läßt sich einfach so darthun. So wie die Länge der halben Cycloide $COA = CD = 2AB$ ist, ebenso hat man den Bogen $OA =$ der abgewickelten Geraden OP; aber Bogen OA ist $= 2$mal Sehne $AF = 2GO$, daher auch $PG = GO = AF$ und $HN = AE$. Beschreibt man nun über DH einen Halbkreis DKH, und zieht man die Ordinate NP, so hat man $KH = PG$, und daher auch $PK = GH = AH - AG = AH - FO$ $=$ Bog. AFB — Bog. $AF =$ Bog. $BF =$ Bog. DK, und endlich die Ordinate $NP =$ Kreisordinate NK plus entsprechender Bogen DK, also NP Ordinate einer Cycloide und DPA die dem Erzeugungskreise DKH entsprechende Cycloide.

Ueber die Anwendung des Cycloidenpendels bei Uhren siehe: Jahrbücher des polytechn. Institutes in Wien. Band 20, Art. II.

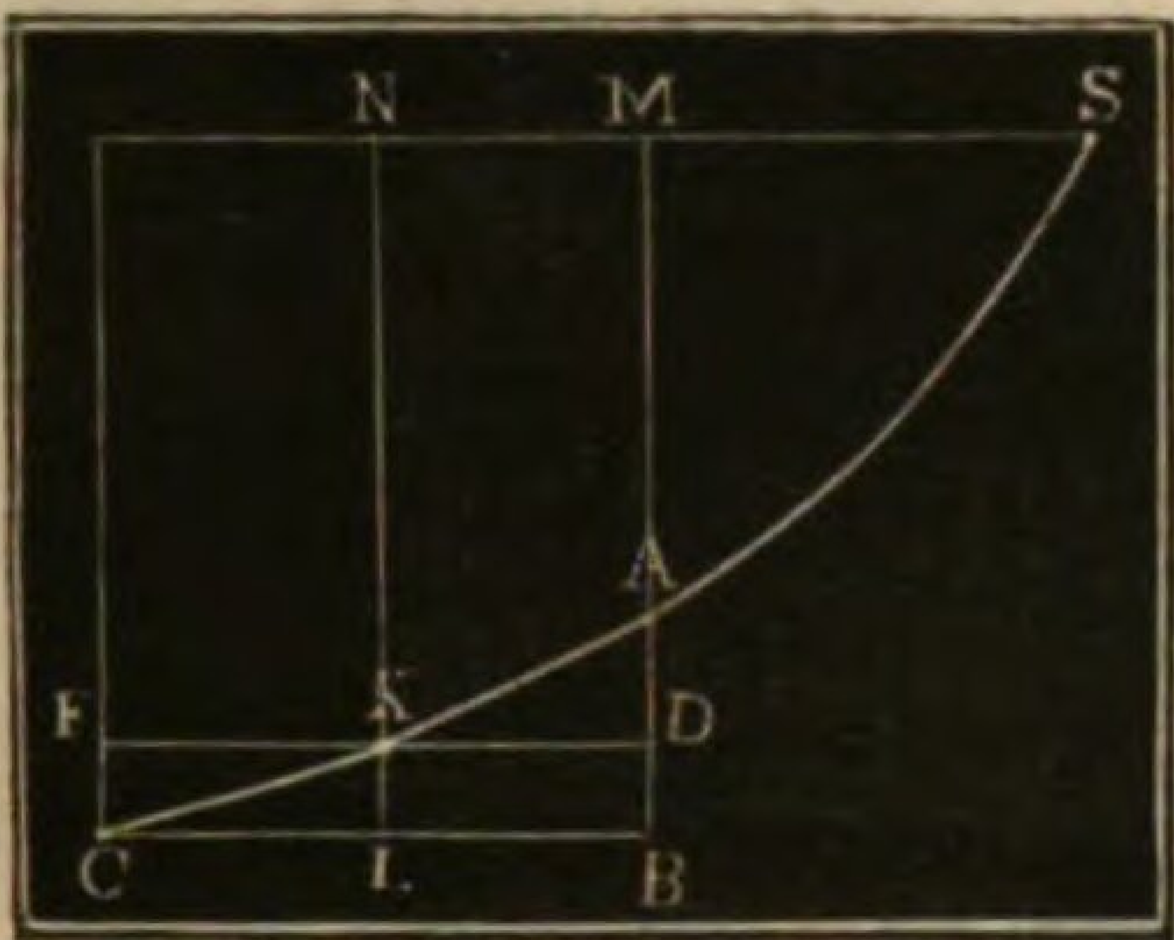
§. 266 *). Es läßt sich mittels des höhern Calcüls nachweisen, daß die Cycloide außer dieser Eigenschaft des Isochronismus oder Tautochronismus auch noch die des Brachystochronismus besitzt, daß sie nämlich diejenige Linie zwischen zwei gegebenen Punkten ist in welcher ein Körper in der kürzesten Zeit von dem einen Punkte nach dem andern herabfällt.

Der Beweis hierzu läßt sich, nach Jacob Bernoulli, auf folgende Weise führen.

Es sei die relative Lage zweier Punkte A und B, Fig. 373, durch den vertikalen Abstand $AB = a$ und den horizontalen Abstand $BC = b$ und die einer horizontalen Linie DE durch den vertikalen Abstand $AD = h$ gegeben; man sucht den Punkt K, in welchem ein von A nach C fallender Körper die Linie DE durchschneiden muß, um in der

kürzesten Zeit von A nach C zu gelangen. Kommt der Körper in A mit der Geschwindigkeit v an, so ist die Geschwindigkeit in K, Cycloidenpendel.

Fig. 373.



$$v_1 = \sqrt{v^2 + 2gh};$$

setzen wir nun voraus, daß die Punkte A, K und C einander unendlich nahe liegen, oder daß a, b und h sehr klein seien gegen v, so können wir auch annehmen, daß AK gleichförmig mit der Geschwindigkeit v, und KC gleichförmig mit der Geschwindigkeit w durchlaufen werde, daß also die Zeit zum Durchfallen des Weges AKC:

$$t = \frac{AK}{v} + \frac{KC}{v_1} \text{ sei.}$$

Setzen wir $DK = z$, so haben wir $AK = \sqrt{h^2 + z^2}$ und $KC = \sqrt{(a-h)^2 + (b-z)^2}$, und daher

$$t = \frac{\sqrt{h^2 + z^2}}{v} + \frac{\sqrt{(a-h)^2 + (b-z)^2}}{\sqrt{v^2 + 2gh}}.$$

Diese Zeit wird nun ein Minimum, wenn wir ihr erstes Differentialverhältniß, d. i.

$$\frac{dt}{dz} = \frac{z}{v\sqrt{h^2+z^2}} - \frac{b-z}{\sqrt{v^2+2gh}\sqrt{(a-h)^2+(b-z)^2}} = \text{Null}$$

setzen.

Nun ist aber $\frac{z}{\sqrt{h^2+z^2}} = \frac{KD}{AK} = cos.\, AKD = cos.\, \varphi$ und

$$\frac{b-z}{\sqrt{(a-h)^2+(b-z)^2}} = \frac{CL}{CK} = cos.\, KCB = cos.\, \varphi_1,$$

wofern wir die Neigungswinkel der Wege AK und KC gegen den Horizont mit φ und φ_1 bezeichnen; daher erhalten wir als Bedingungsgleichung

$$\frac{cos.\, \varphi}{v} = \frac{cos.\, \varphi_1}{v_1}.$$

Setzen wir die den Geschwindigkeiten v und v_1 entsprechenden Fallhöhen MA und $NK = y$ und y_1, also $v = \sqrt{2gy}$ und $v_1 = \sqrt{2gy_1}$, so geht unsere Gleichung in folgende

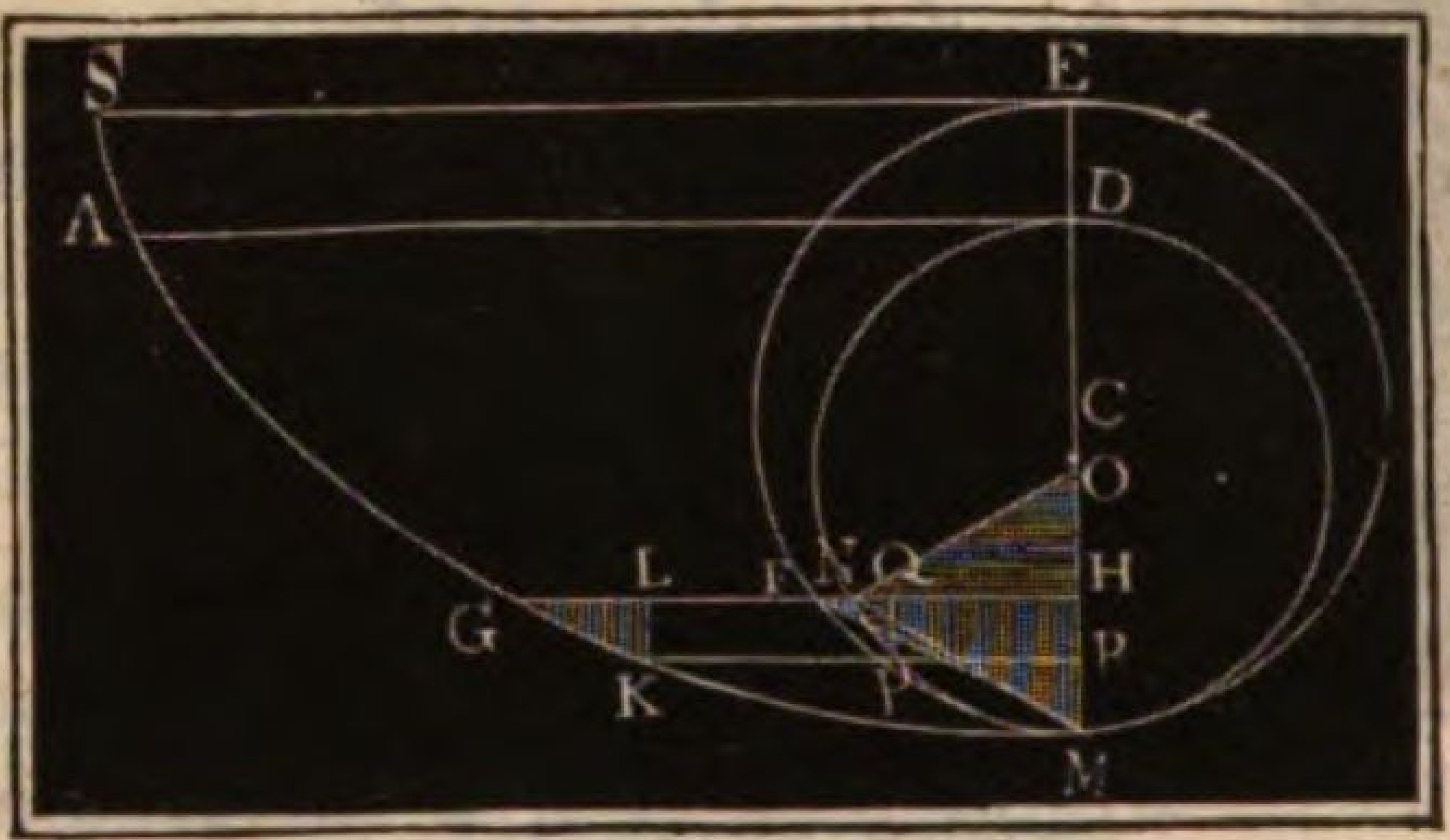
$$\frac{cos.\, \varphi}{\sqrt{y}} = \frac{cos.\, \varphi_1}{\sqrt{y_1}}$$

über, und wenden wir nun unsern Fall auf das Fallen in einer krummlinigen Bahn $SAKC$ an, so folgt hiernach, daß für jede Stelle in dieser

Cycloiden-pendel.

der Quotient $\frac{cos.\varphi}{\sqrt{y}}$ eine constante Zahl, etwa $= \frac{1}{\sqrt{2r}}$ ist.

Fig. 374.



Diese Eigenschaft entspricht aber einer Cycloide *SGM*, Fig. 374, denn es ist für ein Wegelement *GK*,

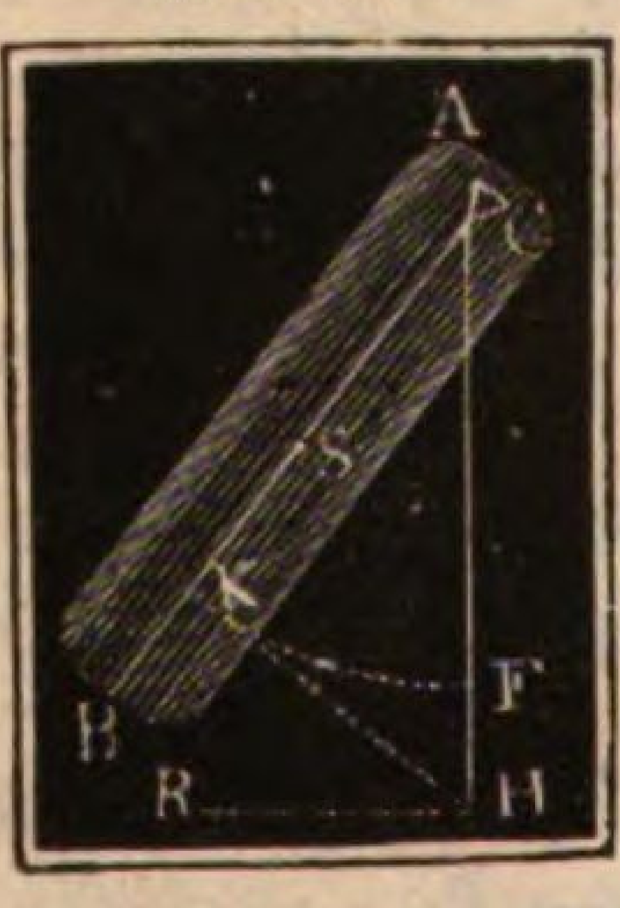
$$cos.\varphi = \frac{GL}{GK} = \frac{FH}{FM}$$
$$= \frac{\sqrt{MH.EH}}{\sqrt{MH.EM}}$$
$$= \sqrt{\frac{EH}{EM}} = \sqrt{\frac{y}{2r}},$$

und daher $\frac{cos.\varphi}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2r}}$, wobei r den Halbmesser $CM = CE$ des Erzeugungskreises bezeichnet.

Es ist also ein **Cycloidenbogen** *SG*, **in welchem ein Körper in der kürzesten Zeit von einem Punkte** *S* **nach einem anderen** *G* **herabfällt**.

Zusammengesetztes Pendel.

Fig. 375



§. 267. Um die Schwingungszeit eines zusammengesetzten Pendels oder irgend eines um eine horizontale Axe *C* schwingenden Körpers *AB*, Fig. 375, zu finden, suchen wir zunächst den Mittelpunkt des **Schwunges** oder **Schwingungspunkt** (franz. centre d'oscillation; engl. center of oscillation), d. i. denjenigen Punkt *K* des Körpers auf, welcher, wenn er für sich allein um *C* schwingt oder ein mathematisches Pendel ausmacht, dieselbe Schwingungsdauer hat, als der ganze Körper. Man sieht leicht ein, daß es dieser Erklärung zufolge mehrere Schwingungspunkte in einem Körper giebt; gewöhnlich meint man aber nur denjenigen von ihnen, welcher mit dem Schwerpunkte in einem und demselben Perpendikel zur Umdrehungsaxe liegt.

Aus dem veränderlichen Ausschlagswinkel $KCF = \varphi$ folgt die Beschleunigung des isolirten Punktes *K*, $= g\,sin.\varphi$, weil man sich vorstellen kann, daß derselbe von einer schiefen Ebene mit der Neigung $KHR = KCF = \varphi$ herabgleitet. Ist aber Ma^2 das Trägheitsmoment des ganzen Körpers oder der Körperverbindung *AB*, *Ms* dessen statisches Moment, d. i. das Product aus Masse und aus dem Abstande $CS = s$ ihres Schwerpunktes *S* von der Umdrehungsaxe *C*, und r die Entfernung *CK*

des Schwingungspunktes K von der Umdrehungsaxe oder die Länge des einfachen Pendels, welches mit dem materiellen Pendel AB isochron schwingt, so hat man die auf K reducirte Masse $= \frac{Ma^2}{r^2}$, und die dahin reducirte Umdrehungskraft $= \frac{s}{r}\, M\, g\, sin.\, \varphi$; folglich die Beschleunigung $p = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}} = \frac{s}{r} M g\, sin.\, \varphi : \frac{Ma^2}{r^2} = \frac{M s r}{Ma^2} \cdot g\, sin.\, \varphi$. Damit dieses Pendel mit dem mathematischen einerlei Schwingungsdauer habe, ist nöthig, daß beide an jeder Stelle ihrer Bewegung einerlei Beschleunigung besitzen, daß also $\frac{M s r}{M a^2} \cdot g\, sin.\, \varphi = g\, sin.\, \varphi$ sei. Diese Gleichung giebt nun $r = \frac{Ma^2}{Ms} = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{Statisches Moment}}$. Man findet also die Entfernung des Schwingungspunktes vom Drehungspunkte, oder die Länge des einfachen Pendels, welches mit dem zusammengesetzten gleiche Schwingungsdauer hat, wenn man das Trägheitsmoment des zusammengesetzten Pendels durch sein statisches Moment dividirt. Zusammengesetztes Pendel.

Führt man diesen Werth von r in die Formel $t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$, so erhält man für die Schwingungsdauer eines zusammengesetzten Pendels die Formel $t = \pi \sqrt{\frac{Ma^2}{Mgs}} = \pi \sqrt{\frac{a^2}{gs}}$, oder genauer, $t = \left(1 + \frac{h}{8r}\right) \pi \sqrt{\frac{a^2}{gs}}$. Umgekehrt läßt sich aus der Schwingungsdauer eines aufgehängten Körpers sein Trägheitsmoment finden, indem man setzt:

$$Ma^2 = \left(\frac{t}{\pi}\right)^2 . Mgs \text{ oder } a^2 = \left(\frac{t}{\pi}\right)^2 gs.$$

Fig. 376.



Beispiele. 1) Für eine gleichförmig dichte prismatische Stange AB, Fig. 376, deren Drehpunkt C um $CA = l_1$ und $CB = l_2$ von den Enden A und B absteht, hat man das Trägheitsmoment nach §. 233: $Ma^2 = \frac{1}{3} F\, (l_1^3 + l_2^3)$, und das statische Moment $Ms = \frac{1}{2} F\, (l_1^2 - l_2^2)$, es ist daher die Länge des mathematischen Pendels, welches mit dieser Stange isochron schwingt, $r = \frac{Ma^2}{Ms} = \frac{2}{3} \cdot \frac{l_1^3 + l_2^3}{l_1^2 - l_2^2} = \frac{l^2 + 3d^2}{6d}$, wenn l die Summe $l_1 + l_2$, und d die Differenz $l_1 - l_2$ bezeichnet. Soll diese Stange halbe Secunden schlagen, so hat man $r = \frac{1}{4} \cdot \frac{g}{\pi^2} = \frac{1}{4} \cdot 38 = 9{,}5$ Zoll, beträgt aber die ganze Länge l der Stange 12 Zoll, so ist zu setzen: $9{,}5 = \frac{144 + 3d^2}{6d}$ oder

Zusammengesetztes Pendel.

Fig. 377.



$d^2 - 19d = -48$, es folgt daher $d = \frac{19 - \sqrt{169}}{2} = 3$, und hieraus $l_1 = \frac{l+d}{2} = {}^{15}/_2 = 7^1/_2$ Zoll, und $l_2 = \frac{l-d}{2} = {}^9/_2 = 4^1/_2$ Zoll. 2) Für ein Pendel mit kugelförmiger Linse AB, Fig. 377, ist, wenn G das Gewicht und l die Länge CA der Stange oder des Fadens, dagegen K das Gewicht der Kugel und r_1 ihren Halbmesser $MA = MB$ bezeichnet:

$$r = \frac{{}^1/_3\, Gl^2 + K[(l+r_1)^2 + {}^2/_5 r_1^2]}{{}^1/_2\, Gl + K(l+r_1)}.$$

Wiegt nun der Draht 0,05 Pf., die Kugel aber 1,5 Pf., ist ferner die Länge des Drahtes 1 Fuß, und der Halbmesser der Kugel 1,15 Zoll, so hat man die Entfernung des Schwingungspunktes dieses Pendels von der Drehungsaxe:

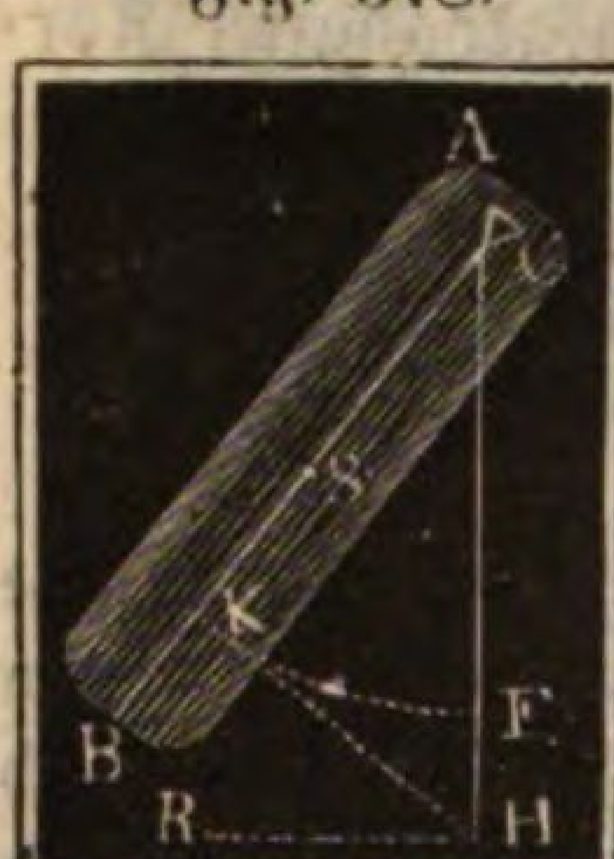
$$r = \frac{{}^1/_3 \cdot 0{,}05 \cdot 12^2 + 1{,}5 \cdot (13{,}15^2 + {}^2/_5 \cdot 1{,}15^2)}{{}^1/_2 \cdot 0{,}05 \cdot 12 + 1{,}5 \cdot 13{,}15} = \frac{2{,}4 + 260{,}177}{0{,}3 + 19{,}725} = \frac{262{,}577}{20{,}025}$$

$= 13{,}112$ Zoll. Ohne Rücksicht auf den Draht wäre $r = \frac{260.177}{19{,}725} = 13{,}190$ Zoll; und die träge Masse der Kugel, in ihrem Centro angenommen, wäre $r = 13{,}15$ Zoll. Die Schwingungszeit dieser Kugel ist:

$$t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} = 0{,}562 \sqrt{\frac{13{,}112}{12}} = 0{,}562 \sqrt{1{,}0926..} = 0{,}5874 \text{ Sec.}$$

§. 268. Der Aufhängepunkt und der Schwingungspunkt eines materiellen Pendels sind **wechselseitig** (franz. réciproque, engl. reciprocal), d. h. es kann der eine mit dem andern vertauscht, also das Pendel im Schwingungspunkte aufgehangen werden, ohne daß die Schwingungszeit eine andere wird. Der Beweis dieses Satzes führt sich mit Hülfe des §. 231 auf folgende Weise. Ist T das Trägheitsmoment des zusammengesetzten Pendels AB, Fig. 378, in Hinsicht auf eine Umdrehung um den Schwerpunkt S, so hat man dasselbe für eine Umdrehung um die Axe C, welche um $CS = s$ vom Schwerpunkte S absteht, $T_1 = T + Ms^2$, und daher den Abstand des Schwingungspunktes K von der Drehungsaxe C:

Fig. 378.



$$r = \frac{T_1}{Ms} = \frac{T + Ms^2}{Ms} = \frac{T}{Ms} + s.$$

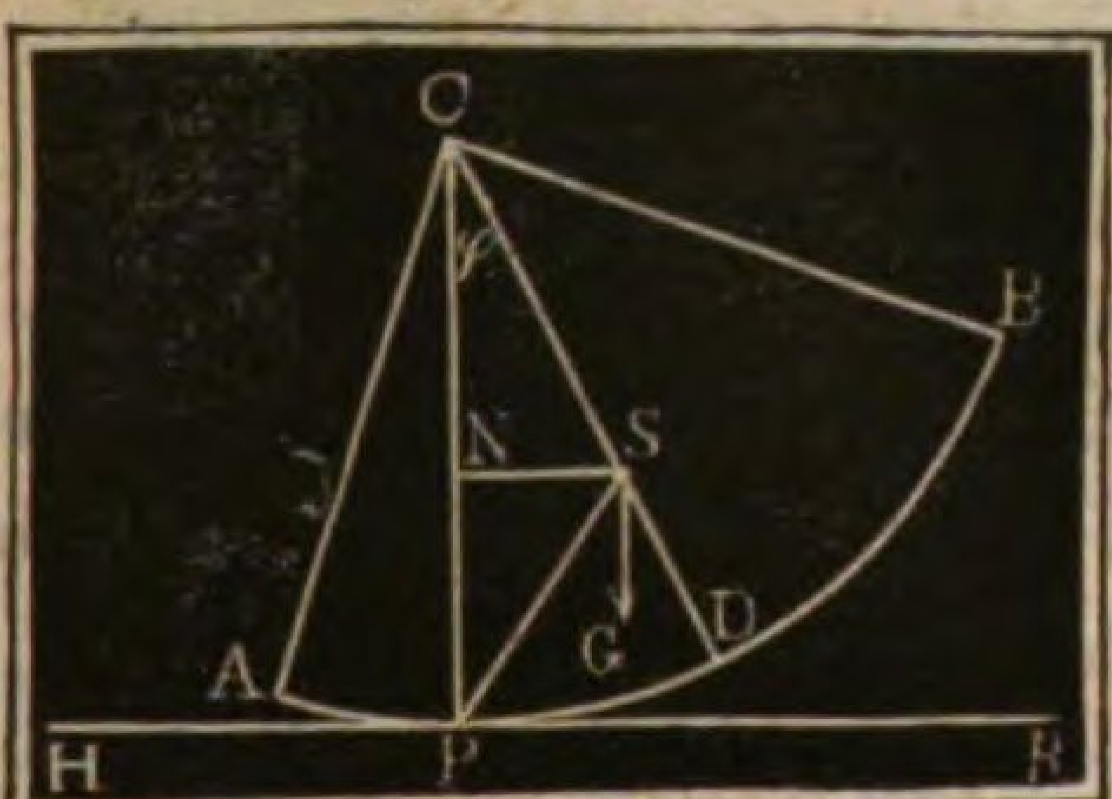
Bezeichnet man nun den Abstand $KS = r - s$ des Schwingungspunktes K vom Schwerpunkte durch s_1, so erhält man die einfache Gleichung $ss_1 = \frac{T}{M}$, in welcher s und s_1 auf gleiche Weise vorkommen, und daher auch mit einander vertauscht werden können. Diese Formel gilt also nicht allein für den Fall, wenn s den Abstand des Drehungspunktes, und s_1 den des Schwingungspunktes von dem Schwerpunkte bezeichnet, sondern auch umgekehrt, wenn s den Abstand des Schwin-

gungspunktes, und s_1 den des Drehungspunktes vom Schwerpunkte ausdrückt, es wird also C zum Schwingungspunkte, wenn K als Aufhängepunkt dient. Man benutzt diese Eigenschaft bei dem sogenannten, zuerst von Bohnenberger vorgeschlagenen und später von Kater angewendeten Reversionspendel AB, Fig. 379, welches mit zwei schneidigen Axen C und K ausgerüstet ist, die so gegen einander gestellt sind, daß die Schwingungszeiten dieselben bleiben, das Pendel mag um die eine oder um die andere Axe schwingen. Um nicht die Axen gegen einander verstellen zu müssen, werden noch zwei Laufgewichte P und Q angebracht, wovon das kleinere durch eine feine Schraube gestellt werden kann. Hat man durch Verschieben oder Einstellen dieser Laufgewichte es dahin gebracht, daß die Schwingungsdauer dieselbe ist, das Pendel mag in C oder in K aufhängen, so bekommt man in der Entfernung CK beider Schneiden die Länge r des einfachen Pendels, welches mit dem Reversionspendel gleichzeitig schwingt, und man erhält nun die Schwingungsdauer durch die Formel $t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$. Zusammengesetztes Pendel.

Fig. 379.



Fig. 380.



§. 269. Mit dem Schwingen eines Pendels läßt sich auch das Schaukeln oder Wiegen eines Körpers mit walzenförmigem Fuße vergleichen. Dieses Wiegen ist zwar, wie jede andere wälzende Bewegung, aus einer progressiven und einer Drehbewegung zusammengesetzt, allein es läßt sich auch annehmen, daß es aus einer einfachen Drehung mit veränderlicher Drehaxe bestehe. Diese Drehaxe ist aber der Stützpunkt P, womit der schaukelnde Körper ABC, Fig. 380, auf der horizontalen Basis HR aufruhet. Ist der Halbmesser $CD = CP$ der walzenförmigen Basis $ADB = r$, und der Abstand CS des Schwerpunktes des ganzen Körpers vom Mittelpunkte C dieser Basis $= s$, so hat man für die dem Drehungswinkel $SCP = \varphi$ entsprechende Entfernung $SP = y$ des Schwerpunktes vom Drehungspunkte: Wiege.

$$y^2 = r^2 + s^2 - 2rs\cos.\varphi = (r-s)^2 + 4rs\left(\sin.\frac{\varphi}{2}\right)^2;$$

bezeichnen wir daher noch das Trägheitsmoment des ganzen Körpers in Hinsicht auf den Schwerpunkt S durch Mk^2, so erhalten wir das Trägheitsmoment in Hinsicht auf den Stützpunkt P:

Wiege. $$T = M\,(k^2 + y^2) = M\,[k^2 + (r-s)^2 + 4\,rs\left(sin.\,\frac{\varphi}{2}\right)^2],$$

wofür bei kleinen Schwingungswinkeln $= M\,[k^2 + (r-s)^2 + rs\varphi^2]$ oder gar nur $M\,[k^2 + (r-s)^2]$ gesetzt werden kann. Da nun das Kraftmoment $= G\,.\,SN = Mg\,.\,CS\,sin.\,\varphi = Mgs\,sin.\,\varphi$ ist, so folgt die Winkelacceleration für die Drehung um P:

$$\varkappa = \frac{\text{Kraftmoment}}{\text{Trägheitsmoment}} = \frac{Mgs\,sin.\,\varphi}{M\,[k^2 + (r-s)^2]} = \frac{gs\,sin.\,\varphi}{k^2 + (r-s)^2}.$$

Beim einfachen Pendel ist dieselbe $= \frac{g\,sin.\,\varphi}{r_1}$, wenn r_1 dessen Länge bezeichnet; sollen daher beide isochron schwingen, so muß sein:

$$\frac{gs\,sin.\,\varphi}{k^2 + (r-s)^2} = \frac{g\,sin.\,\varphi}{r_1};\ \text{d. i. } r_1 = \frac{k^2 + (r-s)^2}{s}.$$

Die Schwingungszeit der Wiege ist hiernach:

$$t = \pi\sqrt{\frac{r_1}{g}} = \pi\sqrt{\frac{k^2 + (r-s)^2}{gs}}.$$

Fig. 381.



Diese Theorie läßt sich auch auf ein Pendel AB, Fig. 381, mit abgerundeter Umdrehungsaxe CM anwenden, wenn man statt r den Krümmungshalbmesser CM der Axe einführt. Wäre statt der runden Axe eine schneidige Axe D angebracht, so würde die Schwingungszeit

$$t_1 = \pi\sqrt{\frac{k^2 + \overline{DS}^2}{g.DS}} = \pi\sqrt{\frac{k^2 + (s-x)^2}{g\,(s-x)}}$$

betragen, wofern die Entfernung CD der Schneide vom Mittelpunkte der runden Axe durch x bezeichnet wird. Beide Pendel haben nun gleiche Schwingungszeiten, wenn

$$\frac{k^2+(s-x)^2}{s-x} = \frac{k^2+(r-s)^2}{s},\ \text{od.}\ \frac{k^2}{s-x} - x = \frac{k^2 + r^2}{s} - 2\,r$$

ist. Schreiben wir $\frac{k^2}{s-x} = \frac{k^2}{s} + \frac{k^2 x}{s^2}$ annähernd, und vernachlässigen wir r^2, so erhalten wir $x = \frac{2\,r\,s^2}{s^2 - k^2}$.

Anmerkung. Von dem conischen Pendel ist unter dem Artikel »Regulator« im dritten Theile die Rede.

Im Anhang zu diesem Bande wird von den schwingenden Bewegungen ausführlich gehandelt.

Viertes Kapitel.

Die Lehre vom Stoße.

§. 270. Vermöge der Undurchdringlichkeit der Materie können zwei Körper gleichzeitig nicht einen und denselben Raum einnehmen. Kommen aber zwei bewegte Körper so mit einander in Berührung, daß einer in den Raum des andern einzudringen sucht, so findet eine Wechselwirkung zwischen beiden statt, welche eine Veränderung in den Bewegungszuständen dieser Körper zur Folge hat. Diese Wechselwirkung ist es, welche man Stoß (franz. choc; engl. impact, collision) nennt. Stoß überhaupt.

Die Verhältnisse des Stoßes hängen zunächst von dem Gesetze der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung (§. 62) ab; während des Stoßes drückt der eine Körper genau ebenso stark auf den andern, wie dieser in entgegengesetzter Richtung auf jenen. Die gerade Linie, welche winkelrecht auf den Flächen steht, in welchen sich beide Körper berühren, und durch den Berührungspunkt selbst geht, ist die Richtung der Stoßkraft. Befinden sich die Schwerpunkte beider Körper in dieser Linie, so heißt der Stoß ein centrischer oder Centralstoß, außerdem aber ein excentrischer Stoß. Die Körper A und B in Fig. 382 geben einen centrischen Stoß, weil ihre Schwerpunkte S_1 und S_2 in der Normale $N\overline{N}$ zur Berührungsebene DE liegen; von den Körpern A und B in Fig. 383 stößt A centrisch und B excentrisch, weil S_1 in, und S_2 außerhalb der Normallinie $N\overline{N}$ befindlich ist.

Fig. 382.

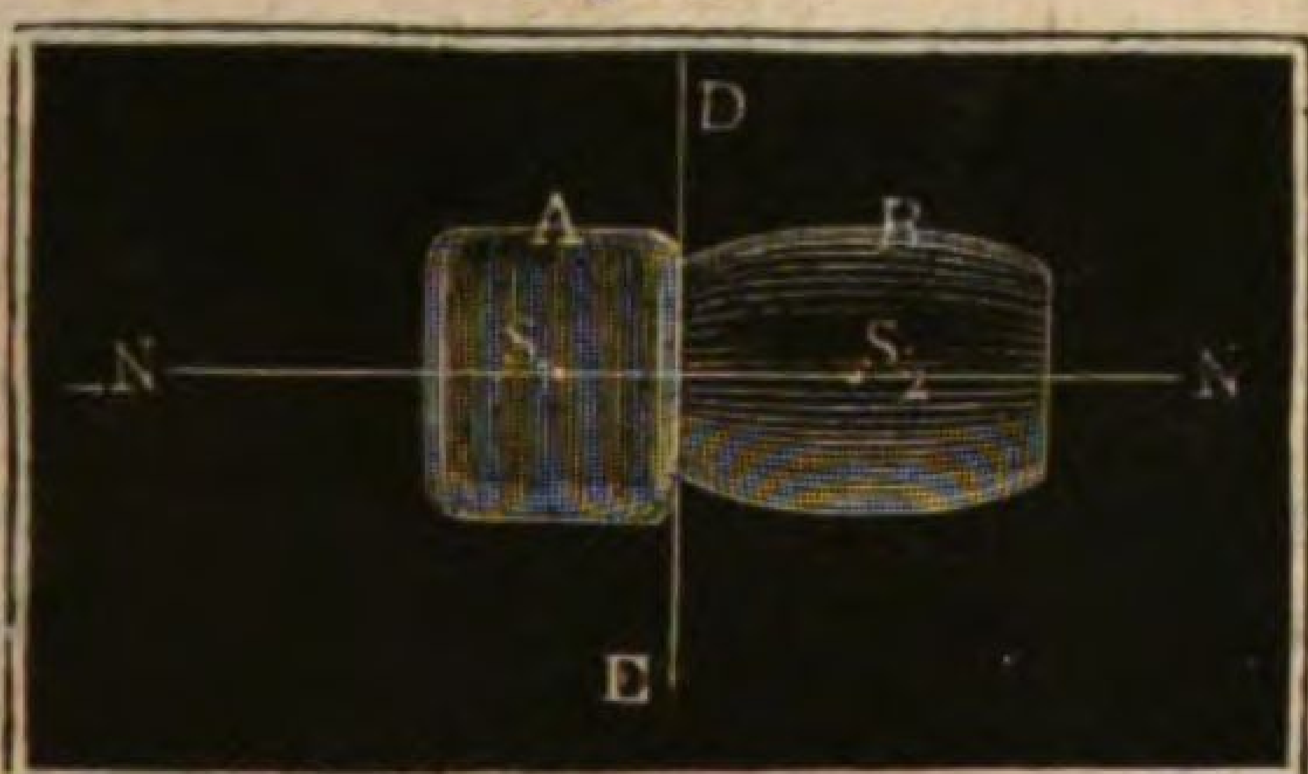
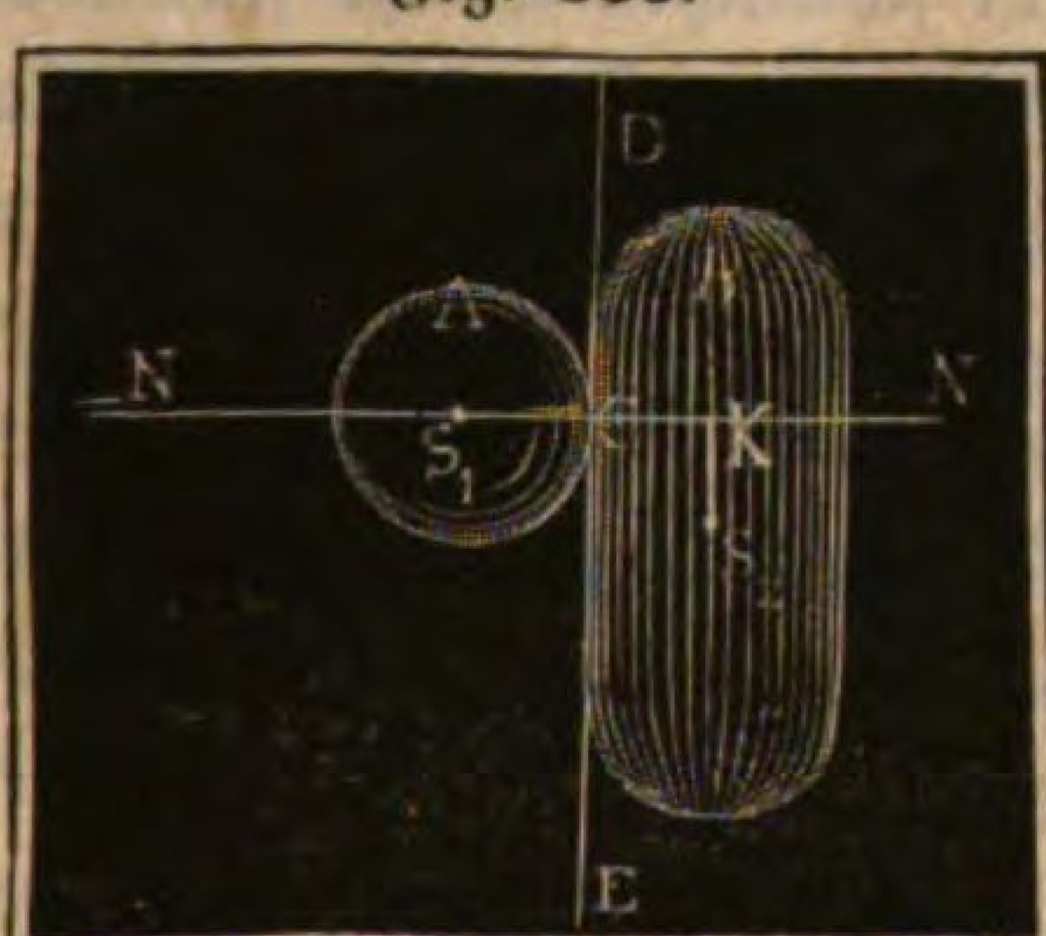


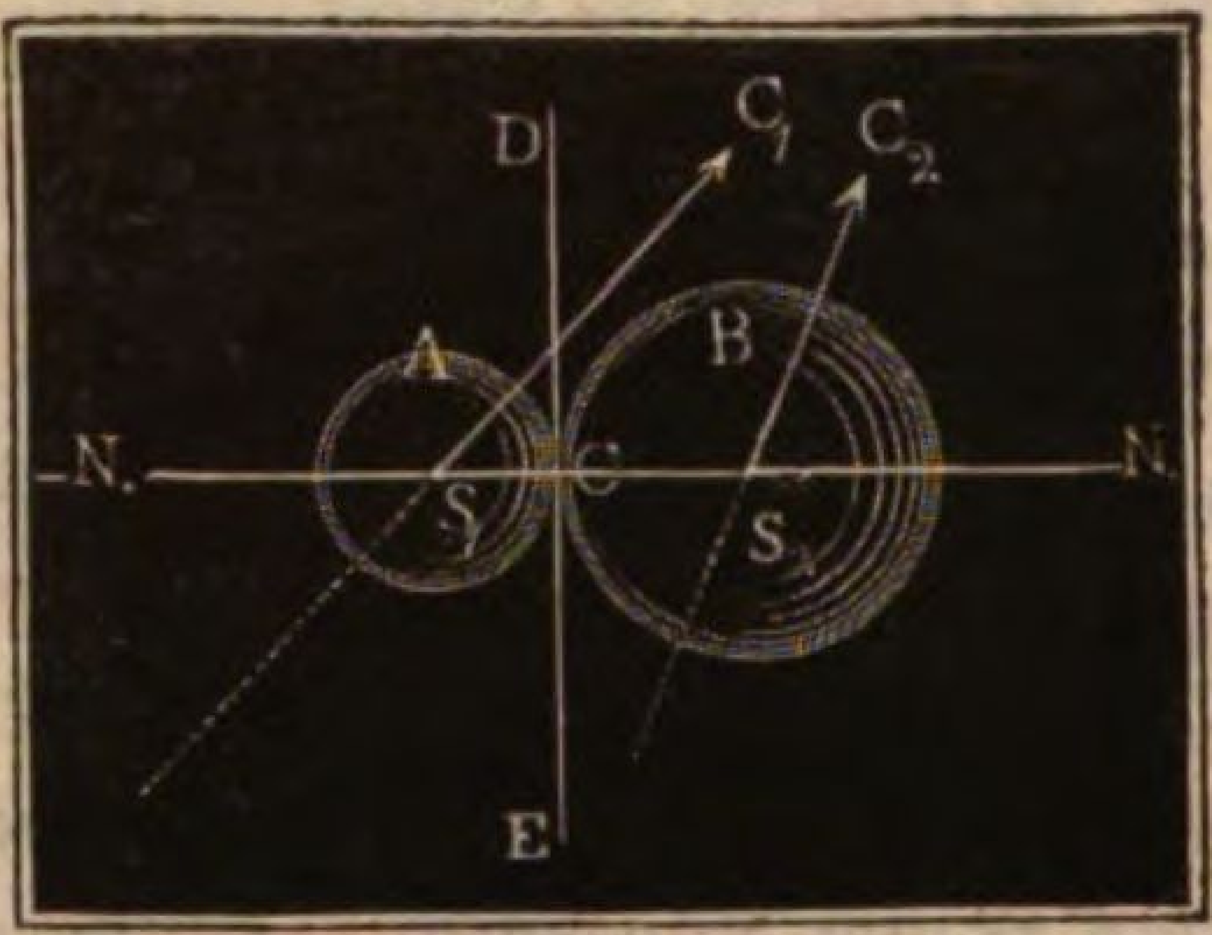
Fig. 383.



In Hinsicht auf die Bewegungsrichtung unterscheidet man den geraden Stoß (franz. choc direct; engl. direct impact) und den schiefen Stoß (franz. choc oblique; engl. oblique impact) von einander. Beim geraden Stoße fällt die Bewegungsrichtung in die

Stoß überhaupt.

Fig. 384.



Stoßlinie, beim schiefen Stoße findet aber eine Abweichung zwischen beiden Richtungen statt. Bewegen sich z. B. die Körper A und B Fig. 384 in Richtungen S_1C_1 und S_2C_2, welche von der Normalen oder Stoßlinie $N\overline{N}$ abweichen, so findet ein schiefer Stoß statt, während derselbe ein gerader wäre, wenn diese Bewegungsrichtungen mit $N\overline{N}$ zusammenfielen.

Außerdem unterscheidet man noch den Stoß freier Körper und den Stoß ganz oder theilweise unterstützter Körper von einander.

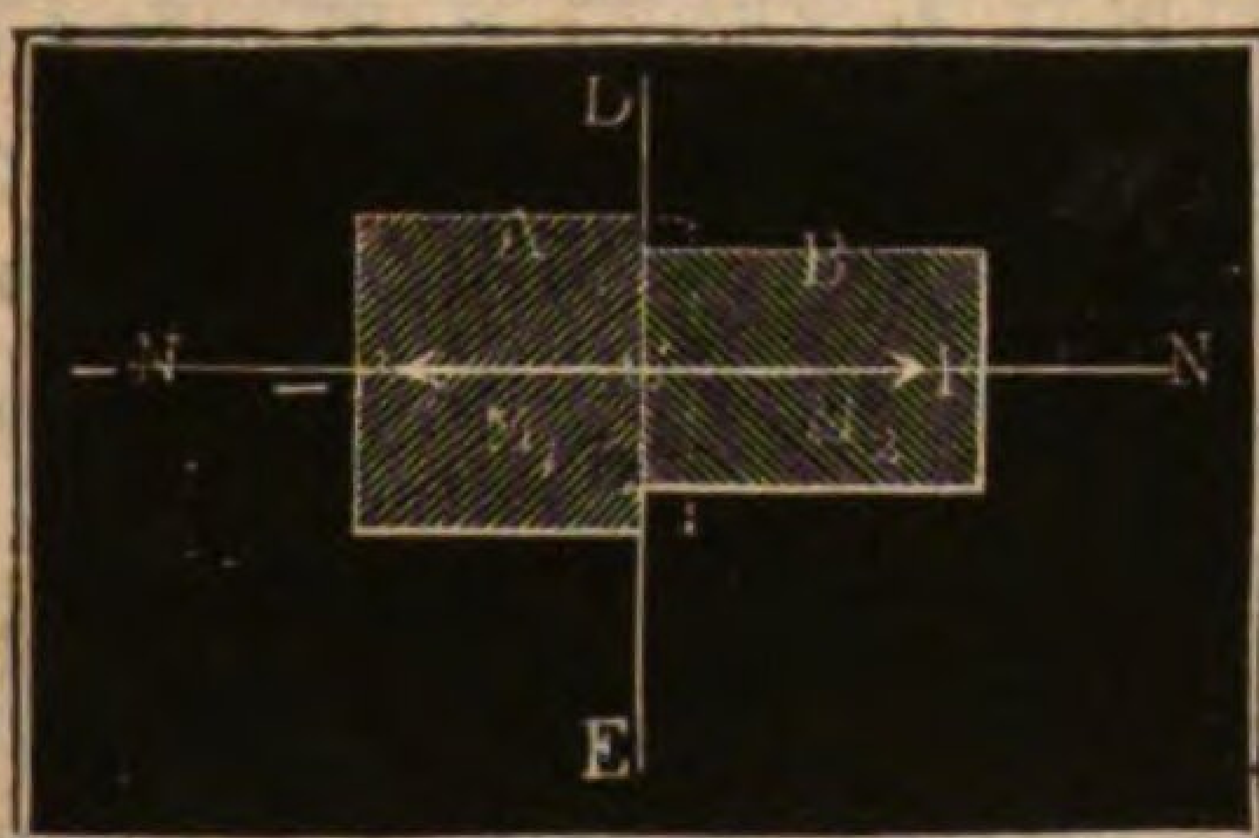
§. 271. Die Zeit während der Mittheilung oder Veränderung der Bewegung durch den Anstoß ist zwar sehr klein, aber keineswegs unendlich klein; sie hängt, sowie die Stoßkraft selbst, von Masse, Geschwindigkeit und Elasticität der zum Stoße gelangenden Körper ab. Man kann diese Zeit aus zwei Perioden bestehend annehmen. In der ersten Periode drücken die Körper einander zusammen und in der zweiten dehnen sich dieselben ganz oder zum Theil wieder aus. Durch das Zusammendrücken wird die Elasticität in Wirksamkeit gesetzt, welche sich mit der Trägheit in's Gleichgewicht setzt und eben dadurch den Bewegungszustand der zusammenstoßenden Körper verändert. Wird bei dem Zusammendrücken die Elasticitätsgrenze nicht überschritten, so geht der Körper am Ende des Stoßes in seine vorige Gestalt vollkommen zurück, und dann nennen wir den Körper einen vollkommen elastischen; nimmt aber der Körper am Ende des Stoßes seine vorige Form nicht vollständig wieder an, so nennen wir den Körper unvollkommen elastisch, und behält endlich der Körper die durch das Maximum des Zusammendrückens erhaltene Form, besitzt er also gar kein Bestreben zum Ausdehnen, so nennen wir den Körper einen unelastischen. Jedenfalls ist aber diese Eintheilung nur in Beziehung auf eine gewisse Stärke des Stoßes als richtig anzunehmen; denn es ist möglich, daß ein und derselbe Körper bei einem schwachen Stoße sich noch elastisch und bei einem starken Stoße unelastisch zeigt. Streng genommen giebt es aber weder einen vollkommen elastischen, noch einen vollkommen unelastischen Körper; doch nennen wir in der Folge solche Körper elastische, welche ihre Gestalt nach dem Stoße ziemlich wieder herstellen, und diejenigen unelastische, welche durch den Stoß bedeutende bleibende Formveränderungen erleiden (vergl. §. 183).

In der praktischen Mechanik werden die zum Stoße gelangenden Körper, wie z. B. Holz, Eisen u. s. w., in der Regel als unelastische angesehen, weil dieselben an und für sich eine kleine Elasticität besitzen und

durch Wiederholung der Stöße auch noch an Elasticität verlieren. Uebrigens ist es eine wichtige Regel, Stöße bei Maschinen und Bauwerken so viel wie möglich zu vermeiden, oder zu mäßigen oder in elastische zu verwandeln, weil durch dieselben Erschütterungen und große Abnutzungen herbeigeführt werden und weil dieselben einen Theil der Leistung der Maschinen consumiren.

§. 272. Entwickeln wir zunächst die Gesetze des geraden Centralstoßes frei beweglicher Körper. Denken wir uns die Stoßzeit aus lauter gleichen Theilen τ bestehend und nehmen wir an, daß die Stoßkraft während des ersten Zeittheilchens P_1, während des zweiten P_2, während des dritten P_3 sei u. s. w. Ist nun die Masse des einen Körpers A (Fig. 385) $= M_1$, so hat man die entsprechenden Accelerationen: $p_1 = \frac{P_1}{M_1}$, $p_2 = \frac{P_2}{M_1}$, $p_3 = \frac{P_3}{M_1}$ u. s. w. Nach §. 19 ist Unelastischer Stoß.

Fig. 385.



aber die einer Acceleration p und einem Zeittheilchen τ entsprechende Geschwindigkeitsveränderung: $\varkappa = p\tau$; es sind daher für den vorliegenden Fall die elementaren Geschwindigkeitszu- oder abnahmen: $\varkappa_1 = \frac{P_1 \tau}{M_1}$, $\varkappa_2 = \frac{P_2 \tau}{M_1}$, $\varkappa_3 = \frac{P_3 \tau}{M_1}$ u. s. w., und es ist die in einer gewissen endlichen Zeit erfolgte Geschwindigkeitszu- oder abnahme der Masse M_1: $\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 + \ldots = (P_1 + P_2 + P_3) + \ldots) \frac{\tau}{M_1}$, sowie die entsprechende Geschwindigkeitsveränderung der Masse B von der Größe M_2: $= (P_1 + P_2 + P_3 + \ldots) \frac{\tau}{M_2}$.

Bei dem folgenden oder stoßenden Körper A wirkt die Stoßkraft der Geschwindigkeit c_1 entgegen, es findet folglich hier eine Geschwindigkeitsabnahme statt, und es ist die nach einer gewissen Zeit noch übrig bleibende Geschwindigkeit dieses Körpers: $v_1 = c_1 - (P_1 + P_2 + \ldots) \frac{\tau}{M_1}$; bei dem vorangehenden oder gestoßenen Körper B hingegen wirkt die Stoßkraft in der Bewegungsrichtung, es erhält daher die Geschwindigkeit c_2 einen Zuwachs und es geht dieselbe in

$$v_2 = c_2 + (P_1 + P_2 + \ldots) \frac{\tau}{M_2} \text{ über.}$$

Unelastischer Stoß.

Eliminiren wir aus beiden Gleichungen $(P_1 + P_2 + \ldots)\,\tau$, so bleibt uns die allgemeine Formel:

I. $M_1\,(c_1 - v_1) = M_2(v_2 - c_2)$, oder $M_1 v_1 + M_2 v_2 = M_1 c_1 + M_2 c_2$.

Man bezeichnet wohl das Product aus Masse und Geschwindigkeit eines Körpers durch den Namen Bewegungsmoment (franz. quantité de mouvement; engl. momentum of body) und kann hiernach behaupten: für jeden Augenblick der Stoßzeit ist die Summe der Bewegungsmomente $(M_1 v_1 + M_2 v_2)$ beider Körper ebenso groß wie vor dem Stoße.

Im Augenblicke des größten Zusammendrückens haben beide Körper einerlei Geschwindigkeit v, setzen wir daher diesen Werth statt v_1 und v_2 in die gefundene Gleichung, so bleibt $M_1 v + M_2 v = M_1 c_1 + M_2 c_2$, und es ergiebt sich die Geschwindigkeit beider Körper im Augenblicke der stärksten Zusammendrückung: $v = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2}$.

Sind die Körper A und B unelastisch, besitzen sie also nach dem Zusammendrücken kein Bestreben zum Sichwiederausdehnen, so hört alle Mittheilung oder Veränderung der Bewegung auf, wenn beide Körper bis auf's Maximum zusammengedrückt sind, und es gehen daher auch beide nach dem Stoße mit der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit

$$v = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2} \text{ fort.}$$

Beispiele. 1) Bewegt sich ein unelastischer Körper B von 30 Pfd. Gewicht mit 3 Fuß Geschwindigkeit, und trifft ihn ein anderer unelastischer Körper A von 50 Pfd. mit 7 Fuß Geschwindigkeit, so gehen beide nach dem Zusammentreffen mit der Geschwindigkeit $v = \frac{50.7 + 30.3}{50 + 30} = \frac{350 + 90}{80} = \frac{44}{8} = \frac{11}{2}$ $= 5\frac{1}{2}$ Fuß fort. 2) Um einen Körper von 120 Pfd. Gewicht aus einer Geschwindigkeit $c_2 = 1\frac{1}{2}$ Fuß in eine Geschwindigkeit v von 2 Fuß zu versetzen, läßt man ihn von einem 50 Pfd. schweren Körper stoßen, welche Geschwindigkeit muß dieser haben? Hier ist

$$c_1 = v + \frac{(v - c_2)\,M_2}{M_1} = 2 + \frac{(2 - 1{,}5).120}{50} = 2 + \frac{6}{5} = 3{,}2 \text{ Fuß}.$$

Elastischer Stoß.

§. 273. Sind die zum Stoße gelangenden Körper vollkommen elastisch, so dehnen sie sich, nachdem sie sich in der ersten Periode zusammengedrückt haben, in der zweiten Periode der Stoßzeit allmälig wieder aus; und wenn sie am Ende die erste Gestalt wieder angenommen haben, so setzen sie ihre Bewegungen mit verschiedenen Geschwindigkeiten fort. Da aber die mechanische Arbeit, welche aufzuwenden ist, um einen elastischen Körper zusammenzudrücken, gleich ist der Arbeit, welche derselbe bei seiner Ausdehnung wieder ausgiebt, so findet beim Stoße zwischen elastischen Körpern ein Verlust an lebendiger Kraft nicht statt, und es gilt daher auch für denselben noch folgende zweite Gleichung:

II. $M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 = M_1 c_1^2 + M_2 c_2^2$, oder
$M_1 (c_1^2 - v_1^2) = M_2 (v_2^2 - c_2^2)$. Elastischer Stoß.

Aus den Gleichungen I. und II. lassen sich nun die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 der Körper nach dem Stoße finden. Zuerst folgt durch Division $\frac{c_1^2 - v_1^2}{c_1 - v_1} = \frac{v_2^2 - c_2^2}{v_2 - c_2}$, d. i. $c_1 + v_1 = v_2 + c_2$ oder $v_2 - v_1 = c_1 - c_2$; setzt man nun den sich hieraus ergebenden Werth $v_2 = c_1 + v_1 - c_2$ in die Gleichung I., so folgt

$$M_1 v_1 + M_2 v_1 + M_2 (c_1 - c_2) = M_1 c_1 + M_2 c_2, \text{ oder}$$

$(M_1 + M_2) v_1 = (M_1 + M_2) c_1 - 2 M_2 (c_1 - c_2)$, wodurch sich nun herausstellt: $v_1 = c_1 - \frac{2 M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}$ und

$$v_2 = c_1 - c_2 + c_1 - \frac{2 M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2} = c_2 + \frac{2 M_1 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}.$$

Während bei unelastischen Körpern der Verlust an Geschwindigkeit des einen Körpers

$$c_1 - v = c_1 - \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2} = \frac{M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2} \text{ ist,}$$

fällt hiernach bei elastischen Körpern derselbe doppelt so groß, nämlich $c_1 - v_1 = \frac{2 M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}$ aus, und während bei den unelastischen Körpern der Gewinn an Geschwindigkeit des andern Körpers

$$v - c_2 = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2} - c_2 = \frac{M_1 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}$$

beträgt, stellt sich bei elastischen Körpern derselbe:

$$v_2 - c_2 = \frac{2 M_1 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}, \text{ ebenfalls doppelt so groß heraus.}$$

Beispiel. Zwei vollkommen elastische Kugeln, die eine von 10 Pfd., die andere von 16 Pfd. Gewicht, stoßen mit den Geschwindigkeiten 12 Fuß und 6 Fuß gegen einander, welches sind ihre Geschwindigkeiten nach dem Stoße? Es ist hier $M_1 = 10$ und $c_1 = 12$ Fuß, M_2 aber $= 16$ und $c_2 = -6$ Fuß zu setzen, daher ergiebt sich der Geschwindigkeitsverlust des ersten Körpers $c_1 - v_1 = \frac{2 . 16 (12 + 6)}{10 + 16} = \frac{2 . 16 . 18}{26} = 22{,}154$ Fuß, und der Geschwindigkeitsgewinn des andern: $v_2 - c_2 = \frac{2 . 10 . 18}{26} = 13{,}846$ Fuß; es prallt hiernach der erste Körper nach dem Stoße mit $v_1 = 12 - 22{,}154 = -10{,}154$ Fuß, und der andere Körper mit $-6 + 13{,}846 = 7{,}846$ Fß. Geschwindigkeit zurück. Uebrigens ist das Maaß der lebendigen Kraft beider Körper nach dem Stoße $= M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 = 10 . 10{,}154^2 + 16 . 7{,}846^2 = 1031 + 985 = 2016$ ebenso groß wie vor dem Stoße, nämlich $M_1 c_1^2 + M_2 c_2^2 = 10 . 12^2 + 16 . 6^2 = 1440 + 576 = 2016$. Wären diese Körper unelastisch, so würde der erste nur $\frac{c_1 - v_1}{2} = 11{,}077$ Fuß an

Geschwindigkeit verlieren und der andere $\frac{v_2 - c_2}{2} = 6{,}923$ Fuß gewinnen, es würde also der erste Körper nach dem Stoße noch die Geschwindigkeit $12 - 11{,}077 = 0{,}923$ Fuß behalten, und der zweite die Geschwindigkeit $-6 + 6{,}923 = 0{,}923$ annehmen, übrigens aber der Arbeitsverlust $[2016 - (10+16)\, 0{,}923^2] : 2g = (2016 - 22{,}2) . 0{,}016 = 31{,}9$ Fßpf. entstehen.

Besondere Fälle. §. 274. Die in den vorstehenden Paragraphen entwickelten Formeln für die Endgeschwindigkeiten des Stoßes gelten natürlich auch dann noch, wenn der eine Körper in Ruhe ist, oder wenn sich beide Körper einander entgegen bewegen, oder wenn eine Masse unendlich groß ist in Hinsicht auf die andere u. s. w. Ist die Masse M_2 in Ruhe, so hat man $c_2 = 0$, daher für unelastische Körper $v = \frac{M_1 c_1}{M_1 + M_2}$ und für elastische:

$$v_1 = c_1 - \frac{2 M_2 c_1}{M_1 + M_2} = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} c_1, \text{ und}$$

$$v_2 = 0 + \frac{2 M_1 c_1}{M_1 + M_2} = \frac{2 M_1}{M_1 + M_2} c_1.$$

Laufen die Körper einander entgegen, ist also c_2 negativ, so folgt für unelastische Körper $v = \frac{M_1 c_1 - M_2 c_2}{M_1 + M_2}$ und für elastische

$$v_1 = c_1 - \frac{2 M_2 (c_1 + c_2)}{M_1 + M_2} \text{ und } v_2 = - c_2 + \frac{2 M_1 (c_1 + c_2)}{M_1 + M_2}.$$

Sind in diesem Falle die Bewegungsmomente einander gleich, ist also $M_1 c_1 = M_2 c_2$, so ist beim unelastischen Stoße $v = 0$, d. h. die Körper versetzen einander in Ruhe, bei elastischen Körpern ist aber

$$v_1 = c_1 - \frac{2 (M_2 c_1 + M_1 c_1)}{M_1 + M_2} = c_1 - 2 c_1 = - c_1, \text{ und}$$

$$v_2 = - c_2 + \frac{2 (M_2 c_2 + M_1 c_2)}{M_1 + M_2} = - c_2 + 2 c_2 = + c_2;$$ dann

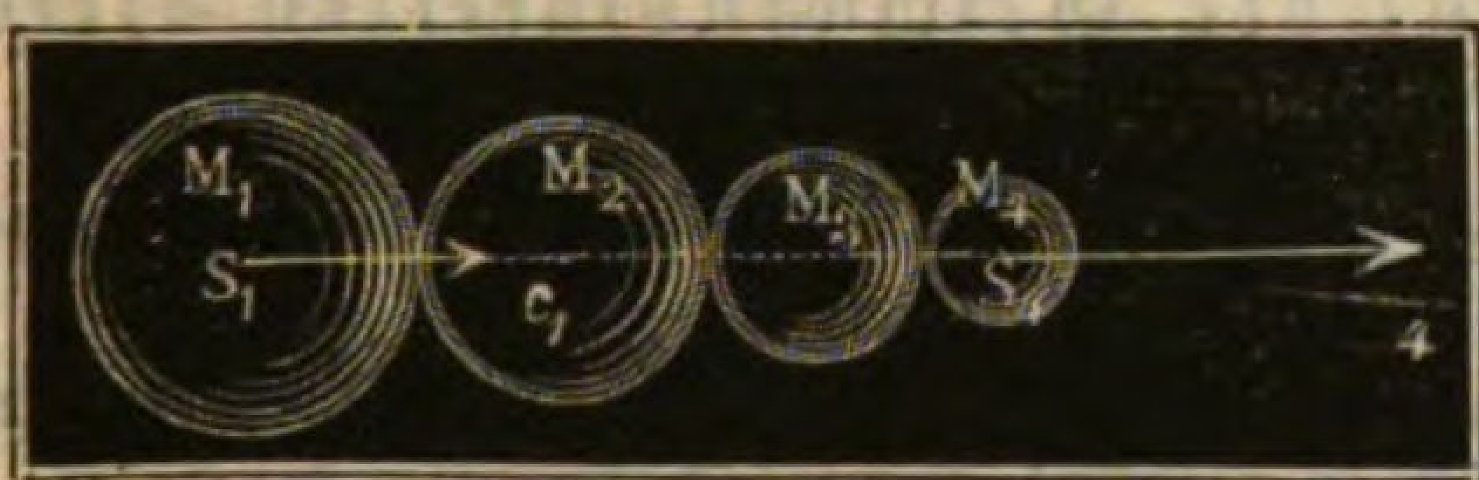
kehren also die Körper nach dem Stoße mit entgegengesetzten Geschwindigkeiten zurück. Sind hingegen die Massen einander gleich, so hat man für unelastische Körper $v = \frac{c_1 - c_2}{2}$, dagegen für elastische $v_1 = - c_2$, und $v_2 = c_1$, d. h. dann gehen die Massen mit verwechselten Geschwindigkeiten zurück.

Laufen die Massen wieder in gleicher Richtung und ist die vorausgehende Masse M_2 unendlich groß, so hat man für unelastische Körper $v = \frac{M_2 c_2}{M_2} = c_2$, und für elastische: $v_1 = c_1 - 2(c_1 - c_2) = 2 c_2 - c_1$, $v_2 = c_2 + 0 = c_2$; es wird also die Geschwindigkeit der unendlich großen Masse durch den Anstoß der endlichen Masse nicht abgeändert. Ist nun noch die unendlich große Masse in Ruhe, also $c_2 = 0$, so hat

man für unelastische Körper $v = 0$ und für elastische $v_1 = -c_1$, Besondere Fälle.
$v_2 = 0$; dann bleibt also auch die unendlich große Masse in Ruhe, es verliert aber im ersten Falle der anstoßende Körper seine Geschwindigkeit vollständig, und es wird dieselbe im zweiten Falle in die entgegengesetzte verwandelt.

Beispiele. 1) Mit welcher Geschwindigkeit ist ein Körper von 8 Pf. an einen ruhenden Körper von 25 Pf. anzustoßen, damit der letztere eine Geschwindigkeit von 2 Fuß annimmt? Wären die Körper unelastisch, so hätte man zu setzen: $v = \frac{M\ c_1}{M_1 + M_2}$, d. i. $2 = \frac{8 \,.\, c_1}{8+25}$, daher $c_1 = {}^{33}/_4 = 8^1/_4$ Fuß die gesuchte Geschwindigkeit; wären sie aber elastisch, so hätte man $v_2 = \frac{2 M_1 c_1}{M_1 + M_2}$, daher $c_1 = {}^{33}/_8 = 4^1/_8$ Fuß.

Fig. 386.



2) Trifft eine Kugel M_1 (Fig. 386) die ruhende Masse $M_2 = n M_1$ mit der Geschwindigkeit c_1, die zweite Masse eine dritte Masse $M_3 = n M_2 = n^2 M_1$ mit der durch den Stoß erlangten Geschwindigkeit, diese wieder eine Masse $M_4 = n M_3 = n^3 M_1$ u. s. w., so hat man bei vollkommener Elasticität dieser Massen die Geschwindigkeiten

$$v_2 = \frac{2 M_1}{M_1 + n M_1} c_1 = \frac{2}{1+n} \,.\, c_1,\ v_3 = \frac{2 M_2}{M_2 + n M_2} v_2 = \frac{2}{1+n} \,.\, v_2 = \left(\frac{2}{1+n}\right)^2 c_1,$$

$v_4 = \left(\frac{2}{1+n}\right)^3 c_1$ u. s. w. Ist z. B. das Gewicht einer jeden Masse nur halb so groß, als das der nächst vorhergehenden, hat man also den Exponenten der von den Massen gebildeten geometrischen Reihe: $n = {}^1/_2$, so folgt $v_2 = {}^4/_3\, c_1$, $v_3 = ({}^4/_3)^2\, c_1$, $v_4 = ({}^4/_3)^3\, c_1 \ldots$, $v_{10} = ({}^4/_3)^9\, c_1 = 13{,}32 \,.\, c_1$.

§. 275. Beim Zusammenstoßen unelastischer Massen findet stets ein Arbeitsverlust.
Verlust an lebendiger Kraft statt, weshalb die Massen nach dem Stoße nicht so viel Arbeit zu verrichten vermögen, als vor dem Stoße. Vor dem Stoße enthalten die mit den Geschwindigkeiten c_1 und c_2 fortgehenden Massen M_1 und M_2 die lebendige Kraft $M_1 c_1^2 + M_2 c_2^2$, nach dem Stoße haben aber die mit der Geschwindigkeit $v = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2}$ fortgehenden Massen die lebendige Kraft $M_1 v^2 + M_2 v^2$; es giebt daher die Subtraction dieser Kräfte den Verlust an lebendiger Kraft durch den Anstoß:

$$K = M_1 (c_1^2 - v^2) + M_2 (c_2^2 - v^2) = M_1 (c_1 + v)(c_1 - v)$$

$$- M_2 (c_2 + v)(v - c_2), \text{ aber } M_1 (c_1 - v) = M_2 (v - c_2) = \frac{M_1 M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2},$$

daher folgt

$$K = (c_1 + v - c_2 - v) \frac{M_1 M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2} = \frac{(c_1 - c_2)^2 M_1 M_2}{M_1 + M_2} = \frac{(c_1 - c_2)^2}{\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}}$$

Arbeitsverlust. Sind die Gewichte der Massen G_1 und G_2, ist also $M_1 = \frac{G_1}{g}$ und $M_2 = \frac{G_2}{g}$, so hat man hiernach den Verlust an mechanischer Arbeit oder Leistung: $L = \frac{(c_1 - c_2)^2}{2g} \cdot \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}$.

Man nennt $\frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}$ das harmonische Mittel aus G_1 und G_2, und kann hiernach behaupten: der Verlust an Leistung, welcher durch den Stoß zweier unelastischen Massen herbeigeführt und auf die Formveränderung dieser verwendet wird, ist gleich dem Producte aus dem harmonischen Mittel beider Massen und aus der Fallhöhe, welche der Differenz der Geschwindigkeiten dieser Massen entspricht.

Ist eine der Massen, z. B. M_2, in Ruhe, so hat man diesen Arbeitsverlust $L = \frac{c_1^2}{2g} \cdot \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}$, und ist die bewegte Masse M_1 sehr groß gegen die ruhende, so verschwindet G_2 gegen G_1 und es bleibt $L = \frac{c_1^2}{2g} \cdot G_2$.

Uebrigens läßt sich auch setzen:

$$K = M_1(c_1^2 - v^2) + M_2(c_2^2 - v^2) = M_1(c_1^2 - 2c_1 v + v^2 + 2c_1 v - 2v^2) + M_2(c_2^2 - 2c_2 v + v^2 + 2c_2 v - 2v_2^2)$$
$$= M_1(c_1 - v)^2 + 2M_1 v(c_1 - v) + M_2(c_2 - v)^2 + 2M_2 v(c_2 - v)$$
$$= M_1(c_1 - v)^2 + M_2(c_2 - v)^2, \text{ weil } M_1(c_1 - v) = M_2(v - c_2) \text{ ist.}$$

Hiernach ist also die durch die unelastischen Stöße verlorne lebendige Kraft gleich der Summe von den Producten aus den Massen und den Quadraten ihrer Geschwindigkeitsverluste oder -gewinnste.

Beispiele. 1) Wenn bei einer Maschine in jeder Minute 16 Stöße zwischen den unelastischen Massen $M_1 = \frac{1000}{g}$ Pf. und $M_2 = \frac{1200}{g}$ Pf. mit den Geschwindigkeiten $c_1 = 5$ Fuß und $c_2 = 2$ Fuß erfolgen, so ist ihr Verlust an Leistung in Folge dieser Stöße:

$$L = {}^{16}/_{60} \cdot \frac{(5-2)^2}{2g} \cdot \frac{1000 \cdot 1200}{2200} = {}^4/_{15} \cdot 9 \cdot 0{,}016 \cdot {}^{6000}/_{11} = 0{,}576 \cdot {}^{400}/_{11} = 20{,}94$$

Fßpf. p. Sec. 2) Wenn auf einer Eisenbahn zwei Wagenzüge von 120000 Pf. und 160000 Pf. Gewicht mit den Geschwindigkeiten $c_1 = 20$ und $c_2 = 15$ Fß. gegen einander stoßen, so entsteht ein auf die Zerstörung der Locomotiven und Wagen verwendeter Arbeitsverlust, welcher bei vollständigem Mangel an Elasticität der zum Stoße gelangenden Theile

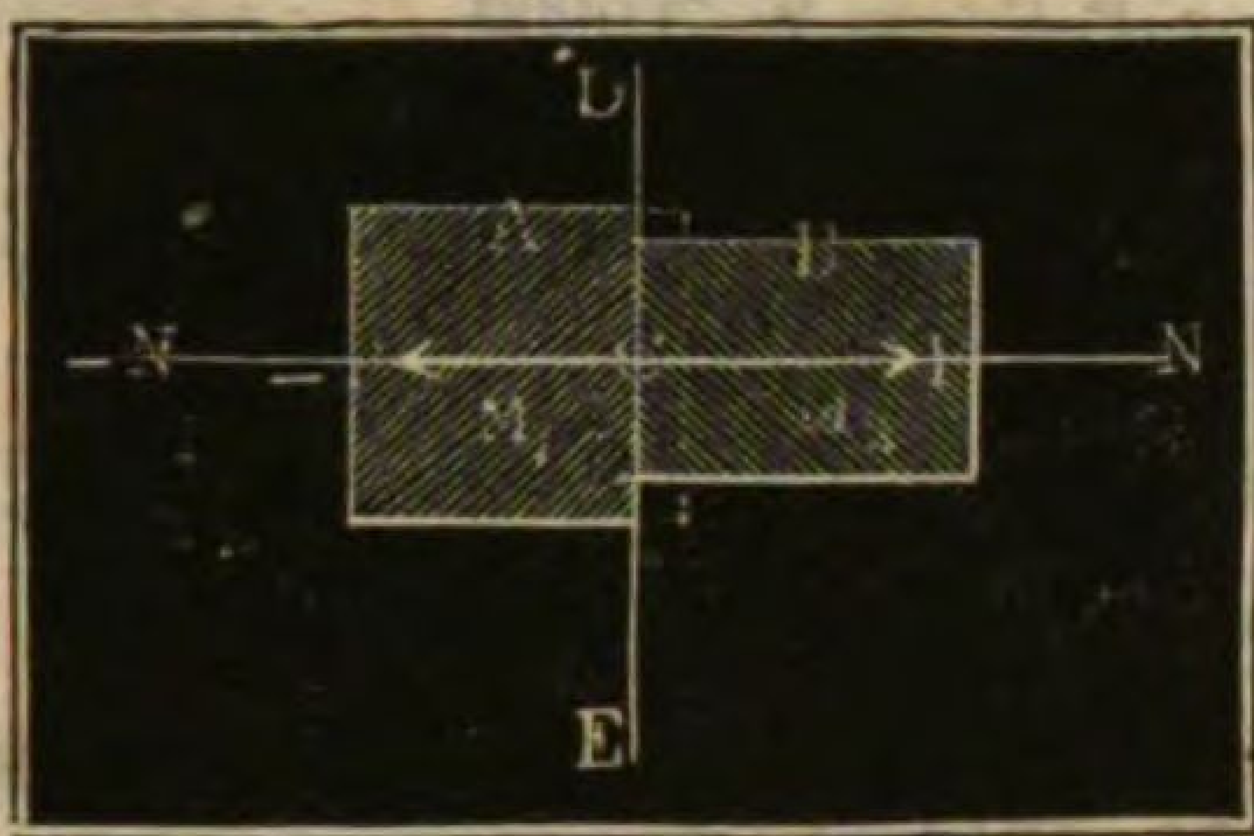
$$= \frac{(20 + 15)^2}{2g} \cdot \frac{120000 \cdot 160000}{280000} = 35^2 \cdot 0{,}016 \cdot \frac{1920000}{28} = 1344000 \text{ Fßpf.}$$

beträgt.

Härte. §. 276. Kennt man die Elasticitätsmodul der zum Stoße gelangenden

Körper, so kann man auch die Kraft des Zusammendrückens und die Größe desselben finden. Es seien von den Körpern A u. B, Fig. 387, die Querschnitte F_1 und F_2, die Längen l_1 und l_2 und die Elasticitätsmodul E_1 und E_2. Stoßen beide mit einer Kraft P gegen einander, so sind die bewirkten Zusammendrückungen, nach §. 185: Härte.

Fig. 387.



$$\lambda_1 = \frac{Pl_1}{F_1E_1} \text{ und } \lambda_2 = \frac{Pl_2}{F_2E_2},$$

und das Verhältniß derselben ist $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{F_2E_2}{F_1E_1} \cdot \frac{l_1}{l_2}$.

Bezeichnen wir nun der Einfachheit wegen $\frac{FE}{l}$ durch H, so erhalten wir $\lambda_1 = \frac{P}{H_1}$ und $\lambda_2 = \frac{P}{H_2}$, sowie $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{H_2}{H_1}$. Nennen wir nach dem Beispiele Whewell's (S. The Mechanics of Enginneering §. 207) die Größe $\frac{FE}{l}$ die Härte (franz. dureté, raideur; engl. hardness) eines Körpers, so folgt, daß die Tiefen der Zusammendrückungen den Härten umgekehrt proportional sind.

Stößt eine Masse $M = \frac{G}{g}$ mit der Geschwindigkeit c auf eine unbewegliche oder unendlich große Masse, so verwendet sie ihre ganze lebendige Kraft auf das Zusammendrücken, es ist daher (nach §. 186):

$$\tfrac{1}{2}\, Ps = \frac{Mc^2}{2} = \frac{c^2}{2g}\, G.$$

Nun ist aber der Weg s gleich der Summe von den Zusammendrückungen λ_1 und λ_2, und $\lambda_1 = \frac{P}{H_1}$, sowie $\lambda_2 = \frac{P}{H_2}$; es folgt daher

$s = \lambda_1 + \lambda_2 = P\left(\frac{1}{H_1} + \frac{1}{H_2}\right) = \frac{H_1 + H_2}{H_1 H_2} \cdot P$, sowie umgekehrt $P = \frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2} s$, und die Bestimmungsgleichung $\tfrac{1}{2} \cdot \frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2} \cdot s^2 = \frac{c^2}{2g} G$, also $s = c\sqrt{\frac{H_1 + H_2}{H_1 H_2} \cdot \frac{G}{g}}$, woraus sich nun P, λ_1 u. λ_2 berechnen lassen.

Beispiel. Schlägt man einen schmiedeeisernen Hammer von 4 Quadratzoll Basis und 6 Zoll Höhe mit einer Geschwindigkeit von 50 Fuß auf eine Bleiplatte von 2 Quadratzoll Basis und 1 Zoll Dicke, so stellen sich folgende Verhältnisse

Härte. heraus. Der Elasticitätsmodul des Schmiedeeisens ist $E_1 = 29000000$ und der des Bleies $E_2 = 700000$, daher sind die Härten dieser Körper: $H_1 = \frac{F_1 E_1}{l_1}$ $= \frac{4 \cdot 29000000}{6} = 19333333$ und $H_2 = \frac{F_2 E_2}{l_2} = \frac{2 \cdot 700000}{1} = 1400000$.

Setzt man diese Werthe in die Formel $s = c \sqrt{\frac{H_1 + H_2}{H_1 H_2} \cdot \frac{G}{g}}$, und führt man das Gewicht des Hammers $= 4 \cdot 6 \cdot 0{,}29 = 7$ Pf., also $\frac{G}{g} = 7 \cdot 0{,}032 = 0{,}224$ ein, so erhält man den Weg des Hammers beim Zusammendrücken:

$s = 50 \sqrt{\frac{20733333 \cdot 0{,}224}{19333333 \cdot 1400000}} = 50 \sqrt{\frac{0{,}46443}{2706666}} = 0{,}0207$ Zoll $= 0{,}249$ Linien. Hieraus folgt die Stoßkraft

$P = \frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2} \cdot s = \frac{19333333 \cdot 1400000}{20733333} \cdot 0{,}0207 = 27037$ Pf.; ferner die Zusammendrückung des Hammers: $\lambda_1 = \frac{P}{H_1} = \frac{27037}{19333333} = 0{,}0014$ Zoll $= 0{,}016$ Linien, und die der Bleiplatte: $\lambda_2 = \frac{P}{H_2} = \frac{27037}{1400000} = 0{,}0193$ Zoll $= 0{,}233$ Linien.

Elastisch-unelastischer Stoß. §. 277. Bewegen sich zwei Massen M_1 und M_2 mit den Geschwindigkeiten c_1 und c_2 hinter einander her, so ist im Augenblicke der größten Zusammendrückung die gemeinschaftliche Geschwindigkeit beider nach §. 272 $v = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2}$, und die auf die Zusammendrückung verwendete Arbeit nach §. 275:

$$L = \frac{(c_1 - c_2)^2}{2} \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} = \frac{(c_1 - c_2)^2}{2g} \cdot \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}.$$

Nun läßt sich diese Arbeit auch

$$= \tfrac{1}{2} Ps = \tfrac{1}{2} P (\lambda_1 + \lambda_2) = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2} s^2$$

setzen, es ergiebt sich folglich die Summe der Zusammendrückungen beider Massen: $s = (c_1 - c_2) \sqrt{\frac{G_1 G_2}{g(G_1 + G_2)} \cdot \frac{H_1 + H_2}{H_1 H_2}}$, woraus sich nun die zusammendrückende Kraft P und die Zusammendrückungen der einzelnen Massen, nämlich λ_1 und λ_2. finden lassen.

Sind die Massen unelastisch, so bleiben diese Zusammendrückungen auch nach dem Stoße, ist aber nur eine von beiden Massen unelastisch, so dehnt sich die andere Masse in einer zweiten Periode wieder aus, und es erzeugt die daraus erwachsende Arbeit eine neue Geschwindigkeitsveränderung. Ist z. B. die Masse $M_1 = \frac{G_1}{g}$ elastisch, so wird in dieser zweiten Periode

des Stoßes die Arbeit $\frac{1}{2} P\lambda_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{P^2}{H_1} = \frac{1}{2H_1}\left(\frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2}\right)^2 s^2$ Elastisch-unelastischer Stoß.

$= \frac{(c_1 - c_2)^2}{2g} \cdot \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \cdot \frac{H_2}{H_1 + H_2}$ frei; man hat daher in diesem Falle für die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 nach dem Stoße die Formeln:

$$M_1 v_1 + M_2 v_2 = M_1 c_1 + M_2 c_2 \text{ und}$$

$$M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 = M_1 v^2 + M_2 v^2 + (c_1 - c_2)^2 \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{H_2}{H_1 + H_2}$$

$$= M_1 c_1^2 + M_2 c_2^2 - (c_1 - c_2)^2 \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} + (c_1 - c_2)^2 \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{H_2}{H_1 + H_2},$$

d. i. $M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 = M_1 c_1^2 + M_2 c_2^2 - (c_1 - c_2)^2 \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{H_1}{H_1 + H_2}$.

Setzt man den Geschwindigkeitsverlust $c_1 - v_1 = x$, so hat man den Geschwindigkeitsgewinn $v_2 - c_2 = \frac{M_1 x}{M_2}$, und es nimmt die letzte Gleichung die Form

$$x(2c_1 - x) - x\left(2c_2 + \frac{M_1 x}{M_2}\right) - (c_1 - c_2)^2 \frac{M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{H_1}{H_1 + H_2} = 0,$$

oder

$$\frac{M_1 + M_2}{M_2} x^2 - 2(c_1 - c_2)x + (c_1 - c_2)^2 \cdot \frac{M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{H_1}{H_1 + H_2} = 0 \text{ an.}$$

Multiplicirt man dieselbe durch $\frac{M_2}{M_1 + M_2}$ und setzt man $\frac{H_1}{H_1 + H_2}$ $= 1 - \frac{H_2}{H_1 + H_2}$, so erhält man die quadratische Gleichung:

$$x^2 - 2(c_1 - c_2) \frac{M_2}{M_1 + M_2} x + (c_1 - c_2)^2 \left(\frac{M_2}{M_1 + M_2}\right)^2$$

$$= (c_1 - c_2)^2 \left(\frac{M_2}{M_1 + M_2}\right)^2 \cdot \frac{H_2}{H_1 + H_2}, \text{ oder}$$

$$\left(x - (c_1 - c_2) \frac{M_2}{M_1 + M_2}\right)^2 = (c_1 - c_2)^2 \left(\frac{M_2}{M_1 + M_2}\right)^2 \cdot \frac{H_2}{H_1 + H_2},$$

deren Auflösung giebt x, oder den Geschwindigkeitsverlust des ersten Körpers:

$$c_1 - v_1 = (c_1 - c_2) \frac{M_2}{M_1 + M_2}\left(1 + \sqrt{\frac{H_2}{H_1 + H_2}}\right),$$

und den Geschwindigkeitsgewinn des andern Körpers:

$$v_2 - c_2 = (c_1 - c_2) \frac{M_1}{M_1 + M_2}\left(1 + \sqrt{\frac{H_2}{H_1 + H_2}}\right).$$

Beispiel. Wenn man annimmt, daß in dem Beispiele des vorigen Paragraphen der eiserne Hammer vollkommen elastisch und die Bleiplatte ganz unelastisch ist, so erhält man den Geschwindigkeitsverlust des mit 50 Fuß Geschwindig-

keit auffallenden 7 Pfd. schweren Hammers, da $c_2 = 0$ und $M_2 = \infty$ zu setzen ist:

$$c_1 - v_1 = c_1 \left(1 + \sqrt{\frac{H_2}{H_1 + H_2}}\right) = 50 \left(1 + \sqrt{\frac{1400000}{20733333}}\right)$$

$$= 50\,(1 + 0{,}26) = 63 \text{ Fuß},$$

daher die Geschwindigkeit des Hammers nach dem Stoße: $v_1 = c_1 - 63 = 50 - 63 = -13$ Fuß. Die Geschwindigkeit der unterstützten Bleiplatte bleibt Null.

Unvollkommen elastischer Stoß. §. 278. Sind die an einander anstoßenden Körper unvollkommen elastisch, so dehnen sich dieselben in der zweiten Periode der Stoßzeit nur zum Theil wieder aus, es wird also auch die beim Comprimiren in der ersten Periode verbrauchte lebendige Kraft in der zweiten Periode nicht vollständig wieder ausgegeben. Sind wieder λ_1 und λ_2 die Tiefen der Eindrücke, und ist P die Stoßkraft, so hat man die Arbeitsverluste beim Comprimiren $= \frac{1}{2} P\lambda_1$ und $\frac{1}{2} P\lambda_2$, und wird nun beim Ausdehnen hiervon das μfache, oder allgemeiner, beim Ausdehnen des einen Körpers das μ_1- und beim Ausdehnen des zweiten das $\mu_2$fache zurückgegeben, so bleibt der gesammte Arbeitsverlust nach dem Stoße:

$L = \frac{1}{2} P[(1-\mu_1)\lambda_1 + (1-\mu_2)\lambda_2]$, oder $\lambda_1 = \frac{P}{H_1}$ und $\lambda_2 = \frac{P}{H_2}$ gesetzt,

$L = \frac{1}{2} P^2 \left[\frac{1-\mu_1}{H_1} + \frac{1-\mu_2}{H_2}\right]$. Nach dem vorigen Paragraphen ist aber $P = \frac{H_1 H_2 s}{H_1 + H_2}$ und $s = (c_1 - c_2)\sqrt{\frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{H_1 + H_2}{H_1 H_2}}$, daher ergiebt sich dann der in Frage gestellte Arbeitsverlust

$$L = \frac{(c_1 - c_2)^2}{2} \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2}\left(\frac{1-\mu_1}{H_1} + \frac{1-\mu_2}{H_2}\right).$$

Um nun die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 nach dem Stoße zu finden, haben wir die Gleichungen $M_1 v_1 + M_2 v_2 = M_1 c_1 + M_2 c_2$ und

$$M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 = M_1 c_1^2 + M_2 c_2^2 - (c_1 - c_2)^2 \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{(1-\mu_1) H_2 + (1-\mu_2) H_1}{H_1 + H_2}$$

mit einander zu verbinden und aufzulösen. Ganz auf dieselbe Weise wie im vorigen Paragraphen ergiebt sich der Geschwindigkeitsverlust des ersten Körpers:

$$c_1 - v_1 = (c_1 - c_2)\frac{M_2}{M_1 + M_2}\left(1 + \sqrt{\frac{\mu_2 H_1 + \mu_1 H_2}{H_1 + H_2}}\right),$$

und der Geschwindigkeitsgewinn des vorangehenden Körpers:

$$v_2 - c_2 = (c_1 - c_2)\frac{M_1}{M_1 + M_2}\left(1 + \sqrt{\frac{\mu_2 H_1 + \mu_1 H_2}{H_1 + H_2}}\right).$$

Diese beiden allgemeinen Formeln enthalten auch die Gesetze des vollkommen elastischen und des unelastischen Stoßes. Setzt man in ihnen

$\mu_1 = \mu_2 = 1$, so erhält man die schon oben gefundenen Formeln für den Stoß zwischen vollkommen elastischen Körpern, nimmt man aber $\mu_1 = \mu_2 = 0$, so erhält man die Formeln des unelastischen Stoßes u. s. w. Sind beide Körper von gleichem Grade der Elasticität, ist also $\mu_1 = \mu_2$, so hat man einfacher $c_1 - v_1 = (c_1 - c_2) \frac{M_2}{M_1 + M_2} (1 + \sqrt{\mu})$ und Unvollkommen elastischer Stoß.

$$v_2 - c_2 = (c_1 - c_2) \frac{M_1}{M_1 + M_2} (1 + \sqrt{\mu}).$$

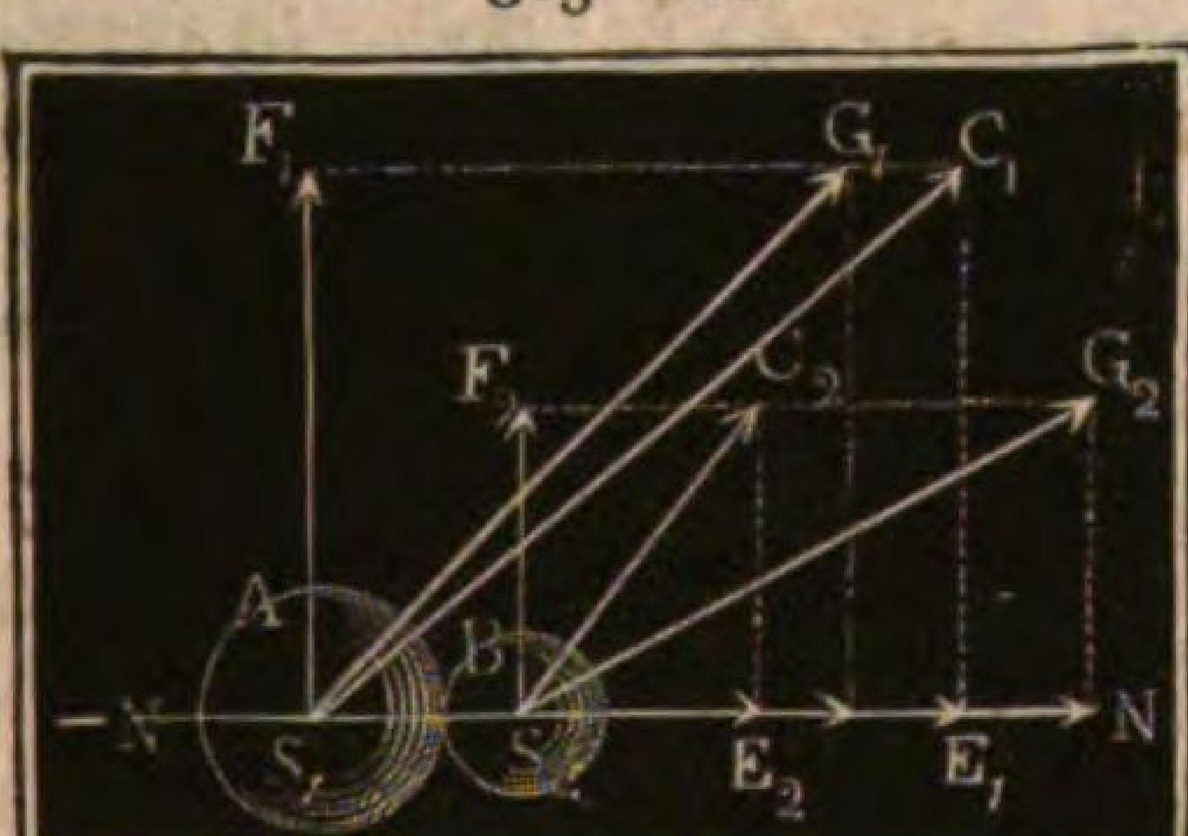
Ist noch die Masse M_2 in Ruhe und unendlich groß, so folgt $c_1 - v_1 = c_1 (1 + \sqrt{\mu})$, d. i. $v_1 = -c_1 \sqrt{\mu}$, sowie umgekehrt $\mu = \left(\frac{v_1}{c_1}\right)^2$. Läßt man die Masse M_1 von einer Höhe h auf eine gleichartige Masse M_2 herabfallen, und steigt dieselbe auf eine Höhe h_1 zurück, so kann man aus beiden den Coefficienten der unvollkommenen Elasticität durch die Formel $\mu = \frac{h_1}{h}$ finden. Schon Newton fand auf diese Weise für Elfenbein $\mu = (8/9)^2 = 64/81 = 0,79$, für Glas $\mu = (15/16)^2 = 0,9375^2 = 0,879$; für Kork, Stahl, Wolle $\mu = (5/9)^2 = 0,555^2 = 0,309$. Hierbei wird jedoch vorausgesetzt, daß der stoßende oder auffallende Körper die Kugel- und der gestoßene Körper oder die Unterlage eine Plattenform hat.

Beispiel. Welche Geschwindigkeiten nehmen zwei Stahlplatten nach dem Stoße an, wenn dieselben vor dem Stoße die Geschwindigkeiten $c_1 = 10$ und $c_2 = -6$ Fuß besitzen, die eine 30 und die andere 40 Pfund wiegt? Hier ist $c_1 - v_1 = (10 + 6) \cdot 40/70\, (1 + 5/9) = 16 \cdot 4/7 \cdot 14/9 = \frac{16 \cdot 8}{9} = 14{,}22$ Fuß, daher sind die gesuchten Geschwindigkeiten

$v_1 = c_1 - 14{,}22 = 10 - 14{,}22 = -4{,}22$ Fuß und
$v_2 = c_2 + 10{,}66 = -6 + 10{,}66 = 4{,}66$ Fuß.

§. 279. Weichen die Bewegungsrichtungen $\overline{S_1 C_1}$ und $\overline{S_2 C_2}$ zweier Körper A und B, Figur 388, von der Normale $N\overline{N}$ zur Berührungsebene ab, so ist deren Anstoß ein schiefer. Wir führen die Theorie desselben auf die des geraden Stoßes zurück, wenn wir die Geschwindigkeiten $S_1 C_1 = c_1$ und $S_2 C_2 = c_2$ nach der Normale und nach einer Tangentialrichtung zerlegen; die Seitengeschwindigkeiten in der Richtung der Normale $N\overline{N}$ geben einen Centralstoß und werden daher auch genau so verändert, wie beim Centralstoß, die mit der Berührungsebene parallelen Schiefer Stoß.

Fig. 388.



Schiefer Stoß. Geschwindigkeiten hingegen verursachen gar keinen Stoß und bleiben daher unverändert. Vereinigt man die nach den Regeln des Centralstoßes veränderte Normalgeschwindigkeit eines jeden Körpers mit der unverändert gebliebenen Tangentialgeschwindigkeit, so erhält man die resultirenden Geschwindigkeiten dieser Körper nach dem Stoße. Setzen wir die Winkel, welche die Bewegungsrichtungen mit der Normale einschließen, α_1 und α_2, also $C_1 S_1 N = \alpha_1$ und $C_2 S_2 N = \alpha_2$, so erhalten wir für die Normalgeschwindigkeiten $S_1 E_1$ und $S_2 E_2$ die Werthe $c_1 \cos \alpha_1$ und $c_2 \cos. \alpha_2$, dagegen für die Tangentialgeschwindigkeiten $S_1 F_1$ und $S_2 F_2$: $c_1 \sin. \alpha_1$ und $c_2 \sin. \alpha_2$. Durch den Stoß erleiden aber die ersteren Geschwindigkeiten Veränderungen, und es geht die erste über in

$$v_1 = c_1 \cos. \alpha_1 - (c_1 \cos. \alpha_1 - c_2 \cos. \alpha_2) \frac{M_2}{M_1 + M_2} (1 + \sqrt{\mu})$$

und die zweite in:

$$v_2 = c_2 \cos. \alpha_2 + (c_1 \cos. \alpha_1 - c_2 \cos. \alpha_2) \frac{M_1}{M_1 + M_2} (1 + \sqrt{\mu}),$$

wofern, wie seither allemal, M_1 und M_2 die Massen beider Körper bezeichnen.

Aus v_1 und $c_1 \sin. \alpha_1$ ergiebt sich die resultirende Geschwindigkeit $S_1 G_1$ des ersten Körpers $w_1 = \sqrt{v_1^2 + c_1^2 \sin. \alpha_1^2}$, und aus v_2 und $c_2 \sin. \alpha_2$ die Geschwindigkeit $S_2 G_2$ des zweiten Körpers $w_2 = \sqrt{v_2^2 + c_2^2 \sin. \alpha_2^2}$; auch ergeben sich die Abweichungen der Geschwindigkeitsrichtungen von der Normale durch die Formeln

$$tang. \beta_1 = \frac{c_1 \sin. \alpha_1}{v_1} \text{ und } tang. \beta_2 = \frac{c_2 \sin. \alpha_2}{v_2},$$

wenn β_1 den Winkel $G_1 S_1 N$ und β_2 den Winkel $G_2 S_2 N$ bezeichnet.

Beispiel. Zwei Kugeln von 30 und 50 Pfd. Gewicht stoßen sich mit den Geschwindigkeiten $c_1 = 20$ und $c_2 = 25$ Fuß, die um die Winkel $\alpha_1 = 21^\circ, 35'$ und $\alpha_2 = 65^\circ, 20'$ von der Normale abweichen, in welchen Richtungen und mit welchen Geschwindigkeiten gehen diese Massen nach dem Stoße fort? Es sind die unveränderlichen Seitengeschwindigkeiten: $c_1 \sin. \alpha_1 = 20 . \sin. 21^\circ, 35' = 7,357$ Fuß und $c_2 \sin. \alpha_2 = 25 . \sin. 65^\circ, 20' = 22,719$ Fuß, dagegen die veränderlichen: $c_1 \cos. \alpha_1 = 20 . \cos. 21^\circ, 35' = 18,598$ Fuß, und $c_2 \cos. \alpha_2 = 25 . \cos. 65^\circ, 20' = 10,433$ Fuß. Sind die Körper unelastisch, so hat man $\mu = 0$, daher die veränderten Normalgeschwindigkeiten

$v_1 = 18,598 - (18,598 - 10,433) . {}^{50}/_{80} = 18,598 - 5,103 = 13,495$ Fuß und
$v_2 = 10,433 + 8,165 . {}^{3}/_{8} = 10,433 + 3,062 = 13,495$ Fuß.

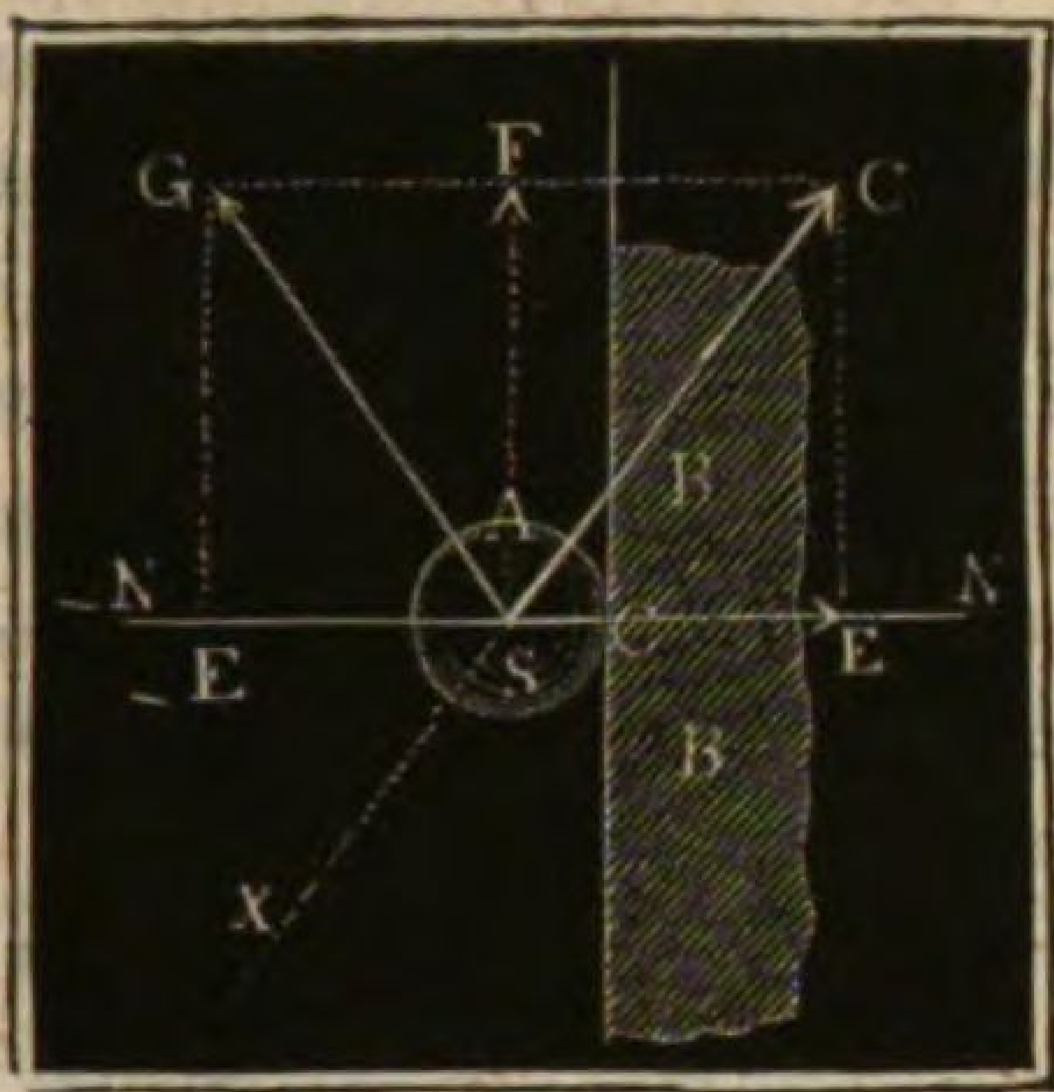
Die resultirenden Geschwindigkeiten sind nun

$$w_1 = \sqrt{13,495^2 + 7,357^2} = \sqrt{236,24} = 15,37 \text{ Fuß und}$$
$$w_2 = \sqrt{13,495^2 + 22,719^2} = \sqrt{698,27} = 26,42 \text{ Fuß};$$

für ihre Richtungen hat man

$$tang. \beta_1 = \frac{7,357}{13,495},\ log.\ tang. \beta_1 = 0,73653 - 1,\ \beta_1 = 28^\circ, 36' \text{ und}$$
$$tang. \beta_2 = \frac{22,719}{13,495},\ log.\ tang. \beta_2 = 0,22622,\ \beta_2 = 59^\circ, 17'.$$

Fig. 389.



§. 280. Trifft die Masse A, Fig. 389, gegen eine andere unendlich große Masse, oder gegen ein unbewegliches Hinderniß BB, hat man also $c_2 = 0$ und $M_2 = \infty$, so folgt Schiefer Stoß.

$$v_1 = c_1 cos.\alpha_1 - c_1 cos.\alpha_1 (1 + \sqrt{\mu})$$
$$= - c_1 cos.\alpha_1 \sqrt{\mu} \text{ und}$$
$$v_2 = 0 + c_1 cos.\alpha_1 \cdot \frac{M_1 (1 + \sqrt{\mu})}{\infty}$$
$$= 0 + 0 = 0;$$

ist nun noch $\mu = 0$, so wird auch $v_1 = 0$, ist aber $\mu = 1$, so ist $v_1 = - c_1 cos.\alpha_1$, d. h. beim unelastischen Stoße geht die Normalgeschwindigkeit ganz verloren, beim elastischen hingegen wird sie in die entgegengesetzte verwandelt. Für den Winkel, um welchen die Bewegungsrichtung nach dem Stoße von der Normale abweicht, ist

$$tang.\beta_1 = \frac{c_1 sin.\alpha_1}{v_1} = - \frac{c_1 sin.\alpha_1}{c_1 cos.\alpha_1 \sqrt{\mu}} = - tang.\alpha_1 \sqrt{\frac{1}{\mu}};$$

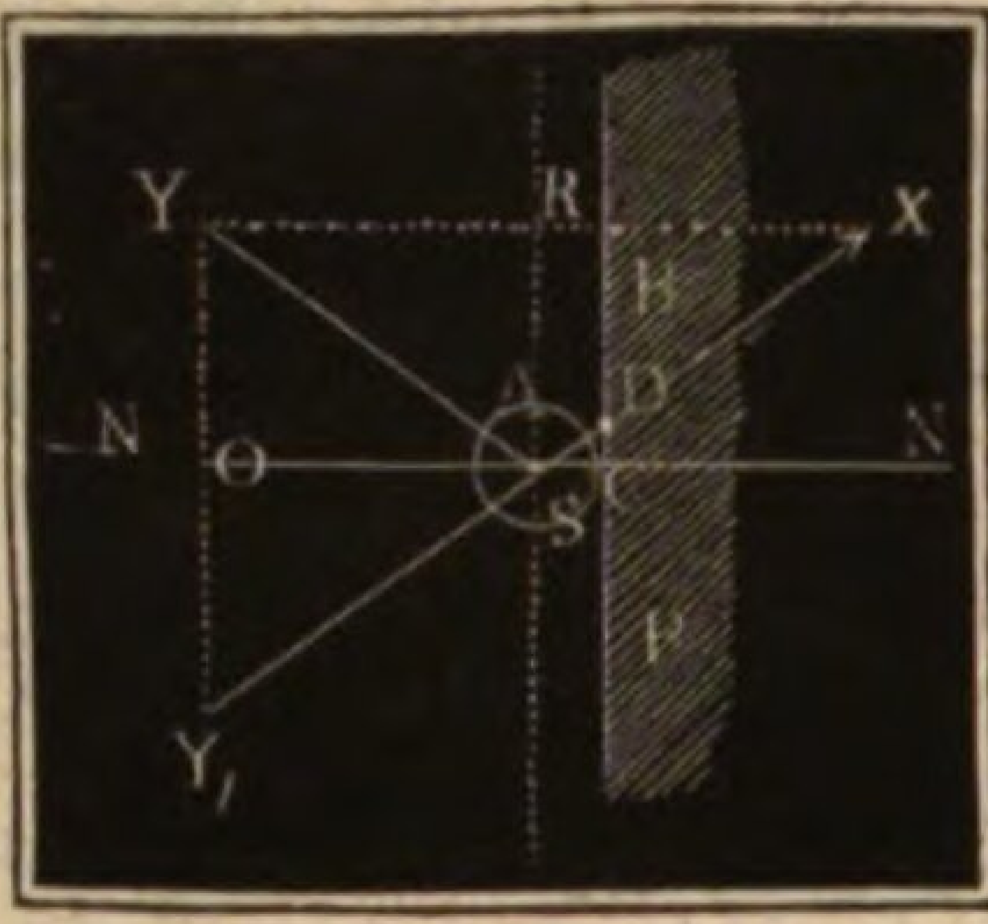
für unelastische Körper wird also

$tang.\,\beta_1 = - \dfrac{tang.\alpha_1}{0} = \infty$, d. i. $\beta_1 = 90^0$, und für elastische $tang.\,\beta_1 = - tang.\,\alpha_1$, d. i. $\beta_1 = -\alpha_1$. Nach dem Stoße eines unelastischen Körpers gegen ein unelastisches Hinderniß geht also der erstere mit der Tangentialgeschwindigkeit $c_1\ sin.\ \alpha_1$ in der Richtung SF der Berührungebene fort, nach dem Stoße eines elastischen Körpers gegen ein elastisches Hinderniß aber geht der Körper mit unveränderter Geschwindigkeit in einer Richtung SG fort, die mit der Normale $N\overline{N}$ und der anfänglichen Richtung XS in eine Ebene fällt, und mit der Normale denselben Winkel $GS\overline{N}$ einschließt, wie die Bewegungsrichtung vor dem Stoße mit ebenderselben auf der entgegengesetzten Seite. Man nennt den Winkel $XS\overline{N}$, welchen die Bewegungsrichtung vor dem Stoße mit der Normale oder dem Lothe einschließt, den Einfallswinkel (franz. angle d'incidence; engl. angle of incidence) und den Winkel $GS\overline{N}$, welchen die Bewegungsrichtung nach dem Stoße eben damit bildet, den Austritts- oder Reflexionswinkel (franz. angle de réflexion, engl. angle of reflexion), und kann hiernach behaupten: beim vollkommen elastischen Stoße fallen Reflexions- und Einfallswinkel mit dem Einfallslothe in einerlei Ebene und beide Winkel sind einander gleich.

Beim unvollkommen elastischen Stoße ist das Verhältniß $\sqrt{\mu}$ der Tan-

Schiefer Stoß. genten dieser Winkel gleich dem Verhältnisse der durch die Ausdehnung zurückgegebenen Geschwindigkeit zu der durch die Compression verlorenen Geschwindigkeit. Mit Hülfe dieses Gesetzes läßt sich nun leicht die Richtung finden, in welcher der Körper A, Figur 390, gegen das unbewegliche Hinderniß BB zu stoßen ist, damit er nach dem Stoße eine gewisse Richtung SY verfolge. Ist der Stoß ein elastischer, so fällen wir von einem Punkte Y der gegebenen Richtung das Perpendikel YO gegen das Einfallsloth NN, verlängern dasselbe, bis die Verlängerung OY_1 dem Perpendikel selbst gleich wird: SY_1 ist dann die in Frage stehende Stoßrichtung, denn es ist, dieser Construction zufolge, Winkel $NSY_1 = NSY$. Ist der Stoß unelastisch, so mache man $OY_1 = \sqrt{\mu}\,.\,OY$, dann ist Y_1S ebenfalls die gesuchte Anfangsrichtung, da $\frac{tang.\alpha_1}{tang.\beta_1} = \frac{OY_1}{OY}$ und auch $= \sqrt{\mu}$ ist.

Fig. 390.



Fällt man ein Loth YR gegen die Linie SR parallel zur Berührungsebene und macht dessen Verlängerung $RX = \sqrt{\frac{1}{\mu}}\,RY$, so bekommt man aus leicht einzusehenden Gründen in SX die gesuchte Einfallsrichtung ebenfalls.

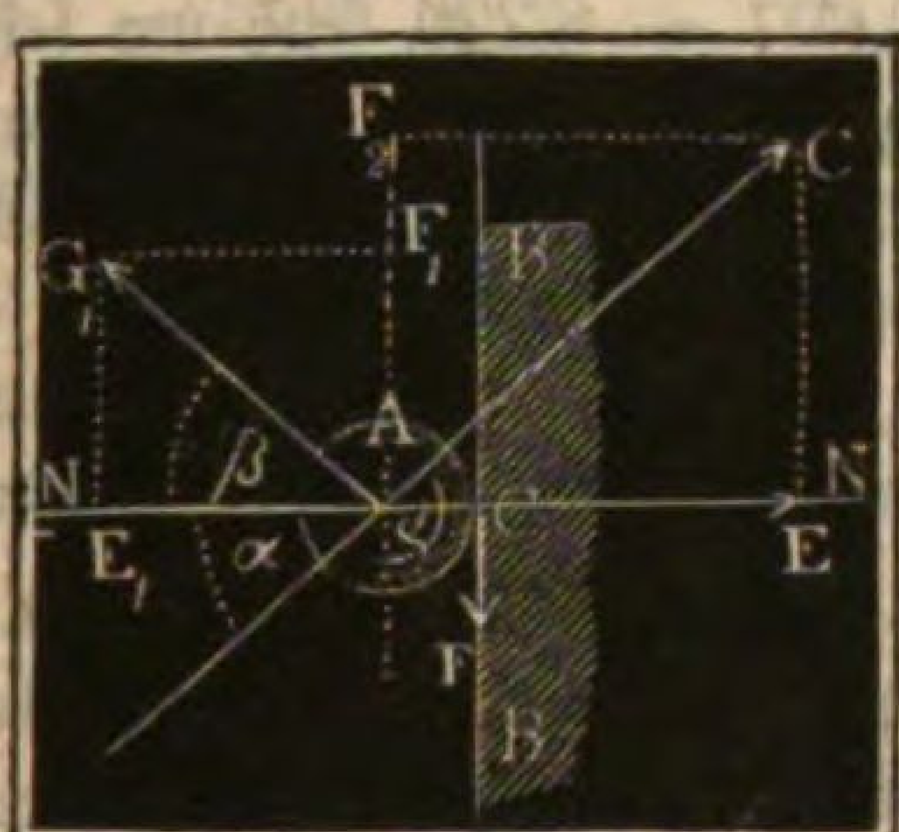
Anmerkung. Die Theorie des schiefen Stoßes findet ihre vorzüglichste Anwendung beim Billardspiel. S. Théorie mathématique des effets du jeu de billard, par Coriolis. Nach Coriolis ist beim Anstoße eines Billardballes gegen die Bande das Verhältniß der zurückgegebenen Geschwindigkeit zur Einfallsgeschwindigkeit = 0,5 bis 0,6, also $\mu = 0,5^2 = 0,25$ bis $0,6^2 = 0,36$. Mit Hülfe dieses Werthes läßt sich nun auch die Richtung angeben, in welcher ein Ball A gegen eine Bande BB zu stoßen ist, damit er nach einem gegebenen Punkte Y von dieser zurückgeworfen werde. Man fälle von dem gegebenen Punkte Y das Perpendikel YR gegen die Schwerlinie des Balles parallel zur Bande, verlängere dasselbe um $RX = \sqrt{\frac{1}{\mu}} = {}^{10}/_{6}$ bis ${}^{10}/_{5}$ seines Werthes und ziehe die Gerade Y_1X: der sich herausstellende Durchschnitt D ist die Stelle, nach welcher man den Ball A zu stoßen hat, damit er durch Bricol nach Y gelange. Durch die Drehbewegung des Balles wird dieses Verhältniß noch etwas geändert.

§. 281. Bei dem schiefen Stoße entsteht auch eine Reibung zwischen den sich stoßenden Körpern, welche die Seitengeschwindigkeiten in der Richtung der Berührungsebene abändert. Die Reibung des Stoßes bestimmt sich wie die Reibung des Druckes; bezeichnet P die Stoßkraft und φ den Rei-

bungscoefficienten, so ist sie $F = \varphi P$. Sie unterscheidet sich nur inso- Schiefer Stoß.
fern von der Reibung des Druckes, als sie, wie der Stoß selbst, nur während einer sehr kleinen Zeit wirksam ist. Die durch sie hervorgebrachten Geschwindigkeitsveränderungen sind aber deshalb nicht unmeßbar klein, denn die Stoßkraft P, und folglich auch der Theil φP derselben, ist in der Regel sehr groß. Bezeichnet man die stoßende Masse durch M und die durch die Stoßkraft P erzeugte Normalacceleration durch p, so hat man $P = Mp$ und daher $F = \varphi Mp$, sowie die Verzögerung oder negative Acceleration der Reibung während des Stoßes $\frac{F}{M} = \varphi p$; d. i. φmal so groß, als die der Normalkraft. Nun haben aber die Wirkungen beider Kräfte gleiche Zeitdauer; es ist daher auch **die durch die Reibung erzeugte Geschwindigkeitsveränderung φmal so groß, als die durch den Stoß bewirkte Veränderung in der Normalgeschwindigkeit.**

In dem Falle, wenn ein Körper gegen eine unbewegliche Masse BB unter dem Einfallswinkel α, Fig. 391, stößt, ist nach dem vorigen Paragraphen die Veränderung in der Normalgeschwindigkeit:

Fig. 391.



$w = c \cos. \alpha \, (1 + \sqrt{\mu})$; daher die durch die Reibung bewirkte Veränderung in der Tangentialgeschwindigkeit

$= \varphi w = \varphi c \, (1 + \sqrt{\mu}) \cos. \alpha$. Es geht also nach dem Stoße die Seitengeschwindigkeit $c \sin. \alpha$ in $c \sin. \alpha - \varphi c \, (1 + \sqrt{\mu}) \cos. \alpha$ $= [\sin. \alpha - \varphi \cos. \alpha (1 + \sqrt{\mu})] \, c$ über und fällt bei vollkommen elastischen Körpern $= (\sin. \alpha - 2\varphi \cos. \alpha) \, c$ dagegen bei unelastischen Körpern $= (\sin. \alpha - \varphi \cos \alpha) \, c$ aus.

Durch die Reibung des Stoßes erhalten die Körper sehr oft eine Drehung um ihren Schwerpunkt, oder es wird, wenn eine Drehbewegung vor dem Stoße schon vorhanden war, dieselbe abgeändert. Ist das Trägheitsmoment des runden Körpers A, in Hinsicht auf seinen Schwerpunkt S $= Ml^2$, und der Drehungshalbmesser $SC = a$, so hat man die auf den Berührungspunkt C reducirte Masse des Körpers $= \frac{Ml^2}{a^2}$, daher die durch die Reibung F hervorgebrachte Drehbeschleunigung dieses Punktes:

$$p_1 = \frac{F}{Ml^2 : a^2} = \frac{\varphi Mp}{Ml^2 : a^2} = \varphi p \cdot \frac{a^2}{l^2},$$

und die entsprechende Geschwindigkeitsveränderung:

$$w_1 = \varphi \frac{a^2}{l^2} \cdot w = \varphi \frac{a^2}{l^2} \, (1 + \sqrt{\mu}) \, c \cos. \alpha.$$

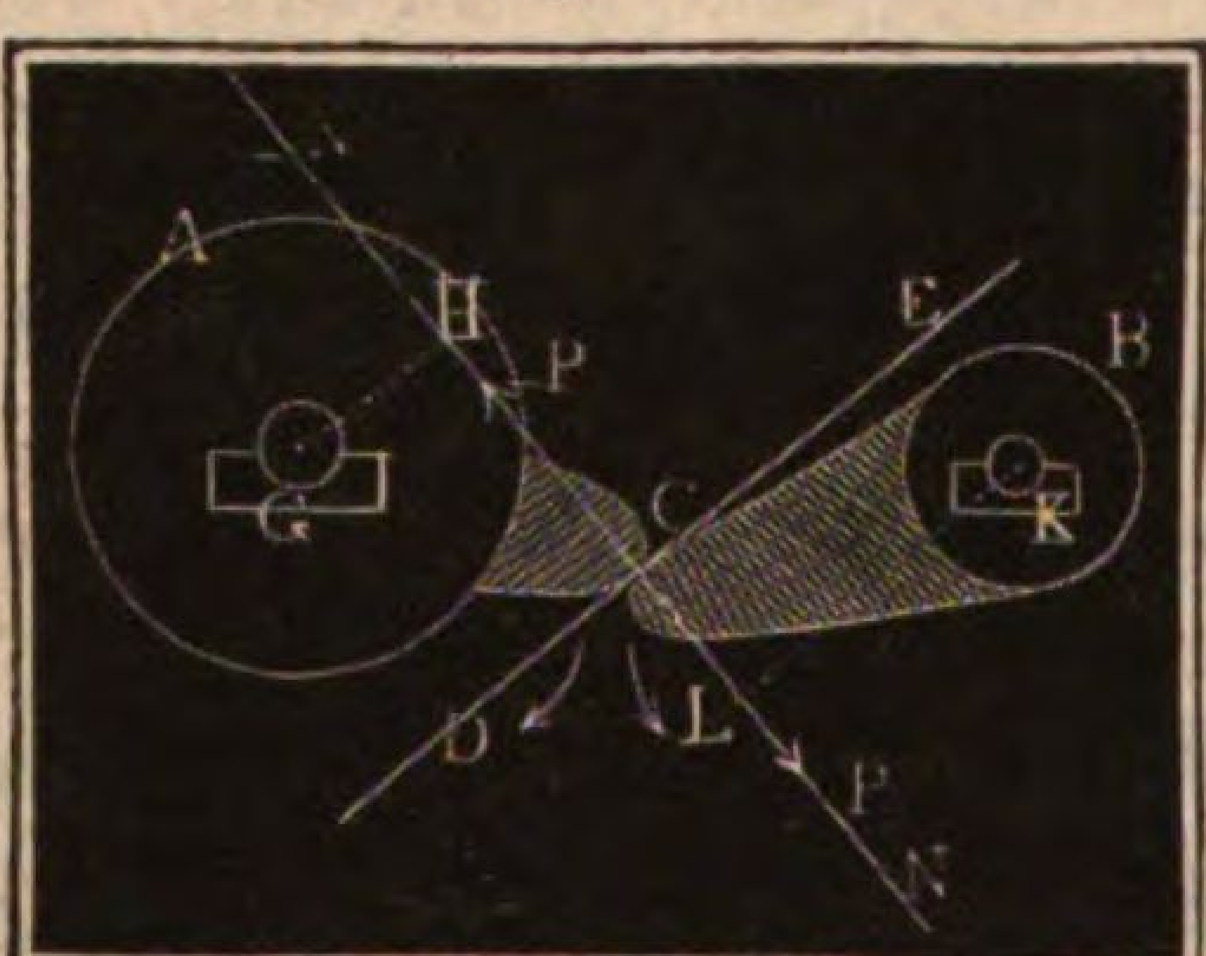
Schiefer Stoß. Bei einem Cylinder ist $\frac{a^2}{l^2} = 2$, und bei einer Kugel $= \frac{5}{2}$, daher folgt für diese runden Körper die durch den Stoß gegen eine Ebene hervorgebrachte Veränderung in der Umdrehungsgeschwindigkeit:

$$w_1 = 2\varphi\,(1 + \sqrt{\mu})\; c\, cos.\alpha \text{ und } = \tfrac{5}{2}\varphi\,(1 + \sqrt{\mu})\; c\, cos.\alpha.$$

Beispiel. Wenn ein Billardball mit 15 Fuß Geschwindigkeit und unter dem Einfallswinkel $\alpha = 45^0$ gegen die Bande stößt, welche Bewegungen nimmt derselbe nach dem Stoße an? Setzt man für $\sqrt{\mu}$ den mittleren Werth 0,55, so hat man die normale Seitengeschwindigkeit nach dem Stoße $= - \sqrt{\mu}\; c\, cos.\alpha$ $= - 0{,}55 \,.\, 15 \,.\, cos.\, 45^0 = - 8{,}25 \,.\, \sqrt{\frac{1}{2}} = - 5{,}833$ Fuß, und nimmt man mit Coriolis $\varphi = 0{,}20$ an, so erhält man die Seitengeschwindigkeit parallel zur Bande $= c\, sin.\, \alpha - \varphi\, (1 + \sqrt{\mu})\; c\; cos.\, \alpha = (1 - 0{,}20 \,.\, 1{,}55)\; 10{,}607$ $= 0{,}69 \,.\, 10{,}607 = 7{,}319$ Fuß, auch folgt für den Reflexionswinkel β:
$tang.\beta = \frac{7{,}319}{5{,}833} = 1{,}2548$, also $\beta = 51^0, 27'$, und die Geschwindigkeit nach dem Stoße bleibt $= \frac{5{,}833}{cos.\; 51^0, 27'} = 9{,}360$ Fuß. Außerdem nimmt der Ball auch noch die Umdrehungsgeschwindigkeit $\frac{5}{2}\varphi \,.\, 1{,}55 \,.\, 10{,}607 = 8{,}220$ Fuß um seine vertikale Schwerlinie an. Da der Ball sich nicht gleitend, sondern wälzend auf dem Billard fortbewegt, so ist anzunehmen, daß er außer der fortschreitenden Geschwindigkeit $c = 15$ Fuß auch noch eine gleichgroße Umdrehungsgeschwindigkeit besitze und daß sich diese ebenfalls in die Componenten $c\; cos.\; \alpha = 10{,}607$ und $c\; sin.\; \alpha = 10{,}607$ zerlegen lasse. Der erste Component entspricht einer Drehung um eine Axe parallel zur Bandenaxe und geht in $c\, cos.\, \alpha - \frac{5}{2}\varphi\, (1 + \sqrt{\mu})\; c\; cos.\, \alpha$ $= 10{,}607 - 8{,}220 = 2{,}387$ Fuß über, der andere Component $c\; sin.\; \alpha = 10{,}607$ Fuß entspricht einer Drehung um eine Axe normal zur Bande und bleibt unverändert.

Drehbare Körper.

Fig. 392.



§. 282. Stoßen zwei um feste Axen G und K drehbare Körper A und B, Fig. 392, gegen einander, so stellen sich Geschwindigkeitsveränderungen heraus, die sich aus den Trägheitsmomenten $M_1 l_1^2$ und $M_2 l_2^2$ der Massen dieser Körper hinsichtlich der festen Axen und mit Hülfe der im Vorstehenden gefundenen Formeln bestimmen lassen. Sind die Perpendikel GH und KL, welche sich von den Drehungsaxen gegen die Stoßlinie fällen lassen, a_1 und a_2, so hat man die auf die Lothpunkte H und L in der Stoßlinie reducirten trägen Massen $= \frac{M_1 l_1^2}{a_1^2}$ und $\frac{M_2 l_2^2}{a_2^2}$, und führt man diese Werthe statt M_1 und M_2 in die Formeln für den freien Centralstoß ein, so bekommt man die Geschwindigkeitsveränderungen der

Punkte H und L (§. 278) $= (c_1 - c_2) \frac{M_2 l_2^2 : a_2^2}{M_1 l_1^2 : a_1^2 + M_2 l_2^2 : a_2^2}(1 + \sqrt{\mu})$ Drehbare Körper.

$$= (c_1 - c_2) \frac{M_2 l_2^2 a_1^2}{M_1 l_1^2 a_2^2 + M_2 l_2^2 a_1^2}(1 + \sqrt{\mu}) \text{ und}$$

$$(c_1 - c_2) \frac{M_1 l_1^2 : a_1^2}{M_1 l_1^2 : a_1^2 + M_2 l_2^2 : a_2^2}(1 + \sqrt{\mu}),$$

$$= (c_1 - c_2) \frac{M_1 l_1^2 a_2^2}{M_1 l_1^2 a_2^2 + M_2 l_2^2 a_1^2}(1 + \sqrt{\mu}),$$

wofern c_1 und c_2 die Geschwindigkeiten dieser Punkte vor dem Stoße waren.

Führen wir aber die Winkelgeschwindigkeiten ein, bezeichnen wir die Winkelgeschwindigkeiten vor dem Stoße durch ε_1 und ε_2 und die nach dem Stoße durch ω_1 und ω_2, so haben wir $c_1 = a_1 \varepsilon_1$, $c_2 = a_2 \varepsilon_2$ zu setzen und erhalten für den stoßenden Körper den Verlust an Winkelgeschwindigkeit $= a_1 (a_1 \varepsilon_1 - a_2 \varepsilon_2) \frac{M_2 l_2^2}{M_1 l_1^2 a_2^2 + M_2 l_2^2 a_1^2}(1 + \sqrt{\mu})$ und für den gestoßenen Körper den Gewinn an Winkelgeschwindigkeit

$$= a_2 (a_1 \varepsilon_1 - a_2 \varepsilon_2) \frac{M_1 l_1^2}{M_1 l_1^2 a_2^2 + M_2 l_2^2 a_1^2}(1 + \sqrt{\mu}),$$

folglich die Winkelgeschwindigkeiten nach dem Stoße selbst:

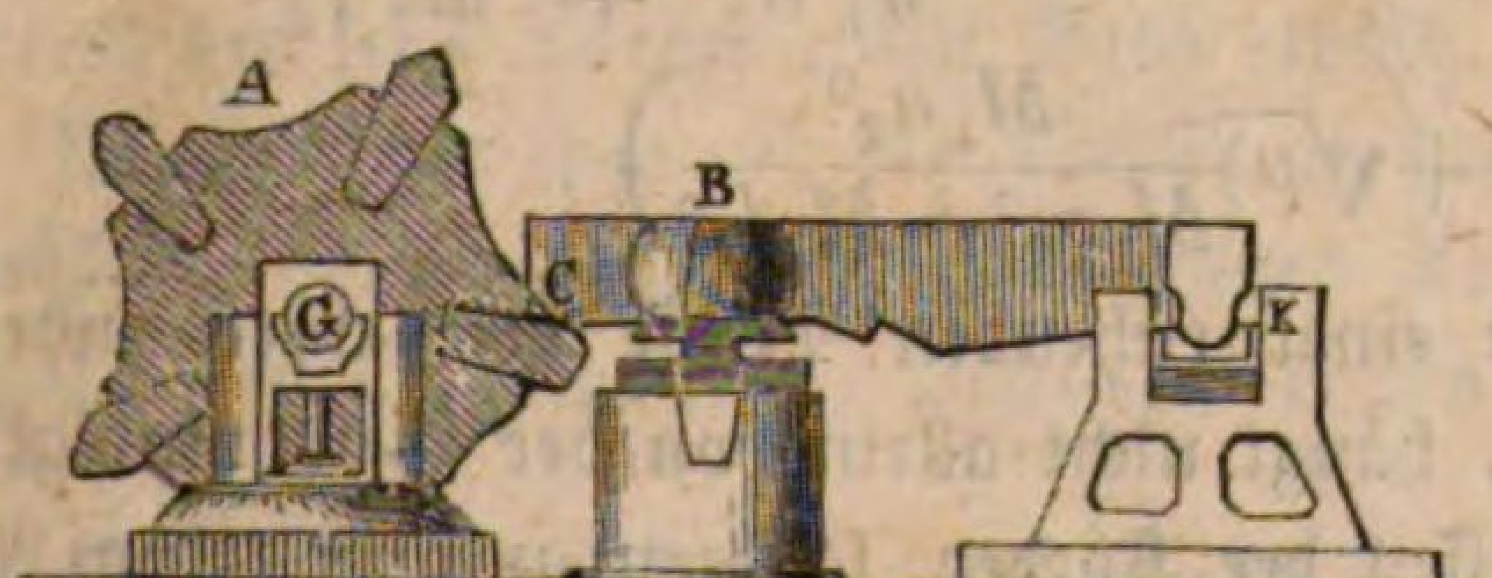
$$\omega_1 = \varepsilon_1 - a_1 (a_1 \varepsilon_1 - a_2 \varepsilon_2)(1 + \sqrt{\mu}) \frac{M_2 l_2^2}{M_1 l_1^2 a_2^2 + M_2 l_2^2 a_1^2} \text{ und}$$

$$\omega_2 = \varepsilon_2 + a_2 (a_1 \varepsilon_1 - a_2 \varepsilon_2)(1 + \sqrt{\mu}) \frac{M_1 l_1^2}{M_1 l_1^2 a_2^2 + M_2 l_2^2 a_1^2}.$$

Sind beide Körper vollkommen elastisch, so hat man $\mu = 1$, also $1 + \sqrt{\mu} = 2$, und sind sie unelastisch, so hat man $\mu = 0$, also $1 + \sqrt{\mu} = 1$. Im letzteren Falle ist der durch den Stoß hervorgebrachte Verlust an lebendiger Kraft

$$= (a_1 \varepsilon_1 - a_2 \varepsilon_2)^2 \cdot \frac{M_1 l_1^2 \cdot M_2 l_2^2}{M_1 l_1^2 a_2^2 + M_2 l_2^2 a_1^2}.$$

Fig. 393.



Beispiel. Die armirte Welle AG, Figur 393, hat das Trägheitsmoment in Hinsicht auf ihre Umdrehungsaxe G, $= M_1 l_1^2 = 40000 : g$, und der Stirnhammer BK dasselbe in Hinsicht auf seine Axe K, $= 150000 : g$, der Hebelarm GC der Welle ist 2 Fuß und der Hebelarm KC des Hammers 6 Fuß, und die Winkelgeschwindigkeit der Welle im Augenblicke des Stoßes an den Hammer = 1,05 Fuß. Wie groß ist diese Geschwindigkeit nach dem Stoße und welche Leistung geht durch jeden Stoß verloren, wenn gänzlicher Mangel an Elasticität vorhanden ist? Es ist die gesuchte Winkelgeschwindigkeit der Welle

Drehbare Körper.

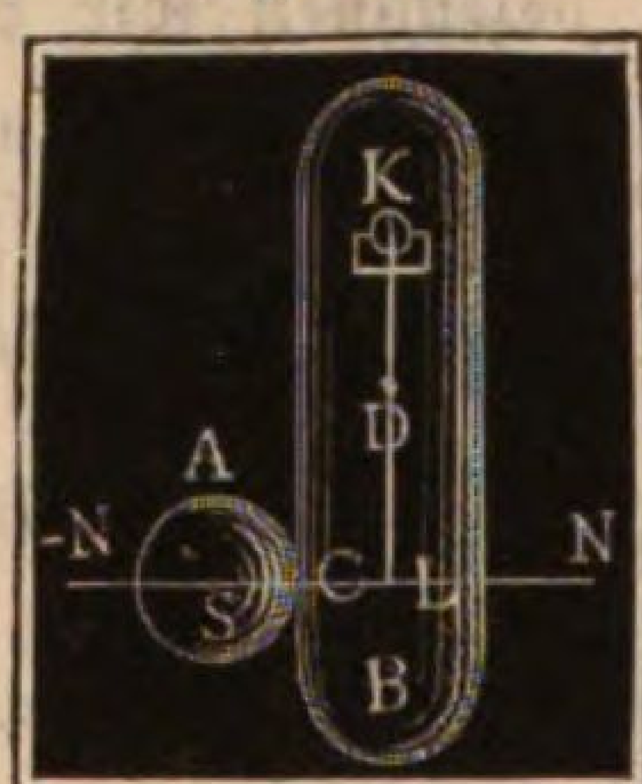
$$\omega_1 = 1{,}05 - \frac{4\,.\,1{,}05\,.\,150000}{40000\,.\,36 + 150000\,.\,4} = 1{,}05\left(1 - \frac{60}{204}\right) = 1{,}05\,.\,0{,}706$$

$= 0{,}741$ Fuß, und die des Hammers $= \frac{2\,.\,6\,.\,1{,}05\,.\,4}{204} = 0{,}247$ Fuß, d. i. 3mal so klein, als die der Welle. Der Arbeitsverlust bei jedem Anstoße ist

$$L = \frac{(2\,.\,1{,}05)^2}{2g}\,.\,\frac{40000\,.\,150000}{40000\,.\,36 + 150000\,.\,4} = 0{,}016\,.\,(2{,}1)^2\,.\,\frac{600000}{144+60}$$
$$= 0{,}016\,.\,4{,}41\,.\,\frac{150000}{51} = \frac{10584}{51} = 207{,}5 \text{ Fußpf.}$$

§. 283. Kommt ein freier und in fortschreitender Bewegung befindlicher Körper A, Fig. 394, mit einem um eine feste Axe K drehbaren Körper BCK zum Stoße, so findet man die Geschwindigkeiten nach dem Stoße, indem man in den Formeln des vorigen Paragraphen statt $a_1\varepsilon_1$ und $a_1\omega_1$ die progressiven Geschwindigkeiten c_1 und v_1, und statt $\frac{M_1 l_1^2}{a_1^2}$ die träge Masse M_1 des ersten Körpers einsetzt, die übrigen Bezeichnungen aber unverändert läßt. Es ist hiernach die Geschwindigkeit der ersten Masse nach dem Stoße:

Fig. 394.



$$v_1 = c_1 - (c_1 - a_2\,\varepsilon_2)\,(1 + \sqrt{\mu})\,.\,\frac{M_2 l_2^2}{M_1 a_2^2 + M_2 l_2^2},$$ und die Winkelgeschwindigkeit der zweiten:

$$\omega_2 = \varepsilon_2 + a_2\,(c_1 - a_2\,\varepsilon_2)\,(1 + \sqrt{\mu})\,.\,\frac{M_1}{M_1 a_2^2 + M_2 l_2^2}.$$

Ist die Masse M_2 in Ruhe, also $\varepsilon_2 = 0$, so hat man

$$v_1 = c_1 - c_1\,(1 + \sqrt{\mu})\,.\,\frac{M_2 l_2^2}{M_1 a_2^2 + M_2 l_2^2}$$ und

$$\omega_2 = a_2 c_1\,(1 + \sqrt{\mu})\,.\,\frac{M_1}{M_1 a_2^2 + M_2 l_2^2}.$$

Ist hingegen M_1 in Ruhe, stößt also die oscillirende Masse, so hat man $c_1 = 0$, daher $v_1 = a_2\,\varepsilon_2\,(1 + \sqrt{\mu})\,.\,\frac{M_2 l_2^2}{M_1 a_2^2 + M_2 l_2^2}$ und

$$\omega_2 = \varepsilon_2\left(1 - (1 + \sqrt{\mu})\frac{M_1 a_2^2}{M_1 a_2^2 + M_2 l_2^2}\right).$$

Die Geschwindigkeit, welche einer ruhenden Masse von einer andern durch den Anstoß ertheilt wird, hängt nicht allein von der Geschwindigkeit des Anstoßes und von den Massen der Körper, sondern auch von dem Abstande $KL = a_2$ ab, um welchen die Stoßrichtung $N\overline{N}$ von der Axe K des drehbaren Körpers absteht. Stößt die freie Masse, so nimmt die drehbare Masse die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_2 = c_1\,(1 + \sqrt{\mu})\,\frac{M_1 a_2}{M_1 a_2^2 + M_2 l_2^2}$$

an, und trifft die schwingende Masse gegen die freie, so erhält diese die Geschwindigkeit Drehbare Körper.

$v_1 = \varepsilon_2 (1 + \sqrt{\mu}) \frac{M_2 l_2^2 . a_2}{M_1 a_2^2 + M_2 l_2^2}$, es werden aber beide Geschwindigkeiten um so größer, je größer $\frac{a_2}{M_1 a_2^2 + M_2 l_2^2}$ oder $\frac{1}{M_1 a_2 + \frac{M_2 l_2^2}{a_2}}$, also je kleiner $M_1 a_2 + M_2 \frac{l_2^2}{a_2}$ ist.

Setzen wir statt a_2, $a \pm x$, wo x sehr klein ist, so bekommen wir den Werth des letzteren Ausdruckes

$$M_1 (a \pm x) + \frac{M_2 l_2^2}{a \pm x} = M_1 a \pm M_1 x + \frac{M_2 l_2^2}{a} (1 \mp \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} \pm ..),$$

oder, wegen der Kleinheit der Potenzen von x,

$$= M_1 a + \frac{M_2 l_2^2}{a} \pm \left(M_1 - \frac{M_2 l_2^2}{a^2}\right) x + \ldots$$

Soll nun a dem kleinsten aller Werthe von $M_1 a_2 + \frac{M_2 l_2^2}{a_2^2}$ entsprechen, so muß das Glied $\pm \left(M_1 - \frac{M_2 l_2^2}{a^2}\right) x$ wegfallen, weil dasselbe bei einem Zusatze (x) ein anderes Zeichen erhält, als bei einer Abnahme ($- x$). Es muß also $\left(M_1 - \frac{M_2 l_2^2}{a^2}\right) x =$ Null, d. i. $\frac{M_2 l_2^2}{a^2} = M_1$, folglich

$$a = \sqrt{\frac{M_2 l_2^2}{M_1}} = l_2 \sqrt{\frac{M_2}{M_1}} \text{ sein.}$$

Wenn man also in diesem Abstande den einen Körper gegen den andern stößt, so nimmt dieser die größte Geschwindigkeit an, und zwar

$$\omega = (1 + \sqrt{\mu}) \frac{c_1}{2 l_2} \sqrt{\frac{M_1}{M_2}},$$

in dem Falle, wenn der drehbare Körper gestoßen wird, und

$$v = \frac{1}{2} l_2 \varepsilon_2 (1 + \sqrt{\mu}) \sqrt{\frac{M_2}{M_1}},$$

wenn der freie Körper einen Stoß erhält.

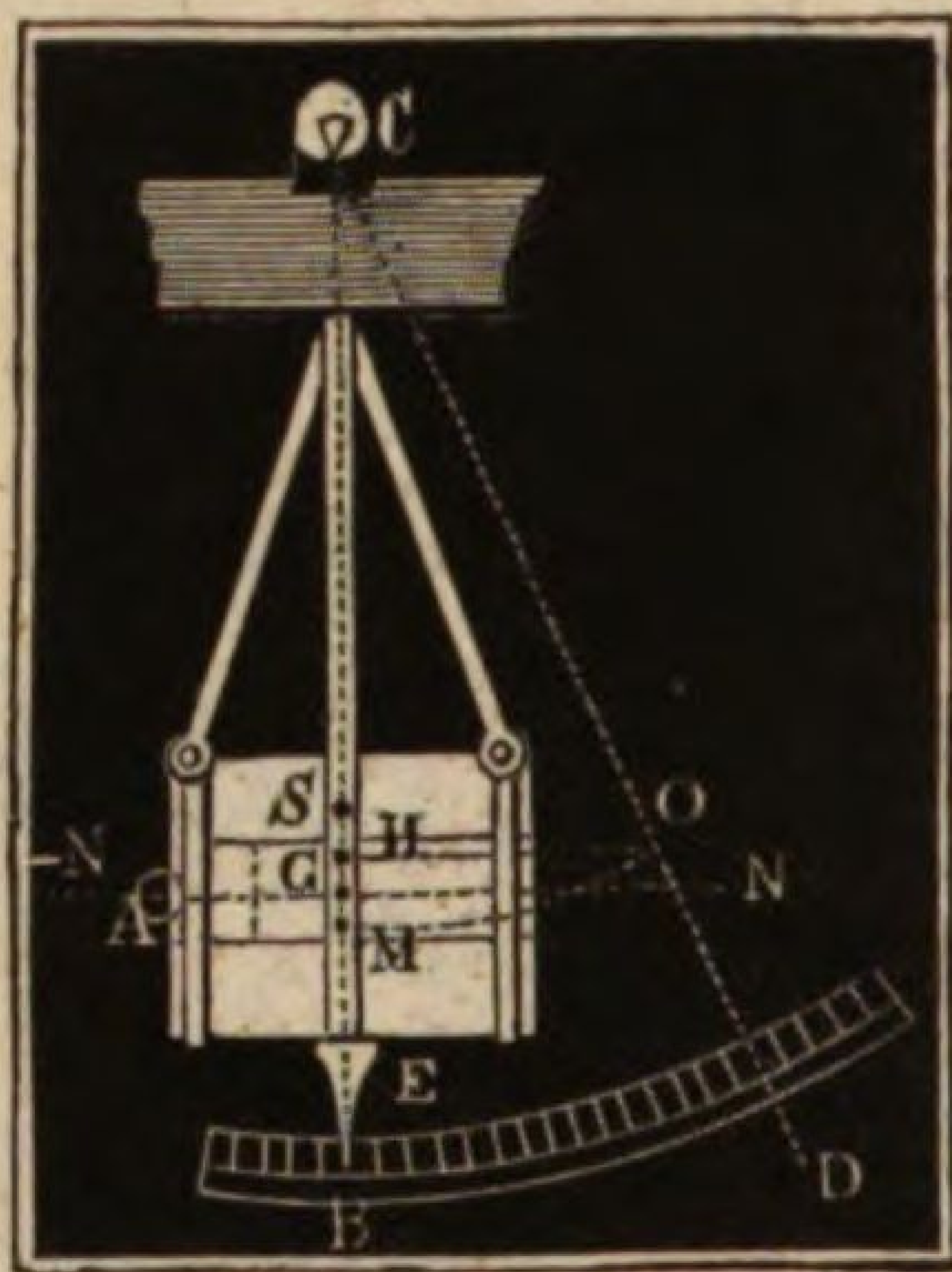
Man nennt den in der Stoßlinie befindlichen Endpunkt D des der größten Geschwindigkeit entsprechenden Abstandes oder Hebelarmes a zuweilen, jedoch unpassend, Mittelpunkt des Stoßes, angemessener vielleicht **Stoßpunkt**.

Beispiel. Welche Lage hat der Stoßpunkt, wenn die freie Masse in einer eisernen Kugel von 16 Pf. Gewicht besteht und die drehbare Masse ein Trägheitsmoment von $1000 : g$ hat? Es ist der Abstand dieses Punktes von der festen Axe des letzteren Körpers: $a = \sqrt{\frac{1000}{16}} = \sqrt{62{,}5} = 7{,}906$ Fuß. Ist der Stoß unelastisch und trifft der Block gegen die Kugel mit der Geschwindigkeit $\varepsilon = 3$ Fuß, so nimmt die letztere die Geschwindigkeit $v = \frac{3}{2} . 7{,}906 = 11{,}86$ Fuß an.

Ballistisches Pendel.

§. 284. Eine Anwendung der im Vorstehenden entwickelten Lehren findet man in der Theorie des **ballistischen Pendels** oder des Pendels von **Robins** (franz. pendule ballistique; engl. ballistic pendulum).

Fig. 395.



Dasselbe besteht in einer großen, um eine horizontale Axe C drehbaren Masse MH, Fig. 395, welche durch gegen sie abgeschossene Geschützkugeln A in Schwingungen versetzt wird und dazu dient, die Geschwindigkeiten derselben zu ermitteln. Damit ein möglichst unelastischer Stoß eintrete, ist in der vorderen Seite, wo die Kugel anschlägt, eine Oeffnung angebracht, die man von Zeit zu Zeit mit frischem Holze, oder Thon u. s. w. ausfüllt. Es bleibt dann auch die Kugel nach dem jedesmaligen Schusse in diesen Massen stecken und schwingt mit dem ganzen Körper gemeinschaftlich. Zur Ermittelung der Geschwindigkeit der Kugel ist es nöthig, den Elongationswinkel dieses Pendels zu kennen; deshalb wird noch ein Gradbogen BD angebracht und ein Stift E unter dem Schwerpunkte des Pendels befestigt, der an dem ersteren hingleitet.

Nach dem vorstehenden Paragraphen ist die Winkelgeschwindigkeit des ballistischen Pendels nach dem Anstoße der Kugel: $\omega = \frac{M_1 a_2 c_1}{M_1 a_2^2 + M_2 l_2^2}$, wenn M_1 die Masse der Kugel, $M_2 l_2^2$ das Trägheitsmoment des Pendels, c_1 die Geschwindigkeit der Kugel und a_2 den Hebelarm CG des Stoßes oder den Abstand der Stoßlinie $N\overline{N}$ von der Drehungsaxe des Pendels bezeichnet. Ist die Entfernung CM des Schwingungspunktes M der ganzen Masse sammt Kugel vom Drehpunkte C, d. i. die Länge des einfachen Pendels, welches mit dem ballistischen gleiche Schwingungsdauer hat, $= r$, und der Elongationswinkel $BCD = \alpha$, so hat man die Steighöhe des isochron schwingenden einfachen Pendels: $h = CM - CH = r - r \cos.\alpha$ $= r(1 - \cos.\alpha) = 2r\left(\sin.\frac{\alpha}{2}\right)^2$, und daher die Geschwindigkeit im untersten Punkte seiner Bahn: $v = \sqrt{2gh} = 2\sqrt{gr}\,\sin.\frac{\alpha}{2}$, oder die entsprechende Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{v}{r} = 2\sqrt{\frac{g}{r}}\,.\sin.\frac{\alpha}{2}$. Durch Gleichsetzen dieser beiden Werthe für die Winkelgeschwindigkeit folgt

$$c_1 = \frac{M_1 a_2^2 + M_2 l_2^2}{M_1 a_2}\,.\,2\sqrt{\frac{g}{r}}\,.\,\sin.\frac{\alpha}{2}.$$

Nun ist aber der Theorie des einfachen Pendels zufolge (Ballistisches Pendel.)

$$r = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{Stat. Moment}} = \frac{M_1 a_2^2 + M_2 l_2^2}{(M_1 + M_2)\, s},$$

wenn s den Abstand des Schwerpunktes S von der Drehaxe bezeichnet; es folgt daher $M_1 a_2^2 + M_2 l_2^2 = (M_1 + M_2)\, s r$ und

$$c_1 = 2 \left(\frac{M_1 + M_2}{M_1}\right) \cdot \frac{s}{a_2} \sqrt{gr} \,.\, sin. \frac{\alpha}{2}.$$

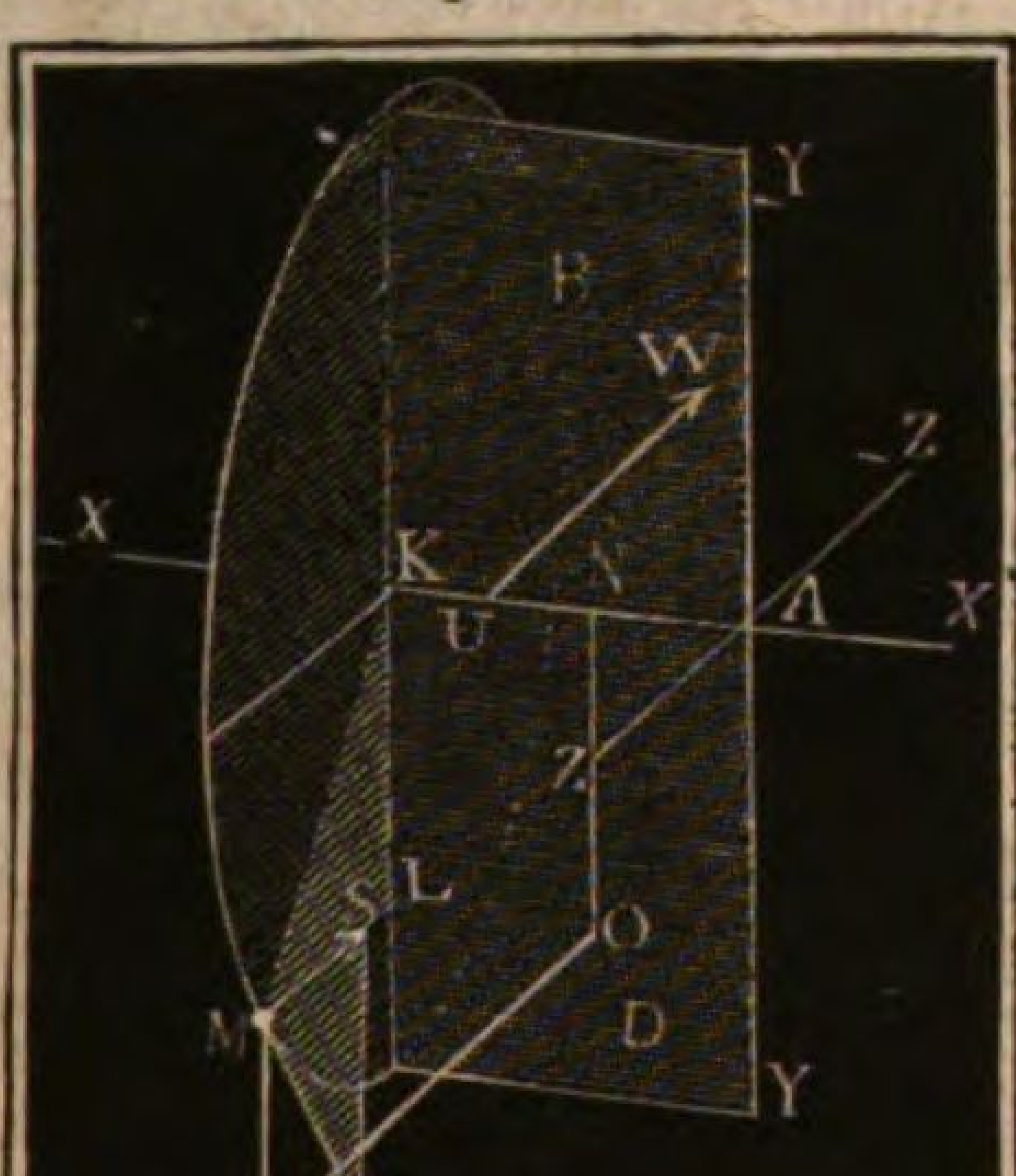
Macht das Pendel in der Minute n Schwingungen, so ist die Schwingungsdauer $\pi \sqrt{\frac{r}{g}} = \frac{60''}{n}$, daher $\sqrt{gr} = \frac{60''.g}{n\pi}$, und die gesuchte Kugelgeschwindigkeit $c_1 = \frac{M_1 + M_2}{M_1} \cdot \frac{120\, g s}{n \pi a_2} \,.\, sin. \frac{\alpha}{2}$.

Beispiel. Wenn ein ballistisches Pendel von 3000 Pf. Gewicht durch eine angeschossene Kugel von 6 Pf. in Schwingungen versetzt wird, deren Elongation 15° beträgt, wenn ferner der Abstand s des Schwerpunktes von der Axe $= 5$ Fuß und der Abstand der Schußlinie von eben dieser Axe $= 5\frac{1}{2}$ Fuß beträgt, und endlich die Zahl der Schwingungen in einer Minute $n = 40$ ist, so war nach obiger Formel die Geschwindigkeit der Kugel im Augenblicke des Anstoßes:

$$c = \frac{3006}{6} \cdot \frac{120 \,.\, 31{,}25 \,.\, 5}{40 \,.\, 3{,}1416 \,.\, 5{,}5}\, sin. 7\tfrac{1}{2}^0 = \frac{501 \,.\, 3750 \,.\, sin. 7^0, 30'}{44 \,.\, 3{,}1416} = 1774 \text{ Fuß}.$$

§. 285. Wenn ein sich um eine feste Axe C drehender Körper mit einem andern zusammenstößt, so findet im Allgemeinen eine Rückwirkung des Stoßes auf die Axe des Körpers statt, die vorzüglich von dem Abstande zwischen der Stoß- und Axenrichtung abhängig ist. Bestimmen wir diese Reaction oder diesen Axendruck in dem einfachen Falle, wenn die Stoßrichtung winkelrecht gegen die Ebene gerichtet ist, die sich durch die Drehaxe und durch den Schwerpunkt des Körpers legen läßt. (Mittelpunkt des Stoßes.)

Fig. 396.



Es sei BD die Schwerebene durch die Drehaxe $X\overline{X}$ des Körpers in Figur 396, $Y\overline{Y}$ eine zweite rechtwinkelige Axe in eben dieser Ebene und $Z\overline{Z}$ die dritte Axe rechtwinkelig gegen diese Schwerebene. Ein Element M_1 des Körpers ist gegen dieses sich in A kreuzendes Axensystem durch die Coordinaten $AK = x_1$, $KL = y_1$ und $LM = z_1$, ein anderes Element durch Coordinaten x_2, y_2, z_2 u. s. w. bestimmt. Ist $\varkappa$ die Winkelacceleration, so hat man die Trägheitskraft des Elementes $M_1 : Q_1 = M_1 \,.\, \varkappa \,.\, \overline{KM}$, und zerlegt man diese in die Seitenkraft

Mittelpunkt des Stoßes. R parallel und in die Seitenkraft S rechtwinkelig zur gedachten Schwerebene, so giebt die Aehnlichkeit der Dreiecke KML und QMR oder MQS: $R = M_1 . \varkappa z_1 = \varkappa M_1 z_1$ und $S = \varkappa M_1 y_1$. Es ist hiernach die Summe aller Seitenkräfte parallel zur Ebene $= \varkappa (M_1 z_1 + M_2 z_2 + ..)$, und die Summe der Seitenkräfte rechtwinkelig gegen diese Ebene

$$\varkappa (M_1 y_1 + M_2 y_2 + ..).$$

Da die Ebene BD durch den Schwerpunkt geht, so ist die Momentensumme $M_1 z_1 + M_2 z_2 + .. =$ Null, es bleibt daher auch nur die Kräftesumme $\varkappa (M_1 y_1 + M_2 y_2 + ..)$ übrig. Ist nun P die Stoßkraft und W der Widerstand oder die Reaction auf die Axe, so hat man zunächst zu setzen: $P = W + \varkappa (M_1 y_1 + M_2 y_2 ...)$.

Das statische Moment der Kraft $Q_1 = M_1 \varkappa . \overline{KM}$ ist $= M_1 \varkappa . \overline{KM} . \overline{KM} = \varkappa . M_1 . \overline{KM}^2$, oder die Entfernung KM durch r_1 bezeichnet, $= \varkappa M_1 r_1^2$, das Moment der Kraft eines andern Massentheils $= \varkappa M_2 r_2^2$ u. s. w., daher das statische Moment der ganzen Trägheit $= \varkappa (M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + ...)$. Setzen wir nun den Abstand NO der Stoßrichtung von der Axenrichtung $= b$, so haben wir das Moment der Stoßkraft P in Hinsicht auf $X\overline{X}$ $= Pb$, während das von $W = 0$ ist; wir können daher auch setzen:

$$Pb = \varkappa (M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + ..),$$

und bekommen durch Elimination von $\varkappa$ aus beiden Gleichungen:

$$P = W + \frac{Pb (M_1 y_1 + M_2 y_2 + ..)}{M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + ..}, \text{ d. i. die gesuchte Reaction:}$$

$$W = P \left(1 - \frac{b (M_1 y_1 + M_2 y_2 + ..)}{M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + ..}\right).$$

Bezeichnen wir endlich den Abstand AN der Stoßrichtung von der Axe $Y\overline{Y}$ durch a und den Abstand AU des Angriffspunktes U der Reaction W vom Anfangspunkte durch u, so haben wir noch

Moment $Pa =$ Mom. Wu + Mom. $\varkappa (M_1 x_1 y_1 + M_2 x_2 y_2 + ..)$, und es folgt der Abstand des gesuchten Angriffspunktes:

$$u = \frac{Pa - \varkappa (M_1 x_1 y_1 + M_2 x_2 y_2 + ..)}{W}, \text{ d. i.}$$

$$u = \frac{a (M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + ..) - b (M_1 x_1 y_1 + M_2 x_2 y_2 + ..)}{M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + .. - b (M_1 y_1 + M_2 y_2 + ..)}.$$

Die Reaction W ist Null, wenn $b (M_1 y_1 + M_2 y_2 + ..) = M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + ..$, d. i.

$$1)\ b = \frac{M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + ..}{M_1 y_1 + M_2 y_2 + ..} = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{statisch. Moment}}, \text{ und auch ihr}$$

Moment ist Null, wenn $Pa = \varkappa (M_1 x_1 y_1 + M_2 x_2 y_2 + ..)$, d. i.

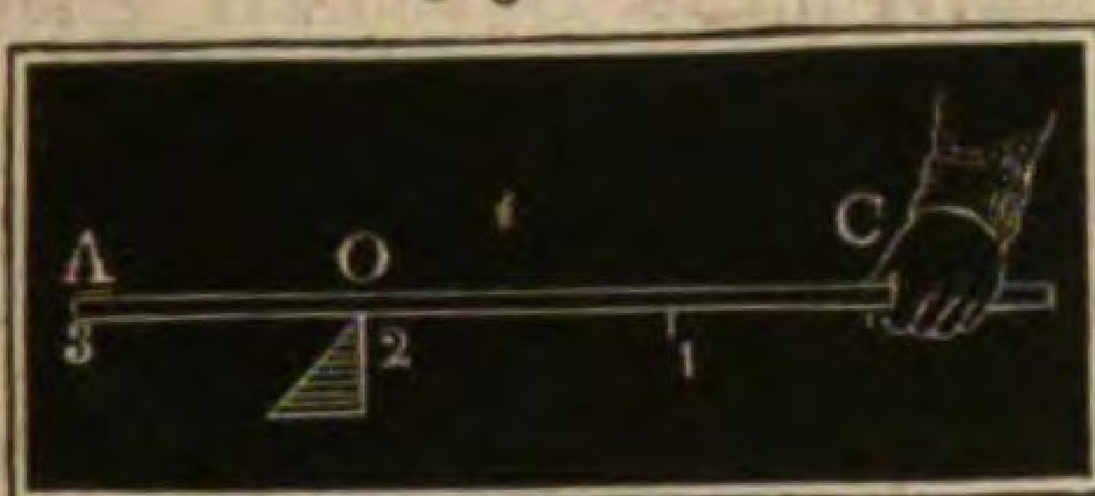
$$2)\ a = \frac{M_1 x_1 y_1 + M_2 x_2 y_2 + ..}{M_1 y_1 + M_2 y_2 + ..}.$$

Man nennt den durch diese Coordinaten a und b bestimmten Punkt O

in der die feste Axe enthaltenden Schwerebene den **Mittelpunkt des Stoßes** (franz. centre de percussion; engl. centre of percussion). Jede durch diesen Punkt gehende und gegen genannte Schwerebene rechtwinkelig gerichtete Stoßkraft wird von der Masse vollkommen aufgenommen, ohne eine Wirkung gegen die Axe übrig zu lassen oder einen Druck in derselben zu erzeugen. Die Formel (1) zeigt an, daß der Mittelpunkt des Stoßes mit dem Schwingungspunkte (vergl. §. 267) gleichen Abstand von der Umdrehungsaxe hat. Mittelpunkt des Stoßes.

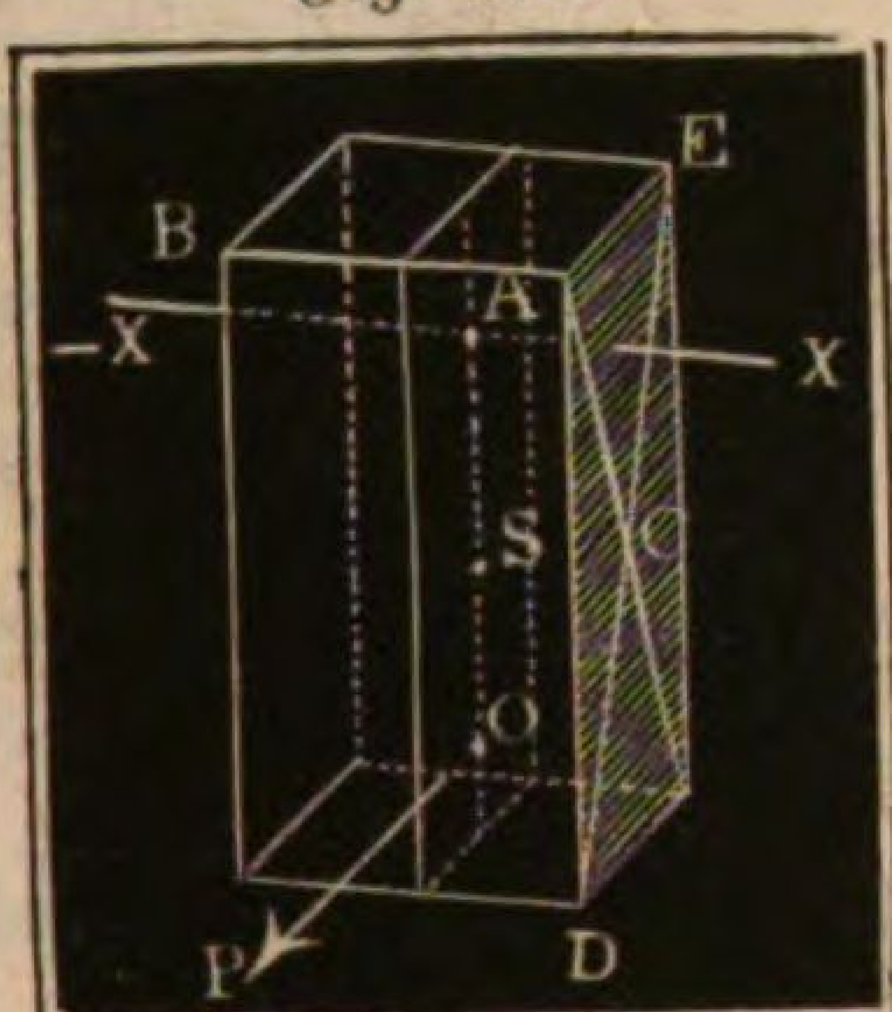
Damit ein Hammer beim Aufschlagen nicht pralle, d. i. auf die Hand, welche ihn hält, oder auf die Hülse, um welche er sich dreht, nicht reagire, ist es nöthig, daß der Schlag durch den Mittelpunkt des Stoßes gehe.

Fig. 397.



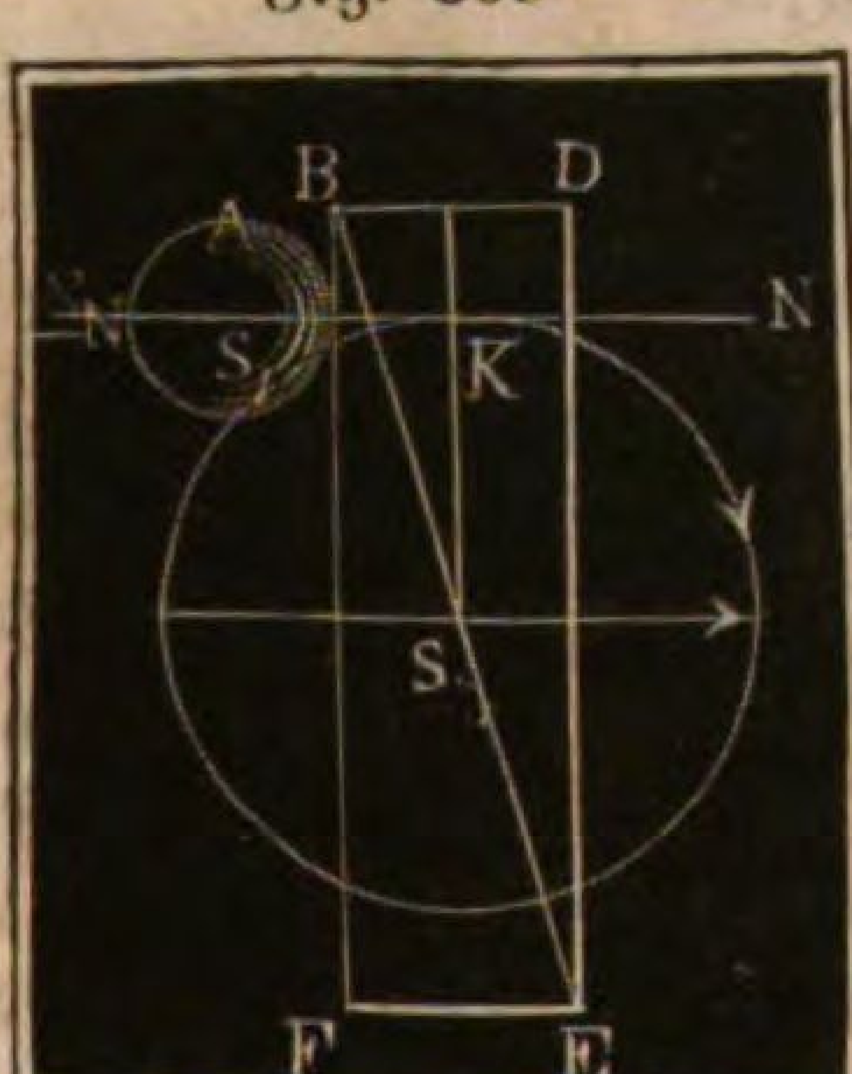
Beispiele. 1) Bei einer prismatischen Stange CA, Fig. 397, die sich um einen ihrer Endpunkte dreht, steht der Mittelpunkt des Stoßes um $CO = b = \frac{\frac{1}{3}r^2}{\frac{1}{2}r} = \frac{2}{3}r = \frac{2}{3}\,CA$ von der Axe ab. Wenn man also die Stange an einem Ende festhält, und mit dem in der Entfernung $CO = \frac{2}{3}\,CA$ befindlichen Punkte O aufschlägt, so wird man kein Prallen fühlen. 2) Bei einem Parallelepipede BDE, Fig. 398, welches sich um eine zu vier Seiten parallel gehende und um $SA = s$ vom Schwerpunkte abstehende Axe $X\overline{X}$ dreht, ist der Abstand AO des Stoßmittelpunktes O von der Axe, $b = \frac{s^2 + \frac{1}{3}d^2}{s}$, wo d die halbe Diagonale CA der Seitenflächen ist, durch welche die Axe $X\overline{X}$ hindurchgeht (§. 234). Ginge die Stoßkraft P durch den Schwerpunkt, so wäre die Reaction

Fig. 398.



$$W = P\left(1 - s.\frac{s}{s^2 + \frac{1}{3}d^2}\right) = P\left(1 - \frac{s^2}{s^2 + \frac{1}{3}d^2}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\,\frac{Pd^2}{s^2 + \frac{1}{3}d^2} = \frac{Pd^2}{3s^2 + d^2}.$$

Fig. 399.



§. 286. Untersuchen wir endlich noch einen einfachen Fall des excentrischen Stoßes, wenn beide Massen vollkommen frei sind. Wenn zwei Körper A und BE, Fig. 399, so zusammenstoßen, daß die Richtung $N\overline{N}$ des Stoßes durch den Schwerpunkt S_1 des einen Körpers hindurch und vor dem Schwerpunkt S des andern Körpers vorbeigeht, so ist der Stoß in Hinsicht auf den ersten Körper centrisch und in Hinsicht auf den andern excentrisch. Die Excentrischer Stoß.

Excentrischer Stoß

Wirkungen dieses excentrischen Stoßes lassen sich aber nach dem Lehrsatze in §. 228 finden, wenn man annimmt erstens, der zweite Körper sei frei und die Stoßrichtung gehe durch den Schwerpunkt S selbst, und zweitens, dieser Körper werde im Schwerpunkte festgehalten und die Stoßkraft wirke als eine Umdrehungskraft. Ist nun c_1 die anfängliche Geschwindigkeit von A, c die des Schwerpunktes von BE, und gehen durch den Stoß beide Geschwindigkeiten in v_1 und v über, so beibt, wie in §. 272, $M_1 v_1 + Mv = M_1 c_1 + Mc$. Ist ferner ε die anfängliche Winkelgeschwindigkeit des Körpers BE bei seiner Umdrehung um die Axe durch den Schwerpunkt und senkrecht gegen die Ebene $N\overline{N}S_2$, geht diese Geschwindigkeit durch den Stoß in ω über, und bezeichnet man das Trägheitsmoment dieses Körpers in Hinsicht auf S durch $M\,l^2$ und die Excentricität, oder den Abstand SK des Schwerpunktes S von der Stoßrichtung durch s, so hat man auch

$$M_1 v_1 + \frac{Ml^2}{s^2}.s\omega = M_1 c_1 + \frac{Ml^2}{s^2} s\varepsilon.$$

Sind beide Körper unelastisch, so haben die Berührungspunkte beider am Ende des Stoßes gleiche Geschwindigkeit, es ist also noch $v_1 = v + s\omega$. Bestimmt man aus den vorigen Gleichungen v und ω durch v_1 und setzt man die erhaltenen Werthe in die letzte Gleichung, so erhält man $v_1 = \frac{M_1(c_1 - v_1)}{M} + c + \frac{M_1 s^2 (c_1 - v_1)}{Ml^2} + s\varepsilon$, und hieraus bestimmt sich der Verlust an Geschwindigkeit des ersten Körpers

$$c_1 - v_1 = \frac{Ml^2(c_1 - c - s\varepsilon)}{(M_1 + M)\,l^2 + M_1 s^2},$$

der Gewinn an progressiver Geschwindigkeit des zweiten:

$$v - c = \frac{M_1 l^2 (c_1 - c - s\varepsilon)}{(M_1 + M)\,l^2 + M_1 s^2},$$

und der Gewinn an Winkelgeschwindigkeit desselben:

$$\omega - \varepsilon = \frac{M_1 s (c_1 - c - s\,\varepsilon)}{(M_1 + M)\,l^2 + M_1 s^2}.$$

Beim vollkommen elastischen Stoße sind diese Werthe doppelt und beim unvollkommen elastischen Stoße $(1 + \sqrt{\mu})$ mal so groß.

Beispiel. Trifft eine eiserne Kugel A von 65 Pf. Gewicht das anfänglich in Ruhe befindliche Parallelepiped BE aus Tannenholz mit 36 Fuß Geschwindigkeit, ist die Länge dieses Körpers 5 Fuß, die Breite 3 Fuß und die Dicke 2 Fuß, und weicht die Stoßrichtung $N\overline{N}$ um $SK = s = 1^3/_4$ Fuß von dem Schwerpunkte S ab, so ergeben sich folgende Geschwindigkeiten nach dem Stoße. Das specifische Gewicht des Tannenholzes = 0,45 angenommen, folgt das Gewicht des parallelepipedischen Körpers = 5.3.2.66.0,45 = 891 Pf. Das Quadrat der halben Diagonale BS der Seitenfläche parallel zur Stoßrichtung ist

$(5/2)^2 + (2/2)^2 = 7{,}25$, daher folgt (nach §. 234), $M_1 l^2 = {}^{891}/_3 \,.\, 7{,}25 =$ 2153,25 und $(M_1 + M)\, l^2 = {}^{956}/_3 \,.\, 7{,}25 = 2310{,}33$, und es ist nun die Geschwindigkeit der Kugel nach dem Stoße Excentrischer Stoß.

$$v_1 = c_1 - \frac{M\, l^2\, c_1}{(M_1 + M)\, l^2 + M_1\, s^2} = 36 \left(1 - \frac{2153{,}25}{2310{,}33 + 65 \,.\, 1{,}75^2}\right)$$

$$= 36 \left(1 - \frac{2153{,}25}{2509{,}39}\right) = 36 \,.\, 0{,}142 = 5{,}112 \text{ Fuß},$$

ferner die Geschwindigkeit des Schwerpunktes des gestoßenen Körpers

$$v = \frac{M_1\, l^2\, c_1}{(M_1 + M)\, l^2 + M_1\, s^2} = \frac{157{,}08 \,.\, 36}{2509{,}39} = 2{,}253 \text{ Fuß},$$

und endlich die Winkelgeschwindigkeit desselben

$$\omega = \frac{M_1\, s\, c_1}{(M_1 + M)\, l^2 + M_1\, s^2} = \frac{199{,}06 \,.\, 36}{2509{,}39} = 2{,}856 \text{ Fuß}.$$

§. 287. Die Wirkungen des Stoßes werden sehr oft benutzt, um einen Körper B, Fig. 400, in einen andern Körper E, z. B. in eine weiche Masse, einzuschlagen oder einzurammen. Ist der Widerstand, welchen die letztere Masse dem Eindringen der ersteren entgegensetzt, constant und $= P$, und die Tiefe CD des Eindringens bei einem Schlage $= s$, so wird die mechanische Arbeit Ps consumirt. Ist hingegen dieser Widerstand anfänglich $=$ Null und wächst er mit der Tiefe des Eindringens gleichmäßig, so daß er am Ende, nachdem der Körper um die Tiefe s in die zweite Masse eingedrungen ist, $= P$ beträgt, so ist die consumirte Arbeit nur $\frac{(0+P)}{2}\, s = {}^1/_2\, Ps$. Ist endlich der Widerstand anfänglich $= P_1$ und wächst derselbe ebenfalls mit dem Wege gleichmäßig, so daß er nach Durchlaufung des Weges s in P_2 übergeht, so hat man jene Leistung oder Arbeit $= \frac{(P_1 + P_2)}{2}\, s$ zu setzen. Einrammen.

Fig. 400.



Fängt nun der Körper B, dessen Masse M sein möge, mit der Geschwindigkeit v an in die Masse einzudringen, und setzt er bei dem Eindringen diese Geschwindigkeit zu, so hat er in Folge seiner lebendigen Kraft die Arbeit $\frac{Mv^2}{2} = \frac{v^2}{2g}\, G$ verrichtet, wofern $G = Mg$ sein Gewicht bezeichnet.

Bei constantem Widerstande ist nun zu setzen: $Ps = \frac{v^2}{2g}\, G$; bei allmälig zunehmendem und mit Null anfangendem Widerstande hingegen:

$$Ps = \frac{v^2}{2g} \,.\, 2\,G;$$

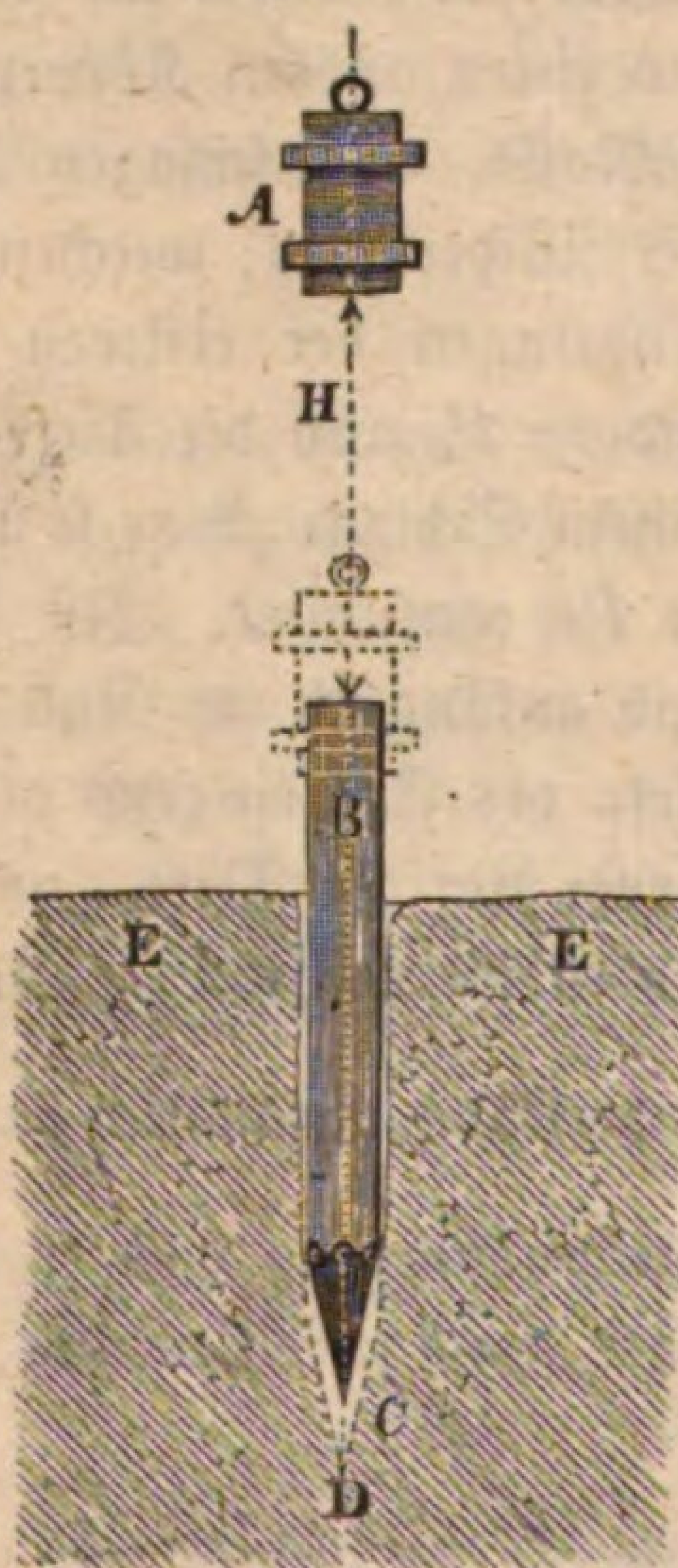
Einrammen. bei von P_1 bis P_2 allmälig anwachsendem Widerstande endlich:

$$(P_1 + P_2)\, s = \frac{v^2}{2g} \,.\, 2G.$$

Die Anfangsgeschwindigkeit v erzeugt man in der Regel dadurch, daß man eine dritte Masse A, deren Größe $= M_1$ und Gewicht $= G_1$ sein möge, mit einer gewissen Geschwindigkeit c_1 auf die zweite Masse B aufschlagen läßt. Sind nun diese Massen unelastisch, so hat man die Geschwindigkeit, mit welcher beide nach dem Stoße fortgehen und in die Masse E einzudringen anfangen: $v = \frac{M_1 c_1}{M + M_1} = \frac{G_1 c_1}{G + G_1}$.

Beim Einrammen einer Pilotte oder eines Pfahles, Fig. 401, besteht B in einem, mit Eisen beschuhten Pfahle und A in einem von einer gewissen Höhe herabfallenden schweren Körper, den man den Rammklotz, Rammbär oder Hoyer nennt. Ist die Fallhöhe $= h_1$, so hat man

Fig. 401.



$$\frac{v^2}{2g} = \left(\frac{G_1}{G+G_1}\right)^2 . \frac{c_1^2}{2g} = \left(\frac{G_1}{G+G_1}\right)^2 . h_1,$$

daher die der Geschwindigkeit v entsprechende mechanische Arbeit des Pfahles und Rammklotzes zusammen

$$= \left(\frac{G_1}{G+G_1}\right)^2 (G + G_1)\, h_1 = \frac{G_1^2 h_1}{G + G_1}.$$

Für einen constanten Widerstand P des Erdreiches ist aber die beim Eindringen des Pfahles aufzuwendende Leistung $= Ps$, daher hat man zu setzen:

$$Ps = \frac{G_1^2 h_1}{G + G_1}.$$

Da beim Eindringen das Gewicht $G + G_1$ noch die Arbeit $(G + G_1)\, s$ verrichtet, so hat man genauer $(P - G - G_1)\, s = \frac{G_1^2 h_1}{G + G_1}$ zu setzen; es ist aber $G + G_1$ gegen P hinreichend klein, um es in der Regel vernachlässigen zu können.

Wäre endlich G sehr klein gegen G_1, wie z. B. beim Einschlagen eines Nagels, so hätte man $Ps = G_1 h$.

Beispiel. Ein Pfahl von 400 Pf. Gewicht ist bei der letzten Hitze von 20 Schlägen mittels eines 700 Pf. schweren und 5 Fuß hoch herabfallenden Rammbäres noch 6 Zoll tiefer eingedrungen, welchen Widerstand leistet der Erdboden, oder welche Last kann der Pfahl tragen, ohne tiefer einzudringen? Hier ist G

$= 400$, $G_1 = 700$ Pfd., $h_1 = 5$ und $s = \frac{0,5}{20} = 0,025$ Fuß, wobei voraus- Einrammen.
gesetzt wird, daß der Pfahl bei jedem Schlage um gleichviel eindringt. Nach der gefundenen Formel ist der fragliche Widerstand

$$P = \frac{700^2 \,.\, 5}{1100 \,.\, 0,025} = \frac{4900}{11} \,.\, 200 = 89100 \text{ Pf.}$$

Wegen der Sicherheit auf die Dauer belastet man solche Pfähle nur $^1/_{100}$ bis $^1/_{10}$ mal so stark.

§. 288. Setzen wir voraus, daß sowohl der Pfahl als auch der Rammbär unvollkommen elastisch sei, so erhalten wir für die Anfangsgeschwindigkeit des Pfahles nach dem Aufschlagen des Hopers (s. §. 278)

$$v = \frac{G_1 c_1}{G + G_1}\left(1 + \sqrt{\frac{\mu H_1 + \mu_1 H}{H_1 + H}}\right).$$

und dagegen die des letzteren:

$$v_1 = \left[1 - \frac{G}{G + G_1}\left(1 + \sqrt{\frac{\mu H_1 + \mu_1 H}{H_1 + H}}\right)\right] c_1.$$

Nun ist aber (nach §. 276), $H = \frac{FE}{l}$ und $H_1 = \frac{F_1 E_1}{l_1}$, wenn F, l und E, sowie F_1, l_1 und E_1 die Querschnitte, Längen und Elasticitätsmodul des Pfahles und Bäres bezeichnen, daher hat man auch

$$\sqrt{\frac{\mu H_1 + \mu_1 H}{H_1 + H}} = \sqrt{\frac{\mu F_1 E_1 l + \mu_1 F E l_1}{F_1 E_1 l + F E l_1}};$$

endlich ist aber für den eisernen Bär E in der Regel viel größer als für den hölzernen Pfahl (s. §. 189), daher läßt sich annähernd die Größe $= \sqrt{\mu}$ und

$$v = (1 + \sqrt{\mu}) \,.\, \frac{G_1 c_1}{G + G_1} \text{ und}$$

$$v_1 = \left(1 - (1 + \sqrt{\mu})\frac{G}{G + G_1}\right) c_1 = \left(\frac{G_1 - G\sqrt{\mu}}{G_1 + G}\right) c_1 \text{ setzen.}$$

Nimmt man nun $\mu = 0$, setzt man also gänzliche Unelasticität voraus, so hat man es mit dem im vorigen Paragraphen behandelten Falle zu thun; setzt man aber $\mu = 1$, nimmt man also an, daß der Bär vollkommen elastisch sei, so erhält man hiernach

$$v = \frac{2 G_1 c_1}{G + G_1} \text{ und } v_1 = \left(\frac{G_1 - G}{G_1 + G}\right) c_1.$$

Es ist sonach $v_1 < v$, es dringt folglich der Pfahl ohne Bär in das Erdreich, und es ist das Arbeitsquantum des ersteren während des Eindringens:

$$Ps = G\frac{v^2}{2g} = \left(\frac{2 G_1}{G + G_1}\right)^2 \frac{G c_1^2}{2g} = \left(\frac{2 G_1}{G + G_1}\right)^2 . \, G h_1.$$

Einrammen. Die Leistung zum Aufheben des Rammbäres ist $L = G_1 h_1$, und daher das Verhältniß der Leistung des Pfahles zu der des Bäres, im ersten Falle

$$\frac{Ps}{L} = \frac{G_1}{G + G_1},$$

und im zweiten, $\frac{Ps}{L} = \frac{4 G G_1}{(G + G_1)^2}$.

Dieses Verhältniß ist am größten und zwar $= 1$, im ersten Falle, wenn $\frac{G_1}{G} = \infty$, und im zweiten, wenn $\frac{G_1}{G} = 1$, d. i., wenn im ersten Falle der Rammbär unendlich schwer ist, und wenn im zweiten Falle derselbe mit dem Pfahl einerlei Gewicht hat.

Uebrigens entspringt im zweiten Falle aus der lebendigen Kraft des Rammbäres noch eine Nachwirkung, denn da der Bär nach dem Aufschlagen noch die Geschwindigkeit $v_1 = \left(\frac{G_1 - G}{G_1 + G}\right) c_1$ hat, welcher die Geschwindigkeitshöhe $k = \left(\frac{G_1 - G}{G_1 + G}\right)^2 \cdot \frac{c_1^2}{2g} = \left(\frac{G_1 - G}{G_1 + G}\right)^2 h_1$ entspricht, so theilt er bei einem zweiten Zusammenstoß mit dem Pfahl noch die Arbeit $\left(\frac{2 G_1}{G_1 + G}\right)^2 G k = \left(\frac{2 G_1}{G_1 + G}\right)^2 \left(\frac{G_1 - G}{G_1 + G}\right)^2 G h_1$ mit, und es ist hiernach $Ps = \left[1 + \left(\frac{G_1 - G}{G_1 + G}\right)^2\right] \left(\frac{2 G_1}{G_1 + G}\right)^2 G h_1$ zu setzen.

Beispiel. Für das Beispiel des vorigen Paragraphen erhalten wir bei Zugrundelegung der zweiten Formel den Widerstand des Pfahles:

$$P = \left(\frac{2 G_1}{G_1 + G}\right)^2 \frac{G h_1}{s} = \left(\frac{2 . 700}{700 + 400}\right)^2 \cdot \frac{400 . 5}{0{,}025} = ({}^{14}/_{11})^2 \cdot \frac{400}{0{,}005}$$
$= 129600$ Pfund, oder, wenn wir noch die Nachwirkung hinzunehmen,

$$P = \left[1 + \left(\frac{700 - 400}{700 + 400}\right)^2\right] . 129600 = 1{,}0744 . 129600 = 139200 \text{ Pfund},$$

also mehr als nach der ersten Formel.

Absolute Stoßfestigkeit. §. 289. Eine prismatische Stange vom Querschnitte F und der Länge l wird beim Elasticitätsmodul E durch die Kraft

$$P = \frac{\lambda}{l} F E$$

um λ länger ausgezogen (s. §. 185), welche hierbei die mechanische Arbeit $L = \frac{P\lambda}{2} = \frac{\lambda^2 F E}{2 l} = {}^1/_2 \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 E F l$ (s. §. 186*) verrichtet.

Für einen Stab vom Querschnitte $F = 1$ und der Länge $l = 1$ hat man $L = {}^1/_2 \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 . E$, und wenn nun $\frac{\lambda}{l}$ das Ausdehnungsver-

hältniß bei der Elasticitätsgrenze bezeichnet, so ist $L = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 E$ für jeden Stoff eine bestimmte Erfahrungsgröße, die man den **Arbeitsmodul der Elasticität** (franz. coëfficient de la résistance vive d'élasticité, engl. modulus of resilience) nennen kann. Bezeichnen wir diesen Modul in der Folge durch den Buchstaben A, so erhalten wir die Arbeit zum Ausdehnen einer prismatischen Stange überhaupt Absolute Stoßfestigkeit.

$$L = A \,.\, Fl = AV.$$

Es ist also die **Arbeit, durch welche ein prismatischer Körper bis zur Elasticitätsgrenze ausgedehnt wird, dem Volumen $V = Fl$ dieses Körpers proportional.** Ist dagegen $\frac{\lambda_1}{l_1}$ die Ausdehnung des Körpers im Augenblicke des Zerreißens, so ist $L_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1}{l_1}\right)^2 E$ ein anderer Erfahrungscoefficient, den man den **Arbeitsmodul der Festigkeit** nennen und durch den Buchstaben A_1 bezeichnen kann; und es ist hiernach die Arbeit zum Zerreißen einer prismatischen Stange überhaupt:

$$L_1 = A_1 \,.\, Fl = A_1 V.$$

Um den Arbeitsmodul A der Elasticität bestimmen zu können, muß man den Elasticitätsmodul E oder den Tragmodul T (s. §. 187), und das Ausdehnungsverhältniß $\frac{\lambda}{l}$ bei der Elasticitätsgrenze kennen. Es ist dann

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 E, \text{ oder da } T = \frac{\lambda}{l} E \text{ ist, einfacher}$$

$$A = \frac{1}{2}\,\frac{\lambda}{l} \,.\, T = \frac{1}{2}\,\frac{T^2}{E}.$$

Um den Arbeitsmodul A_1 der Festigkeit ermitteln zu können, muß man hingegen den Festigkeitsmodul K (s. §. 187) und das Ausdehnungsverhältniß $\frac{\lambda_1}{l_1}$ für den Moment des Zerreißens kennen. Es ist $\frac{\lambda_1}{l_1} = \frac{K}{E}$, und daher

$$A_1 = \frac{1}{2}\,\frac{\lambda_1}{l_1} \,.\, K = \frac{1}{2}\,\frac{K^2}{E}.$$

Für die rückwirkende Festigkeit des Zermalmens gelten dieselben Formeln.

Beispiele. 1) Wenn für Eichenholz der Arbeitsmodul der Elasticität A = 2,5 Zollpfund, und der der Festigkeit A_1 = 20 Zollpfund ist, so hat man die Arbeit, welche erfordert wird, um eine Stange von 60 Zoll Länge und 3 Quadratzoll Querschnitt bis zur Elasticitätsgrenze auszudehnen:

$L = 2,5 \,.\, 60 \,.\, 3 = 450$ Zoll Pfund, und die, um diese Stange zu zerreißen

$L_1 = 20 \,.\, 60 \,.\, 3 = 3600$ Zoll Pfund.

Absolute Stoßfestigkeit.

2) Nach den Versuchen von Brix ist für den ungeglühten Eisendraht $E = 30'000000$ und $\frac{\lambda}{l} = 0{,}001$, daher hat man für denselben den Arbeitsmodul der Elasticität $A = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 . E = \frac{1}{2} . 0{,}000001 . 30'000000 = 15$ Zollpfund. Ferner ist nach diesen Versuchen $K = 100000$ Pf. und $\frac{\lambda_1}{l_1} = 0{,}0034$, und daher ist für den Arbeitsmodul der Festigkeit für den ungeglühten Eisendraht

$$A_1 = \frac{1}{2}\frac{\lambda_1}{l_1} . K = \frac{1}{2} . 0{,}0034 . 100000 = 170 \text{ Zollpfund.}$$

Anmerkung. Mittels der in §. 189 mitgetheilten Tabelle lassen sich diese Arbeitsmodule für verschiedene Körper berechnen.

§. 290. Mit Hülfe der Arbeitsmodul A und A_1 kann man nun auch leicht berechnen, unter welchen Bedingungen ein prismatischer Körper AB, Fig. 402, durch einen in der Axenrichtung geführten Stoß bis zur Elasticitätsgrenze ausgedehnt oder zerrissen werden kann. Ist G das Gewicht und c die Geschwindigkeit des stoßenden Körpers, so hat man die Arbeit, welche derselbe beim Aufschlagen auf den prismatischen Körper, dessen Gewicht wir mit G_1 bezeichnen wollen, entwickelt:

Fig. 402.



$$L = \frac{c^2}{2g} \cdot \frac{G^2}{G+G_1},$$

oder, da er hierbei noch von der Höhe λ heruntersinkt, noch genauer:

$$L = \frac{c^2}{2g} \cdot \frac{G^2}{G+G_1} + \lambda G.$$

Da wegen der Ausdehnung des Körpers um λ in Folge des Stoßes der Schwerpunkt desselben noch um $\frac{1}{2}\lambda$ sinkt, so hat man noch genauer:

$$L = \frac{c^2}{2g} \cdot \frac{G^2}{G+G_1} + \lambda(G + \tfrac{1}{2}G_1).$$

Setzt man nun dieser Arbeit der einen oder andern in dem vorigen Paragraphen gefundenen Arbeiten zum Ausdehnen oder Zerreißen des Körpers gleich, so erhalten wir folgende Gleichungen:

1) Für die Ausdehnung bis zur Elasticitätsgrenze

$$AFl = \frac{c^2}{2g} \cdot \frac{G^2}{G+G_1} + \lambda(G + \tfrac{1}{2}G_1),$$

oder, wenn man $Fl\gamma = G_1$, wo γ die Dichtigkeit des gestoßenen Körpers ist, setzt und keine zweite Masse an dem Körper hängt:

$$\frac{AG_1}{\gamma} = \frac{c^2}{2g} \cdot \frac{G^2}{G+G_1} + \lambda(G + \tfrac{1}{2}G_1),$$

und meist genau genug: Absolute Stoßfestigkeit.

$$\frac{A}{\gamma} G_1 = \frac{c^2}{2g} \cdot \frac{G^2}{G+G_1} = \frac{G^2 h}{G+G_1}.$$

2) Für die Ausdehnung bis zum Zerreißen hat man statt A, A_1 und statt λ, λ_1 zu setzen, weshalb

$$A_1 Fl = \frac{c^2}{2g} \cdot \frac{G^2}{G+G_1} + \lambda_1 (G + \tfrac{1}{2} G_1),$$

oder annähernd

$$A_1 Fl = \frac{c^2}{2g} \cdot \frac{G^2}{G+G_1} = \frac{G^2 h}{G+G_1} \text{ folgt.}$$

Hiernach ergiebt sich z. B. die der Stoßgeschwindigkeit entsprechende Fallhöhe

$$h = \frac{A_1 Fl (G + G_1)}{G^2}.$$

Man ersieht hieraus, daß die Stange um so stärkere Stöße aushalten kann, je größer ihre Masse ist. Dies ist eine für die Baukunst sehr wichtige Regel.

Beispiele. 1) Wenn das Fördergefäß oder die sogenannte Treibtonne, welche in einem seigern Schachte an einem 400 Pfund schweren Drahtseile hängt, 2000 Pfund wiegt, wenn der Arbeitsmodul der Festigkeit dieses Drahtseiles $A_1 = 80$ Zollpfund beträgt und jeder Cubikzoll Drahtseil ein Gewicht von 0,16 Pfund hat, so ist die Höhe, von welcher die etwa im Schachte hängen gebliebene Tonne hinabfallen muß, um das Seil zu zerreißen

$$h = \frac{80 \cdot 400 \cdot 2400}{0{,}16 \cdot 4000000} = \frac{8 \cdot 24}{1{,}6} = 120 \text{ Zoll} = 10 \text{ Fuß.}$$

Wenn dagegen der Arbeitsmodul der Elasticität nur 7 Pfund beträgt, so hat man die Fallhöhe der Tonne, bei welcher das Drahtseil über die Elasticitätsgrenze hinaus ausgedehnt wird, $h_1 = \frac{7}{80} \cdot h = \frac{7}{8}$ Fuß $= 8\frac{1}{2}$ Zoll.

2) Wenn bei einer Kettenbrücke zwei gegenüber befindliche Hängestangen zusammen ein constantes Gewicht von 5000 Pf. tragen und durch einen darüber wegfahrenden Wagen noch mit 6000 Pfund belastet werden, wenn ferner der Arbeitsmodul A des Schmiedeeisens 7 Zollpfund, die Länge einer Hängestange 200 Zoll, und der Querschnitt derselben 1,5 Quadratzoll beträgt, so hat man

$$h = \frac{AFl\,(G + G_1)}{G^2} = \frac{7 \cdot 2 \cdot 1{,}5 \cdot 200 \cdot 11000}{36000000} = \frac{7 \cdot 11}{60} = \frac{77}{60}$$

$= 1{,}28$ Zoll. Rollt hiernach der Wagen über ein Hinderniß von 1,3 Zoll weg, so werden die Hängestangen schon Gefahr laufen, über die Elasticitätsgrenze hinaus ausgedehnt zu werden.

§. 291. Wirkt die Kraft P an einem Ende eines prismatischen Körpers rechtwinkelig gegen die Axe desselben, während das andere Ende festgehalten wird, so hat man das Arbeitsquantum, welches der Einbiegung oder Bogenhöhe a entspricht nach §. 192: Relative Stoßfestigkeit.

$$L = \frac{Pa}{2} = \frac{P^2 l^3}{6WE}.$$

Relative Stoßfestigkeit.

Nun ist aber (nach §. 190) $Mr = Plr = WE$, und (nach §. 200) $\frac{e}{r} = \frac{\lambda}{l}$; es folgt daher hier

$$L = \frac{W^2 E^2 l}{6 WEr^2} = \frac{WEl}{6 e^2}\left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 E \cdot \frac{Wl}{3 e^2}.$$

Ist nun $\frac{\lambda}{l}$ das Ausdehnungsverhältniß bei der Elasticitätsgrenze, so hat man $\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 E$ gleich dem Arbeitsmodul A, und daher das entsprechende Arbeitsquantum des Balkens:

$$L = A \cdot \frac{Wl}{3 e^2}.$$

Ebenso ist die Arbeit zum Abbrechen des Balkens:

$$L_1 = A_1 \cdot \frac{Wl}{3 e^2}.$$

Liegt der Balken an beiden Enden auf und wirkt die Kraft in der Mitte, so hat man statt l, $\frac{l}{2}$, und statt P, $\frac{P}{2}$, also auch statt L, $\frac{L}{2}$ zu setzen, weshalb sich die Formeln in nichts ändern.

Für einen parallelepipedischen Balken von der Breite b und Höhe h hat man

$$W = \frac{bh^3}{12} \text{ und } e = \frac{h}{2},$$

daher

$$L = \frac{1}{9} A \cdot bhl = \frac{1}{9} A V, \text{ sowie}$$
$$L_1 = \frac{1}{9} A_1 V.$$

Für cylindrische Stäbe vom Halbmesser r ist hingegen

$$\frac{W}{e^2} = \frac{\pi r^4}{4 r^2} = \frac{\pi r^2}{2},$$

und daher

$$L = \frac{1}{6} A V \text{ und } L_1 = \frac{1}{6} A_1 V.$$

Es verhält sich also in beiden Fällen die Arbeit zum Biegen oder Abbrechen des prismatischen Körpers wie das Volumen desselben.

§. 292 *). Die letzten Formeln finden vorzüglich ihre Anwendung, wenn ein an beiden Enden unterstützter prismatischer Körper BB, Figur 403 (a. f. S.), in seiner Mitte D den Schlag eines von einer Höhe $AD = h$ niederfallenden Körpers aufnehmen muß. Ist $\frac{G}{g} = M$ die träge Masse des fallenden Körpers und M_1 die nach der Mitte D redu-

cirte träge Masse des Körpers BB, so hat man wieder das Arbeitsvermögen, welches beide Körper nach dem Aufschlagen besitzen: Relative Stoßfestigkeit.

$$L = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{M^2}{M+M_1} = \frac{c^2}{2g} \cdot \frac{M}{M+M_1} \cdot Mg = \frac{M}{M+M_1} Gh.$$

Fig. 403.

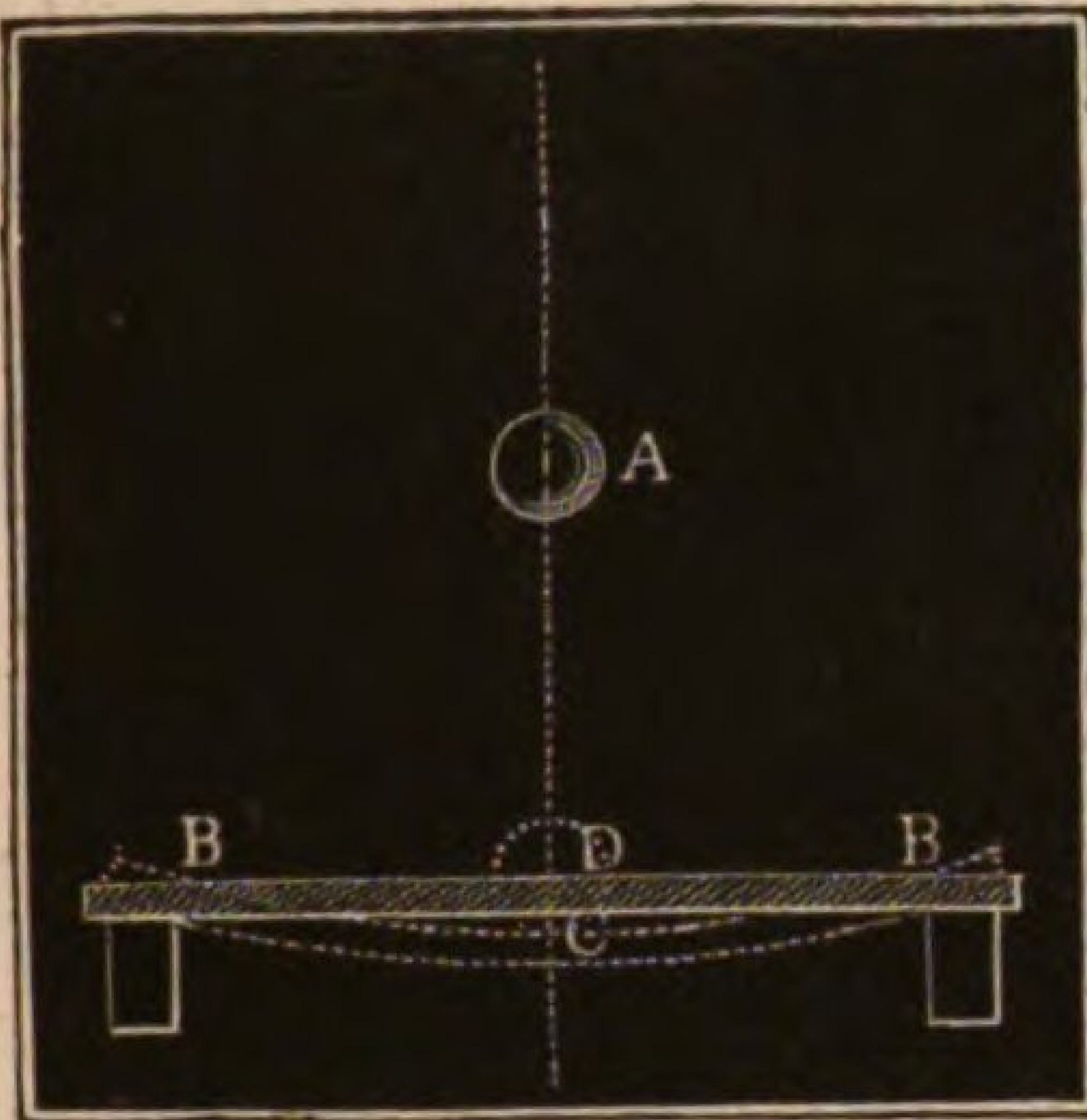
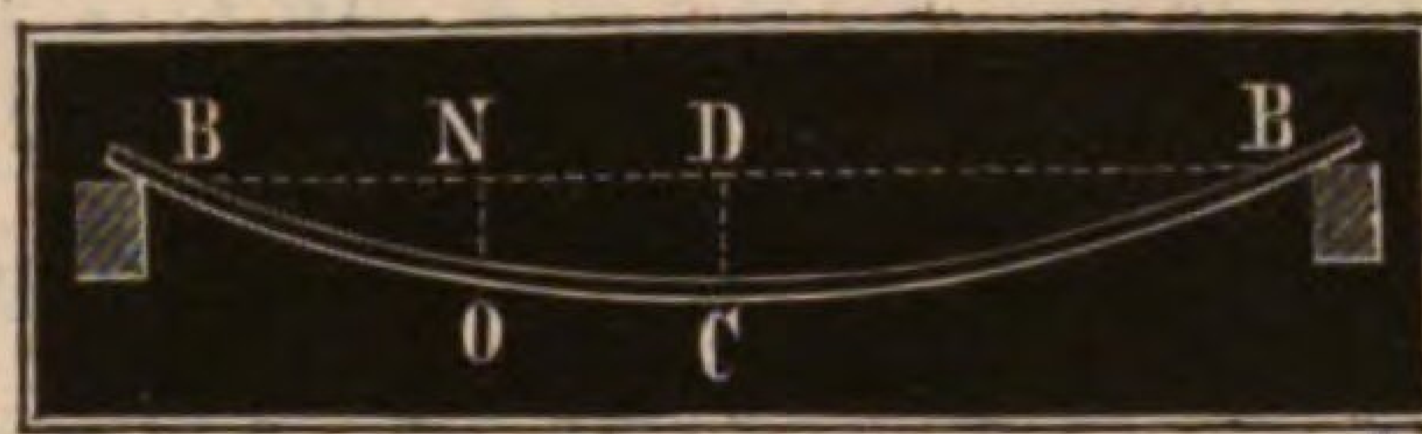


Fig. 404.



Was nun aber die träge Masse M_1 anlangt, so finden wir diese auf folgende Weise. Es sei G_1 das Gewicht dieser Stange, l die halbe Länge BD, Fig. 404, derselben, x eine Abscisse BN und y die entsprechende Ordinate NO der von BB im Augenblicke der größten Biegung gebildeten Curve; endlich bezeichne noch a die größte Bogenhöhe DC dieser Curve. Denken wir uns BD in unendlich viele Theile, jeden $= dx$, zerlegt, so erhalten wir ein Element O des Stangengewichtes $= \frac{G\,dx}{l}$, und daher ein Element der trägen Stangenmasse von N nach D reducirt:

$$dM_1 = \frac{G_1\,dx}{gl} \cdot \left(\frac{NO}{DC}\right)^2 = \frac{G_1 y^2 dx}{ga^2 l}.$$

Nun ist aber nach §. 192

$$y = \frac{Px}{2WE}\left(l^2 - \frac{x^2}{3}\right), \text{ also}$$

$$y^2 = \frac{P^2x^2}{4W^2E^2}\left(l^4 - \tfrac{2}{3}l^2x^2 + \frac{x^4}{9}\right), \text{ und}$$

$$a^2 = \frac{P^2 l^6}{9W^2E^2}, \text{ daher folgt hier}$$

$$dM_1 = \frac{9G_1x^2\left(l^4 - \tfrac{2}{3}l^2x^2 + \frac{x^4}{9}\right)dx}{4gl^7}, \text{ und}$$

die nach der Mitte D reducirte träge Masse der Stange BB,

$$M_1 = \int_0^l \frac{9G_1}{4gl^7}\left(l^4x^2 - \tfrac{2}{3}l^2x^4 + \tfrac{1}{9}x^6\right)dx$$

$$= \frac{9G_1}{4gl^7}\left(l^4 \cdot \frac{l^3}{3} - \tfrac{2}{3}l^2 \cdot \frac{l^5}{5} + \tfrac{1}{9}\frac{l^7}{7}\right) = \tfrac{17}{35} \cdot \frac{G_1}{g}.$$

Relative Stoßfestigkeit.

Dies vorausgesetzt, können wir nun die Leistung

$$L = \frac{M}{M + M_1} \cdot Gh = \frac{G^2 h}{G + {}^{17}/_{35} G_1}$$

setzen, und erhalten so die Bedingung des Ausbiegens bis zur Elasticitätsgrenze:

$$A \cdot \frac{Wl}{6e^2} = \frac{G^2 h}{G + {}^{17}/_{35} G_1},$$

also, wenn der Balken eine parallelepipedische Form hat,

$$^1/_9 \, AV = \frac{G^2 h}{G + {}^{17}/_{35} \cdot G_1}, \text{ und daher}$$

$$h = \frac{AV(G + {}^{17}/_{35} G_1)}{9 G^2}, \text{ oder } V = \frac{G_1}{\gamma} \text{ gesetzt,}$$

$$h = \frac{A G_1 (G + {}^{17}/_{35} G_1)}{9 \gamma G^2}.$$

Führt man A_1 statt A ein, so giebt der Ausdruck

$$h = \frac{A_1 G_1 (G + {}^{17}/_{35} G_1)}{9 \gamma G^2}$$

die Höhe an, von welcher das Gewicht G herabfallen muß, um den parallelepipedischen Stab zu zerbrechen.

Beispiel. Wie hoch muß ein eisernes Gewicht G von 100 Pfund herabfallen, um eine Gußeisenplatte von 36 Zoll Länge, 12 Zoll Breite und 3 Zoll Dicke in ihrer Mitte zu zerschlagen? Es ist hier der Arbeitsmodul der Festigkeit

$$A_1 = {}^1/_2 \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 E = {}^1/_2 \left(\frac{K}{E}\right)^2 E = {}^1/_2 \frac{K^2}{E} = {}^1/_2 \cdot \frac{19000^2}{17{,}000000}$$

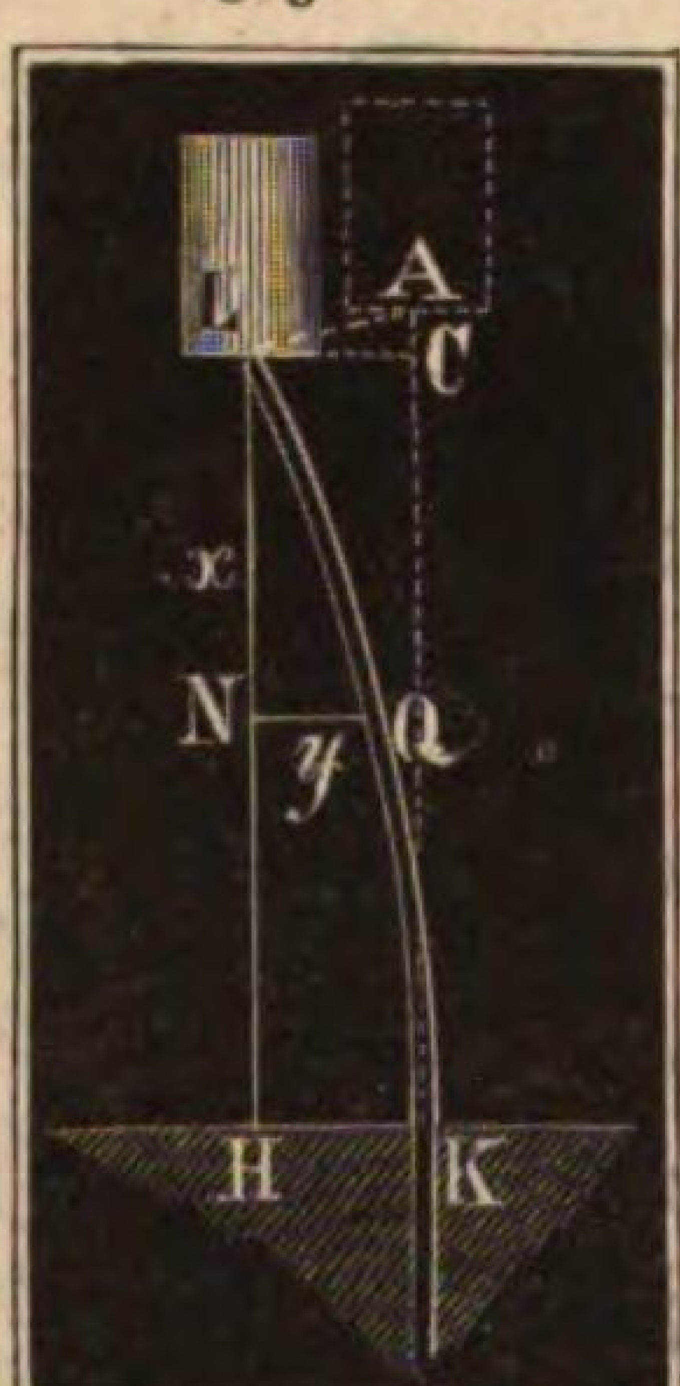
$$= {}^{361}/_{34} = 10{,}6 \text{ Zollpfund (S. Tabelle §. 189),}$$

ferner $V = bhl = 12 \cdot 3 \cdot 36 = 1296$ Cubikzoll, und da ein Cubikzoll Gußeisen $\gamma = 0{,}275$ Pf. wiegt, $G_1 = 1296 \cdot 0{,}275 = 356{,}4$ Pf.; daher die fragliche Höhe

$$h = \frac{10{,}6 \cdot 1296 \cdot (100 + {}^{17}/_{35} \cdot 356{,}4)}{9 \cdot 100000}$$

$$= \frac{1{,}374}{9} \cdot 273 = 41{,}7 \text{ Zoll.}$$

Fig. 405.



Rückwirkende Stoßfestigkeit.

§. 293*). Man kann auch die Arbeit berechnen, welche zum Zerknicken eines Körpers LQK, Fig. 405, nöthig ist. Aus der §. 213*) gefundenen Gleichung der elastischen Linie

$$y = a \sin. \left(x \sqrt{\frac{P}{WE}}\right),$$

folgt durch Differenziiren

$$dy = a \cos. \left(x \sqrt{\frac{P}{WE}}\right) \sqrt{\frac{P}{WE}} \cdot dx,$$

Rückwirkende Stoßfestigkeit.

und daher für das Element ds dieser Curve

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \left(1 + \frac{Pa^2}{WE}\left[cos.\left(x\sqrt{\frac{P}{WE}}\right)\right]^2\right) dx.$$

Da dy klein ist gegen dx, so hat man annähernd

$$ds = dx\left[1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = \left(1 + \frac{Pa^2}{2WE}\left[cos.\left(x\sqrt{\frac{P}{WE}}\right)\right]^2\right) dx$$

$$= \left(1 + \frac{Pa^2}{4WE}\left[1 + cos.\left(2x\sqrt{\frac{P}{WE}}\right)\right]\right) dx;$$

und es ergiebt sich daher durch Integration

$$s = x + \frac{Pa^2}{4WE}\left[x + \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{WE}{P}}\,.\,sin.\left(2x\sqrt{\frac{P}{WE}}\right)\right].$$

Nimmt man $x = l$, so hat man, da, nach §. 213, $l\sqrt{\frac{P}{WE}} = \frac{\pi}{2}$ ist

$$sin.\left(2l\sqrt{\frac{P}{WE}}\right) = sin.\,\pi = 0,$$

und daher die der Durchbiegung oder Bogenhöhe $HK = a$ entsprechende Senkung des Gewichtes, $AC = \delta = s - l = \frac{Pa^2 l}{4WE}$.

Nun ist aber nach §. 213, die Kraft, welche eine Durchbiegung überhaupt hervorbringt, $P = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 . WE$, daher folgt die Senkung oder der Weg von P während der Biegung der Stange KL

$$\delta = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \cdot \frac{a^2 l}{4} = \frac{\pi^2 a^2}{16 l}.$$

Noch ist auch $Par = WE$, und $\frac{e}{r} = \frac{\lambda}{l}$, daher folgt auch

$$a = \frac{WE}{Pr} = \frac{\lambda}{l} \cdot \frac{1}{e}\left(\frac{2l}{\pi}\right)^2 \text{ und}$$

$$\delta = \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 \cdot \frac{l^3}{\pi^2 e^2}.$$

Endlich ist die dieser Senkung δ oder die dem Ausdehnungsverhältnisse $\frac{\lambda}{l}$ entsprechende mechanische Arbeit

$$L = P\delta = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \cdot \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 \cdot \frac{l^3}{\pi^2 e^2} \cdot WE$$

$$= \tfrac{1}{4}\left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 \cdot E \cdot \frac{Wl}{e^2},$$

Rückwirkende Stoßfestigkeit. d. i. $L = \frac{1}{2} A \cdot \frac{Wl}{e^2}$ oder $L_1 = \frac{1}{2} A_1 \cdot \frac{Wl}{e^2}$,

je nachdem es sich um Biegung bis zur Elasticitätsgrenze, oder um Brechung des ganzen Körpers handelt.

Beispiel. Wenn ein hölzerner Pfahl noch 10 Fuß = 120 Zoll aus dem Erdboden hervorragt, und der letztere einen Widerstand von 20000 Fuß dem tiefern Eindringen des Pfahles entgegensetzt, so muß derselbe einen durch die Formel $P = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 WE$ bestimmten Querschnitt erhalten, um der Biegung beim Aufschlagen des Rammbäres widerstehen zu können. Man hat $W = \frac{\pi r^4}{4}$, wenn der Querschnitt des Pfahles ein Kreis ist, daher $P = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \cdot \frac{\pi r^4 E}{4}$, und den Halbmesser des Querschnitts

$$r = \sqrt[4]{\frac{4P}{\pi E} \cdot \left(\frac{2l}{\pi}\right)^2} = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 20000}{1800000} \cdot \frac{4 \cdot 120^2}{\pi^3}}$$
$$= \sqrt[4]{\frac{2560}{\pi^3}} = 3{,}01 \text{ Zoll}.$$

Ist der Pfahl schwächer, hat er z. B. nur 6 Zoll Dicke, so wird ihn die mechanische Arbeit

$$L = \frac{1}{4}\left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 E \cdot \frac{Wl}{e^2} = \frac{1}{16}\left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 \cdot \pi r^2 l E$$
$$= \frac{1}{16} \frac{1800000}{600^2} \cdot 9 \cdot 120 \cdot \pi = 1060 \text{ Zollpfund}$$

bis zur Elasticitätsgrenze, und dagegen die Leistung

$$L_1 = \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{K}{E}\right)^2 \cdot \pi r^2 l E = \frac{1}{16} \left(\frac{12}{1800}\right)^2 \cdot 1800000 \cdot 9 \cdot 120\, \pi$$
$$= 16956 \text{ Zollpfund bis zum Zerbrechen einbiegen.}$$

Wenn nun die Schläge auf den Pfahlkopf durch einen Rammbär ausgeführt werden, der 400 Pfund wiegt und 60 Zoll hoch herabfällt, so wird bei dem Gewicht $G_1 = 150$ Pfund des ganzen Pfahles, die Arbeit des Pfahles nach einem Schlage

$$L = \frac{G^2 h}{G + G_1} = \frac{400^2 \cdot 60}{550} = \frac{160000 \cdot 6}{55}$$
$$= 960000 : 55 = 17455 \text{ Zollpfund}$$

betragen, und daher der Pfahl nicht bloß gebogen, sondern auch zerknickt werden.

Arbeit der Torsionsfestigkeit. §. 294. Es lassen sich auch noch die Wirkungen des Stoßes auf die Torsion der Wellen untersuchen. Nach §. 216 ist die mechanische Leistung, welche die Torsion α einer Welle vom Halbmesser r erfordert

$$L = \frac{P\alpha a}{2} = \frac{\alpha^2 \cdot WE}{4l};$$

nun ist aber auch $\lambda = \frac{s^2}{2l} = \frac{\alpha^2 e^2}{2l}$, daher folgt $\alpha^2 = \frac{2\lambda l}{e^2}$ und

$$L = \frac{\lambda WE}{2e^2} = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{l} E \cdot \frac{Wl}{e^2}.$$

Führt man statt $\frac{\lambda}{l} E = T$ oder K ein, so bekommt man die Arbeit, welche aufzuwenden ist, um die äußersten, im Abstande e von der Wellenaxe befindlichen Fasern bis zur Elasticitätsgrenze zu spannen, Arbeit der Torsionsfestigkeit.

$$L = \frac{T}{2} \cdot \frac{Wl}{e^2},$$

und die, um die Welle abzuwürgen:

$$L_1 = \frac{K}{2} \cdot \frac{Wl}{e^2}.$$

Für eine cylindrische Welle ist $W = \frac{\pi r^4}{2}$, daher

$$L = \frac{T}{4} \cdot \pi r^2 l, \quad \text{und} \quad L_1 = \frac{K}{4} \cdot \pi r^2 l.$$

Hat die Welle das Trägheitsmoment $M_1 a_1^2$ und die Winkelgeschwindigkeit ε_1, und stößt sie eine Masse M, in dem Axenabstande a, so ist die von der Torsion der Welle aufzunehmende Stoßleistung

$$L = \frac{(\varepsilon_1 a)^2}{2} \cdot \frac{M_1^2 \frac{a_1^4}{a^4}}{M + \frac{M_1 a_1^2}{a^2}} = \frac{\varepsilon_1^2}{2} \cdot \frac{M_1^2 a_1^4}{Ma^2 + M_1 a_1^2},$$

und es lassen sich nun die Wirkungen des Stoßes auf die Torsion leicht berechnen, wenn man diesen Ausdruck einem der vorigen gleichsetzt.

Beispiel. Der Schwungring eines Walzwerkes wiegt 10000 Pfund, und geht mit 50 Fuß Geschwindigkeit um; wie stark muß die 100 Zoll lange eiserne Welle desselben sein, damit sie bei einem plötzlichen, etwa durch ein unüberwindliches Hinderniß hervorgebrachten Aufhalten keinen Schaden leide? Es ist hier $L = G\frac{c^2}{2g} = 10000 \cdot 0,016 \cdot 2500 = 400000$ Fußpfund $= 4800000$ Zollpfund; und auch

$$L = \frac{K}{4} \cdot \pi r^2 l = \frac{3000 \cdot 100 \cdot \pi r^2}{4} = 300000 \cdot \frac{\pi}{4} r^2 \text{ Zollpfund}.$$

wenn man nach §. 189, $K = 3000$ Pfund setzt. Durch Gleichsetzung bekommt man nun $F = \pi r^2 = \frac{19200000}{300000} = 649$ Quadratzoll, und daher die nöthige Wellenstärke $d = 2r = 9$ Zoll.

Anmerkung. Der Stoßfestigkeit ist erst in neuerer Zeit mehr Aufmerksamkeit geschenkt worden. Wir finden über sie nur Einiges mitgetheilt in Tredgold's Werk über die Stärke des Gußeisens u. s. w. (Strength of cast iron). in Poncelet's Introduction à la mécanique industrielle und in Rühlmann's Geodynamik. Letzteres Werk bezieht sich vorzüglich auf die Versuche Hodgkinson's über die Festigkeit prismatischer Körper gegen den Stoß, worüber ein besonderer Artikel in dem ersten Band der Zeitschrift für das gesammte Ingenieurwesen (dem Ingenieure) von Bornemann u. s. w. handelt.

Die Versuche Hodgkinson's stimmen im Wesentlichen mit der vorstehen-

Stoßfestigkeit. den Theorie über die Stoßfestigkeit überein; sie erstrecken sich vorzüglich auf die relative Festigkeit, und sind in der Art ausgeführt worden, daß pendelartig aufgehangene Gewichte horizontal gegen vertikale, an den Enden unterstützte, Stäbe schlugen. Es bestätigte sich hierbei die Richtigkeit der Formel $L = \frac{G^2 h}{G + \frac{1}{2} G_1}$, welche unter der Voraussetzung gefunden wird, daß der Stoß ein unelastischer ist, vollständig; es hing die Leistung L gar nicht von der materiellen Beschaffenheit des stoßenden Körpers ab. Gleich schwere Körper aus verschiedenen Stoffen (Gußeisen, Gußstahl, Glockenmetall, Blei) brachten bei gleicher Fallhöhe an einem und demselben Stabe (aus Gußeisen oder Gußstahl) gleiche Durchbiegungen hervor; auch waren diese fast genau dieselben, welche die Theorie unter der Voraussetzung findet, daß der Stab vollständig elastisch ist.

Fünfter Abschnitt.

Statik flüssiger Körper.

Erstes Kapitel.

Vom Gleichgewichte und Drucke des Wassers in Gefäßen.

§. 295. Wir betrachten die flüssigen Körper als Verbindungen materieller Punkte, deren Zusammenhang unter einander so schwach ist, daß die kleinsten Kräfte hinreichen, durch Verschieben eine Trennung derselben zu bewirken (§. 59). Manche der in der Natur vorkommenden Körper, wie z. B. die Luft, das Wasser u. s. w., besitzen diese Eigenschaft der Flüssigkeit im hohen Grade, andere Körper hingegen, wie z. B. Oel, Schmiere, aufgeweichte Erde u. s. w., sind im mindern Grade flüssig. Man nennt jene vollkommen, diese aber unvollkommen flüssige Körper. Gewisse Körper, wie z. B. die Teige, stehen den festen Massen ebenso nahe als den flüssigen. Flüssigkeit.

Vollkommen flüssige Körper, von welchen in der Folge nur die Rede sein wird, sind auch zugleich vollkommen elastisch, d. h. sie lassen sich durch äußere Kräfte zusammendrücken und nehmen nach Wegnahme dieser Kräfte das erste Volumen vollkommen wieder an. Nur ist die Größe der einem gewissen Drucke entsprechenden Volumenveränderung bei verschiedenen Flüssigkeiten sehr verschieden; während sich dieselbe bei den tropfbarflüssigen Körpern höchst unbedeutend zeigt, fällt sie bei den luftförmigen Körpern, die man deshalb auch elastische Flüssigkeiten nennt, sehr groß aus. Dieser geringe Grad von Zusammendrückbarkeit der tropfbarflüssigen Körper ist der Grund, weswegen man bei den meisten Untersuchungen der Hydrostatik (§. 63) dieselben als incompressibele

Flüssigkeit. oder unelastische Flüssigkeiten ansieht und behandelt. Da das Wasser unter allen tropfbarflüssigen Körpern am meisten verbreitet ist und im Leben am häufigsten angewendet wird, so sieht man es als den Repräsentanten aller dieser Flüssigkeiten an und spricht bei den Untersuchungen in der Mechanik des Flüssigen immer nur vom Wasser, indem man stillschweigend voraussetzt, daß die mechanischen Verhältnisse anderer tropfbaren Flüssigkeiten dieselben sind wie die des Wassers.

Aus denselben Gründen ist in der Mechanik der elastisch-flüssigen Körper immer nur von der gemeinen atmosphärischen Luft die Rede.

Anmerkung. Eine Wassersäule von einem Quadratzoll Querschnitt wird durch ein Gewicht von 15 Pfd., welches dem Drucke der Atmosphäre entspricht, um ohngefähr 0,00005 oder 50 Milliontel ihres Volumens zusammengedrückt, wogegen eine Luftsäule unter dem Drucke dieses Gewichtes nur die Hälfte ihres anfänglichen Volumens einnimmt. Siehe: Aimé, über die Zusammendrückung der Flüssigkeiten, in Poggendorff's Annalen, Ergänzungsband (nach 72), 1848.

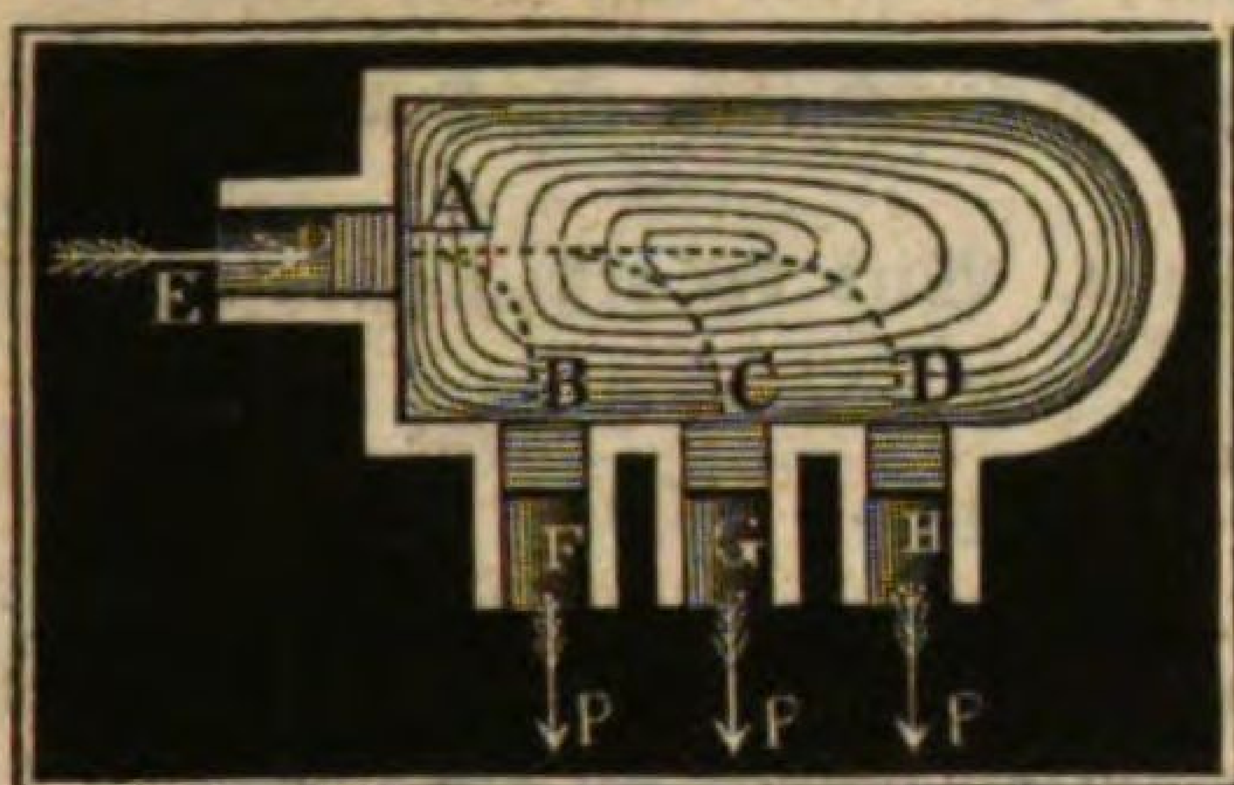
Princip des gleichen Druckes. §. 296. Die charakteristische Eigenschaft der Flüssigkeiten, wodurch sich dieselben wesentlich von den festen Körpern unterscheiden, und welche der Lehre vom Gleichgewichte flüssiger Körper zur Basis dient, ist die Fähigkeit, den Druck, welcher auf einen Theil der Oberfläche der Flüssigkeit ausgeübt wird, nach allen Richtungen hin unverändert fortzupflanzen. Bei den festen Körpern pflanzt sich der Druck nur in seiner eigenen Richtung fort (§. 83); wird dagegen das Wasser von einer Seite her gedrückt, so entsteht in der ganzen Masse derselben eine Spannung, die sich nach allen Seiten hin äußert und daher an allen Stellen der Oberfläche desselben wahrzunehmen ist. Um sich von der Richtigkeit dieses Gesetzes zu überzeugen, kann man einen mit Wasser gefüllten Apparat anwenden, wie ihn Figur 406 im horizontalen Durchschnitte repräsentirt. Die gleich weiten und in gleicher Höhe über dem horizontalen Fußboden befindlichen Röhren AE, BF u. s. w. sind durch vollkommen bewegliche und genau abschließende Kolben verschlossen; das Wasser drückt deshalb auch durch sein Gewicht auf den einen Kolben genau so stark wie auf den andern. Sehen wir aber von diesem Drucke ab, oder nehmen wir das Wasser gewichtslos an. Drücken wir dagegen den einen Kolben mit einer gewissen Kraft P gegen das Wasser so pflanzt sich diese durch das Wasser hindurch bis zu den übrigen Kolben B, C, D fort und

Fig. 406.



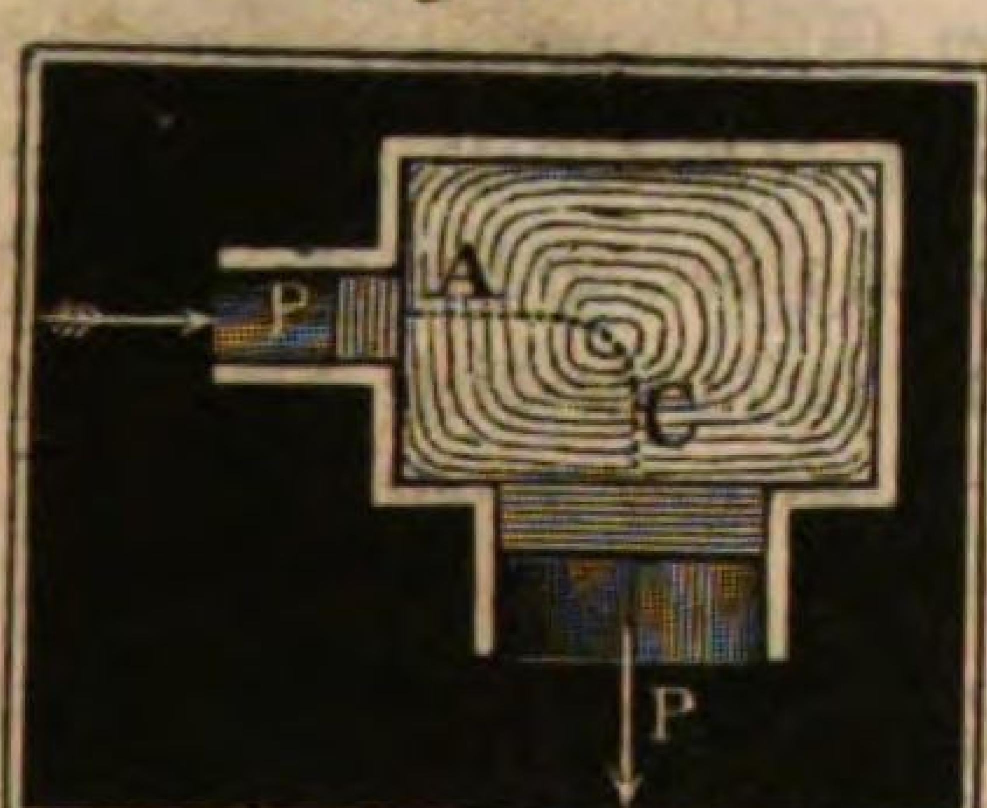
es ist zur Herstellung des Gleichgewichtes, oder um das Zurückgehen dieser Kolben zu verhindern, nöthig, auf jeden dieser Kolben eine gleich große Gegenkraft P wirken zu lassen. Wir sind daher berechtigt, anzunehmen, daß die auf einen Theil A der Oberfläche der Wassermasse wirkende Kraft P eine Spannung in dieser erzeugt, und sich dadurch nicht nur in der geraden Linie AC, sondern auch in jeder andern Richtung BF, DH u. s. w. auf andere gleich große Oberflächentheile C, B, D fortpflanzt. Princip des gleichen Druckes.

Fig. 407.



Sind die Axen der Röhren BF, CG u. s. w., Fig. 407, unter sich parallel, so lassen sich die Kräfte, welche auf ihre Kolben wirken, durch Addition zu einer einzigen Kraft vereinigen; ist n die Anzahl dieser gleich großen Kolben, so beträgt daher der Gesammtdruck auf dieselben: $P_1 = nP$, und in dem von der Figur repräsentirten Falle $P_1 = 3P$. Nun ist aber der Inbegriff F_1 der gedrückten Flächen B, C, D ebenfalls $= n$ mal gedrückte Fläche F des einen Kolbens, es läßt sich daher n nicht nur $= \frac{P_1}{P}$, sondern auch $= \frac{F_1}{F}$, also überhaupt $\frac{P_1}{P} = \frac{F_1}{F}$ setzen.

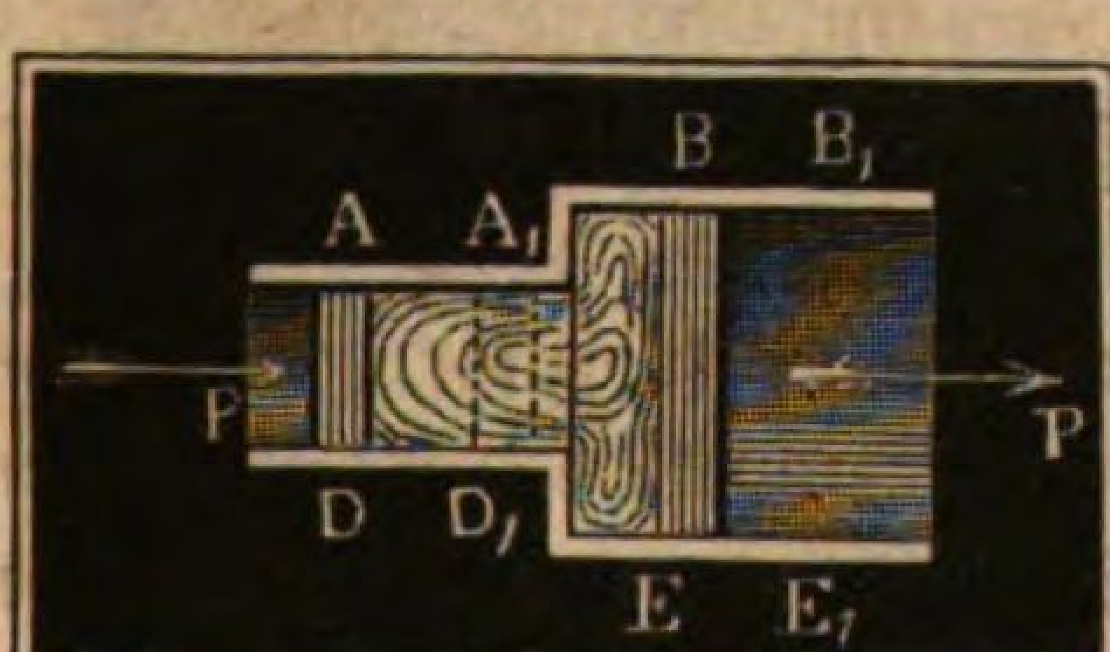
Fig. 408.



Rücken wir nun noch die Röhren B, C, D u. s. w. so zusammen, daß sie, wie in Fig. 408, eine einzige ausmachen, und verschließen wir sie durch einen einzigen Kolben, so geht F_1 in eine einzige Fläche über und es ist P_1 die auf sie wirkende Kraft; es folgt daher das allgemeinere Gesetz: die Drücke, welche ein flüssiger Körper auf verschiedene Theile der Gefäßwand ausübt, sind den Inhalten dieser Theile proportional.

Dieses Gesetz entspricht auch dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten. Bewegt sich der Kolben $AD = F$, Fig. 409, um den Weg $AA_1 = s$ einwärts, so drückt er das Wasserprisma Fs aus seiner Röhre, und geht der Kolben $BE = F_1$ um den Weg $BB_1 = s_1$ auswärts, so läßt er den prismatischen Raum $F_1 s_1$ zurück. Da wir aber vorausgesetzt haben, daß sich die Wassermasse weder ausdehnen noch zusammendrücken läßt, so muß das Volumen der-

Fig. 409.



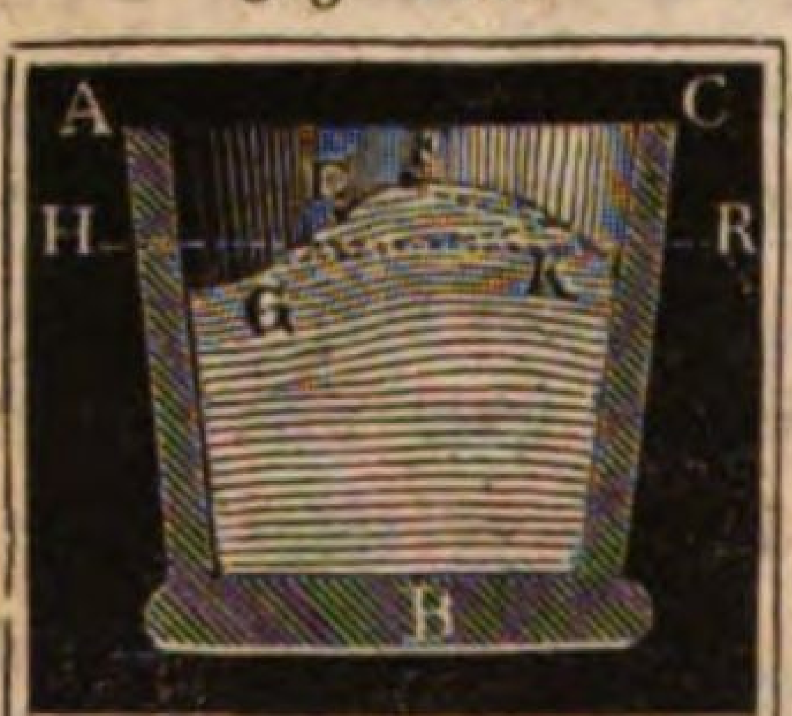
Princip des gleichen Druckes. selben bei diesen Kolbenbewegungen unverändert bleiben, also der Zusatz Fs dem Abgange F_1s_1 gleich sein. Die Gleichung $F_1s_1 = Fs$ giebt aber $\frac{F_1}{F} = \frac{s}{s_1}$, und aus der Verbindung dieser Proportion mit der Proportion $\frac{P_1}{P} = \frac{F_1}{F}$ folgt $\frac{P_1}{P} = \frac{s}{s_1}$, es ist daher auch Arbeit P_1s_1 = Arbeit Ps (S. §. 80).

Beispiel. Wenn der Kolben AD einen Durchmesser von $1\frac{1}{2}$ Zoll und der Kolben BE einen solchen von 10 Zoll hat, und jener mit einer Kraft P von 36 Pf. auf das Wasser gedrückt wird, so übt dieser Kolben eine Kraft $P_1 = \frac{F_1}{F} P$ $= \frac{10^2}{1,5^2} \cdot 36 = \frac{400}{9} \cdot 36 = 1600$ Pf. aus. Wird der erste Kolben um 6 Zoll fortgeschoben, so geht der zweite nur um $s_1 = \frac{F}{F_1} s = \frac{9 \cdot 6}{400} = {}^{27}/_{200} = 0,135$ Zoll zurück.

Anmerkung. Vielfache Anwendungen dieses Gesetzes kommen in der Folge vor, bei der hydraulischen Presse, der Wassersäulenmaschine, bei den Pumpen u. s. w.

Wasserspiegel. §. 297. Die dem Wasser inwohnende Schwerkraft macht, daß sich alle Elemente desselben abwärts zu bewegen suchen und sich auch wirklich so bewegen, wenn sie nicht daran verhindert werden. Um eine zusammenhängende Wassermasse zu erhalten, ist es deshalb nöthig, das Wasser in Gefäßen einzuschließen. Das in einem Gefäße ABC, Fig. 410, befindliche Wasser ist aber nur dann im Gleichgewichte, wenn die noch freie Oberfläche HR desselben rechtwinkelig auf der Richtung der Schwerkraft, also horizontal ist, denn so lange diese Oberfläche noch krumm oder gegen den Horizont geneigt ist, so lange giebt es auch noch höher liegende Wasserelemente E, F u. s. w., welche wegen ihrer großen Beweglichkeit in Folge ihrer Schwere über den darunter befindlichen, wie auf einer schiefen Ebene GK, herabgleiten.

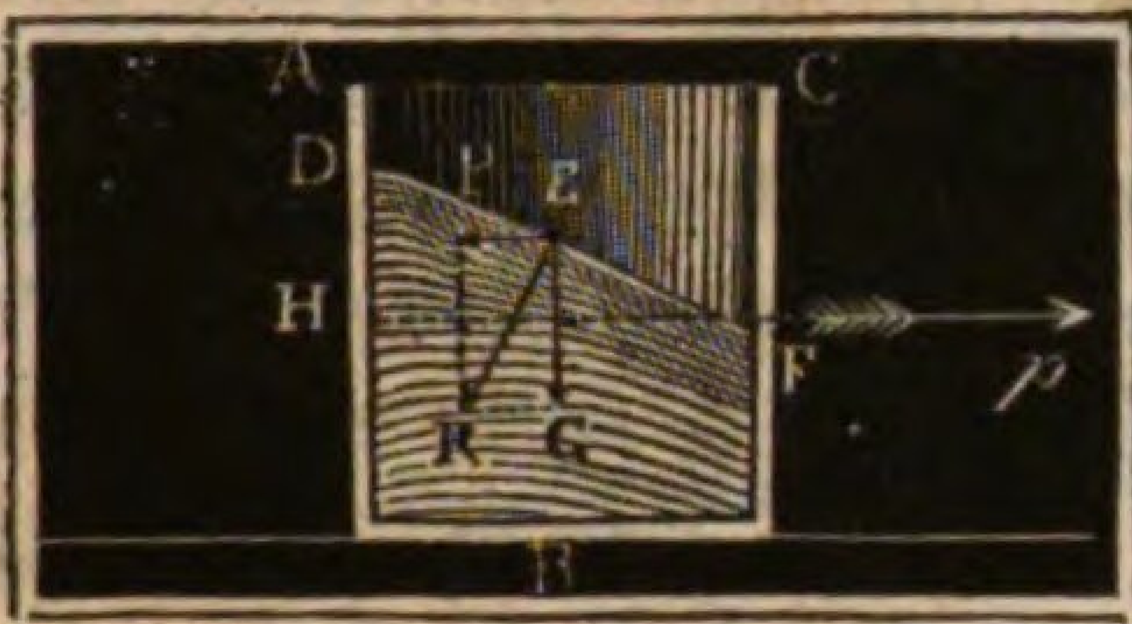
Fig. 410.



Da bei größeren Entfernungen die Schwerrichtungen nicht mehr als parallele Linien angesehen werden können, so hat man die freie Oberfläche oder den Spiegel des Wassers in einem großen Gefäße, wie z. B. in einem größeren See, nicht mehr als eine Ebene, sondern als einen Kugeloberflächentheil zu betrachten.

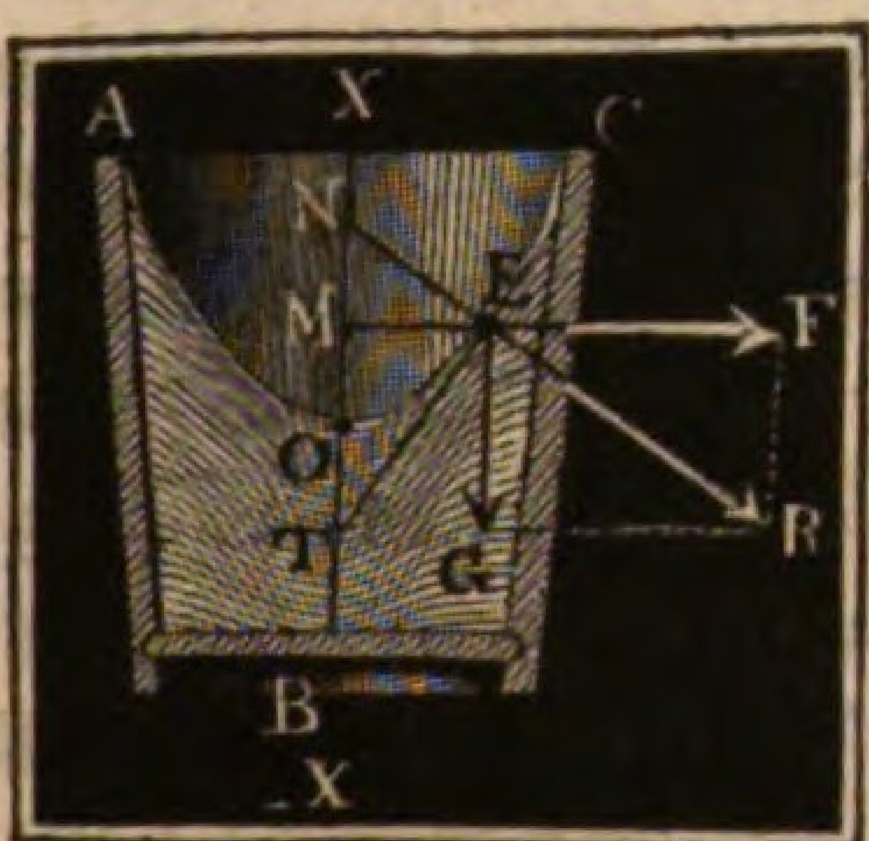
Wirkt außer der Schwere noch eine andere Kraft auf die Wasserelemente, so steht im Gleichgewichtszustande die Oberfläche des Wassers winkelrecht auf der Richtung der aus der Schwere und der hinzutretenden Kraft entspringenden Mittelkraft.

Fig. 411.



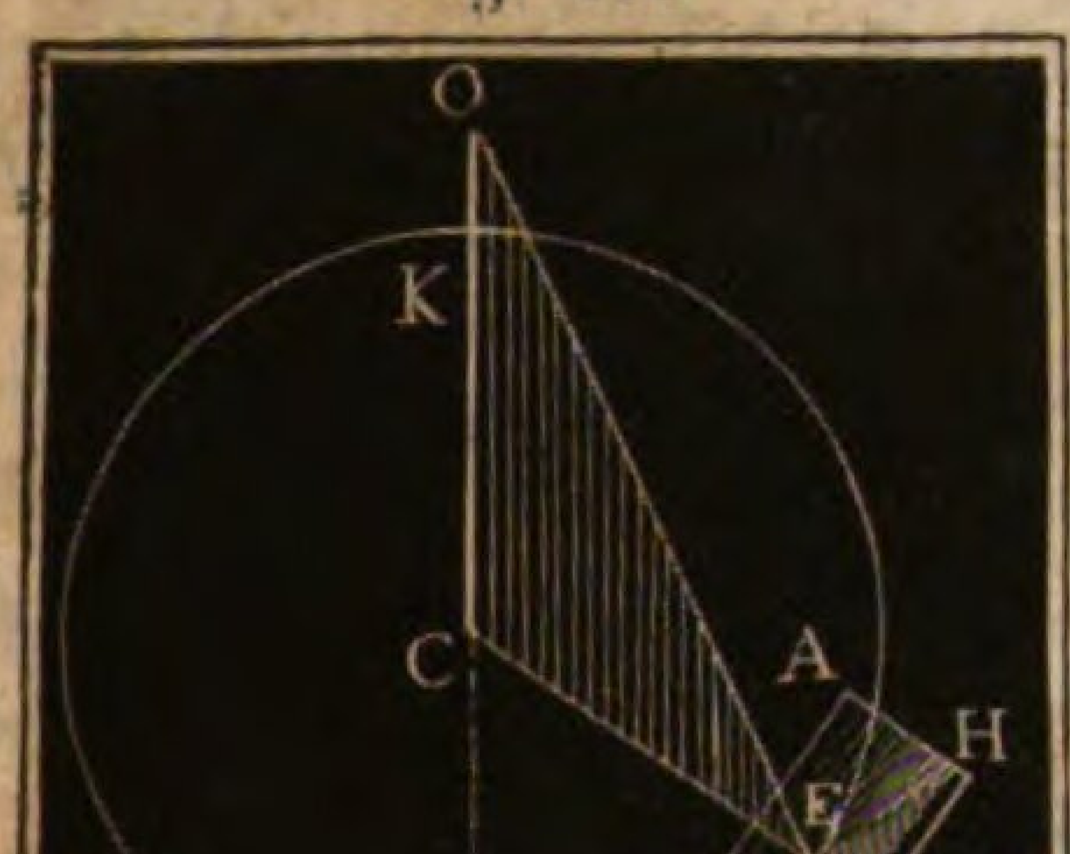
Wird ein Gefäß ABC, Fig. 411, mit der unveränderlichen Acceleration p horizontal fortbewegt, so bildet die freie Oberfläche des Wassers in demselben eine schiefe Ebene DF, denn da in diesem Falle jedes Element E dieser Oberfläche von seinem Gewichte G abwärts und von seiner Trägheit $P = \frac{p}{g} G$ horizontal getrieben wird, so entspringt in jedem eine Mittelkraft R, welche von der Richtung der Schwere um einen unveränderlichen Winkel $REG = \alpha$ abweicht. Dieser Winkel ist auch zugleich der Winkel DFH, um welchen der auf R normal stehende Wasserspiegel von dem Horizonte abweicht. Er ist bestimmt durch $tang.\, \alpha = \frac{P}{G} = \frac{p}{g}$. Wasserspiegel

Fig. 412.



Wird dagegen ein Gefäß ABC, Figur 412, gleichförmig um seine vertikale Axe $X\overline{X}$ gedreht, so bildet der Spiegel des mit umlaufenden Wassers in demselben eine hohle Fläche AOC mit parabolischen Axendurchschnitten. Ist ω die Winkelgeschwindigkeit des Gefäßes und des darin befindlichen Wassers, G das Gewicht eines Wasserelementes E und y der Abstand ME desselben von der vertikalen Axe, so hat man für die Centrifugalkraft dieses Elementes $F = \omega^2 \frac{Gy}{g}$ (§. 246), und daher für den Winkel $REG = TEM = \varphi$, welchen die Mittelkraft R mit der Vertikalen, oder die Tangente ET des Wasserprofiles mit dem Horizonte einschließt:

Fig. 413



$$tang.\, \varphi = \frac{F}{G} = \frac{\omega^2 y}{g}.$$

Hiernach ist also die Tangente des Winkels, welchen die Berührungslinie mit der Ordinate einschließt, der Ordinate proportional. Da diese Eigenschaft der gemeinen Parabel zukommt (S. §. 144), so ist auch der vertikale Durchschnitt AOC des Wasserspiegels eine Parabel, deren Axe mit der Drehungsaxe $X\overline{X}$ zusammenfällt.

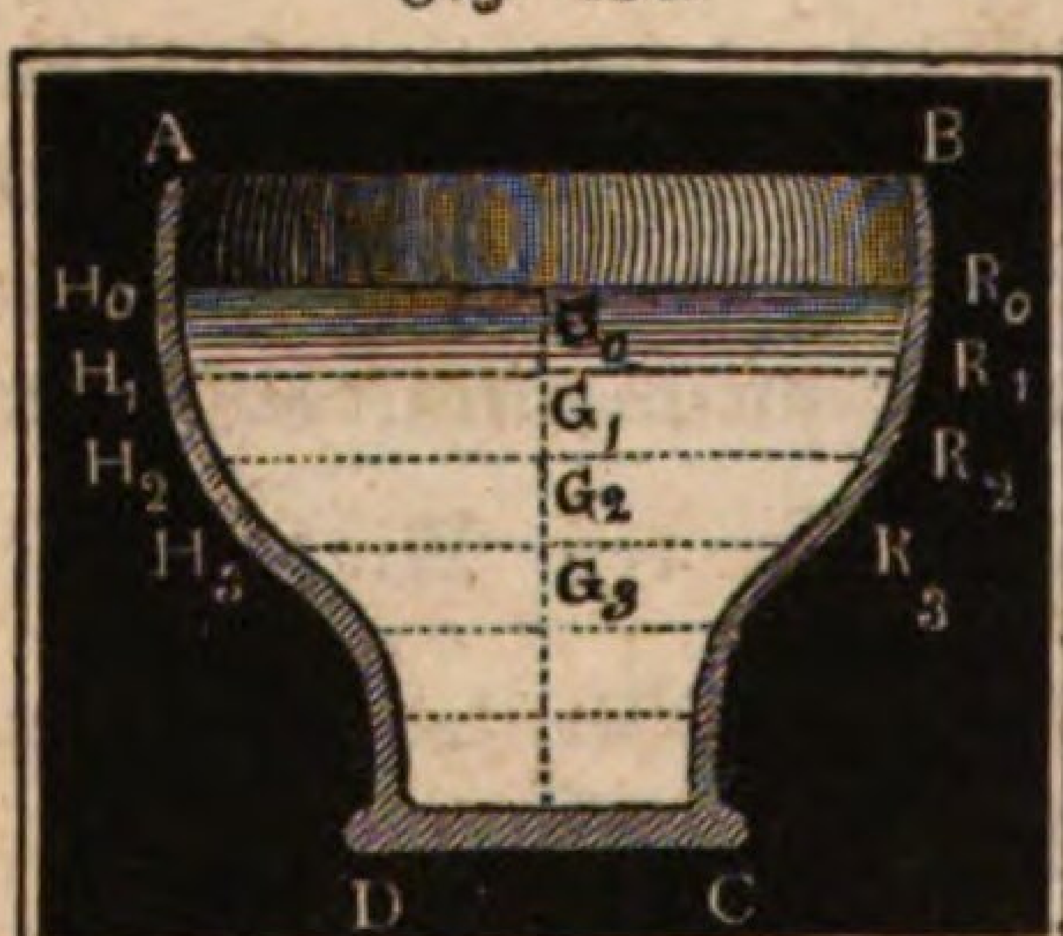
Bewegt man ein Gefäß ABH, Fig. 413, in einem Vertikalkreise um eine Hori-

Wasserspiegel. zontalaxe C gleichförmig herum, so bildet die Oberfläche des Wassers in demselben eine cylindrische Fläche mit kreisförmigem Querschnitte DEH. Verlängern wir die Richtung der aus der Schwere G und der Centrifugalkraft F eines Elementes E entstehenden Mittelkraft R bis zum Durchschnitte O mit der Vertikalen CK durch den Drehpunkt, so erhalten wir die ähnlichen Dreiecke ECO und EFR, für welche gilt $\frac{CO}{EC} = \frac{FR}{EF} = \frac{G}{F}$; nun ist aber, wenn man den Drehungshalbmesser $EC = y$ setzt, und die letzte Bezeichnung beibehält, $F = \frac{\omega^2 G y}{g}$, es folgt daher die Linie

$$CO = \frac{g}{\omega^2} = g\left(\frac{30}{\pi u}\right)^2 = \frac{2850}{u^2},$$

wenn u die Zahl der Umdrehungen pr. Min. bezeichnet. Da dieser Werth von CO für alle Wasserelemente einer und derselbe ist, so folgt, daß die Mittelkräfte aller den Durchschnitt DEH bildenden Wasserelemente nach O gerichtet sind und daß daher der auf die Richtungen dieser Kräfte rechtwinkelig stehende Durchschnitt ein aus O beschriebener Kreis ist. Diesem zufolge bilden die Wasserspiegel in den Zellen eines oberschlägigen Wasserrades lauter, einer und derselben Horizontalaxe entsprechende cylindrische Flächen.

Bodendruck. Fig. 414.



§. 298. Der Druck des Wassers in einem Gefäße $ABCD$, Fig. 414, ist unmittelbar unter dem Wasserspiegel am kleinsten, wird mit der Tiefe immer größer und größer und ist unmittelbar über dem Boden am größten. Um dies ganz allgemein zu beweisen, nehmen wir an, daß der Wasserspiegel H_0R_0, dessen Inhalt F_0 sein möge, von einer Kraft P_0, z. B. durch die darüber stehende Atmosphäre oder durch einen Kolben gleichförmig gedrückt werde, und denken uns die ganze Wassermasse durch viele Horizontalebenen wie H_1R_1, H_2R_3 u. s. w. in lauter gleich dicke Wasserschichten zerlegt. Ist F_1 der Inhalt des ersten Querschnittes H_1R_1, λ die Dicke jeder Wasserschicht und γ die Dichtigkeit des Wassers, so hat man das Gewicht der ersten Wasserschicht $G_1 = F_1\lambda\gamma$, und denjenigen Theil des Druckes in H_1R_1, welcher aus dem Drucke P_0 des Wasserspiegels H_0R_0 entspringt, nach dem Principe in §. 296, $= \frac{P_0F_1}{F_0}$. Addirt man nun beide Kräfte, so erhält man den Druck im Horizontalschnitte H_1R_1:

$$P_1 = \frac{P_0F_1}{F_0} + F_1\lambda\gamma.$$

Bodendruck.

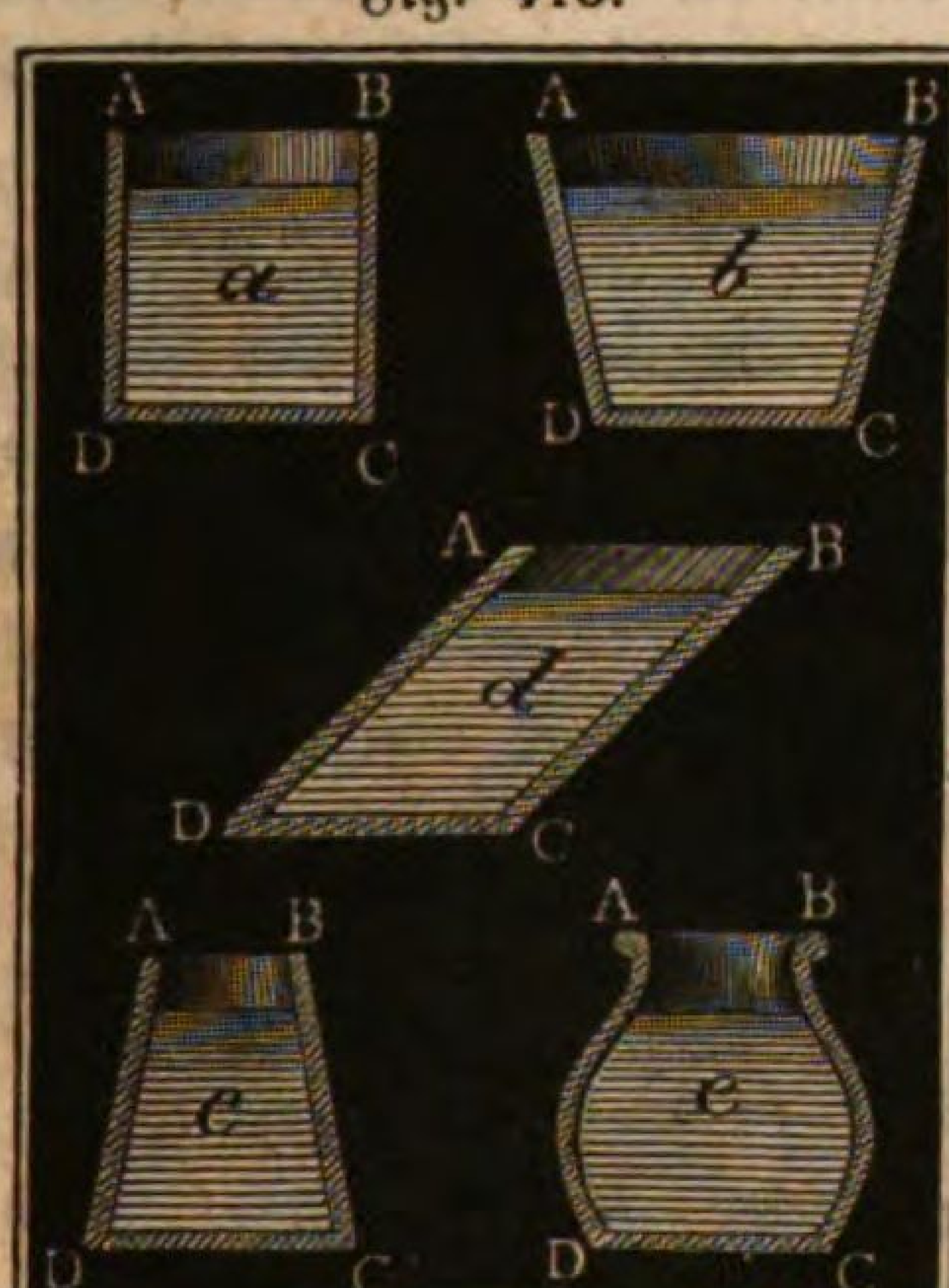
Dividirt man durch F_1, so erhält man die Gleichung $\frac{P_1}{F_1} = \frac{P_0}{F_0} + \lambda\gamma$, oder, da $\frac{P_0}{F_0}$ und $\frac{P_1}{F_1}$ die auf die Flächeneinheit bezogenen Drücke p_0 und p_1 in H_0R_0 und H_1R_1 bezeichnen, $p_1 = p_0 + \lambda\gamma$.

Der Druck in dem folgenden Horizontalschnitte H_2R_2 bestimmt sich genau so wie der Druck in der Schicht H_1R_1, wenn man berücksichtigt, daß hier der anfängliche Druck auf die Einheit schon $p_1 = p_0 + \lambda\gamma$ ist, während er dort nur p_0 war. Es folgt der Druck in der Horizontalschicht H_2R_2: $p_2 = p_1 + \lambda\gamma = p_0 + \lambda\gamma + \lambda\gamma = p_0 + 2\lambda\gamma$; ebenso der Druck in der dritten Schicht $H_3R_3 = p + 3\lambda\gamma$, in der vierten $= p_0 + 4\lambda\gamma$ und in der $n$ten $= p_0 + n\lambda\gamma$. Nun ist aber $n\lambda$ die Tiefe $G_0G_n = h$ dieser $n$ten Schicht unter dem Wasserspiegel, es läßt sich daher der Druck auf jede Flächeneinheit in der $n$ten Horizontalschicht setzen: $p = p_0 + h\gamma$.

Man nennt die Tiefe h eines Flächenelementes unter dem Wasserspiegel die **Druckhöhe** (franz. charge d'eau; engl. height of water) desselben, und findet hiernach den Druck des Wassers auf irgend eine Flächeneinheit, wenn man den von außen wirkenden Druck um das Gewicht einer Wassersäule vermehrt, deren Basis diese Einheit und deren Höhe die Druckhöhe ist.

Bei einer horizontalen Fläche, wie z. B. beim Boden CD, ist die Druckhöhe h an allen Stellen eine und dieselbe, ist daher der Inhalt derselben $= F$, so folgt der Druck des Wassers gegen dieselbe: $P = (p_0 + h\gamma)F = Fp_0 + Fh\gamma = P_0 + Fh\gamma$, oder wenn man vom äußeren Drucke abstrahirt: $P = Fh\gamma$. **Der Druck des Wassers gegen eine horizontale Fläche ist also gleich dem Gewichte der über ihr stehenden Wassersäule Fh.**

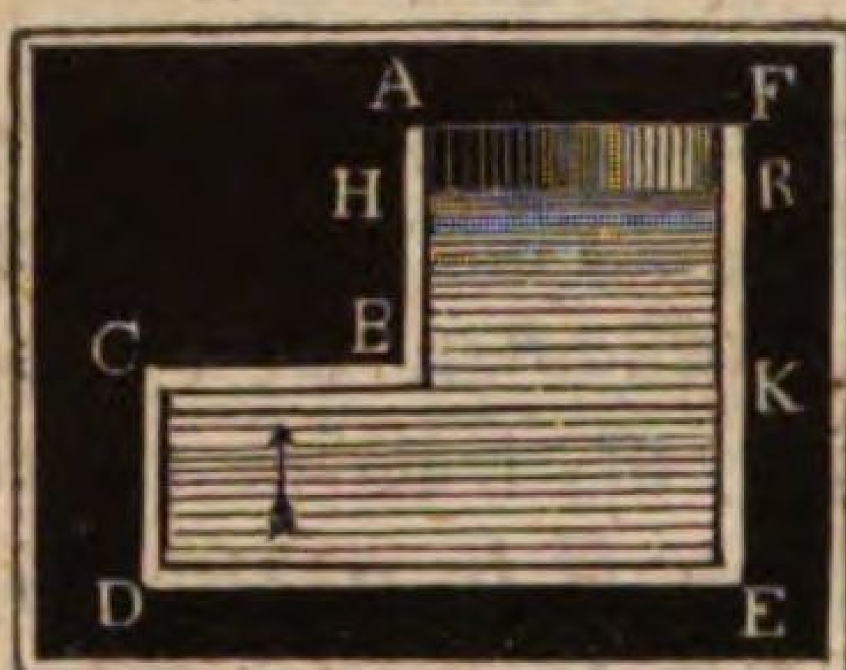
Fig. 415.



Dieser Druck des Wassers gegen eine horizontale Fläche, z. B. gegen den horizontalen Boden oder gegen einen horizontalen Theil der Seitenwand, ist von der Form des Gefäßes unabhängig; ob also das Gefäß AC, Fig. 415, prismatisch wie a, oder oben weiter als unten, wie b, oder unten weiter als oben, wie c, oder schief wie d, oder ob es bauchig wie e ist u. s. w., immer bleibt der Druck gegen den Boden gleich dem Gewichte einer Wassersäule, deren Basis der Boden und deren Höhe die Tiefe des Bodens unter dem Wasserspiegel ist. Da sich der Druck des Wassers nach

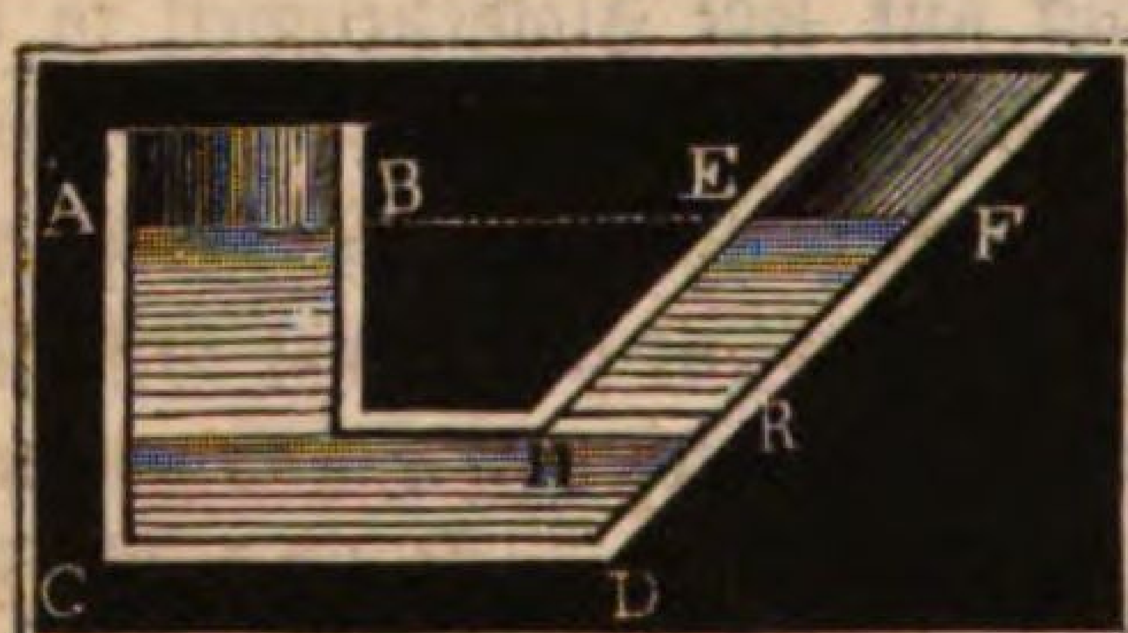
Bodendruck. allen Seiten fortpflanzt, so findet dieses Gesetz auch dann noch seine Anwendung, wenn die Fläche, wie z. B. BC in Fig. 416, von unten nach oben gedrückt wird. Jede Flächeneinheit in der an BC anliegenden Wasserschicht CK wird durch eine Wassersäule von der Höhe $HB = RK = h$ gedrückt, es ist folglich auch der Druck gegen $CB = Fh\gamma$, wenn F den Inhalt dieser Fläche bezeichnet.

Fig. 416.



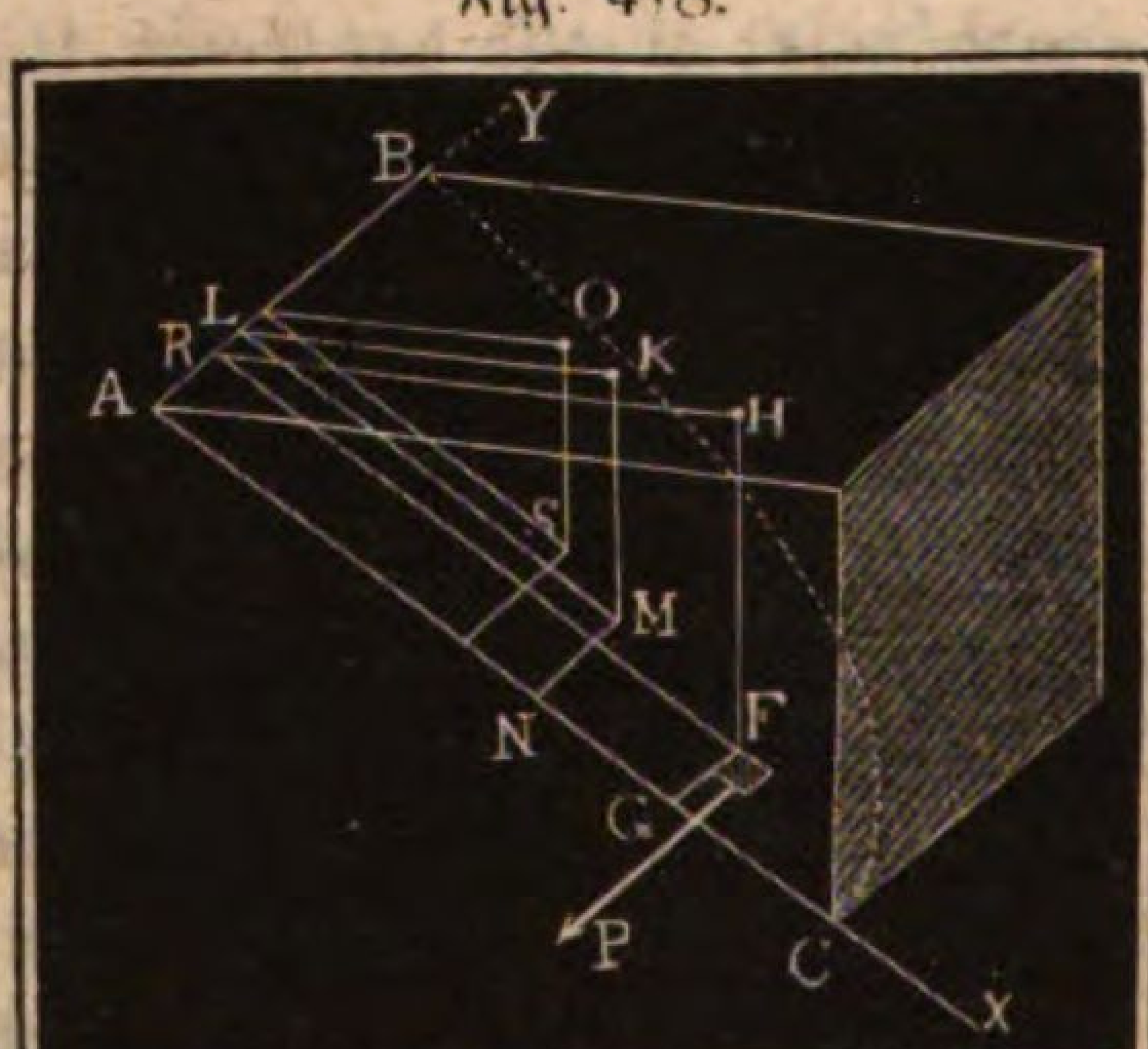
Es folgt auch hieraus noch, daß das Wasser in communicirenden Röhren ABC und DEF, Fig. 417, im Zustande des Gleichgewichtes gleich hoch steht, oder daß die Spiegel AB und EF derselben in eine und dieselbe Horizontalebene fallen. Zur Erhaltung des Gleichgewichtes ist es nöthig, daß die Wasserschicht HR durch die über ihr stehende Wassersäule ER ebenso stark nach unten gedrückt wird, als durch die unter ihr befindliche Wassermasse von unten nach oben. Da aber in beiden Fällen die gedrückte Fläche eine und dieselbe ist, so muß daher auch die Druckhöhe in beiden Fällen eine und dieselbe sein, es muß also der Wasserspiegel AB ebenso hoch über HR stehen als der Wasserspiegel EF.

Fig. 417



Seitendruck. §. 299. Das soeben gefundene Gesetz von dem Wasserdrucke gegen eine Horizontalfläche läßt sich nicht unmittelbar auf eine gegen den Horizont geneigte ebene Fläche anwenden, da bei dieser die Druckhöhen an verschiedenen Stellen verschieden sind. Der Druck $p = h\gamma$ auf jede Flächeneinheit innerhalb der horizontalen Wasserschicht, welche um die Tiefe h unter dem Wasserspiegel steht, wirkt nach allen Richtungen (§. 296) und folglich auch rechtwinkelig gegen die festen Seitenwände des Gefäßes, die (nach §. 128) denselben vollkommen aufnehmen. Ist nun F_1 der Inhalt eines Elementes von einer Seitenfläche ABC, Fig. 418, und h_1 dessen Druckhöhe FH, so hat man den Normaldruck des Wassers gegen dasselbe: $P_1 = F_1 . h_1\gamma$; ist ebenso F_2 ein zweites Flächenelement, und h_2 dessen Druckhöhe, so hat man den Normaldruck auf dasselbe:

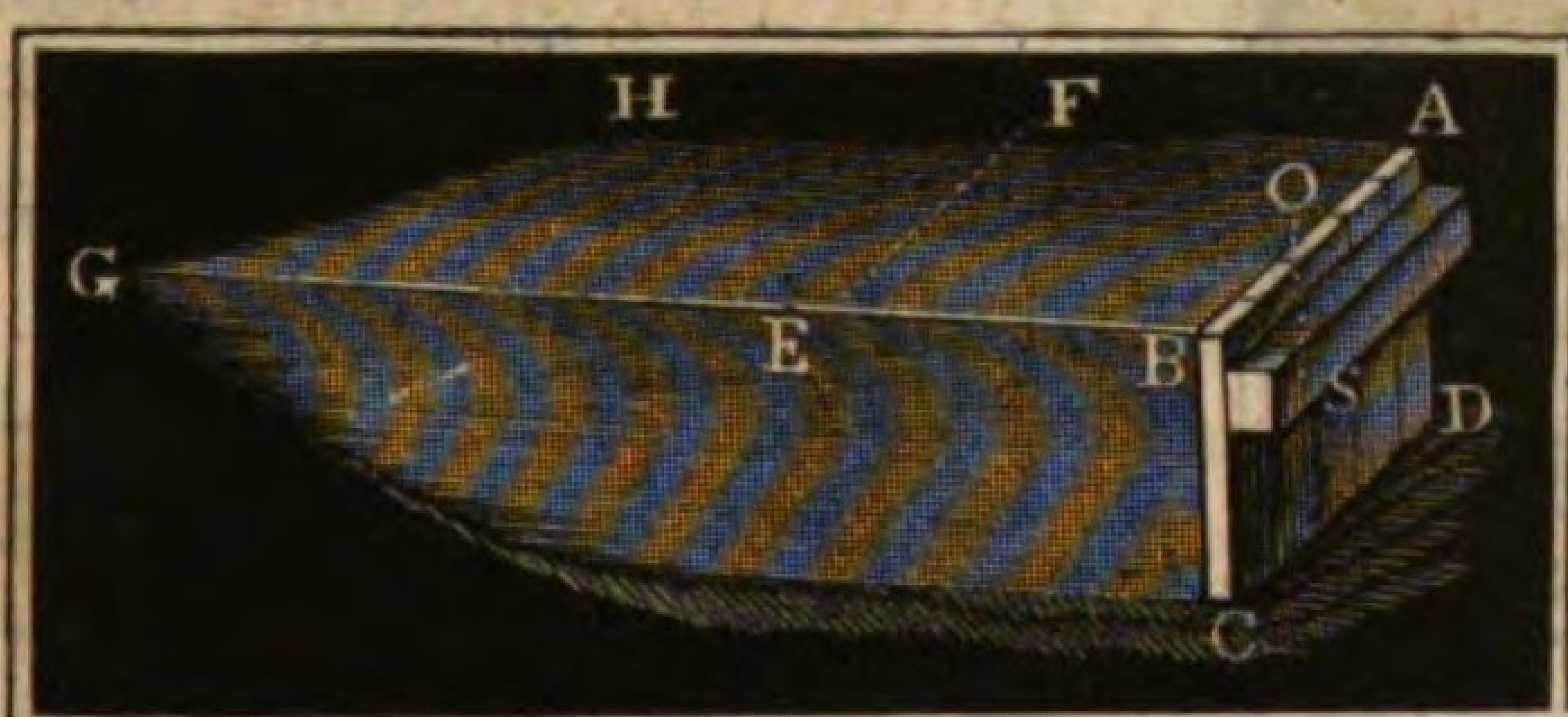
Fig. 418.



$P_2 = F_2 h_2 \gamma$; ebenso für ein drittes Element $P_3 = F_3 h_3 \gamma$ u. s. w. Diese Normaldrücke bilden ein System von Parallelkräften, deren Mittelkraft P die Summe dieser Drücke, also $P = (F_1\, h_1 + F_2\, h_2 + \ldots)\, \gamma$ ist. Nun ist aber noch $F_1 h_1 + F_2 h_2 + \ldots$, die Summe der statischen Momente von F_1, F_2 u. s. w. hinsichtlich der Oberfläche OHR des Wassers, und $= Fh$, wenn F der Inhalt der ganzen Fläche und h die Tiefe SO ihres Schwerpunktes unter dem Wasserspiegel bezeichnet, es folgt daher der gesammte Normaldruck gegen die ebene Fläche: $P = Fh\gamma$. Versteht man hier unter Druckhöhe einer Fläche die Tiefe SO ihres Schwerpunktes S unter dem Wasserspiegel, so gilt also allgemein die Regel: der Druck des Wassers gegen eine ebene Fläche ist gleich dem Gewichte einer Wassersäule, deren Basis die Fläche und deren Höhe die Druckhöhe der Fläche ist. Seitendruck.

Uebrigens ist noch hervorzuheben, daß dieser Wasserdruck nicht von der Wassermenge, welche über oder vor der gedrückten Fläche steht, abhängt, daß also z. B. unter übrigens gleichen Umständen eine Spundwand AC, Fig. 419, denselben Druck auszuhalten hat, sie mag das Wasser einer schmalen Schleuse $ACEF$, oder das eines größeren Teiches $ACGH$, oder das eines großen See's abdämmen. Aus der Breite $AB = CD = b$ und Höhe $AD = BC = a$ einer rectangulären Spundwand folgt die Fläche derselben: $F = ab$ und die Druckhöhe $SO = \frac{a}{2}$, daher der Wasserdruck

Fig. 419.



$P = ab \, . \, \frac{a}{2} \gamma = \frac{1}{2} a^2 b \gamma$. Es wächst also der Druck wie die Breite und wie das Quadrat der Höhe der gedrückten Fläche.

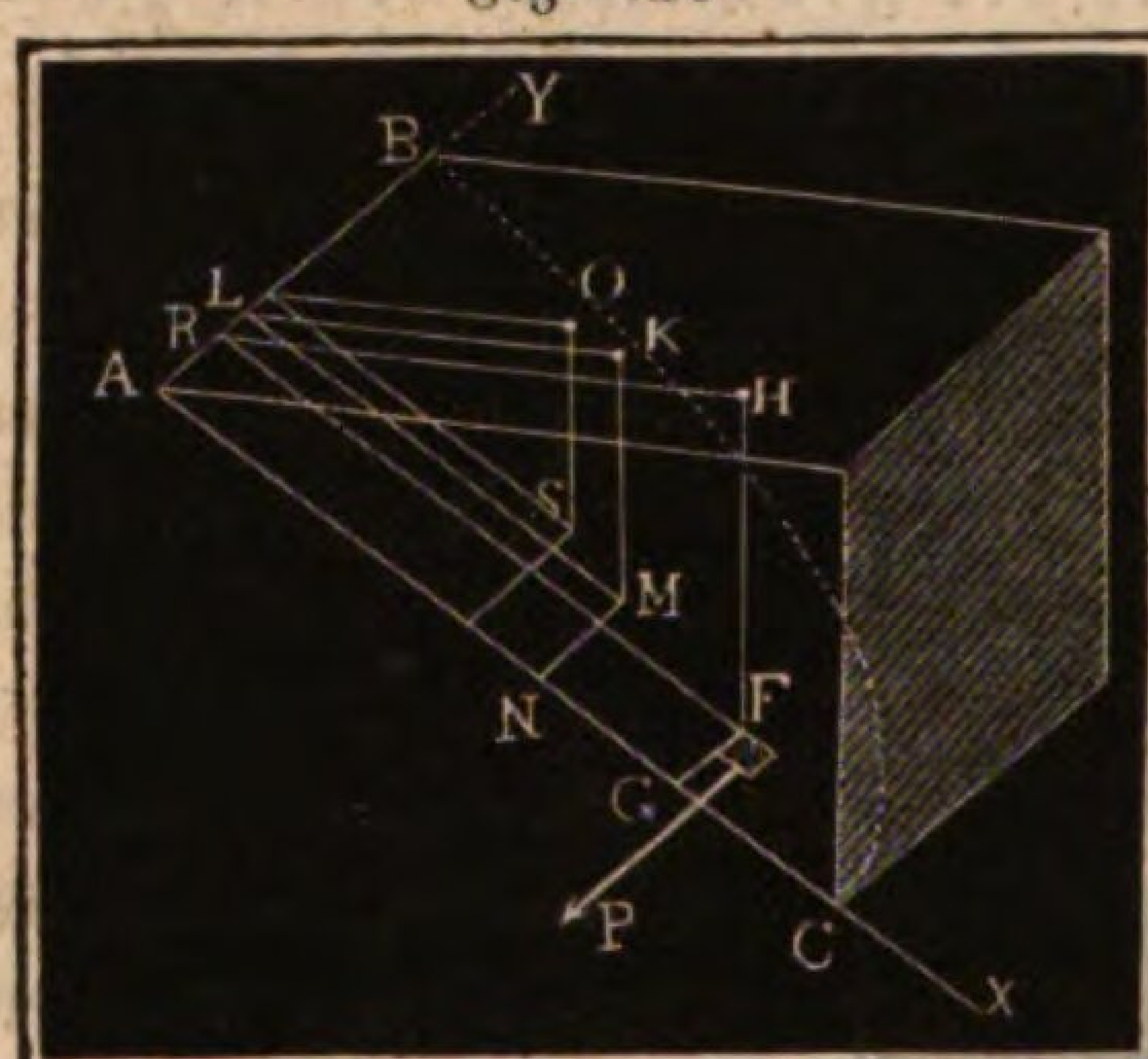
Beispiel. Wenn vor einem 4 Fuß breiten, 5 Fuß hohen und $2\frac{1}{2}$ Zoll dicken Schutzbrette aus Eichenholz das Wasser $3\frac{1}{2}$ Fuß hoch steht, wie groß ist die Kraft zum Aufziehen desselben? Das Volumen des Brettes ist $4 \, . \, 5 \, . \, \frac{5}{24} = \frac{25}{6}$ Cubikfuß. Nimmt man nun die Dichtigkeit des mit Wasser geschwängerten Eichenholzes nach §. 58 zu $66 \, . \, 1{,}11 = 73{,}26$ Pf. an, so folgt das Gewicht dieses Brettes: $G = \frac{25}{6} \, . \, 73{,}26 = 25 \, . \, 12{,}21 = 305{,}25$ Pf. Der Druck des Wassers gegen das Schutzbrett und auch der Druck desselben gegen seine Führung ist $P = \frac{1}{2} \, . \, (\frac{7}{2})^2 . \; 4 \, . \, 66 = 49 \, . \, 33 = 1617$ Pf; nimmt man nun den Coefficienten der Reibung für nasses Holz nach §. 161, $\varphi = 0{,}68$ an, so folgt

die Reibung dieses Brettes in seiner Leitung $F = \varphi P = 0,68 \,.\, 1617 = 1099,56$ Pf. Addirt man hierzu das Gewicht des Brettes, so erhält man die Kraft zum Aufziehen desselben $= 1099,56 + 305,25 = 1404,8$ Pf.

Mittelpunkt des Druckes.

§. 300. Die Mittelkraft $P = Fh\gamma$ aus sämmtlichen Elementarpressungen $F_1 h_1 \gamma$, $F_2 h_2 \gamma$ u. s. w. hat, wie jede andere Mittelkraft eines Systemes von Parallelkräften, einen bestimmten Angriffspunkt, den man den **Mittelpunkt des Druckes** nennt. Durch Unterstützung dieses Punktes wird dem ganzen Wasserdrucke einer Fläche das Gleichgewicht gehalten. Die statischen Momente der Elementarpressungen $F_1 h_1 \gamma$, $F_2 h_2 \gamma$ u. s. w. hinsichtlich der Ebene des Wasserspiegels OHR, Fig. 420, sind $F_1 h_1 \gamma \,.\, h_1 = F_1 h_1^2 \gamma$, $F_2 h_2^2 \gamma$ u. s. w.; es ist also das statische Moment des ganzen Wasserdruckes in Hinsicht auf diese Ebene: $(F_1 h_1^2 + F_2 h_2^2 + \ldots)\gamma$. Setzt man nun den Abstand KM des **Mittelpunktes** M **dieses Druckes** vom Wasserspiegel $= z$, so hat man das Moment des Wasserdruckes auch $= Pz = (F_1 h_1 + F_2 h_2 + ..)\, z\gamma$, und es folgt nun durch Gleichsetzen beider Momente die in Frage stehende Tiefe des **Mittelpunktes** M unter dem Wasserspiegel:

Fig. 420



$$1)\; z = \frac{F_1 h_1^2 + F_2 h_2^2 + ..}{F_1 h_1 + F_2 h_2 + ..} \text{ oder } = \frac{F_1 h_1^2 + F_2 h_2^2 + ..}{Fh},$$

wenn, wie oben, F den Inhalt der ganzen Fläche und h die Tiefe ihres Schwerpunktes unter dem Wasserspiegel bezeichnet. Um diesen Druckpunkt vollständig zu bestimmen, hat man noch dessen Abstand von einer andern Ebene oder Linie anzugeben. Setzt man die Abstände $F_1 G_1$, $F_2 G_2$ u. s. w. der Flächenelemente F_1, F_2 u. s. w. von der den Neigungswinkel der Ebene bestimmenden Falllinie AC, $= y_1$, y_2 u. s. w., so hat man die Momente der Elementardrücke in Hinsicht auf die Falllinie, $= F_1 h_1 y_1 \gamma$, $F_2 h_2 y_2 \gamma$ u. s. w., also das Moment der ganzen Fläche $= (F_1 h_1 y_1 + F_2 h_2 y_2 + ..)\gamma$; und bezeichnet man den Abstand MN des Mittelpunktes M von eben dieser Linie durch v, so hat man dieses Moment auch $= (F_1 h_1 + F_2 h_2 + ..) v\gamma$; setzt man endlich beide Momente gleich, so erhält man die zweite Ordinate

$$2)\; v = \frac{F_1 h_1 y_1 + F_2 h_2 y_2 + ..}{F_1 h_1 + F_2 h_2 + ..} \text{ oder } = \frac{F_1 h_1 y_1 + F_2 h_2 y_2 + ..}{Fh}.$$

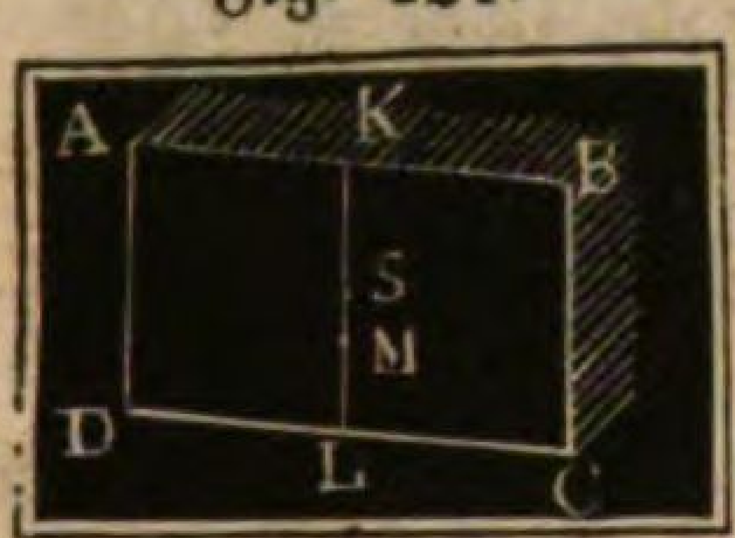
Ist α der Neigungswinkel der Ebene ABC gegen den Horizont, und sind x_1, x_2 u. s. w. die Entfernungen $F_1 R_1$, $F_2 K_2$ u. s. w. der Elemente F_1, F_2 u. s. w., sowie u der Abstand des Druckmittelpunktes M von der Durchschnittslinie AB der Ebene mit dem Wasserspiegel, so hat man $h_1 = x_1 \sin. \alpha$, $h_2 = x_2 \sin \alpha$ u. s. w., sowie $z = u \sin. \alpha$; und führt man diese Werthe in den Ausdrücken für z und v ein, so erhält man Mittelpunkt des Druckes.

$$u = \frac{F_1 x_1^2 + F_2 x_2^2 + ..}{F_1 x_1 + F_2 x_2 + ..} = \frac{\text{Trägheitsmomt}}{\text{Stat. Moment}}, \text{ und}$$

$$v = \frac{F_1 x_1 y_1 + F_2 x_2 y_2 + ..}{F_1 x_1 + F_2 x_2 + ..} = \frac{\text{Centrifugalmoment}}{\text{Stat. Moment}}.$$

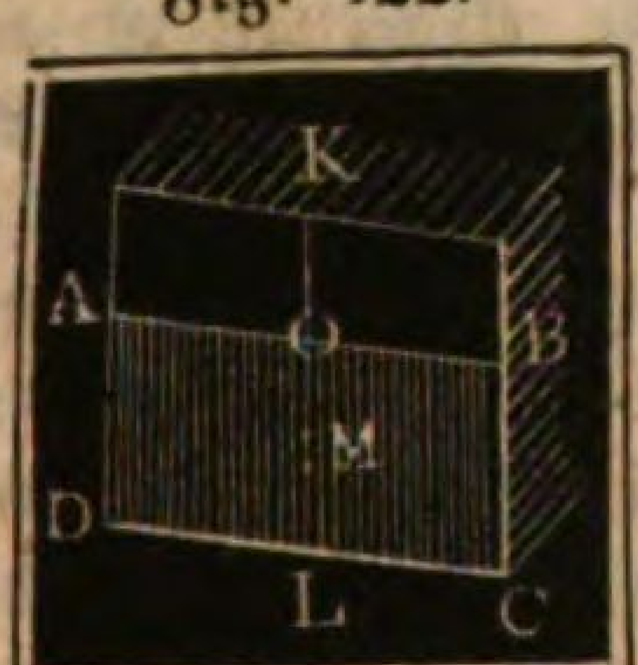
Man findet also die Abstände u und v des Druckmittelpunktes von der horizontalen Axe AY und von der durch die Falllinie gebildeten Axe AX, wenn man das statische Moment der Fläche in Hinsicht auf die erste Axe einmal in das Trägheitsmoment derselben in Hinsicht auf dieselbe Axe und ein zweites Mal in das Centrifugalmoment derselben in Hinsicht auf beide Axen dividirt. Auch ist der erste Abstand zugleich die Entfernung des Schwingungspunktes von der Durchschnittslinie mit dem Wasserspiegel (§. 267). Uebrigens ist leicht zu ermessen, daß der Mittelpunkt des Wasserdruckes mit dem in §. 285 bestimmten Mittelpunkte des Stoßes vollkommen zusammenfällt, wenn die Durchschnittslinie AY der Fläche mit dem Wasserspiegel als Drehaxe angesehen wird.

Fig. 421.



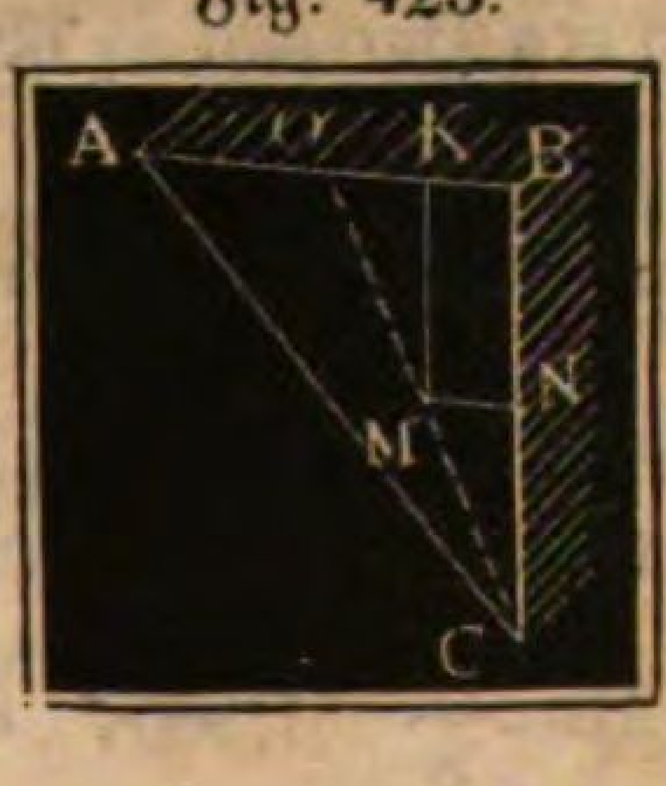
§. 301. Ist die gedrückte Fläche ein Rechteck AC, Fig. 421, mit horizontaler Grundlinie CD, so befindet sich der Mittelpunkt M des Druckes in der die Grundlinien halbirenden Falllinie LK und steht um $^2/_3$ dieser Linie von der Seite AB im Wasserspiegel ab. Reicht dieses Rechteck nicht bis zum Wasserspiegel, wie in Fig. 422, ist vielmehr der Abstand KL der unteren Basis CD vom Wasserspiegel, $= l_1$ und der Abstand der oberen Basis AB, $= l_2$, so hat man den Abstand KM des Druckmittelpunktes vom Wasserspiegel: $u = {}^2/_3 \cdot \frac{l_1^3 - l_2^3}{l_1^2 - l_2^2}$.

Fig. 422.



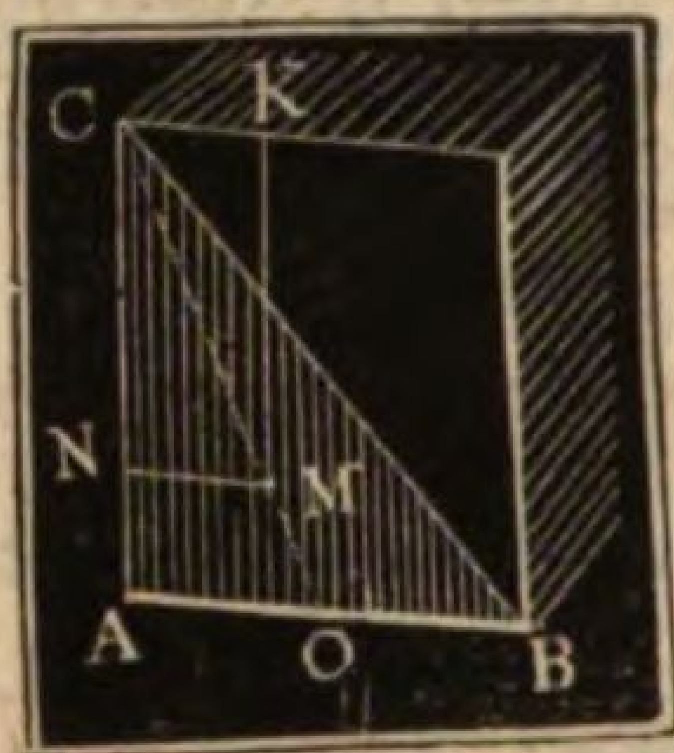
Für ein rechtwinkeliges Dreieck ABC, Fig. 423, dessen eine Kathete AB im Wasserspiegel liegt, ist der Abstand KM des Druckmittelpunktes M von AB (§. 197), $u = \frac{{}^1/_6 F . l^2}{{}^1/_3 F . l} = {}^1/_2\, l$, wenn l die Höhe BC des Dreieckes bezeichnet, und der Abstand des-

Fig. 423.



Mittelpunkt des Druckes. selben Punktes von der andern Kathete, da dieser Punkt jedenfalls in der das Dreieck halbirenden Linie CO liegt, welche von der Spitze O nach dem Mittelpunkte der Grundlinie geht, $NM = v = \frac{1}{4} b$, wo b die Grundlinie AB bezeichnet.

Fig. 424.

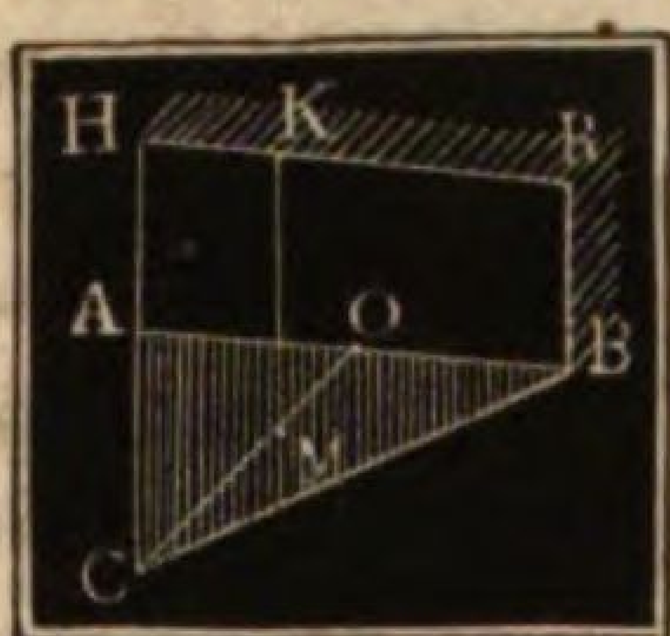


Liegt die Spitze C im Wasserspiegel, wie Fig. 424 angiebt, befindet sich also die Kathete AB unter der Spitze, so hat man $KM = u = \frac{\frac{1}{2}Fl^2}{\frac{2}{3}Fl} = \frac{3}{4}l$ und

$$NM = v = \frac{3}{4} \cdot \frac{b}{2} = \frac{3}{8} b.$$

Befindet sich das ganze Dreieck ABC, Fig. 425, unter Wasser, steht die Grundlinie AB um $AH = l_2$ und die Spitze C um $CH = l_1$ vom Wasserspiegel HR ab, so hat man den Abstand MK des Druckmittelpunktes M vom Wasserspiegel HR:

Fig 425.



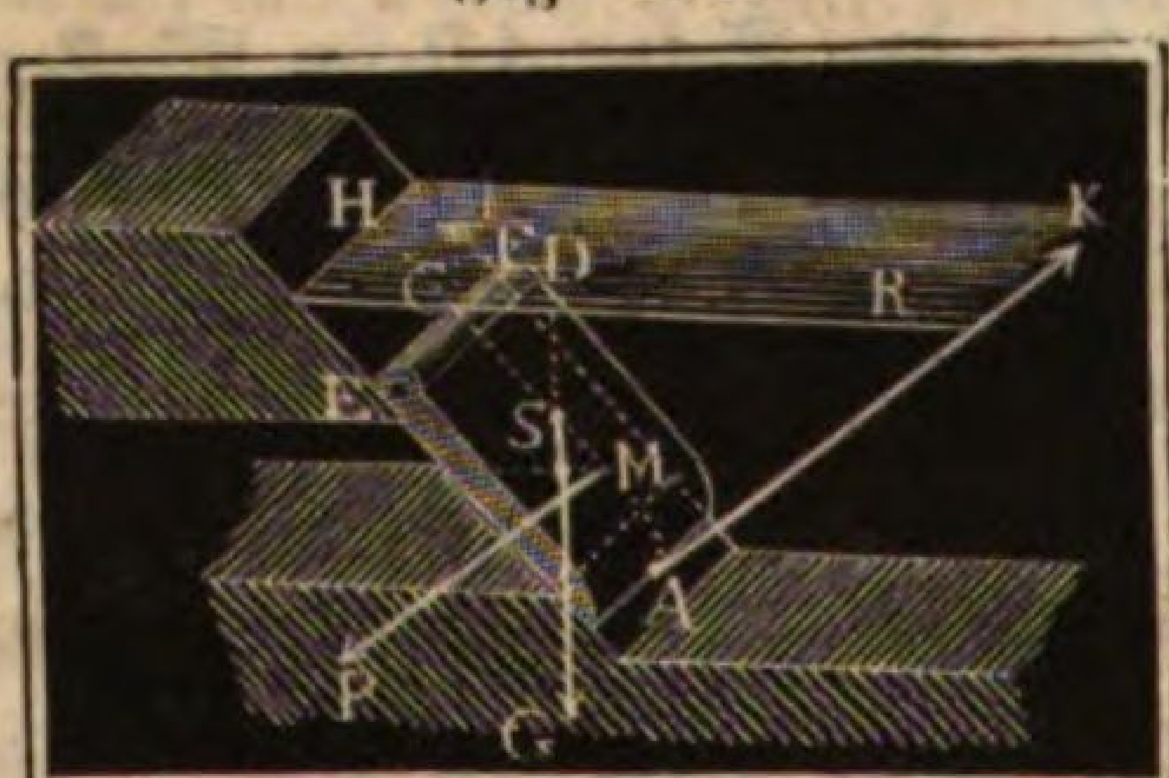
$$u = \frac{\frac{1}{18} F (l_1 - l_2)^2 + F\left(l_2 + \frac{l_1 - l_2}{3}\right)^2}{F\left(l_2 + \frac{l_1 - l_2}{3}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{18}(l_1 - l_2)^2 + \frac{1}{9}(2l_2 + l_1)^2}{\frac{1}{3}(2l_2 + l_1)}$$

$$= \frac{l_1^2 + 2l_1 l_2 + 3l_2^2}{2(l_1 + 2l_2)}.$$

Auf ähnliche Weise lassen sich die Druckmittelpunkte von anderen ebenen Figuren bestimmen.

Fig 426.



Beispiel. Welche Kraft K ist aufzuwenden, um die um eine horizontale Axe EF drehbare Klappe AC, Fig. 426, aufzuziehen? Es sei die Länge CA dieser Klappe $= 1\frac{1}{4}$ Fuß, die Breite $EF = 1\frac{1}{2}$ Fuß, das Gewicht derselben $= 35$ Pf.; ferner der Abstand CH der Drehaxe C von dem Wasserspiegel HR in der Ebene der Klappe gemessen, $= 1$ Fuß und der Neigungswinkel dieser Ebene gegen den Horizont $= 68^\circ$. Die gedrückte Fläche ist

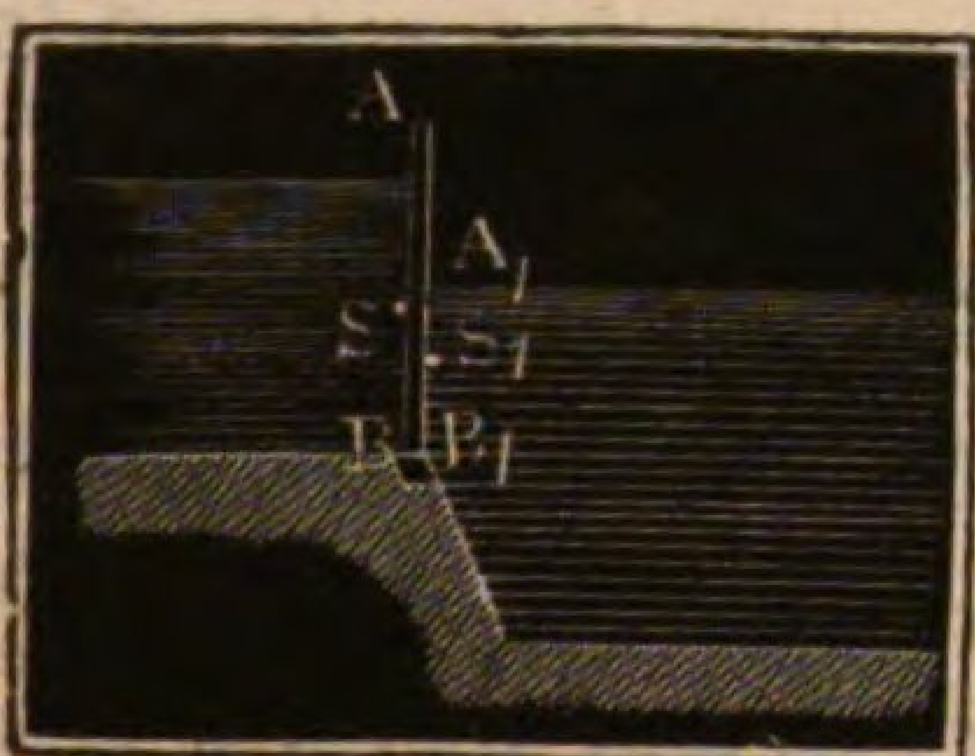
$F = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{8}$ Quadratfuß, und die Druckhöhe oder die Tiefe ihres Schwerpunktes unter dem Wasserspiegel, $h = HS \sin.\alpha = (HC + CS) \sin.\alpha$ $= (HC + \frac{1}{2} AC) \sin.\alpha = \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4}\right) \sin 68^\circ = \frac{13}{8} \sin. 68^\circ = \frac{13 . 0,92718}{8}$ $= 1,5067$ Fß.; daher der Druck des Wassers auf die Fläche: $P = Fh\gamma = \frac{15}{8} . 1,5067 . 66$

= 186,45 Pf. Der Hebelarm dieser Kraft in Hinsicht auf die Drehaxe C ist der Abstand CM des Druckmittelpunktes M von derselben, also $= HM - HC$ Mittelpunkt des Druckes.

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{l_1^3 - l_2^3}{l_1^2 - l_2^2} - l_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{\left(\frac{9}{4}\right)^3 - \left(\frac{4}{4}\right)^3}{\left(\frac{9}{4}\right)^2 - \left(\frac{4}{4}\right)^2} - 1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{729-64}{81-16} - 1$$

= 0,705 Fuß; daher das statische Moment des Wasserdruckes = 186,45 . 0,705 = 131,46 Fßpf. Steht der Schwerpunkt S der Klappe um die halbe Länge $CS = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{8}$ Fuß von der Drehaxe ab, so ist der Hebelarm des Gewichtes der Drehklappe $= CS \cos. \alpha = \frac{5}{8} . \cos. 68^0 = \frac{5}{8} . 0,3746 = 0,2341$ Fuß, und daher das statische Moment dieses Gewichtes = 35 . 0,2341 = 8,19 Fßpf. Durch Addition beider Momente bekommt man das ganze Moment zum Aufziehen der Klappe = 131,46 + 8,19 = 139,65 Fßpf., und wirkt nun die Kraft K zum Aufziehen an dem Hebelarme CA = 1,25 Fuß, so folgt ihre Größe $\frac{139,65}{1,25} = 112$ Pf.

Fig. 427.



§. 302. Wird eine ebene Fläche AB, Fig. 427, zu beiden Seiten vom Wasser gedrückt, so resultirt aus den beiden Seiten entsprechenden Mittelkräften eine neue Mittelkraft, die sich durch Subtraction der ersteren ergiebt, weil beide einander entgegen wirken.

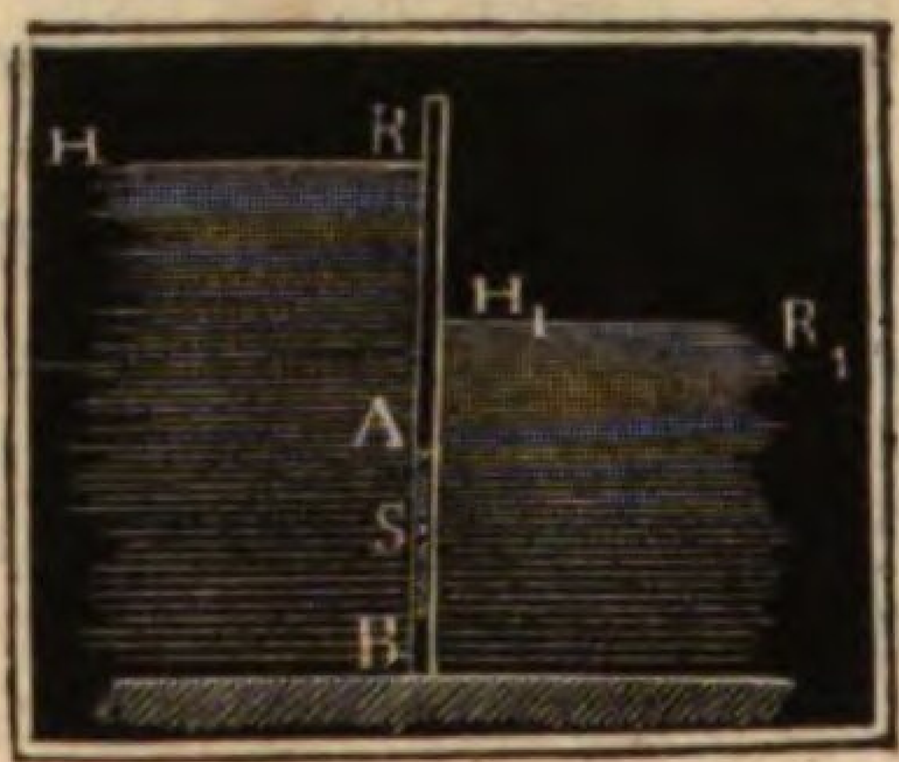
Ist F der Inhalt des gedrückten Theiles auf der einen Seite der Fläche AB und h die Tiefe AS seines Schwerpunktes unter dem Wasserspiegel, ferner F_1 der Inhalt des Theiles $A_1 B_1$ auf der andern Seite der Fläche und h_1 die Tiefe $A_1 S_1$ seines Schwerpunktes unter dem entsprechenden Wasserspiegel, so hat man die gesuchte Mittelkraft $P = Fh\gamma - F_1 h_1 \gamma = (Fh - F_1 h_1)\gamma$.

Ist das Trägheitsmoment des ersten Flächentheiles in Hinsicht auf die Linie, in welcher die Ebene der Fläche den ersten Wasserspiegel schneidet, $= Fr^2$, so hat man das statische Moment des Wasserdruckes von der einen Seite $= Fr^2 . \gamma$; ist ferner das Trägheitsmoment des zweiten Flächentheiles in Hinsicht auf die Durchschnittslinie mit dem zweiten Wasserspiegel $= F_1 r_1^2$, so hat man ebenso das statische Moment des Wasserdruckes von der andern Seite in Hinsicht auf die Axe im zweiten Wasserspiegel $= F_1 r_1^2 \gamma$. Setzen wir ferner die Entfernung AA_1 der Axen $= a$, so erhalten wir die Vergrößerung des letzten Momentes beim Uebergange von der Axe A_1 auf die Axe A, $= F_1 h_1 a\gamma$, und daher das statische Moment des Wasserdruckes $F_1 h_1 \gamma$ in Hinsicht auf die Axe im ersten Wasserspiegel

$$= F_1 r_1^2 \gamma + F_1 h_1 . a . \gamma = (F_1 r_1^2 + F_1 a h_1)\gamma.$$

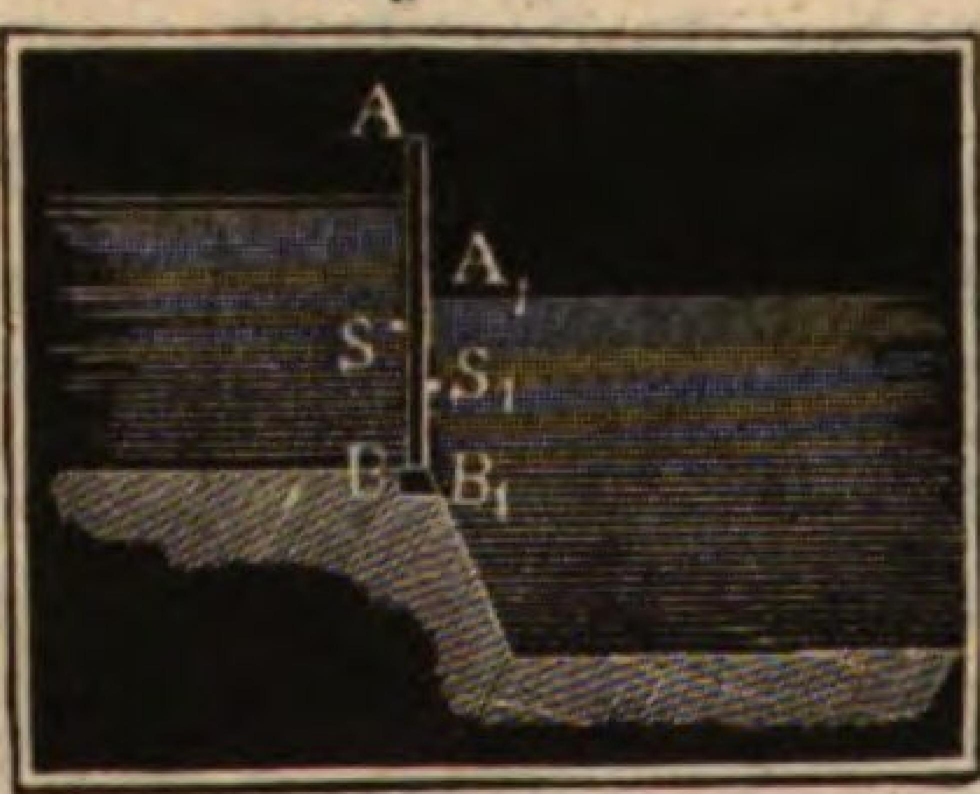
Mittelpunkt des Drucks. Hiernach folgt dann das statische Moment der Differenz beider Mitteldrücke $= (F r^2 - F_1 r_1^2 - a F_1 h_1)\gamma$, und der Hebelarm dieser letzten Kraft, oder der Abstand des Druckmittelpunktes von der Axe im ersten Wasserspiegel: $u = \frac{F r^2 - F_1 r_1^2 - a F_1 h_1}{F h - F_1 h_1}$. Sind die gedrückten Flächentheile einander gleich, welcher Fall eintritt, wenn, wie Fig. 428 repräsentirt, die ganze Fläche AB unter Wasser ist, so hat man einfacher $P = F(h - h_1)\gamma$ und $u = h$, Letzteres, weil $h - h_1 = a$ und $r_1^2 = r^2 - 2ah + a^2$ (§. 231) ist. In dem letzten Falle ist also der Druck gleich dem Gewichte einer Wassersäule, deren Grundfläche die gedrückte Fläche und deren Höhe der Höhenabstand $R H_1$ beider Wasserspiegel ist, und es fällt der Mittelpunkt des Druckes mit dem Schwerpunkte S der Fläche zusammen.

Fig 428.



Dieses Gesetz ist auch noch dann richtig, wenn beide Wasserspiegel außerdem noch durch gleiche Kräfte, z. B. durch Kolben, oder durch die Atmosphäre gedrückt werden. Denn ist dieser Druck auf jede Flächeneinheit $= p$, und also die entsprechende Wassersäulenhöhe $k = \frac{p}{\gamma}$ (§. 298), so hat man statt h, $h + k$ und statt h_1, $h_1 + k$ zu setzen, und es läßt die Subtraction die Kraft $P = (h + k - [h_1 + k]) F\gamma = (h - h_1) F\gamma$ übrig. Aus diesem Grunde läßt man denn auch in der Regel bei hydrostatischen Untersuchungen den Atmosphärendruck außer Acht.

Fig. 429.



Beispiel. Die Höhe AB des Oberwassers bei einer Schifffahrtsschleuse, Fig. 429, beträgt 7 Fuß, das Wasser in der Kammer steht am Schleusenthore 4 Fuß hoch, und die Breite des Kanals und der Kammer mißt 7,5 Fuß, welchen Mitteldruck hat das Schleusenthor auszuhalten? Es ist $F = 7 . 7{,}5 = 52{,}5$ und $F_1 = 4 . 7{,}5 = 30$ Quadratfuß, ferner $h = \frac{1}{2} . 7 = \frac{7}{2}$ und $h_1 = \frac{4}{2} = 2$ Fuß, $a = 7 - 4 = 3$ Fuß, $r^2 = \frac{1}{3} . 7^2 = \frac{49}{3}$ und $r_1^{\,2} = \frac{1}{3} . 4^2 = \frac{16}{3}$, daher folgt der gesuchte Mitteldruck

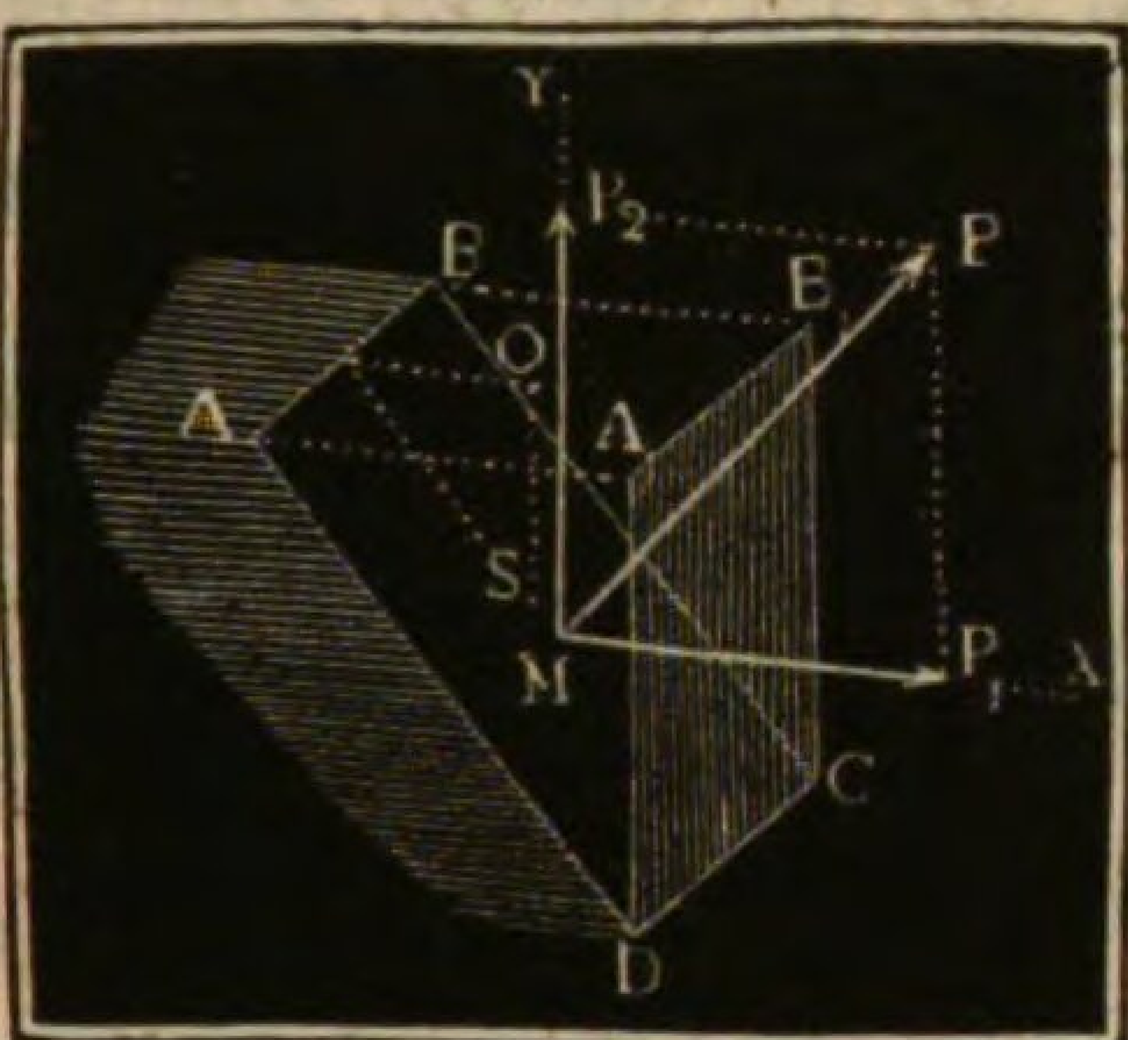
$P = (F h - F_1 h_1)\gamma = (52{,}5 . \frac{7}{2} - 30 . 2) . 66 = 123{,}75 . 66 = 8167{,}5$ Pf., und die Tiefe seines Angriffspunktes unter dem Wasserspiegel:

$$u = \frac{52{,}5 . \frac{49}{3} - 30 . \frac{16}{3} - 3 . 60}{52{,}5 . \frac{7}{2} - 60} = \frac{517{,}5}{123{,}75} = 4{,}182 \text{ Fuß}.$$

§. 303. In vielen Fällen ist es wichtig, nur einen, nach einer bestimmten Richtung wirkenden Theil des Wasserdruckes auf eine Fläche zu kennen. Um einen solchen Componenten zu finden, zerlegen wir den normalen Wasserdruck $MP = P$ der Fläche $AC = F$, Fig. 430, nach der gegebenen Richtung MX und nach der Richtung MY winkelrecht darauf in zwei Seitenkräfte $MP_1 = P_1$ und $MP_2 = P_2$. Ist nun α der Winkel PMX, um welchen die Normalkraft von der gegebenen Richtung MX der Seitenkraft abweicht, so erhält man für die Componenten: $P_1 = P\,cos.\alpha$ und $P_2 = P\,sin.\,\alpha$. Entwirft man von der Fläche AB in einer winkelrecht auf der gegebenen Richtung MX stehenden Ebene eine Projection $A_1 B_1 C D$, so hat man für deren Inhalt F_1 die Formel $F_1 = F.cos.ADA_1$, oder, da der Neigungswinkel ADA_1 der Fläche zu ihrer Projection gleich ist dem Winkel $PMX = \alpha$ zwischen der Normalkraft P und ihrem Componenten P_1, so hat man $F_1 = F\,cos\,\alpha$, oder umgekehrt, $cos.\,\alpha = \frac{F_1}{F}$ und daher die gesuchte Seitenkraft $P_1 = P\,.\,\frac{F_1}{F}$. Da noch der Normaldruck $P = Fh\gamma$ ist, so folgt endlich $P_1 = F_1 h\gamma$, d. h. der Druck, womit das Wasser auf eine Fläche nach irgend einer Richtung drückt, ist gleich dem Gewichte einer Wassersäule, die zur Basis die Projection der Fläche winkelrecht zur gegebenen Richtung und zur Höhe die Tiefe des Schwerpunktes der Fläche unter dem Wasserspiegel hat.

Druck nach einer bestimmten Richtung.

Fig. 430.

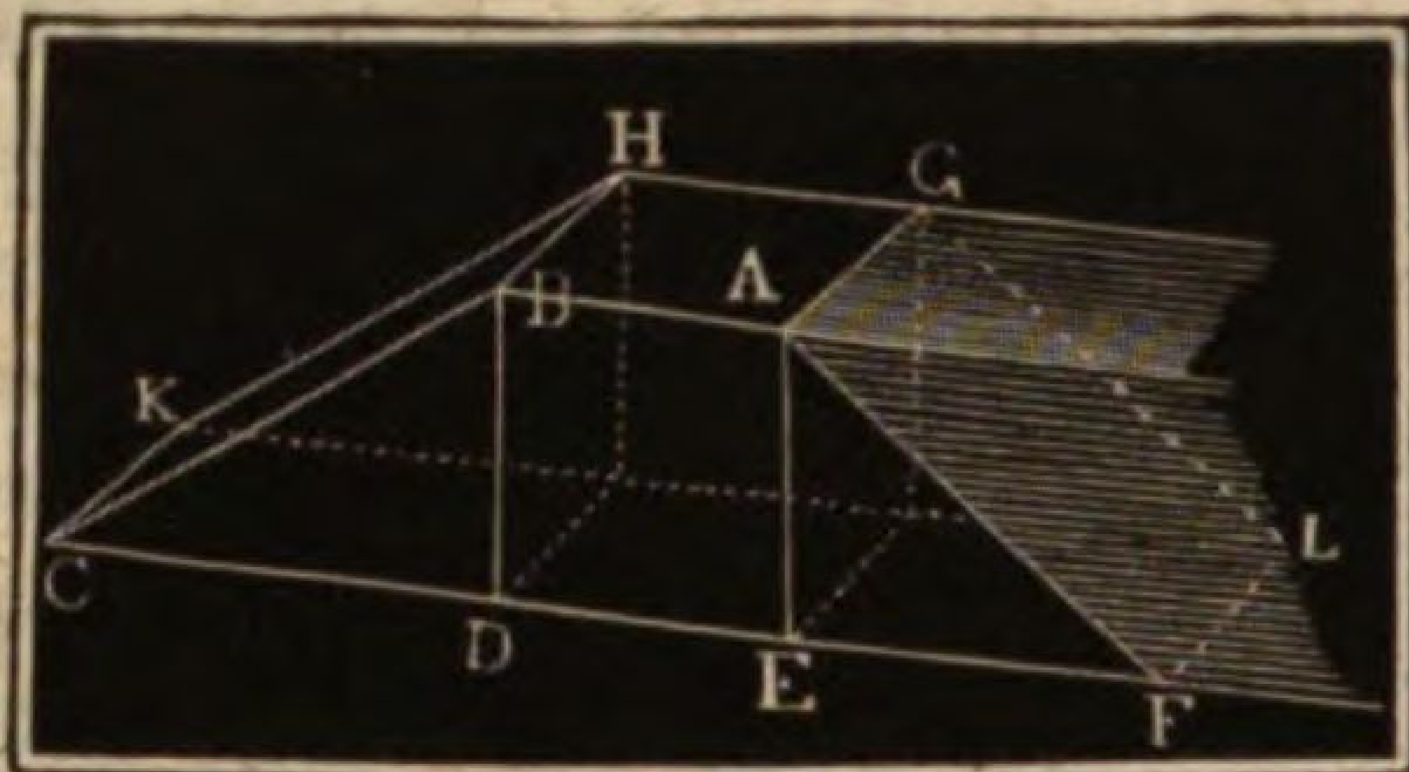


In den meisten Fällen der Anwendung ist es wichtig, nur den vertikalen oder einen horizontalen Componenten vom Drucke des Wassers gegen eine Fläche angeben zu können. Da die Projection winkelrecht zur Vertikalrichtung, die Horizontal- und die Projection winkelrecht zu einer Horizontalrichtung eine Vertikalprojection ist, so findet man den Vertikaldruck des Wassers gegen eine Fläche, wenn man die Horizontalprojection oder den Grundriß derselben als gedrückte Fläche, und dagegen den Horizontaldruck des Wassers nach irgend einer Richtung, wenn man die Vertikalprojection oder den Aufriß der Fläche winkelrecht gegen die gegebene Richtung als gedrückte Fläche behandelt, in beiden Fällen aber die Tiefe des Schwerpunktes der Fläche unter dem Wasserspiegel als Druckhöhe ansieht.

Druck nach einer bestimmten Richtung.

Bei einem prismatischen Teichdamm ACH, Fig. 431, ist hiernach für die Horizontalgewalt des Wassers das vertikale Längenprofil EG und für die Vertikalkraft die Horizontalprojection EL der Wasserfläche AL als gedrückte Fläche anzusehen. Ist daher die Länge AG des Dammes $= l$, die Höhe $AE = h$ und die vordere Böschung $EF = a$,

Fig. 431.



so hat man die Horizontalkraft des Wassers $= lh \cdot \frac{h}{2}\gamma = \frac{1}{2}h^2 l\gamma$, und den Vertikaldruck desselben $= al \cdot \frac{h}{2}\gamma = \frac{1}{2}alh\gamma$. Ist nun noch die obere oder Dammkappenbreite $= b$, die hintere Böschung $CD = a_1$, und die Dichtigkeit der Dammmasse $= \gamma_1$, so hat man das Gewicht des Dammes $= \left(b + \frac{a+a_1}{2}\right) hl\gamma_1$, und den ganzen Vertikaldruck des Dammes gegen den horizontalen Boden

$$= \tfrac{1}{2}alh\gamma + \left(b + \frac{a+a_1}{2}\right)hl\gamma_1 = \left[\tfrac{1}{2}a\gamma + \left(b + \frac{a+a_1}{2}\right)\gamma_1\right]hl.$$

Setzt man den Reibungscoefficienten $= \varphi$, so folgt die Reibung oder Kraft zum Fortschieben des Dammes, $F = \left[\frac{1}{2}a\gamma + \left(b + \frac{a+a_1}{2}\right)\gamma_1\right]\varphi hl$.

In dem Falle, wenn der Horizontaldruck des Wassers dieses Fortschieben bewirken soll, hat man $\frac{1}{2}h^2 l\gamma = \left[\frac{1}{2}\gamma a + \left(b + \frac{a+a_1}{2}\right)\gamma_1\right] \cdot \varphi hl$, oder einfacher $h = \varphi\left(a + (2b + a + a_1)\frac{\gamma_1}{\gamma}\right)$.

Damit also der Damm vom Wasser nicht fortgeschoben werde, muß sein

$$h < \varphi\left(a + (2b + a + a_1)\frac{\gamma_1}{\gamma}\right) \text{ oder}$$

$$b > \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{h}{\varphi} - a\right)\frac{\gamma}{\gamma_1} - (a + a_1)\right].$$

Der Sicherheit wegen nimmt man wohl an, daß der Grund des Dammes ganz durchwaschen sei, weshalb noch ein Gegendruck von unten nach oben $= (b + a + a_1)lh\gamma$ in Abzug zu bringen und

$$h < \varphi\left[(2b + a + a_1)\left(\frac{\gamma_1}{\gamma} - 1\right) - a_1\right] \text{ zu setzen ist.}$$

Beispiel. Die Dichtigkeit der Lehmdammmasse ist nahe doppelt so groß, als die des Wassers, also $\frac{\gamma_1}{\gamma} = 2$ und $\frac{\gamma_1}{\gamma} - 1 = 1$; es läßt sich daher für einen solchen Damm einfach $h < \varphi(2b+a)$ setzen. Erfahrungen zufolge widersteht ein Damm hinlänglich, wenn seine Höhe, Böschung und Kappenbreite einander gleich sind; setzt man hiernach in der letzten Formel $h = b = a$, so ergiebt sich $\varphi = \frac{1}{3}$, weshalb man in anderen Fällen

$$h = \frac{1}{3}\left[(2b+a+a_1)\left(\frac{\gamma_1}{\gamma} - 1\right) - a_1\right],$$

und insbesondere bei Lehmdämmen

$$h = \frac{1}{3}(2b+a), \text{ und umgekehrt, } b = \frac{3h-a}{2} \text{ zu setzen hat.}$$

Ist die Dammhöhe 20 Fuß und der Böschungswinkel $\alpha = 36^0$, so hat man die Böschung $a = h \, cotg. \alpha = 20 \, . \, cotg. 36^0 = 20 \, . \, 1,3764 = 27,53$ Fuß und daher die obere Damm- oder Kappenbreite $b = \frac{60 - 27,53}{2} = 16,24$ Fuß.

§. 304. Das im letzten Paragraphen gefundene Gesetz über den Druck des Wassers nach einer bestimmten Richtung gilt nur für ebene Flächen und für die einzelnen Elemente krummer Flächen, nicht aber für krumme Flächen überhaupt. Die Normaldrücke auf die einzelnen Elemente einer krummen Fläche lassen sich in Seitenkräfte parallel zu einer gegebenen Richtung und in andere, in Normalebenen hierzu wirkend, zerlegen. Jene Seitendrücke bilden ein System von Parallelkräften, deren Mittelkraft den Druck in der gegebenen Richtung angiebt, und diese Seitenkräfte lassen sich ebenfalls auf eine Mittelkraft zurückführen, beide Mittelkräfte gestatten aber keine weitere Vereinigung, wenn ihre Richtungen nicht zum Durchschnitte gelangen (§. 92). Im Allgemeinen ist es nicht möglich, die sämmtlichen Wasserdrücke gegen die Elemente einer krummen Fläche auf eine einzige Kraft zurückzuführen, doch kommen einzelne Fälle vor, wo diese Vereinigung möglich ist. Druck auf krumme Flächen.

Sind G_1, G_2, G_3. u. s. w. die Projectionen und h_1, h_2, h_3, u. s. w. die Druckhöhen von den Elementen F_1, F_2, F_3 u. s. w. einer krummen Fläche, so hat man den Druck des Wassers nach der Richtung winkelrecht zur Projectionsebene: $P = (G_1 h_1 + G_2 h_2 + G_3 h_3 + \ldots)\gamma$, und das Moment desselben in Hinsicht auf die Ebene des Wasserspiegels: $Pu = (G_1 h_1^2 + G_2 h_2^2 + G_3 h_3^2 + \ldots)\gamma$.

Kann man die gedrückte krumme Fläche in Elemente zerlegen, die zu ihren Projectionen ein unveränderliches Verhältniß haben, läßt sich also $\frac{F_1}{G_1} = \frac{F_2}{G_2} = \frac{F_3}{G_3}$ u. s. w. $= n$ setzen, so hat man

$$P = \left(\frac{F_1 h_1}{n} + \frac{F_2 h_2}{n} + \ldots\right)\gamma = \left(\frac{F_1 h_1 + F_2 h_2 + \ldots}{n}\right)\gamma,$$

oder, da dann auch das Verhältniß der ganzen krummen Fläche F zu ihrer

Druck auf krumme Flächen.

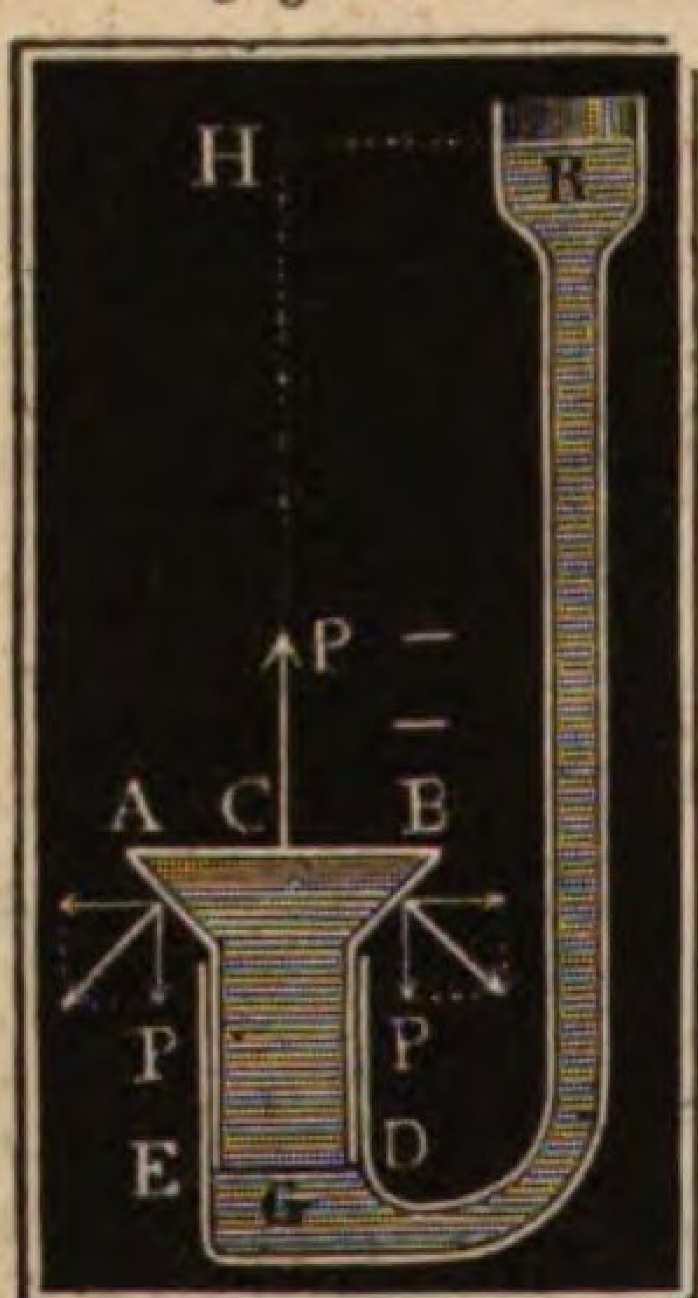
Projection G, d. i. $\frac{F}{G}, = n$ ist, $P = \frac{Fh}{n}\gamma = Gh\gamma$; in diesem Falle hat man, wie bei jeder ebenen Fläche, den Druck nach einer Richtung gleich dem Gewichte eines Wasserprisma's, dessen Grundfläche der Projection der krummen Fläche winkelrecht gegen die gegebene Richtung und dessen Höhe der Tiefe des Schwerpunktes der krummen Fläche unter dem Wasserspiegel gleich ist.

Fig. 432.



So ist z. B. der Vertikaldruck des Wassers gegen den Mantel eines mit Wasser gefüllten kegelförmigen Gefäßes ACB, Fig. 432, gleich dem Gewichte einer Wassersäule, welche die Bodenfläche zur Basis und zwei Drittel der Axenlänge CM zur Höhe hat, weil sich die von der Bodenfläche gebildete Horizontalprojection des geraden Kegelmantels ebenso wie der Mantel in lauter gleiche trianguläre Elemente zerlegen läßt, und weil der Schwerpunkt S des Kegelmantels zwei Drittel der Höhe des Kegels von der Spitze absteht (§. 110). Ist r der Halbmesser der Basis und h die Höhe des Kegels, so hat man den Druck gegen den Boden $= \pi r^2 h\gamma$ und den Vertikaldruck gegen den Mantel $= \frac{2}{3}\pi r^2 h\gamma$; da aber der Boden mit der Seitenwand fest verbunden ist, und beide Drücke einander entgegen wirken, so folgt die Kraft, mit welcher das Gefäß durch das Wasser abwärts gedrückt wird, $= (1 - \frac{2}{3})\pi r^2 h\gamma = \frac{1}{3}\pi r^2 h\gamma$ = dem Gewichte der ganzen Wassermasse. Hätte man den Boden durch einen feinen Schnitt vom Mantel getrennt, so würde derselbe mit seiner vollen Kraft $\pi r^2 h\gamma$ nach unten, oder auf seine Unterlage drücken, dagegen wäre aber auch noch der Mantel mit einer Kraft $\frac{2}{3}\pi r^2 h\gamma$ niederzuhalten, um das Abheben desselben zu verhindern.

Fig. 433.



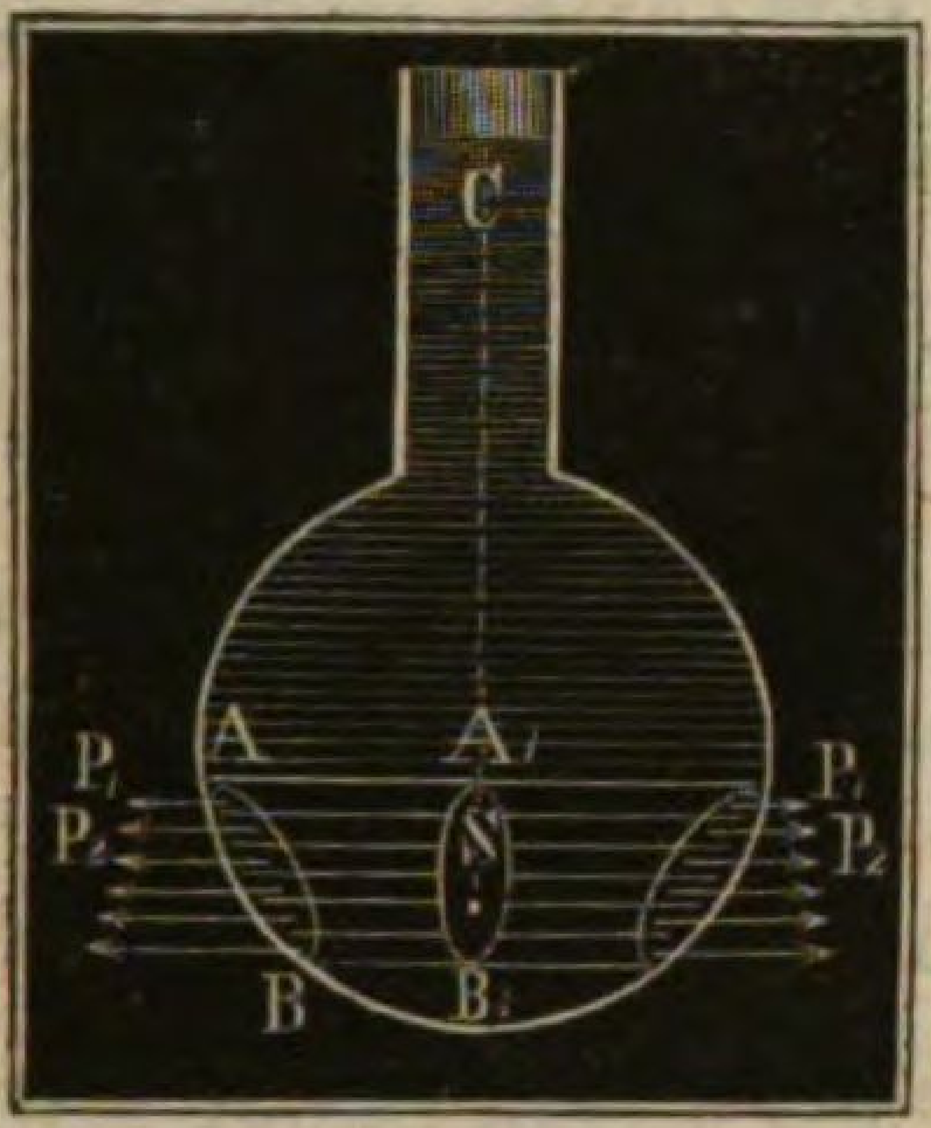
Anmerkung. Es ist hiernach die Kraft, welche der Dampf einer Dampfmaschine oder das Wasser einer Wassersäulenmaschine auf den Kolben ausübt, unabhängig von der Form des Kolbens. Wie auch die Druckfläche durch Aushöhlung oder Abrundung vergrößert sein möge, immer bleibt der Druck, mit welchem der Dampf oder das Wasser den Kolben fortschiebt, gleich dem Producte aus dem Querschnitte oder der Horizontalprojection des Kolbens und aus dem Drucke auf die Flächeneinheit. Bei dem trichterförmigen Kolben AB, Fig. 433, dessen größerer Halbmesser $CA = CB = r$ und kleinerer Halbmesser $GD = GE = r_1$ ist, ist der Druck auf die Grundfläche $= \pi r^2 p$ und die Reaction auf den Mantel

$= \pi (r^2 - r_1^2) p$; daher der übrigbleibende wirksame Druck

$$P = \pi r^2 p - \pi (r^2 - r_1^2) p = \pi r_1^2 p$$

= Querschnitt des Cylinders mal Druck auf die Flächeneinheit.

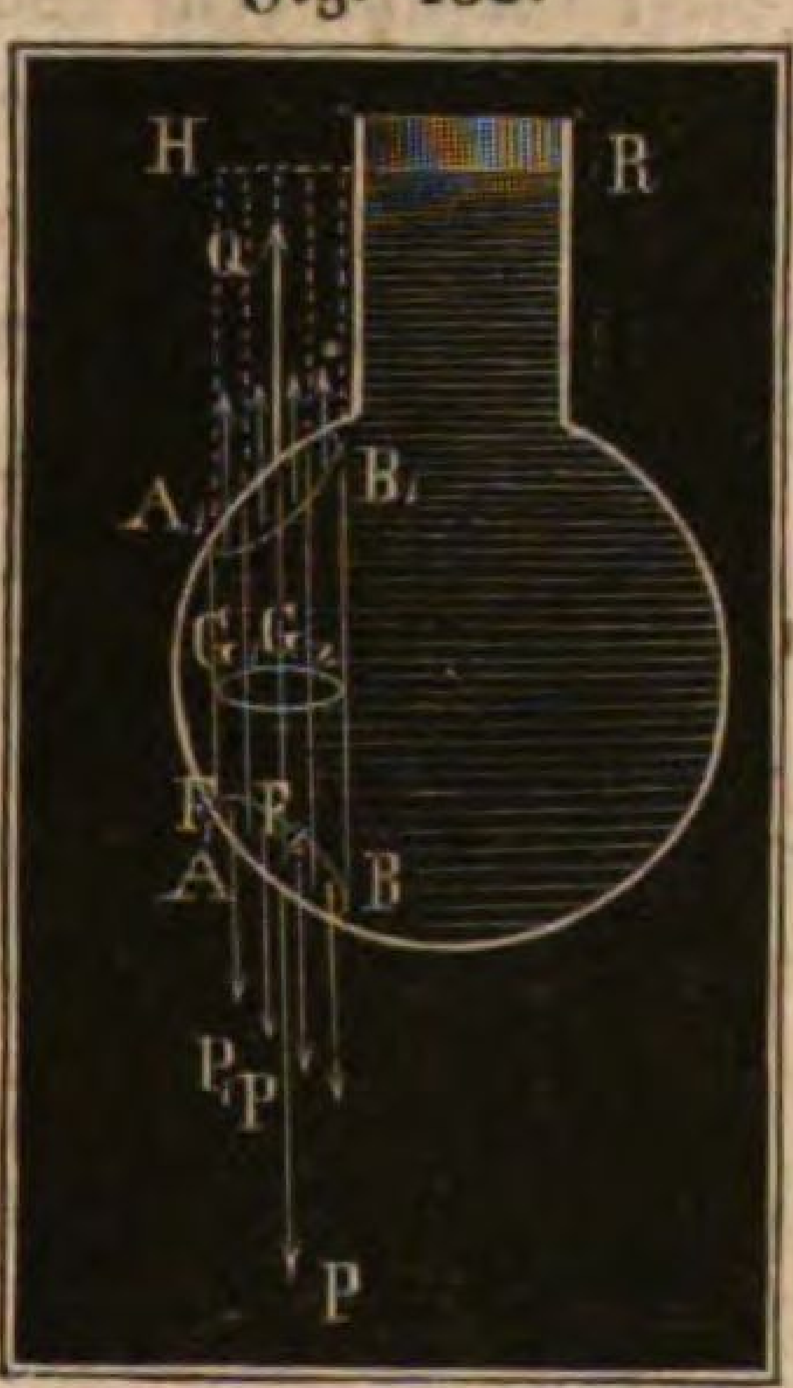
Fig. 434.



§. 305. Wie auch eine krumme Fläche AB, Fig. 434, geformt sein möge, immer ist der Horizontaldruck des Wassers gegen dieselbe gleich dem Gewichte einer Wassersäule, welche zur Basis die Vertikalprojection $A_1 B_1$ der Fläche winkelrecht gegen die gegebene Druckrichtung und zur Druckhöhe die Tiefe CS des Schwerpunktes S der Projection unter dem Wasserspiegel hat. Die Richtigkeit dieser Behauptung folgt aus der Formel $P = (G_1 h_1 + G_2 h_2 + \ldots)\gamma$ sogleich, wenn man berücksichtigt, daß die Druckhöhen h_1, h_2 u. s. w. der Flächenelemente auch zugleich die Druckhöhen ihrer Projectionen sind, daß also $G_1 h_1 + G_2 h_2 + \ldots$ das statische Moment der ganzen Projection, d. i. das Product Gh aus der Vertikalprojection G und der Tiefe h ihres Schwerpunktes unter dem Wasserspiegel ist. Mat hat also hier wieder $P = Gh\gamma$ zu setzen, aber nicht außer Acht zu lassen, daß h die Druckhöhe der Vertikalprojection ist. Horizontal- und Vertikaldruck.

Der Vertikalschnitt, wodurch man ein Gefäß mit dem darin befindlichen Wasser in zwei gleiche oder ungleiche Theile theilt, ist zugleich die Vertikalprojection von beiden Theilen, der Horizontaldruck auf einen Theil der Gefäßwand ist aber dem Producte aus der Vertikalprojection desselben und der Tiefe ihres Schwerpunktes unter dem Wasserspiegel proportional; es ist folglich auch der Horizontaldruck des Wassers auf einen Theil der Gefäßwand genau so groß, als der entgegengesetzt wirkende Horizontaldruck auf den gegenüber liegenden Theil derselben, und es heben sich folglich beide Kräfte im Gefäße auf. Das ganze Gefäß wird also von dem eingeschlossenen Wasser nach allen horizontalen Richtungen gleich stark gepreßt.

Fig. 435.

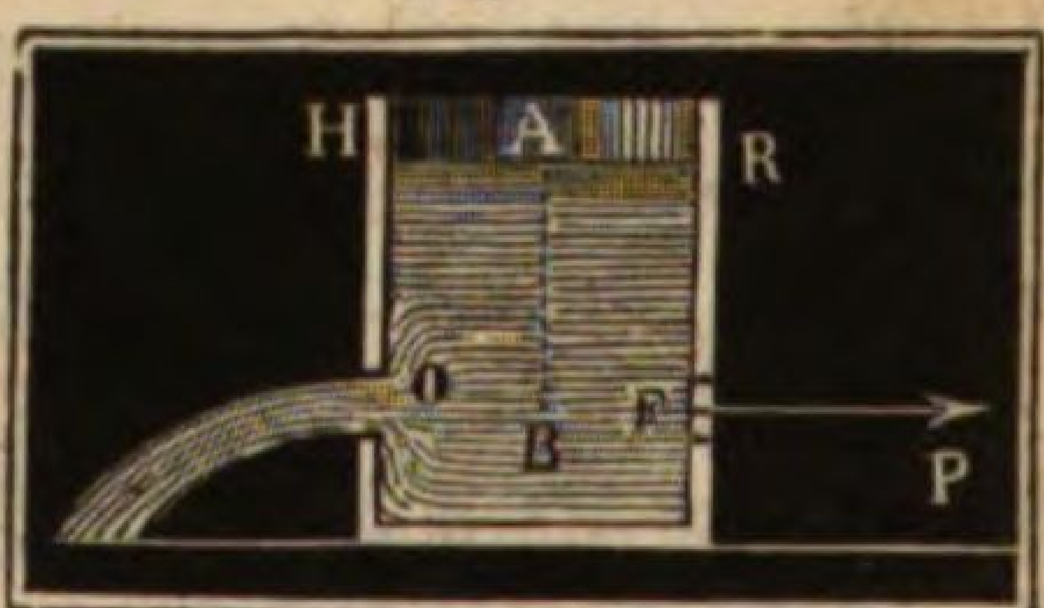


Der Vertikaldruck $P_1 = G_1 h_1 \gamma$ des Wassers gegen ein Element F_1, Fig. 435, der Gefäßwand ist, da die Horizontalprojection G_1 des Elementes als Querschnitt und die Druckhöhe h_1 als Höhe und also $G_1 h_1$ als das Volumen eines Prisma's angesehen werden kann, gleich dem Gewichte einer über dem Elemente stehenden und bis zum Wasserspiegel reichenden Was-

Horizontal- und Vertikaldruck. sersäule HF_1. Die einen endlichen Theil AB des Bodens oder der Gefäßwand ausmachenden Flächenelemente erleiden daher auch einen Vertikaldruck, welcher dem Gewichte sämmtlicher darüberstehenden Wassersäulen, d. i. dem Gewichte der über dem ganzen Stücke stehenden Wassersäule gleich ist. Setzen wir dieses Volumen V_1, so erhalten wir hiernach für den vertikalen Wasserdruck $P = V_1 \gamma$. Für einen andern Theil A_1B_1 der Gefäßwand, welcher senkrecht über dem vorigen liegt, hat man den entgegengesetzten Vertikaldruck $Q = V_2\gamma$; sind aber beide Theile fest mit einander verbunden, so resultirt aus beiden Kräften die vertikal abwärts wirkende Kraft $R = (V_1 - V_2)\gamma = V\gamma =$ dem Gewichte der zwischen beiden Flächentheilen enthaltenen Wassersäule. Wendet man endlich dieses Gesetz auf das ganze Gefäß an, so folgt, daß der gesammte Vertikaldruck des Wassers gegen das Gefäß gleich ist dem Gewichte der eingeschlossenen Wassermasse.

Anmerkung. Macht man eine Oeffnung O in die Seitenwand eines Gefäßes HBR, Fig. 436, so fällt der Theil des Druckes, welcher dem Querschnitte dieser Oeffnung entspricht, weg, und es bleibt daher der Druck auf das gegenüber liegende Flächenstück F übrig. Während also das Wasser durch eine Seitenöffnung ausfließt, findet eine gleichmäßige Vertheilung des Horizontaldruckes am ganzen Umfange nicht mehr statt. In Folge der Reaction des ausfließenden Wassers steigert sich dieser Druck P von $Fh\gamma$ auf $2Fh\gamma$, wie in der Folge gezeigt werden wird.

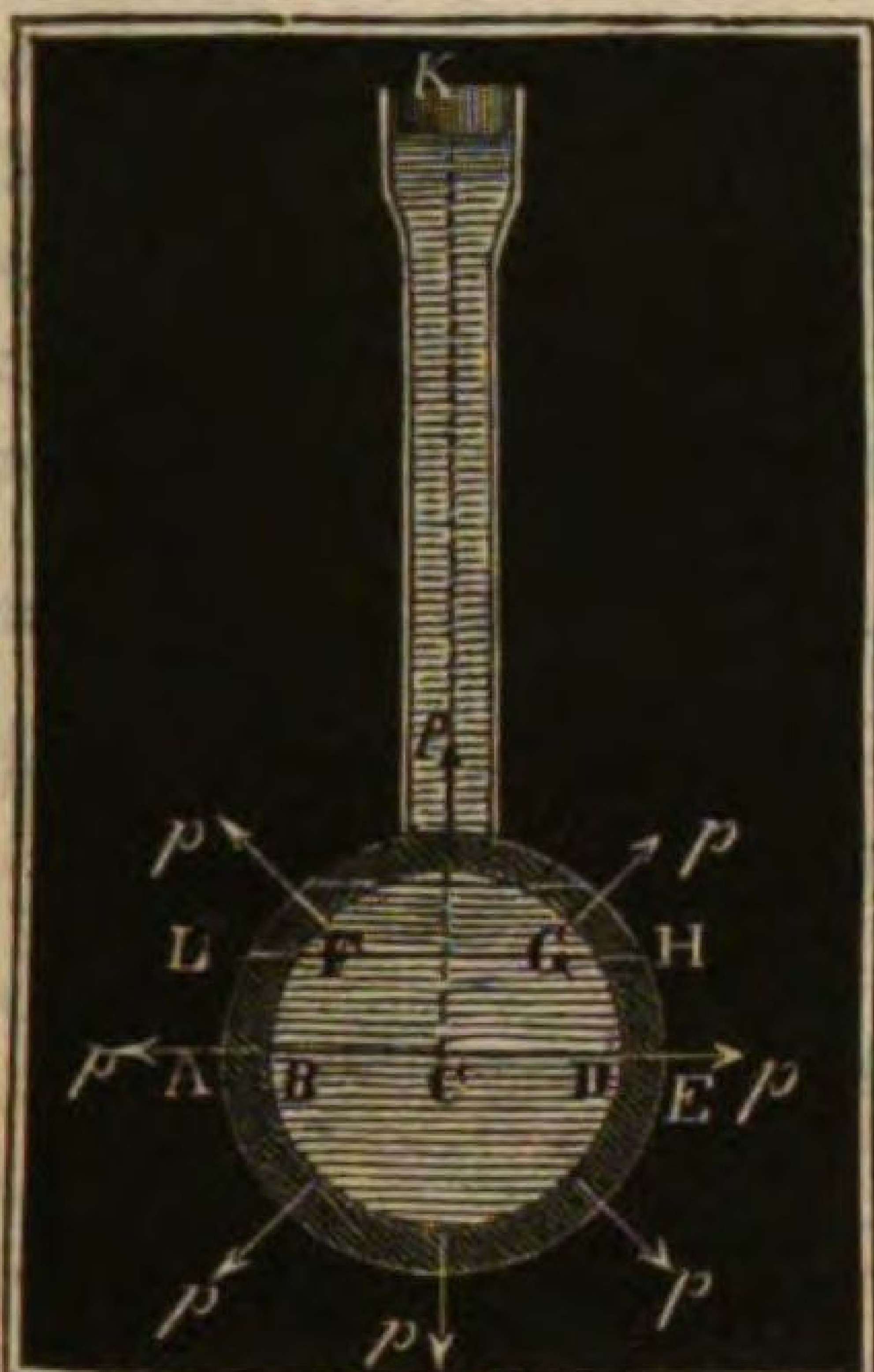
Fig. 436.



Röhrenstärke. §. 306. Von besonderer Wichtigkeit ist die Anwendung der Lehre vom Wasserdrucke auf Röhren, Kessel u. s. w. Damit diese Gefäße dem Wasserdrucke hinreichend widerstehen und durch denselben nicht zersprengt werden, hat man ihnen eine gewisse, der Druckhöhe und der inneren Weite entsprechende Wandstärke zu geben. Das Zersprengen einer Röhre kann auf mancherlei Weise vor sich gehen, namentlich in Quer- oder in Längenrissen. Die letzteren entstehen aber leichter als die ersteren, wie aus Folgendem erhellen wird.

Ist die Röhrenweite $BD = 2r$, Fig. 437 (s. folg. S.), und die Druckhöhe $CK = h$, also der Druck auf die Flächeneinheit $p = h\gamma$, so hat man den Gesammtdruck in der Axenrichtung der Röhre $= \pi r^2 p = \pi r^2 h \gamma$; ist nun noch die Wanddicke $AB = DE = e$, so hat man den Querschnitt der Röhrenmasse $= \pi (r + e)^2 - \pi r^2 = 2\pi r e + \pi e^2$

Fig. 437.



$= 2\pi r e \left(1 + \frac{e}{2r}\right)$, und setzt man endlich den Festigkeitsmodul $= K$, so hat man die Kraft zum Zerreißen über den ganzen Röhrenquerschnitt $= 2\pi r e \left(1 + \frac{e}{2r}\right) K$, weshalb nun zu setzen ist: Röhrenstärke.

$2\pi r e \left(1 + \frac{e}{2r}\right) K = \pi r^2 p$, oder annähernd und einfacher $2 e K = r p$, und daher die Röhrenstärke $e = \frac{rp}{2K} = \frac{ph\gamma}{2K}$. Um also keinen Querriß in der Röhre oder im Kessel zu erhalten, ist die Wandstärke desselben $e > \frac{rp}{2K}$ zu machen.

Unter allen Längenrissen AE, LH u. s. w. entstehen die diametral gehenden, wie AE, am leichtesten, weil dieselben den kleinsten Inhalt haben; es ist daher auch nur auf diese Rücksicht zu nehmen. Ziehen wir nun ein Röhrenstück von der Länge l in Betracht, und nehmen wir ebenso nur auf die Entstehung eines Risses von der Länge l Rücksicht, so erhalten wir den Querschnitt einer Trennungsfläche $= l e$, und daher die Kraft zum Zerreißen in dieser Fläche $l e K$. Für zwei gegenüberliegende Risse ist diese Kraft $= 2 l e K$, während der Wasserdruck für jede Röhrenhälfte dem Querschnitte $2 r l$ proportional, und daher $= 2 r l p$ ausfällt. Durch Gleichsetzen beider Ausdrücke folgt nun $2 l e K = 2 r l p$, d. i. $eK = rp$, also die Dicke: $e = \frac{rp}{K}$. Wegen der Entstehung von Längenrissen ist hiernach die Wandstärke noch einmal so groß zu machen, als wegen der Entstehung von einem Querrisse.

Aus der gefundenen Formel $e = \frac{rp}{K} = \frac{rh\gamma}{K}$ folgt, **daß sich die Stärken gleichartiger Röhren wie die Weiten und wie die Druckhöhen oder Drücke auf die Flächeneinheit verhalten.** Eine Röhre, welche dreimal so weit ist, als eine andere, und einen fünfmal so großen Druck auf jede Flächeneinheit auszuhalten hat, als diese, muß eine fünfzehnmal so starke Wand erhalten.

Hohlen Kugeln, welche von innen einen Druck p auf jede Flächeneinheit auszuhalten haben, hat man die Stärke $e = \frac{rp}{2K}$ zu geben, weil hier die Projection der Druckfläche der größte Kreis πr^2, und die Trennungsfläche der Ring $2\pi r e \left(1 + \frac{e}{2r}\right)$, oder annähernd, bei kleinerer Dicke, $= 2\pi r e$ ist.

Röhrenstärke. Die gefundenen Formeln geben für $p = o$ auch $e = o$, deshalb müßten also Röhren, welche keinen innern Druck auszuhalten haben, unendlich dünn gemacht werden; da aber jede Röhre schon wegen ihres eigenen Gewichtes einen gewissen Druck aushalten muß, so hat man noch eine gewisse Dicke e_1 hinzuzufügen, um die Stärke einer unter allen Umständen widerstehenden Röhre zu erhalten. Es ist solchemnach für cylindrische Röhren oder Kessel zu setzen: $e = e_1 + \frac{rh\gamma}{K}$, oder einfacher, wenn d die ganze innere Röhrenweite, n den Druck in Atmosphären, jede einer 33 Fuß hohen Wassersäule entsprechend, und μ eine Erfahrungszahl bezeichnet, $e = e_1 + \mu n d$.

Gemachten Erfahrungen zu Folge ist anzunehmen für Röhren von

Eisenblech	$e = 0{,}00086\ nd + 0{,}12$	Zoll.
Gußeisen	$e = 0{,}00238\ nd + 0{,}33$	»
Kupfer	$e = 0{,}00148\ nd + 0{,}16$	»
Blei	$e = 0{,}00242\ nd + 0{,}20$	»
Zink	$e = 0{,}00507\ nd + 0{,}16$	»
Holz	$e = 0{,}0323\ nd + 1{,}04$	»
natürlichen Steinen	$e = 0{,}0369\ nd + 1{,}15$	»
künstlichen Steinen	$e = 0{,}0538\ nd + 1{,}53$	»

Beispiel. Wenn eine Wassersäulenmaschine senkrecht stehende, im Innern 10 Zoll weite Einfallröhren aus Gußeisen hat, wie stark müssen dieselben bei 100, 200 und 300 Fuß Tiefe sein? Nach der Formel ist bei 100 Fuß Druck diese Stärke $= 0{,}00238 \cdot {}^{100}/_{33} \cdot 10 + 0.33 = 0{,}07 + 0{,}33 = 0{,}40$ Zoll; bei 200 Fuß $= 0{,}14 + 0{,}33 = 0{,}47$ Zoll, und bei 300 Fuß Druck $= 0{,}22 + 0{,}33 = 0{,}55$ Zoll. Gewöhnlich prüft man gußeiserne Leitungsröhren auf 10 Atmosphären, weshalb hiernach $e = 0{,}0238 \cdot d + 0{,}33$ Zoll, also für Röhren von 10 Zoll Weite die Stärke $e = 0{,}24 + 0{,}33 = 0{,}57$ Zoll anzuwenden ist.

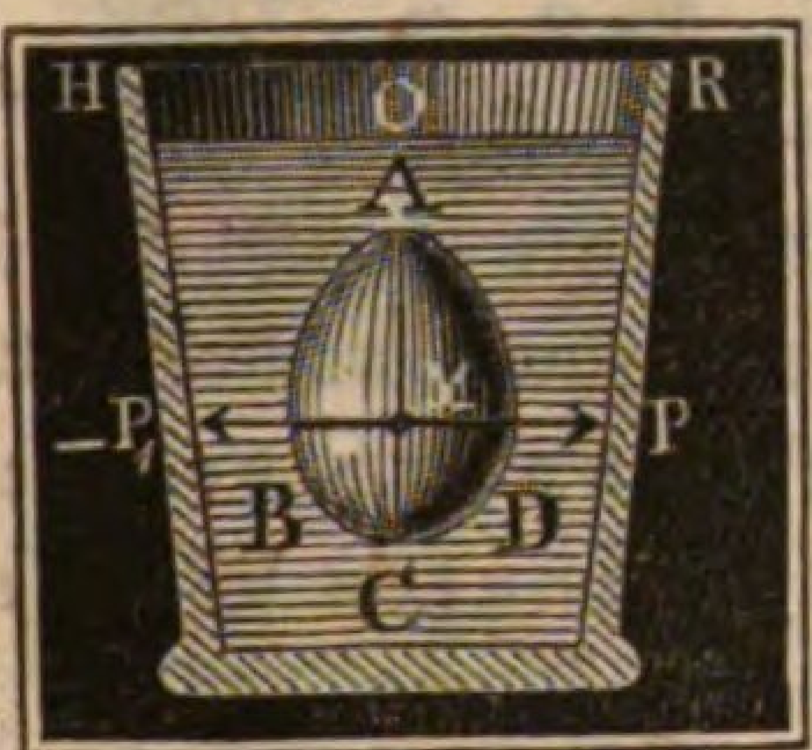
Anmerkungen. Von den Stärken der Dampfkesselwände wird im zweiten Theile gehandelt. Ueber die Theorie der Röhrenstärke ist eine Abhandlung von Herrn Brix in den Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleißes in Preußen, Jahrgang 1834, nachzulesen. Von den technischen Verhältnissen und von den Prüfungen der Röhren wird gehandelt in Hagen's Handbuch der Wasserbaukunst, Theil I, und in Genieys's Essai sur les moyens de conduire etc. les eaux.

Zweites Kapitel.

Vom Gleichgewichte des Wassers mit anderen Körpern.

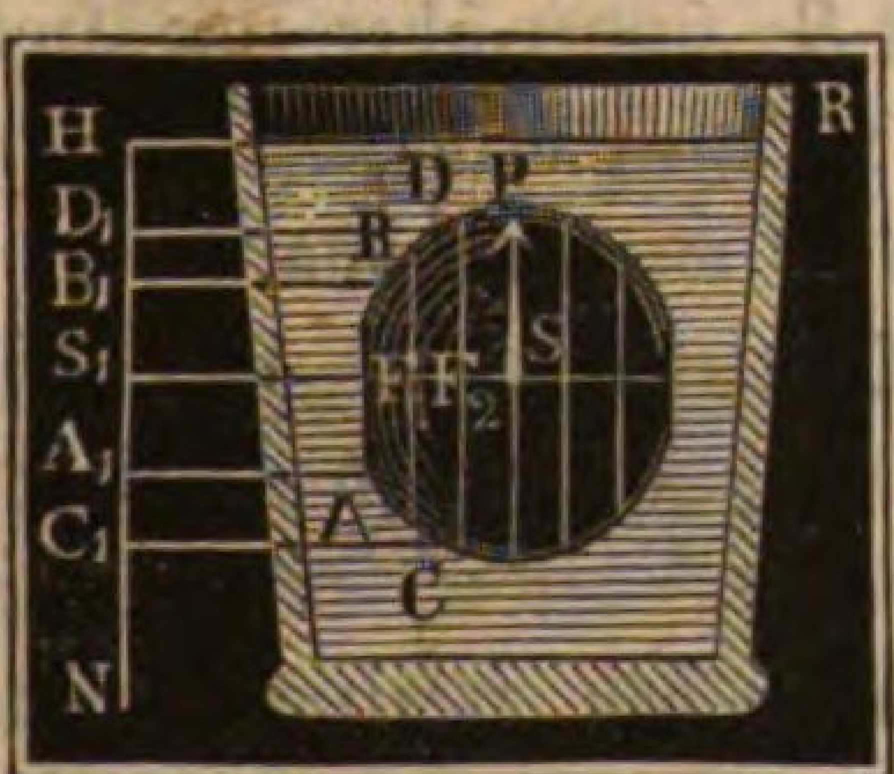
§. 307. Ein unter das Wasser getauchter Körper wird durch das Wasser von allen Seiten her gedrückt, und es entsteht nun die Frage nach der Größe, Richtung und dem Angriffspunkte der Mittelkraft aus allen diesen Pressungen. Denken wir uns diese Mittelkraft aus einem vertikalen und zwei horizontalen Componenten bestehend, und bestimmen wir diese Kräfte nach den Regeln des §. 305. Der Horizontaldruck des Wassers gegen eine Fläche ist gleich dem Horizontaldrucke gegen ihre Vertikalprojection, Auftrieb.

Fig. 438.



nun ist aber jede Projection eines Körpers AC, Fig. 438, Projection vom Hintertheil ADC und Vordertheil ABC seiner Oberfläche zugleich, es ist daher auch der horizontale Wasserdruck P gegen den Hintertheil der Oberfläche eines Körpers ebenso groß als gegen den Vordertheil, und, da beide Drücke genau entgegengesetzt wirken, die Mittelkraft derselben gleich Null. Da dieses Verhältniß bei jeder beliebigen Horizontalrichtung und dieser entsprechenden Vertikalprojection stattfindet, so folgt, daß die Resultirende aus allen Horizontalpressungen Null ist, daß also der unter dem Wasser befindliche Körper AC nach allen horizontalen Richtungen gleich stark gedrückt wird und deshalb kein Bestreben hat, sich in einer Horizontalrichtung fortzubewegen.

Fig. 439.



Um den Vertikaldruck des Wassers gegen den Körper BCS, Fig. 439, zu finden, denken wir uns denselben in vertikale Elementarprismen AB, CD u. s. w. zerlegt, und bestimmen die Vertikaldrücke auf die Endflächen A und B, C und D derselben. Sind die Längen dieser Säulen l_1, l_2 u. s. w., die Tiefen ihrer oberen Enden B, D u. s. w. unter dem Wasserspiegel HR: h_1, h_2 u. s. w. und die horizontalen Querschnitte F_1, F_2 u. s. w., so hat man die von oben nach unten wirkenden Vertikaldrücke gegen die Enden B, D u. s. w. $= F_1 h_1 \gamma$, $F_2 h_2 \gamma$ u. s. w., und dagegen die von unten nach oben und gegen die Enden A, C u. s. w. wirkenden Drücke $= F_1(h_1 + l_1)\gamma$, $F_2(h_2 + l_2)\gamma$ u. s. w.;

Auftrieb. und es folgt nun durch Vereinigung dieser Parallelkräfte die Mittelkraft $P = F_1(h_1+l_1)\gamma + F_2(h_2+l_2)\gamma + \ldots - F_1h_1\gamma - F_2h_2\gamma - \ldots$ $= (F_1l_1 + F_2l_2 + \ldots)\gamma = V\gamma$, wenn V das Volumen des eingetauchten Körpers oder des verdrängten Wassers bezeichnet.

Hiernach ist also der **Auftrieb, oder die Kraft, mit welcher das Wasser einen in ihm eingetauchten Körper von unten nach oben emporzutreiben sucht, gleich dem Gewichte des verdrängten Wassers oder einer Wassermenge, welche mit dem untergetauchten Körper einerlei Volumen hat.**

Um endlich noch den Angriffspunkt dieser Mittelkraft zu finden, setzen wir die Abstände AA_1, CC_1 u. s. w. der Elementarsäulen AB, CD u. s. w. von einer Vertikalebene HN: a_1, a_2 u. s. w. und bestimmen die Momente der Kräfte in Hinsicht auf diese Ebene. Ist nun S der Angriffspunkt des Auftriebes und $SS_1 = x$ sein Abstand von jener Grundebene, so hat man

$$V\gamma \cdot x = F_1l_1\gamma \cdot a_1 + F_2l_2\gamma \cdot a_2 + \ldots, \text{ und daher}$$

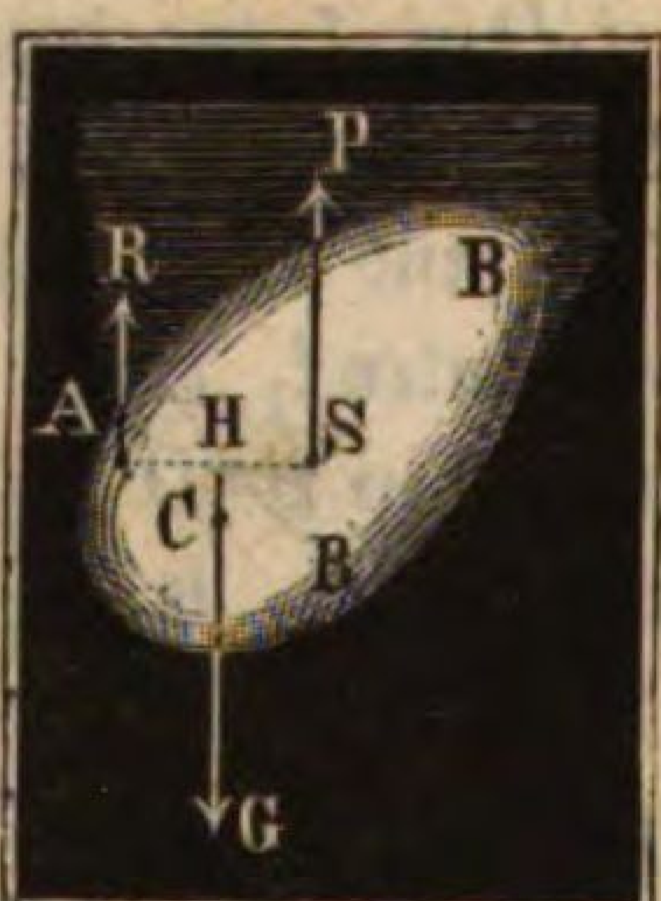
$$x = \frac{F_1\,l_1\,a_1 + F_2\,l_2\,a_2 + \ldots}{F_1l_1 + F_2\,l_2 + \ldots} = \frac{V_1a_1 + V_2a_2 + \ldots}{V_1 + V_2 + \ldots}, \text{ wenn}$$

V_1, V_2 u. s. w. die Inhalte der säulenförmigen Elemente bezeichnen. Da sich (nach §. 100.) der Schwerpunkt des Körpers genau nach derselben Formel bestimmt, so folgt, **daß der Angriffspunkt S des Auftriebes mit dem Schwerpunkte des verdrängten Wassers zusammenfällt.**

§. 308. Zu dem Auftriebe eines in oder unter Wasser getauchten Körpers gesellt sich noch das in entgegengesetzter Richtung wirkende Gewicht G des Körpers, und es ergiebt sich nun aus beiden eine Mittelkraft $R = G - V\gamma$ oder $= (\varepsilon - 1)\,V\gamma$, wenn ε das specifische Gewicht des Körpers bezeichnet.

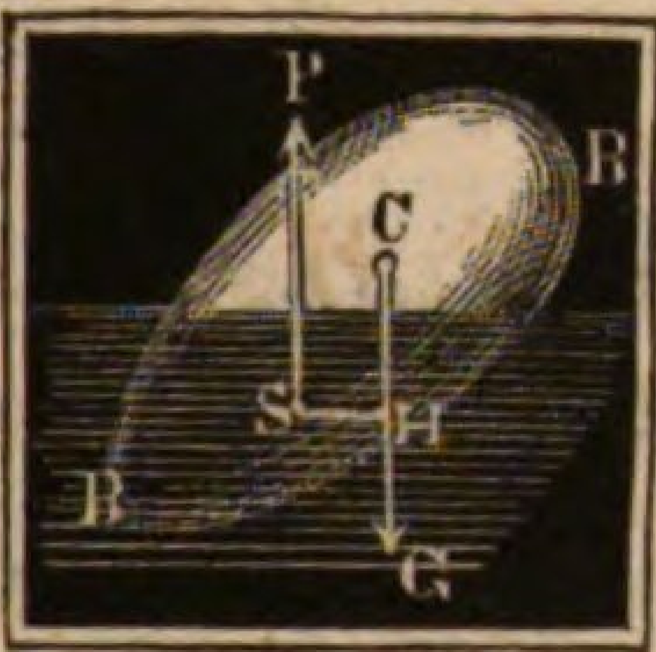
Ist die Körpermasse homogen, so fällt der Schwerpunkt des verdrängten Wassers mit dem des Körpers zusammen, und es ist daher dieser Punkt zugleich der Angriffspunkt von der Mittelkraft R; findet aber eine Homogenität nicht statt, so fallen diese Schwerpunkte nicht zusammen und es weicht deshalb auch der Angriffspunkt der Mittelkraft R von beiden Schwerpunkten ab. Setzen wir den Horizontalabstand SH, Fig. 440, beider Schwerpunkte von einander $= b$ und den Horizontalabstand SA des gesuchten Angriffspunktes A von dem Schwerpunkte S des verdrängten Wassers $= a$, so haben wir die Gleichung $Gb = Ra$, woraus sich $a = \frac{Gb}{R} = \frac{Gb}{G-P}$ ergiebt.

Fig 440.



Wird der eingetauchte Körper seiner eigenen Schwere überlassen, so können folgende drei Fälle eintreten. Entweder ist das specifische Gewicht des Körpers gleich dem des Wassers, oder es ist größer, oder es ist kleiner als das specifische Gewicht des Wassers. Im ersten Falle ist der Auftrieb gleich dem Gewichte, im zweiten ist er kleiner und im dritten ist er größer als das Gewicht des Körpers. Während im ersten Falle Gleichgewicht zwischen dem Gewichte und dem Auftriebe eintritt, muß der Körper im zweiten Falle mit der Kraft $G - V\gamma = (\varepsilon - 1)\, V\gamma$ sinken und im dritten Falle mit der Kraft $V\gamma - G = (1 - \varepsilon)\, V\gamma$ steigen. Das Steigen hat aber nur so lange seinen Fortgang, bis die von der Ebene des Wasserspiegels abgeschnittene und von dem Körper verdrängte Wassermasse V_1 mit dem ganzen Körper einerlei Gewicht hat. Das Gewicht $G = V\varepsilon\gamma$ des Körpers BB_1, Fig. 441, und der Auftrieb $P = V_1\gamma$ bilden nun ein Kräftepaar, durch welches der Körper noch so weit umgedreht wird, bis die Richtungen beider zusammenfallen, oder bis der Schwerpunkt des Körpers mit dem Schwerpunkte des verdrängten Wassers in eine und dieselbe Vertikallinie fällt. Auftrieb.

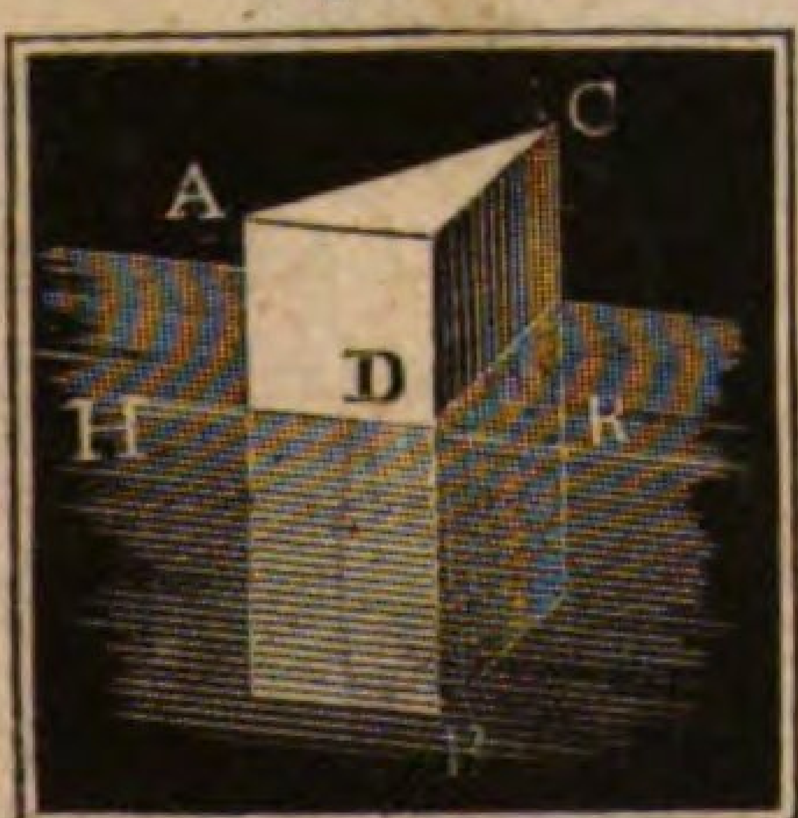
Fig. 441.



Man nennt die Linie durch den Schwerpunkt des schwimmenden Körpers und durch den des verdrängten Wassers die Schwimmaxe (franz. axe de flottaison; engl. axis of floating) und dagegen den durch die Ebene des Wasserspiegels gebildeten Schnitt des Körpers die Schwimmebene (franz. plan de fl.; engl. plan of fl.). Jede Ebene, welche einen Körper so theilt, daß sich der eine Theil zum Ganzen wie das specifische Gewicht des Körpers zu dem der Flüssigkeit verhält, und daß die Schwerpunkte beider Theile in einer Normallinie zu dieser Ebene liegen, kann Schwimmebene des Körpers sein.

§. 309. Kennt man die Gestalt und das Gewicht eines schwimmenden Körpers, so läßt sich mit Hülfe der vorstehenden Regel die Tiefe des Eintauchens im Voraus berechnen. Ist G das Gewicht des Körpers, so setze man das Volumen des verdrängten Wassers: $V = \frac{G}{\gamma}$; verbindet man hiermit die stereometrische Formel für das Volumen V, so bekommt man die gesuchte Bestimmungsgleichung. Für ein Prisma ABC, Fig. 442, mit vertikaler Axe ist z. B. $V = Fy$, wenn F der Querschnitt und y die Tiefe BD des Eintauchens bezeichnet, es folgt daher $Fy = \frac{G}{\gamma}$ und $y = \frac{G}{F\gamma}$. Für eine Schwimmtiefe.

Fig. 442.



Schwimmtiefe.

Fig. 443.

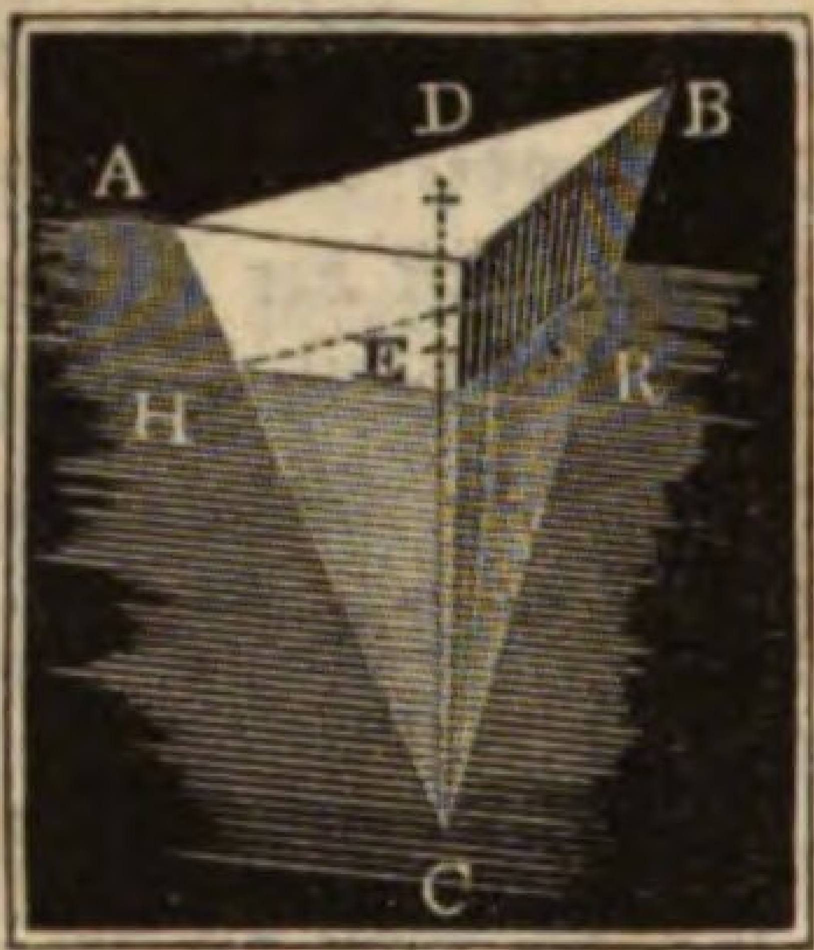


Fig. 444.

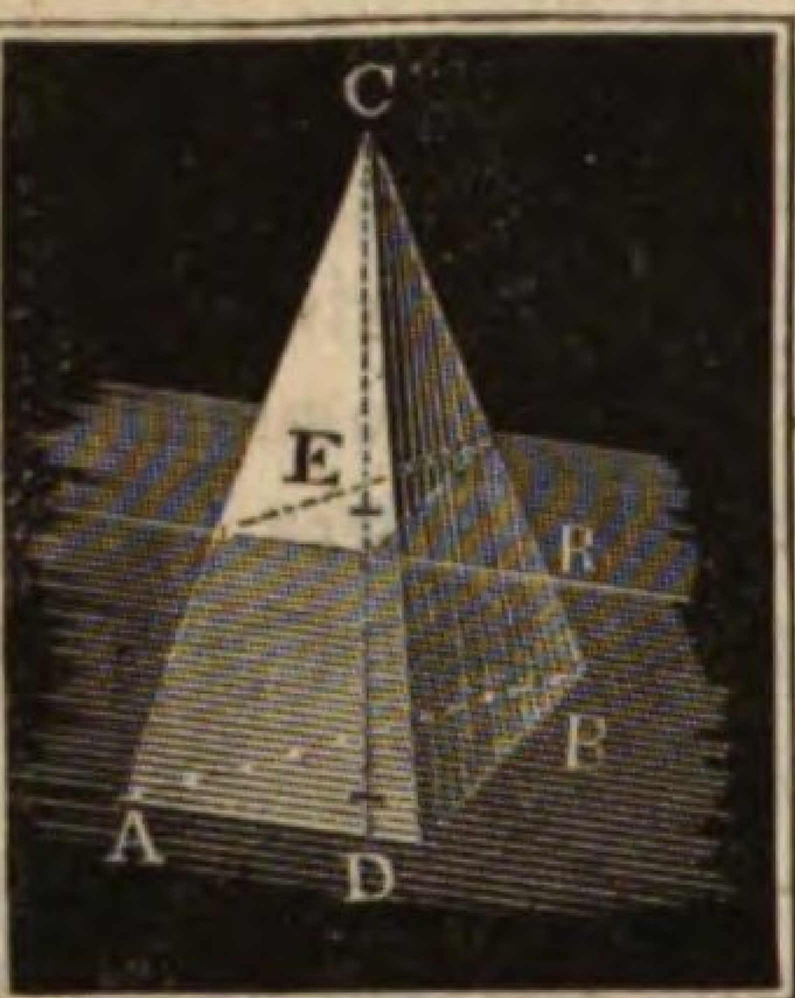


Fig. 445.

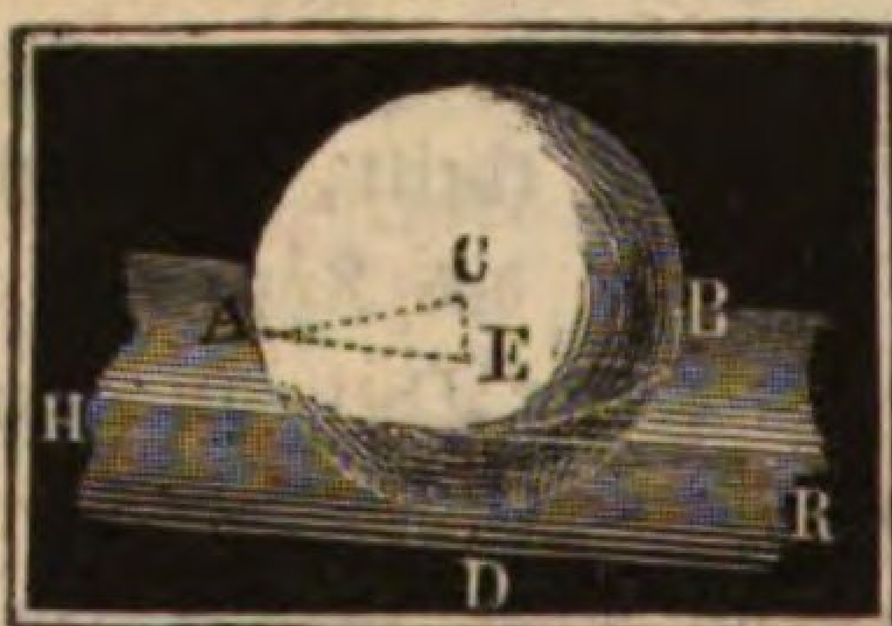
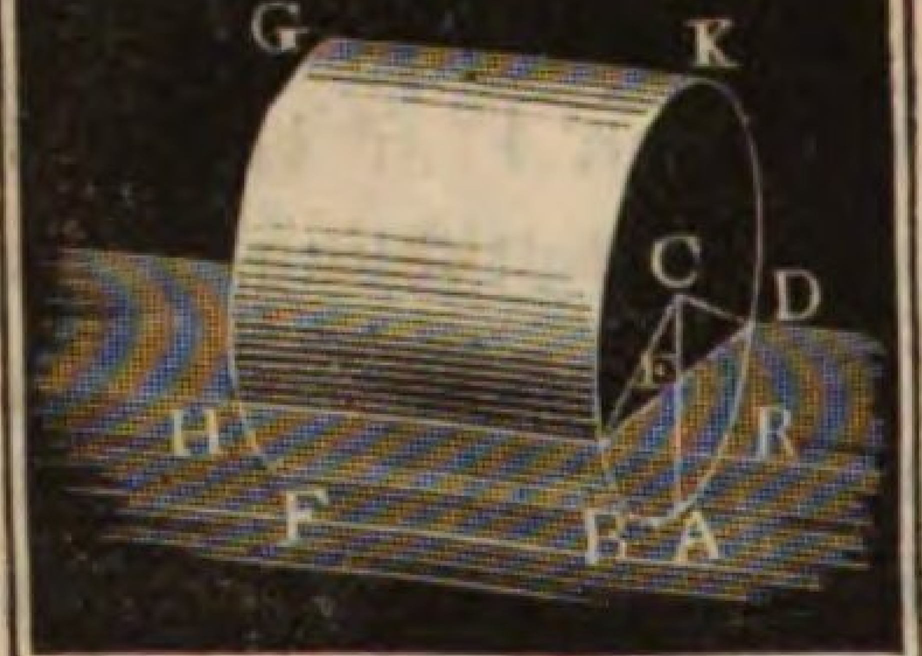


Fig. 446.



mit der Spitze unter Wasser schwimmende Pyramide ABC, Fig. 443, ist $V = \frac{1}{3}\varphi y^3$, wenn φ den von der Spitze um die Einheit abstehenden Querschnitt bezeichnet, es folgt daher für sie $\frac{1}{3}\varphi y^3 = \frac{G}{\gamma}$, und daher die Tiefe $CE = y = \sqrt[3]{\frac{3G}{\varphi\gamma}}$. Für eine mit der Basis unter Wasser schwimmende Pyramide ABC, Fig. 444, ergiebt sich hingegen der Abstand $CE = y_1$ der Spitze vom Wasserspiegel, aus der Höhe h der ganzen Pyramide, indem man setzt:

$$V = \frac{1}{3}\varphi\,(h^3 - y_1^3),$$

$$y_1 = \sqrt{h^3 - \frac{3G}{\varphi\gamma}}.$$

Für eine Kugel AB, Fig. 445, mit dem Halbmesser $CA = r$ ist $V = \pi y^2 \left(r - \frac{y}{3}\right)$, daher hat man es mit der Auflösung der cubischen Gleichung $y^3 - 3ry^2 + \frac{3G}{\pi\gamma} = 0$ zu thun, um die Tiefe $DE = y$ der Eintauchung der Kugel zu finden.

Für einen mit horizontaler Axe schwimmenden Cylinder AG, Fig. 446, vom Halbmesser $BC = DC = r$ ist, wenn α^0 den Centriwinkel BCD des eingetauchten Bogens bezeichnet, die Tiefe AE der Eintauchung $y = r\,(1 - \cos. \frac{1}{2}\alpha)$, um aber den Wasserbogen α zu finden, setzen wir das Volumen des verdrängten Wassers = Ausschnitt $\frac{r^2\alpha}{2}$ minus Dreieck $\frac{r^2 \sin. \alpha}{2}$, multiplicirt durch die Länge $GK = l$ des Cylinders, also $(\alpha - \sin. \alpha)\,\frac{lr^2}{2} = \frac{G}{\gamma}$, und lösen die Gleichung $\alpha - \sin. \alpha = \frac{2\,G}{l\,r^2\,\gamma}$ auf dem Wege der Näherung in Beziehung auf α auf.

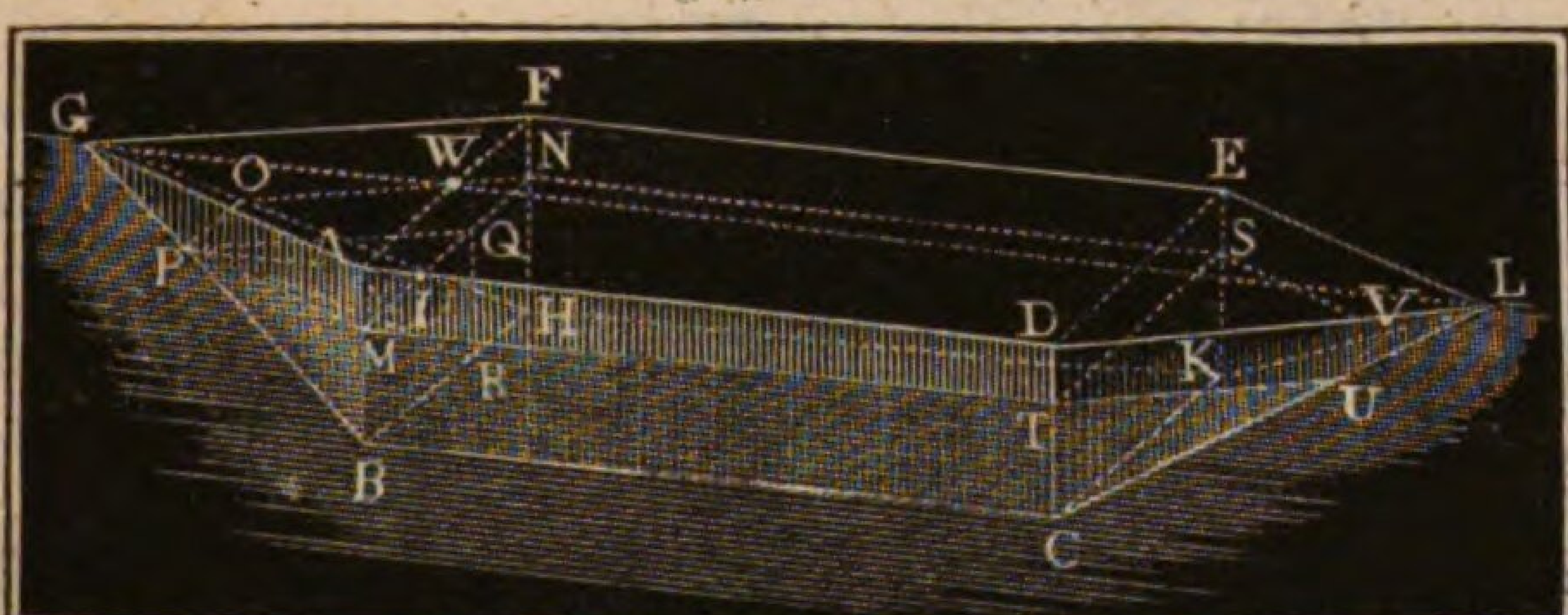
Beispiele. 1) Wenn eine schwimmende Holzkugel von 10 Zoll Durchmesser 4½ Zoll tief schwimmt, so ist das Volumen des von ihr verdrängten Wassers: Schwimmtiefe.
$V = \pi\,(^9/_2)^2\,(5 - ^9/_6) = \frac{\pi . 81 . 7}{8} = \frac{567 . \pi}{8} = 222{,}66$ Cub.-Zoll, während die Kugel selbst den Inhalt $\frac{\pi d^3}{6} = \frac{\pi . 10^3}{6} = 523{,}6$ Cub.-Zoll hat. Es wiegen hienach 523,6 Cub.-Zoll Kugelmasse ebensoviel, wie 222,66 Cub.-Zoll Wasser, und es folgt das specifische Gewicht der ersteren: $\varepsilon = \frac{222{,}66}{523{,}6} = 0{,}425$.

2) Wie tief schwimmt ein Holzcylinder von 10 Zoll Durchmesser bei einem specifischen Gewichte $\varepsilon = 0{,}425$? Es ist $\frac{\alpha - sin.\ \alpha}{2} = \frac{\pi r^2 l . \varepsilon \gamma}{l r^2 \gamma} = \pi \varepsilon$ $= 0{,}425 . \pi = 1{,}3352$; nun giebt die Segmententafel im »Ingenieur, S. 218,« für den Inhalt $\frac{\alpha - sin.\ \alpha}{2} = 1{,}32766$ eines Kreissegmentes den Centriwinkel $\alpha^0 = 166^0$, und für $\frac{\alpha - sin.\ \alpha}{2} = 1{,}34487$ denselben $= 167^0$, es läßt sich daher einfach der dem Abschnitte 1,3352 entsprechende Centriwinkel
$\alpha^0 = 166^0 + \frac{1{,}3352 - 1{,}32766}{1{,}34487 - 1{,}32766} . 1^0 = 166^0 + \frac{754^0}{1721} = 166^0, 26'$; also die Tiefe der Eintauchung: $y = r\,(1 - cos.\ ^1/_2\,\alpha) = 5\,(1 - cos.\ 83^0, 13')$ $= 5 . 0{,}8819 = 4{,}41$ Zoll setzen.

§. 310. Die Bestimmung der Eintauchungstiefe kommt vorzüglich bei Kähnen und Schiffen vor. Haben diese Fahrzeuge eine gesetzmäßige Form, so läßt sich diese Tiefe mittels geometrischer Formeln berechnen, fehlt aber die gesetzmäßige Form oder ist das Gesetz der Gestaltung nicht bekannt, oder ist die Form sehr zusammengesetzt, so muß man die Tiefe des Eintauchens durch Experimentiren oder durch Probiren bestimmen.

Ein Beispiel für den ersten Fall gewährt der in Fig. 447 abgebildete,

Fig. 447.



von ebenen Flächen begränzte Kahn *ACLEG*. Derselbe besteht aus einem Parallelepipede *ACE*, und aus zwei, den Vorder- und Hintertheil bildenden vierseitigen Pyramiden *BFG* und *CEL*, und seine Schwimmebene ist aus einem Parallelogramme *MS* und aus zwei Trapezen *MO* und *SU* zusammengesetzt, und schneidet einen Wasserraum ab, der sich in ein Parallelepiped *MCS*, in zwei dreiseitige Prismen, wie z. B *PNR*,

Schwimmtiefe. und in zwei vierseitige Pyramiden wie z. B. BQP zerlegen läßt. Setzen wir die Länge AD des Mittelstückes $= l$, die Breite $AF = b$ und die Höhe $AB = h$, ferner die Länge GW von jedem der beiden Schnäbel $= c$ und die Tiefe der Einsenkung unter Wasser, d. i. $BM = CT = y$. Es folgt zunächst der eingetauchte Theil MCS des Mittelstückes:
$= \overline{MN} \times \overline{MT} \times \overline{MB} = l b y$. Die Basis der vierseitigen Pyramide BQP ist $B\overline{M}.B\overline{R}$ und die Höhe PJ, daher der Inhalt dieser Pyramide $= \frac{1}{3} B\overline{M}.B\overline{R}.P\overline{J}$. Nun ist aber $BM = y$, $BR = \frac{BP}{BG} . BH$ $= \frac{BM}{BA} . BH = \frac{y}{h} . b = \frac{by}{h}$, und ebenso $PJ = \frac{BM}{BA} . GW = \frac{y}{h} c$ $= \frac{cy}{h}$, daher folgt der Inhalt der beiden Pyramiden
$= 2 . \frac{1}{3} . y . \frac{by}{h} . \frac{cy}{h} = \frac{2}{3} \frac{bcy^3}{h^2}$. Der Querschnitt des dreiseitigen Prisma's RNO ist $= \frac{1}{2} \overline{RQ}.\overline{PJ} = \frac{1}{2} y . \frac{cy}{h} = \frac{cy^2}{2h}$, und die Seite $RH = QN = b - \frac{by}{h} = b\left(1 - \frac{y}{h}\right)$, daher folgt der Inhalt der beiden Prismen $= 2 . \frac{cy^2}{2h} . b\left(1 - \frac{y}{h}\right) = \frac{bcy^2}{h}\left(1 - \frac{y}{h}\right)$. Durch Addition der gefundenen drei Volumen ergiebt sich nun das Volumen des verdrängten Wassers:

$$V = bly + \frac{2}{3} \frac{bcy^3}{h^2} + \frac{bcy^2}{h} - \frac{bcy^3}{h^2} = \left(l + \frac{cy}{h} - \frac{1}{3} . \frac{cy^2}{h^2}\right) by.$$

Ist nun das Bruttogewicht des Schiffes $= G$, so hat man zu setzen:

$$\left(l + \frac{cy}{h} - \frac{1}{3} . \frac{cy^2}{h^2}\right) by\gamma = G, \text{ oder}$$

$$y^3 - 3hy^2 - \frac{3lh^2}{c} . y + \frac{9h^2G}{bc\gamma} = 0.$$

Durch die Auflösung der letzten cubischen Gleichung bestimmt sich aus der Ladung die Tiefe y der Einsenkung.

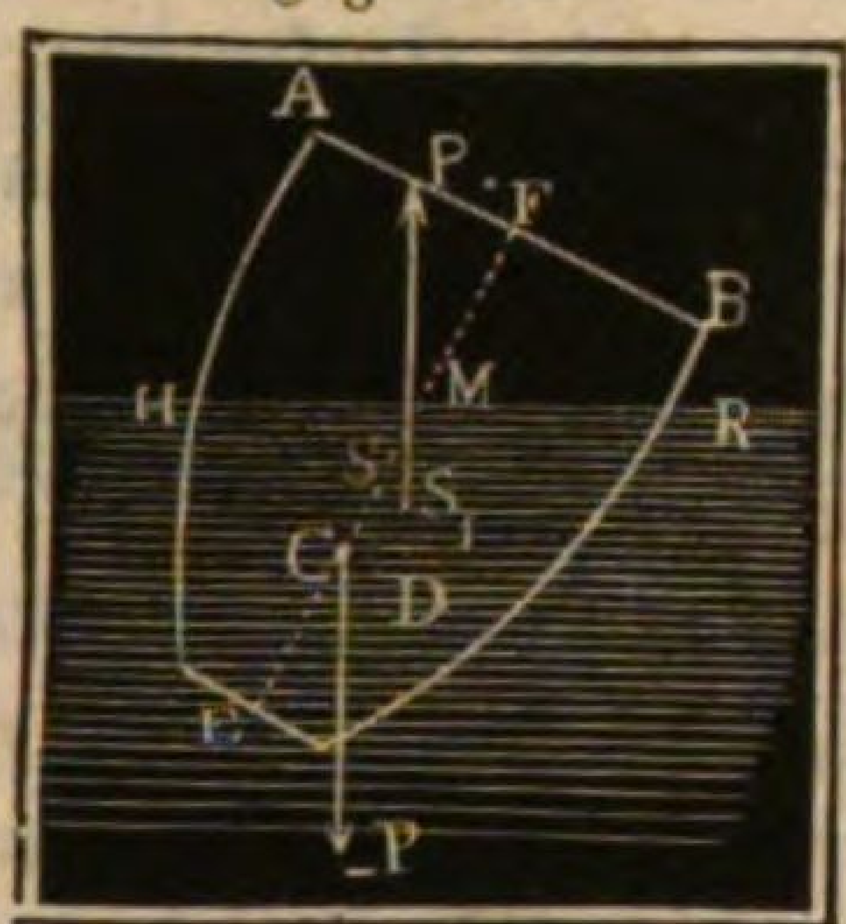
Beispiele. 1) Wenn bei einem Schiffe die Länge des Mittelstückes $l = 50$ Fuß, die Länge eines jeden Schnabels $c = 15$ Fuß, die Breite $b = 12$ Fuß und die Tiefe $h = 4$ Fuß beträgt, so kann bei einer Einsenkungstiefe $y = 2$ Fuß die ganze Belastung betragen: $G = [50 + 15 . \frac{2}{4} - \frac{1}{3} . 15 . (\frac{2}{4})^2] . 12 . 2 . 66$ $= (50 + 7{,}5 - 1{,}25) . 24 . 66 = 89100$ Pf. 2) Wenn bei dem vorigen Schiffe das Bruttogewicht 50000 Pf. ausmacht, so hat man für die Senkungstiefe: $y^3 - 12y^2 - 160y + 202{,}02 = 0$. Durch einiges Probiren findet man leicht, daß dieser Gleichung ziemlich genau durch $y = 1{,}17$ entsprochen wird, weshalb die gesuchte Einsenkungstiefe ebenso groß anzunehmen ist.

Anmerkung. Um das Gewicht der Ladungen eines Schiffes anzugeben, ver-

sieht man dieses zu beiden Seiten mit einer Skala, der sogenannten **Schiffsaiche**. Die Eintheilung einer solchen Aiche wird in der Regel empirisch gefunden, indem man untersucht, welche Einsenkungen bestimmten Belastungen entsprechen.

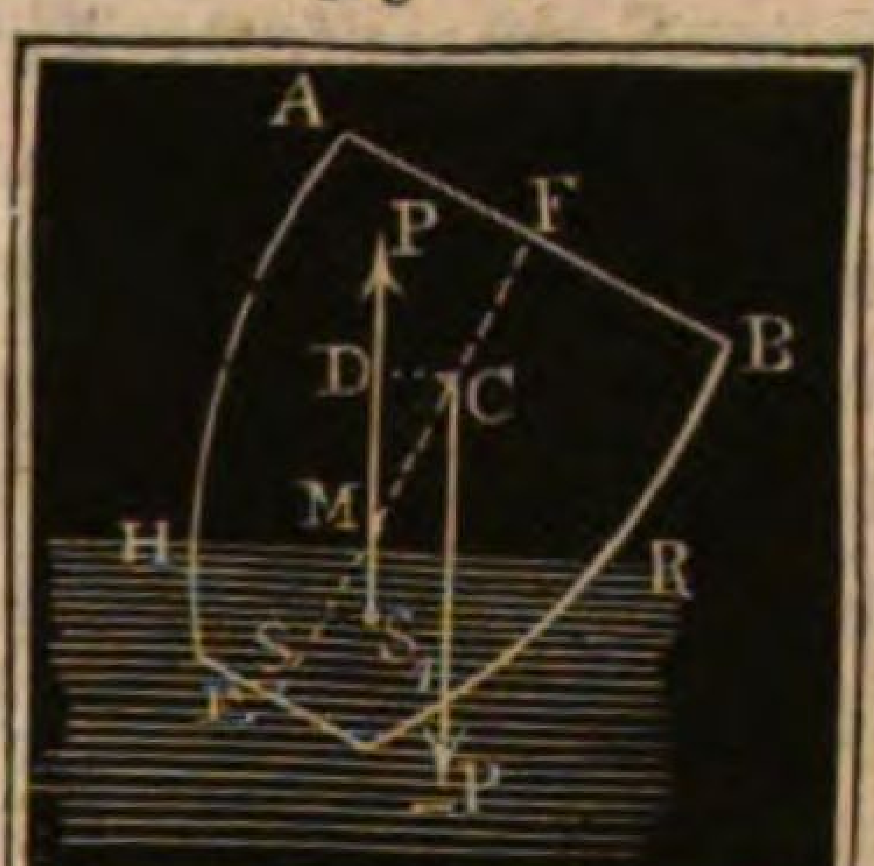
§. 311. Das Schwimmen der Körper erfolgt entweder in **aufrechter** oder in **schiefer Stellung**, ferner **mit** oder **ohne Stabilität**. Aufrecht schwimmt ein Körper, z. B. ein Schiff, wenn wenigstens eine Ebene durch die Schwimmaxe Symmetrieebene des Körpers ist, schief schwimmt er, wenn er durch keine der Ebenen, welche sich durch die Schwimmaxe legen lassen, in zwei congruente Theile getheilt wird. Ein Körper schwimmt mit Stabilität, wenn er seinen Gleichgewichtszustand zu behaupten sucht (vgl. §. 130), wenn also mechanische Arbeit aufzuwenden ist, um ihn aus dieser Lage zu bringen, oder wenn er von selbst in die Gleichgewichtslage zurückkehrt, nachdem man ihn daraus gebracht hat. Ohne Stabilität schwimmt dagegen der Körper, wenn er in eine neue Gleichgewichtslage übergeht, nachdem er, etwa durch Erschütterung oder durch einen Stoß u. s. w., aus der ersten gebracht worden ist. Stabilität.

Fig. 448.



Wird ein vorher aufrecht schwimmender Körper *ABC*, Fig. 448, in eine schiefe Lage gebracht, so tritt der Schwerpunkt S des verdrängten Wassers aus der Symmetrieebene *EF* heraus und nimmt eine Stelle S_1 auf der mehr eingetauchten Hälfte des Schiffsraumes ein. Der in S_1 angreifende Auftrieb $P = V\gamma$ und das im Schwerpunkte C des Schiffes angreifende Gewicht $G = -P$ des Schiffes bilden nun ein Kräftepaar, durch welches (s. §. 90) stets eine Drehung hervorgebracht wird. Um welchen Punkt auch diese Drehung vor sich gehe, immer wird doch C dem Gewichte G nachgebend, niedergehen, und S_1 oder ein anderer Punkt M der Vertikalen S_1P, der Kraft P folgend, aufsteigen, es wird also die Symmetrie- oder Axenebene *EF* des Schiffes in C nach unten und in M nach oben gezogen, und daher dieselbe sich aufrecht stellen, wenn M, wie in Fig. 448 über C liegt und sich noch mehr neigen, wie in Fig. 449, wenn M sich unter C befindet. Hiernach hängt denn die Stabilität eines schwimmenden Körpers oder Schiffes von dem Punkte M ab, in welchem die Vertikale durch den Schwerpunkt S_1 des verdrängten Wassers die Symmetrieebene schneidet. Man nennt diesen Punkt das **Me-**

Fig. 449.

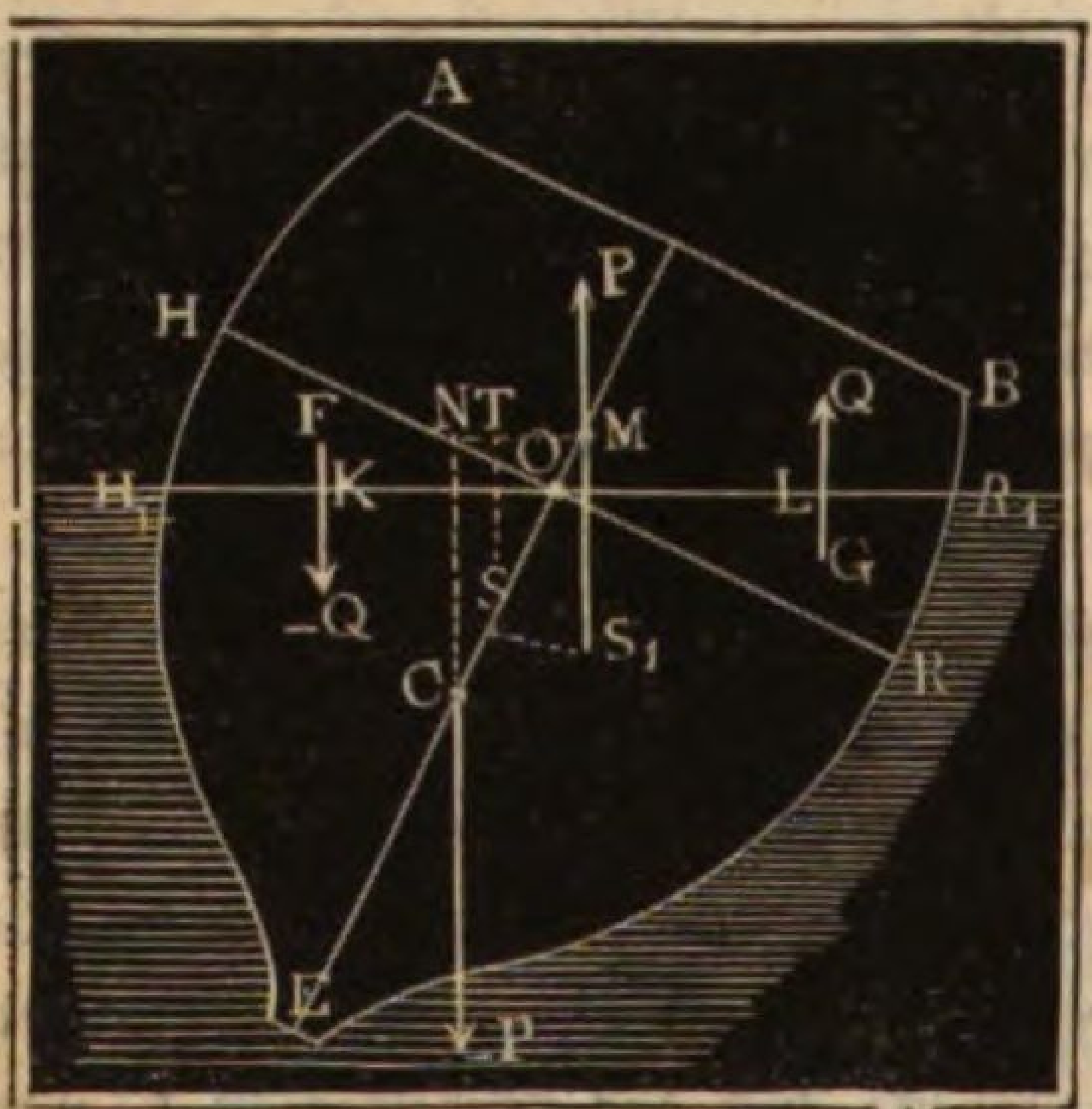


Stabilität. **tacentrum** (franz. métacentre; engl. metacentrum). Ein Schiff oder ein anderer Körper schwimmt also hiernach mit Stabilität, wenn sein Metacentrum über dem Schwerpunkte des Schiffes liegt, und ohne solche, wenn es darunter liegt; er ist endlich im indifferenten Gleichgewichte, wenn beide Punkte zusammenfallen.

Der Horizontalabstand CD des Metacenter M von dem Schwerpunkte C des Schiffes ist der Hebelarm des von P und $G = -P$ gebildeten Kräftepaares, und daher das Moment des letzteren oder das Maaß der Stabilität $= P \,.\, \overline{CD}$. Bezeichnen wir die Entfernung CM durch c, und den Drehungswinkel SMS_1 des Schiffes oder seiner Axenebene durch φ^0, so erhalten wir für das Maaß der Stabilität des Schiffes $S = Pc \sin.\varphi$; und es ist also hiernach dieses um so größer, je größer das Gewicht, je größer die Entfernung des Metacenter von dem Schwerpunkte des Schiffes und je größer der Neigungswinkel des letzteren ist.

§. 312. In der letzten Formel $S = Pc \sin.\varphi$ hängt die Stabilität des Schiffes vorzüglich von der Entfernung des Metacenter vom Schwerpunkte des Schiffes ab, es ist daher von Wichtigkeit, sich eine Formel zur Bestimmung dieser Entfernung zu verschaffen. Durch den Uebergang des Schiffes ABE, Fig. 450, aus der aufrechten Lage in die schiefe Lage rückt der Schwerpunkt S nach S_1, es geht der keilförmige Raum HOH_1 aus dem Wasser hervor und zieht sich der keilförmige Raum ROR_1 unter das Wasser hinab, und es wird dadurch der Auftrieb auf der einen Seite um eine im Schwerpunkte F des Raumes HOH_1 angreifende Kraft Q vermindert und auf der andern Seite um eine im Schwerpunkte G des Raumes ROR_1 angreifende gleiche Kraft Q vergrößert. Es ersetzt also hiernach der in S_1 angreifende Auftrieb P den anfänglich in S angreifenden Auftrieb und das Kräftepaar $(Q, -Q)$, oder, was auf Eins hinauskommt, eine in S_1 angreifende Gegenkraft $-P$ hält der in S angreifenden Kraft P sammt Kräftepaar $(Q, -Q)$ das Gleichgewicht, oder einfacher, das Kräftepaar $(P, -P)$ ist mit dem Kräftepaar $(Q, -Q)$ im Gleichgewichte. Ist nun das Querprofil $HER = H_1ER_1$ des im Wasser befindlichen Schiffstheiles $= F$, und das Querprofil $HOH_1 = ROR_1$ des Raumes, um welchen sich das Schiff auf der einen Seite herausgezogen und auf der andern tiefer ein-

Fig. 450.



getaucht hat, $= F_1$, ist ferner der Horizontalabstand KL der Schwer- Stabilität.
punkte dieser Räume $= a$ und der Horizontalabstand MT der Schwerpunkte S und S_1 oder die Horizontalprojection des Weges SS_1, welchen S beim Umkippen durchläuft $= s$, so hat man wegen des Gleichgewichtszustandes beider Kräftepaare:

$$Fs = F_1 a, \text{ daher } s = \frac{F_1}{F} a \text{ und } SM = \frac{MT}{sin.\,\varphi} = \frac{s}{sin.\,\varphi} = \frac{F_1 a}{F sin.\varphi}.$$

Die als Faktor in das Maaß der Stabilität eintretende Linie $CM = c$ ist $= CS + SM$; bezeichnen wir daher noch den Abstand CS des Schwerpunktes C des Schiffes von dem Schwerpunkte des verdrängten Wassers durch e, so erhalten wir das Stabilitätsmaaß

$$S = Pc\, sin.\,\varphi = P\left(\frac{F_1 a}{F} + e \, sin\, \varphi\right).$$

Ist der Drehungswinkel klein, so kann man die Querschnitte HOH_1 und ROR_1 als gleich schmale Dreiecke ansehen; bezeichnet man die Breite $HR = H_1R_1$ des Schiffes an der Eintauchungsstelle durch b, so kann man $F_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} b \cdot \frac{1}{2} b\varphi = \frac{1}{8} b^2 \varphi$ und $KL = a = 2 \cdot \frac{2}{3} \frac{b}{2} = \frac{2}{3} b$, sowie $sin.\,\varphi = \varphi$ setzen, weshalb die Stabilität:

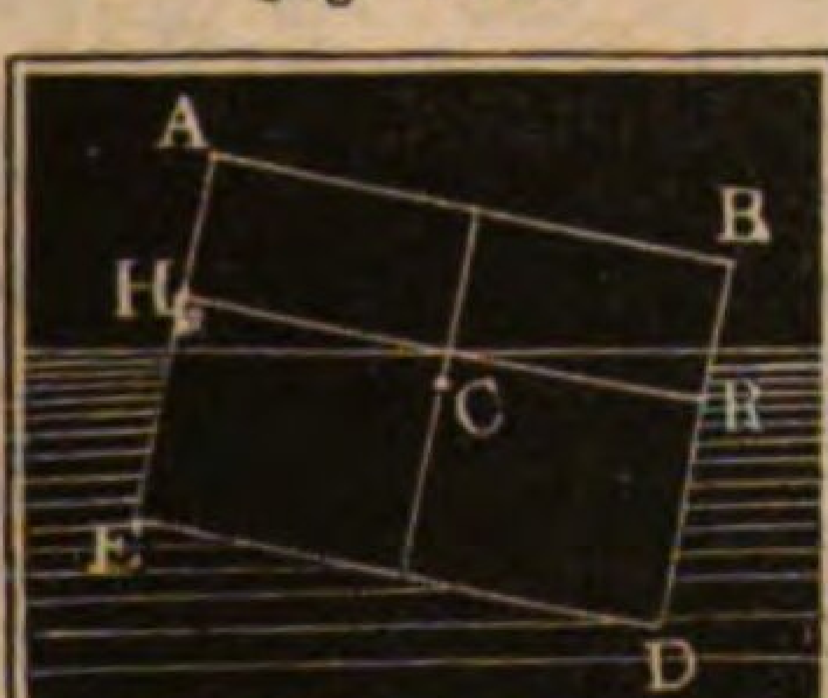
$$S = P\left(\frac{1}{12} \frac{b^3 \varphi}{F} + e\,\varphi\right) = \left(\frac{b^3}{12F} + e\right) P\varphi \text{ folgt.}$$

Fällt der Schwerpunkt C des Schiffes mit dem Schwerpunkte S des verdrängten Wassers zusammen, so hat man $e = o$, daher $S = \frac{b^3}{12F} \cdot P\varphi$, und liegt der Schwerpunkt des Schiffes über dem des verdrängten Wassers, so hat man e negativ, daher $S = \left(\frac{b^3}{12F} - e\right) P\varphi$. Auch folgt, daß die Stabilität eines Schiffes Null ist, wenn e negativ und zugleich $e = \frac{b^3}{12F}$ ist.

Man sieht aus dem gewonnenen Ergebnisse, daß die Stabilität um so größer ausfällt, je breiter das Schiff ist und je tiefer der Schwerpunkt desselben liegt.

Beispiel. Bei einem Parallelepipede AD, Fig 451, von der Breite $AB = b$, Höhe $AE = h$ und Einsenkungstiefe $EH = y$ ist $F = by$ und $e = -\frac{h-y}{2}$, daher das Maaß der Stabilität: $S = P\varphi\left(\frac{b^3}{12by} - \frac{h}{2} + \frac{y}{2}\right)$ oder, wenn das specifische Gewicht der Masse des Parallelepipedes $= \varepsilon$ gesetzt wird,

Fig. 451.



$$S = P\varphi\left(\frac{b^2}{12h\varepsilon} - \frac{h}{2}(1 - \varepsilon)\right).$$

Hiernach hört die Stabilität auf, wenn

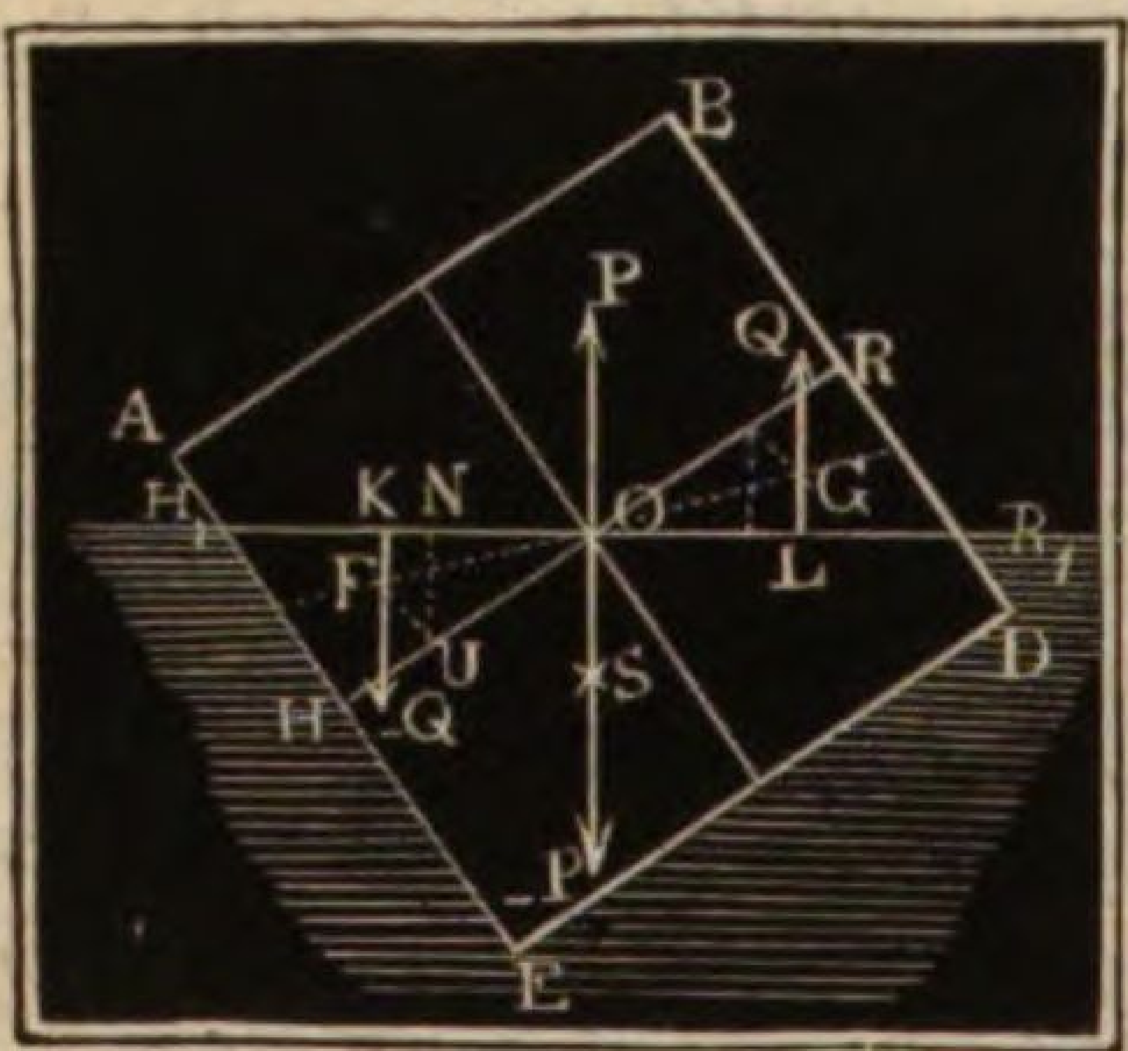
$b^2 = 6 h^2 \epsilon\ (1-\epsilon)$, d. i. wenn $\frac{b}{h} = \sqrt{6\epsilon(1-\epsilon)}$ ist. Für $\epsilon = \frac{1}{2}$ folgt $\frac{b}{h} = \sqrt{\frac{6}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = 1{,}225$; wenn also die Breite noch nicht 1,225 der Höhe ist, so schwimmt das Parallelepiped ohne Stabilität.

Schiefes Schwimmen.

§. 313. Die Formel $S = P\left(\frac{F_1 a}{F} \pm e\ sin.\ \varphi\right)$ für die Stabilität eines schwimmenden Körpers läßt sich auch dazu anwenden, um die verschiedenen Lagen schwimmender Körper zu finden, denn setzen wir $S =$ Null, so bekommen wir die Gleichung für eine zweite Gleichgewichtslage, deren Auflösung auf die Bestimmung des entsprechenden Neigungswinkels führt. Es ist also die Gleichung $\frac{F_1 a}{F} \pm e\ sin.\ \varphi = 0$ aufzulösen in Hinsicht auf φ.

Für ein Parallelepiped AD, Fig. 452, ist der Querschnitt $F = HRDE = H_1 R_1 DE = by$, wenn b die Breite $AB = HR$ und y die Senktiefe $EH = DR$ bezeichnet; ferner der Querschnitt $F_1 = HOH_1 = ROR_1$ als rechtwinkeliges Dreieck mit der Kathete $OH = OR = \frac{1}{2}b$, und der Kathete $HH_1 = RR_1 = \frac{1}{2}b\ tang.\ \varphi$, $F_1 = \frac{1}{8} b^2\ tang.\ \varphi$. Nun steht ferner der Schwerpunkt F von der Basis um $FU = \frac{1}{3} HH_1 = \frac{1}{6} b\ tang.\ \varphi$ und von O um $OU = \frac{2}{3} OH = \frac{1}{3} b$ ab, es folgt daher der Horizontalabstand des Schwerpunktes F von der Mitte O, $= OK = ON + NK = OU\ cos.\ \varphi + FU\ sin.\ \varphi = \frac{1}{3} b\ cos.\ \varphi + \frac{1}{6} b\ tang.\ \varphi\ sin.\ \varphi$, und der Arm $a = KL = 2\ OK = \frac{2}{3} b\ cos.\ \varphi + \frac{1}{3} b\ \frac{sin.\ \varphi^2}{cos.\ \varphi}$.

Fig. 452.



Diesemnach ist die Gleichung für die schiefe Gleichgewichtslage:

$$\frac{\frac{1}{8} b^2\ tang.\ \varphi\ (\frac{2}{3} b\ cos.\ \varphi^2 + \frac{1}{3} b\ sin.\ \varphi^2)}{by\ cos.\ \varphi} - e\ sin.\ \varphi = 0,$$

oder $\frac{sin.\ \varphi}{cos.\ \varphi} = tang.\ \varphi$ eingeführt,

$sin.\ \varphi\ [(\frac{1}{12} + \frac{1}{24}\ tang.\ \varphi^2)\ b^2 - ey] = 0$; welcher Gleichung durch $sin.\ \varphi = 0$ und durch $tang.\ \varphi = \sqrt{2}\ \sqrt{\frac{12\,ey}{b^2} - 1}$ Genüge geleistet wird. Dem durch die erste Gleichung bestimmten Winkel $\varphi = 0$ entspricht das aufrechte, dem zweiten aber das schiefe Schwimmen. Die

Möglichkeit des letzteren bedingt, daß $\frac{ey}{b^2} > 1/_{12}$ ist. Ist nun h die Höhe des Parallelepipedes und ε dessen specifisches Gewicht, so hat man $y = \varepsilon h$ und $e = \frac{h-y}{2} = (1-\varepsilon)\ \frac{h}{2}$, daher folgt Schiefes Schwimmen.

$$tang.\ \varphi = \sqrt{2}\sqrt{\frac{6\,\varepsilon\ (1-\varepsilon)\ h^2}{b^2} - 1},$$

und es ist die Bedingungsgleichung für das schiefe Schwimmen

$$\frac{h}{b} > \sqrt{\frac{1}{6\,\varepsilon\ (1-\varepsilon)}}.$$

Beispiel. 1) Wenn das schwimmende Parallelepiped eben so hoch als breit ist und das specifische Gewicht $\varepsilon = 1/_2$ hat, so ist $tang.\ \varphi = \sqrt{2}\ \sqrt{3\,.\,1/_2 - 1}$ $= \sqrt{3-2} = 1$, daher $\varphi = 45°$.

2) Wenn die Höhe $h = 0{,}9$ der Breite b, das specifische Gewicht aber wieder $1/_2$ ist, so hat man $tang.\ \varphi = \sqrt{3\,.\,0{,}81 - 2} = \sqrt{0{,}43} = 0{,}6557$, daher $\varphi = 33°,\ 15'$.

§. 314. Das Gesetz vom Auftriebe des Wassers läßt sich zur Bestimmung der Dichtigkeit oder des specifischen Gewichtes von Körpern benutzen. Specifisches Gewicht. Nach §. 307 ist der Auftrieb des Wassers gleich dem Gewichte der verdrängten Flüssigkeit; ist daher V das Volumen des Körpers und γ_1 die Dichtigkeit der Flüssigkeit, so hat man den Auftrieb $P = V\gamma_1$. Ist nun aber γ_2 die Dichtigkeit der Körpermasse, so hat man das Gewicht des Körpers $G = V\gamma_2$, es folgt daher das Dichtigkeitsverhältniß $\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{G}{P}$, d. h. **die Dichtigkeit des eingetauchten Körpers verhält sich zur Dichtigkeit des Fluidum, wie das absolute Gewicht des Körpers zum Auftriebe oder Gewichtsverluste beim Untertauchen.** Hiernach ist also $\gamma_2 = \frac{G}{P}\gamma_1$, und $\gamma_1 = \frac{P}{G}\ \gamma_2$; oder wenn γ die Dichtigkeit des Wassers, ε_1 das specifische Gewicht der Flüssigkeit und ε_2 das des Körpers bezeichnen, also $\gamma_1 = \varepsilon_1\gamma$ und $\gamma_2 = \varepsilon_2\gamma$ gesetzt wird, $\varepsilon_2 = \frac{G}{P}\ \varepsilon_1$, und $\varepsilon_1 = \frac{P}{G}\ \varepsilon_2$. Wenn man also das Gewicht eines Körpers und den Gewichtsverlust desselben beim Untertauchen kennt, so läßt sich aus der Dichtigkeit oder dem specifischen Gewichte der Flüssigkeit die Dichtigkeit oder das specifische Gewicht der Körpermasse, und umgekehrt aus der Dichtigkeit oder dem specifischen Gewichte der letzteren die Dichtigkeit oder das specifische Gewicht der ersteren finden.

Ist die Flüssigkeit, worin man den festen Körper abwiegt, Wasser, so

Specifisches Gewicht.

hat man $\varepsilon_1 = 1$, und $\gamma_1 = \gamma = 1000$ Kilogramm oder 66 Pfund, je nachdem man das Cubikmeter oder den Cubikfuß zur Volumeneinheit annimmt, daher ist für diesen Fall die Dichtigkeit des Körpers:

$$\gamma_2 = \frac{G}{P}\gamma = \frac{\text{Absolutes Gewicht}}{\text{Gewichtsverlust}} \text{ mal Dichtigkeit des Wassers}$$

und das specifische Gewicht:

$$\varepsilon_2 = \frac{G}{P} = \frac{\text{Absolutes Gewicht}}{\text{Gewichtsverlust}}.$$

Um den Auftrieb oder Gewichtsverlust zu ermitteln, bedient man sich, wie zur Bestimmung des Gewichtes G, einer gewöhnlichen Waage, nur befindet sich unten an der einen Schale dieser Waage ein Häkchen, um den Körper mittels eines Haares, Drahtes oder andern feinen Fadens daran anzuhängen, bevor er in das Wasser, welches in einem untergesetzten Gefäße enthalten ist, eingetaucht wird. Gewöhnlich nennt man eine zu diesem Abwägen unter Wasser eingerichtete Waage eine hydrostatische Waage.

Ist der Körper, dessen specifisches Gewicht man ermitteln will, weniger dicht als Wasser, so kann man ihn mit einem andern schweren Körper mechanisch verbinden, damit die Verbindung im Wasser noch ein Bestreben zum Sinken behält. Verliert dieser schwere Körper im Wasser das Gewicht P_2 und die Verbindung P_1, so ist der Gewichtsverlust des leichteren Körpers: $P = P_1 - P_2$, bezeichnet nun wieder G das Gewicht des leichteren Körpers, so hat man dessen specifisches Gewicht:

$$\varepsilon_2 = \frac{G}{P} = \frac{G}{P_1 - P_2}.$$

Kennt man das specifische Gewicht ε einer mechanischen Verbindung oder Zusammensetzung zweier Körper, und sind auch die specifischen Gewichte ε_1 und ε_2 der Bestandtheile bekannt, so lassen sich nun auch aus dem Gewichte des Ganzen die Gewichte G_1 und G_2 der Bestandtheile berechnen. Jedenfalls ist $G_1 + G_2 = G$ und auch Volumen $\frac{G_1}{\varepsilon_1 \gamma}$ + Volumen $\frac{G_2}{\varepsilon_2 \gamma}$ = Volumen $\frac{G}{\varepsilon \gamma}$, also $\frac{G_1}{\varepsilon_1} + \frac{G_2}{\varepsilon_2} = \frac{G}{\varepsilon}$. Durch Vereinigung beider Gleichungen ergiebt sich nun:

$$G_1 = G\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right) : \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right) \text{ und}$$

$$G_2 = G\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right) : \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right).$$

Beispiele. 1) Wenn ein 310 Gramm schweres Stück Kalkstein unter dem Wasser um 121,5 Gramm leichter wird, so ist das specifische Gewicht dieses Kör-

pers: $\varepsilon = \frac{310}{121,5} = 2,55$. 2) Um das specifische Gewicht eines Stückes Eichenholz zu finden, hat man es mit einem Bleidraht, welcher beim Abwägen im Wasser 10,5 Gramm an Gewicht verlor, umbunden, wenn nun das Holzstück selbst 426,5 Gramm wog, und die Verbindung unter Wasser 484,5 Gramm leichter war, als in der Luft, so ergiebt sich das specifische Gewicht der Holzmasse: Specifisches Gewicht.

$\varepsilon = \frac{426,5}{484,5 - 10,5} = \frac{426,5}{474} = 0,9$. 3) Ein vollkommen mit Quecksilber angefülltes und vollkommen geschlossenes eisernes Gefäß hat ein Bruttogewicht von 500 Pfund und verlor im Wasser 40 Pfund an Gewicht; wenn nun das specifische Gewicht des Gußeisens = 7,2 und das des Quecksilbers 13,6 ist, so ergiebt sich das Gewicht des leeren Gefäßes:

$$G_1 = 500 \left(\frac{40}{500} - \frac{1}{13,6}\right) : \left(\frac{1}{7,2} - \frac{1}{13,6}\right).$$
$$= 500\ (0,08 - 0,07353) : (0,1388 - 0,0735)$$
$$= \frac{500\ .\ 0,00647}{0,0653} = \frac{3235}{65,3} = 49,5 \text{ Pfund},$$

und das Gewicht des eingeschlossenen Quecksilbers:

$$G_2 = 500\ (0,08 - 0,1388) : (0,07353 - 0,1388) = \frac{500\ .\ 0,0588}{0,0653}$$
$$= \frac{2940}{6,53} = 450,2 \text{ Pfund}.$$

Anmerkung 1. Zur Ausmittelung der specifischen Gewichte von Flüssigkeiten, lockeren Massen u. s. w. reicht auch das bloße Abwägen in freier Luft aus, weil man diesen Körpern durch Einfüllen in Gefäße jedes beliebige Volumen ertheilen kann. Wiegt eine leere Flasche = G, wiegt dieselbe mit Wasser angefüllt G_1 und hat dieselbe das Gewicht G_2, wenn sie eine andere Masse enthält, so hat man das specifische Gewicht dieser Masse: $\varepsilon = \frac{G_2 - G}{G_1 - G}$. Um z. B. das specifische Gewicht von Roggen (in Masse) zu finden, wurde ein Fläschchen mit Roggenkörnern angefüllt, und nach starkem Schütteln gewogen. Nach Abzug des Gewichtes der leeren Flasche ergab sich das Gewicht dieser Roggenmasse = 120,75 Gramm, und das Gewicht einer gleichen Wassermenge = 155,65; es folgt demnach das Gewicht der Roggenmasse

$= \frac{120,75}{155,65} = 0,776$, und es wiegt sonach 1 Cubikfuß dieses Getreides
$= 0,776\ .\ 66 = 51,22$ Pfund.

Anmerkung 2. Das schon von Archimedes aufgelöste Problem, aus dem specifischen Gewichte einer Zusammensetzung und aus den specifischen Gewichten der Bestandtheile das Verhältniß der Bestandtheile zu finden, gestattet nur eine beschränkte Anwendung auf chemische Verbindungen, Metalllegirungen u. s. w., weil bei solchen meist eine Contraction, oder auch eine Ausdehnung der Massen stattfindet, so daß das Volumen der Verbindung nicht mehr gleich ist der Summe der Volumina der Bestandtheile.

§. 315. Zur Bestimmung der Dichtigkeit von Flüssigkeiten, werden vorzüglich auch die Aräometer, Senkwaagen (franz. aréomètres; engl. areometers) gebraucht. Diese Instrumente sind hohle, in Beziehung auf eine Axe symmetrisch geformte Körper mit sehr tief liegendem Schwer- Aräometer.

Aräometer. punkte, und geben, indem sie in einer Flüssigkeit aufrecht schwimmen, die Dichtigkeit dieser an. Man fertigt sie aus Glas, Messingblech u. s. w. und nennt sie nach ihrem verschiedenen Gebrauche hydrostatische Senkwaagen, Soolwaagen, Bierwaagen, Branntweinwaagen, Alkoholometer u. s. w. Es giebt zwei Arten von Senkwaagen, nämlich Gewichts- und Scalenaräometer. Die ersteren werden auch oft zur Bestimmung der Gewichte, und namentlich der specifischen Gewichte von festen Körpern in Anwendung gebracht.

1. Ist V das Volumen des unter Wasser befindlichen Theiles einer bis zu einer gewissen Marke O eingetauchten übrigens frei schwimmenden Senkwaage ABC, Fig. 453, G das Gewicht der ganzen Waage, P das auf den Teller A aufgelegte Gewicht beim Schwimmen im Wasser, dessen Dichtigkeit $= \gamma$ sein möge, und P_1 das eben daselbst aufzulegende Gewicht beim Schwimmen in einer andern Flüssigkeit von der Dichtigkeit γ_1, so hat man $V\gamma = P + G$ und $V\gamma_1 = P_1 + G$, daher

Fig. 453.



$$\frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{P_1 + G}{P + G}.$$

2. Ist P das Gewicht, welches auf den Teller gelegt werden muß, um die im Wasser schwimmende Senkwaage ABC, Fig. 454, bis zu einer Marke O einzusenken, und ist P_1 das Gewicht, welches man mit dem abzuwägenden Körper gleichzeitig auf A zu legen hat, um dieselbe Einsenkung zu erhalten, so hat man das Gewicht dieses Körpers einfach $G_1 = P - P_1$. Ist aber die Auflage P_1 um P_2 zu vergrößern, wenn der abzuwiegende Körper in das unter Wasser befindliche Schälchen D gelegt wird, um die Senkungstiefe unverändert zu behalten, so ist P_2 der Auftrieb und daher das specifische Gewicht des Körpers:

Fig. 454.



$$\varepsilon = \frac{G_1}{P_2} = \frac{P - P_1}{P_2}.$$

Die Senkwaagen mit unten angehängten Schälchen zur Bestimmung specifischer Gewichte von festen Körpern, wie z. B. von Mineralien, heißen Nicholson'sche Senkwaagen.

3. Setzen wir das Gewicht einer Senkwaage ABC, Fig. 455, $= G$, und das eingetauchte Volumen, wenn diese Waage im Wasser schwimmt, $= V$, so ist $G = V\gamma$. Steigt diese Waage um die Tiefe $OX = x$ empor, wenn dieselbe in eine schwerere Flüssigkeit eingetaucht wird, so ist bei dem Querschnitt F des Stäbchens das noch eingetauchte Volumen $= V - Fx$, und daher $G = (V - Fx)\gamma_1$;

Fig. 455.



beide Formeln, durch einander dividirt, geben nun die Dichtigkeit der Flüssigkeit: Aräometer.

$$\gamma_1 = \frac{V}{V - Fx} \cdot \gamma = \gamma : (1 - \frac{F}{V} x) = \gamma : (1 - \mu x).$$

Ist die Flüssigkeit, worin man das Aräometer eintaucht, leichter als Wasser, so sinkt dasselbe in ihr um die Tiefe x, weshalb $G = (V + Fx)\,\gamma$ und daher $\gamma_1 = \gamma : (1 + \mu x)$ zu setzen ist.

Um den Coefficienten $\mu = \frac{F}{V}$ zu finden, wird die Waage durch ein Gewicht P, etwa durch oben eingegossenes und den tiefsten Punkt einnehmendes Quecksilber so weit beschwert, daß sie, im Wasser schwimmend, um eine bedeutende Länge des zum Anbringen einer Scala dienenden Halses tiefer einsinkt. Setzt man nun $P = Fl\gamma$, so erhält man

$$\mu = \frac{F}{V} = \frac{P}{Vl\gamma} = \frac{P}{Gl}.$$

Beispiele. 1) Wenn bei einem 65 Gramm schweren Gewichtsaräometer vom Teller 13,5 Gramm wegzunehmen sind, damit es beim Schwimmen in Alkohol ebenso tief einsinkt, als beim Schwimmen im Wasser, so ist das specifische Gewicht dieses Alkohols $= \frac{65 - 13{,}5}{65} = 1 - 0{,}208 = 0{,}792$. 2) Bei einer Nicholson'schen Waage ist das Normalgewicht 100 Gramm, d. h. man hat 100 Gramm aufzulegen, um das Instrument bis 0 einzusenken; hiervon mußten aber 66,5 Gramm weggenommen werden, als man ein abzuwägendes Stück Messing mit auf den oberen Teller gelegt hatte, und es waren wieder 7,85 Gramm zuzulegen, als dieser Körper in dem unteren Teller lag. Deshalb ist das absolute Gewicht dieses Messingstückes = 66,5 Gramm, und das specifische Gewicht desselben $= \frac{66{,}5}{7{,}85} = 8{,}47$. 3) Ein 75 Gramm schweres Scalenaräometer steigt, nachdem man seine Füllung um 31 Gramm vermindert hat, um 6 Zoll = 72 Linien und hat daher den Coefficienten $\mu = \frac{31}{75 \,.\, 72} = 0{,}00574$. Nach Ergänzung der Füllung und Wiederherstellung des Gewichtes von 75 Gramm stieg es, in einer Salzsoole schwimmend, um 29 Linien, daher ist das specifische Gewicht dieser Flüssigkeit $= 1 : (1 - 0{,}00574 \,.\, 29) = 1 : 0{,}833 = 1{,}2$.

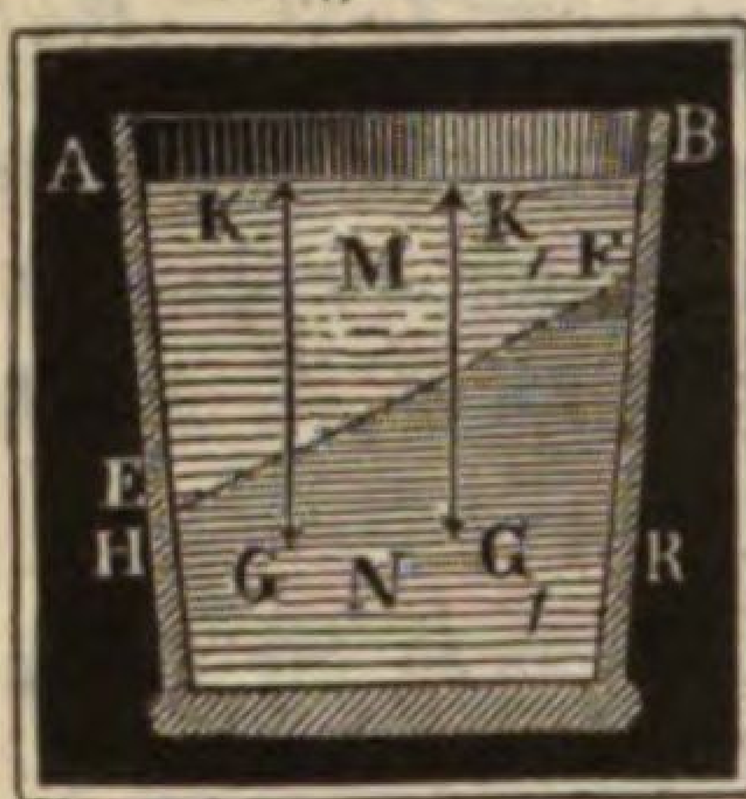
Anmerkung. Die weitere Ausführung dieses Gegenstandes gehört in die Physik, Chemie und Technologie.

§. 316. Befinden sich mehrere Flüssigkeiten von verschiedenen Dichtigkeiten in einem Gefäße zugleich, ohne daß sie eine chemische Einwirkung auf einander ausüben, so legen sich dieselben wegen der leichten Verschiebbarkeit ihrer Theile nach ihren specifischen Gewichten über einander, nämlich die dichteste unten, die weniger dichte darüber und die leichteste oben. Auch sind im Gleichgewichtszustande die Begrenzungsflächen, so wie die Flüssigkeiten von verschiedenen Dichtigkeiten.

Flüssigkeiten von verschiedenen Dichtigkeiten.

freie Oberfläche horizontal; denn so lange die Begrenzungsfläche EF zwischen den Massen M und N, Fig. 456, geneigt ist, so lange stehen auch über einer Horizontalschicht HR verschieden schwere Flüssigkeitssäulen wie GK, G_1K_1 u. s. w., es kann daher auch der Druck in dieser Schicht nicht überall derselbe sein und folglich auch kein Gleichgewichtszustand eintreten.

Fig. 456.



In communicirenden Röhren AB und CD, Fig. 457, ordnen sich die Flüssigkeiten zwar ebenfalls nach ihren Dichtigkeiten über einander, allein ihre Oberflächen A und D liegen nicht in einem und demselben Niveau. Ist F der Inhalt des Querschnittes HR eines Kolbens, Fig. 458, in dem einen Schenkel AB von zwei communicirenden Röhren, und ist die Druckhöhe, oder die Höhe EH des Wasserspiegels in der zweiten Röhre CD über HR, $= h$, so hat man den Druck gegen die Kolbenfläche, $P = F h \gamma$. Ersetzt man dagegen die Kolbenkraft durch eine Flüssigkeitssäule AH, Fig. 457, von der Höhe $AH = h_1$ und Dichtigkeit γ_1, so hat man $P = F h_1 \gamma_1$; und es giebt nun das Gleichsetzen beider Ausdrücke die Gleichung $h_1 \gamma_1 = h \gamma$, oder die Proportion $\frac{h_1}{h} = \frac{\gamma}{\gamma_1}$.

Fig. 457.

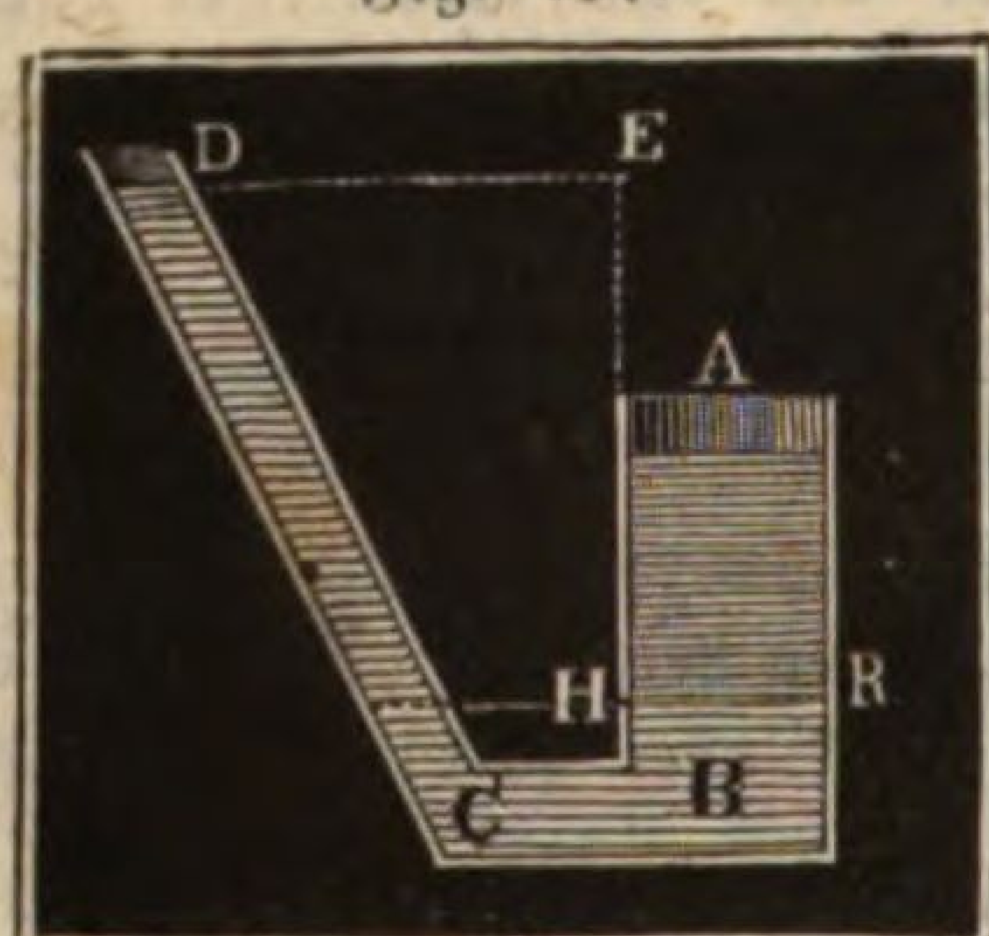
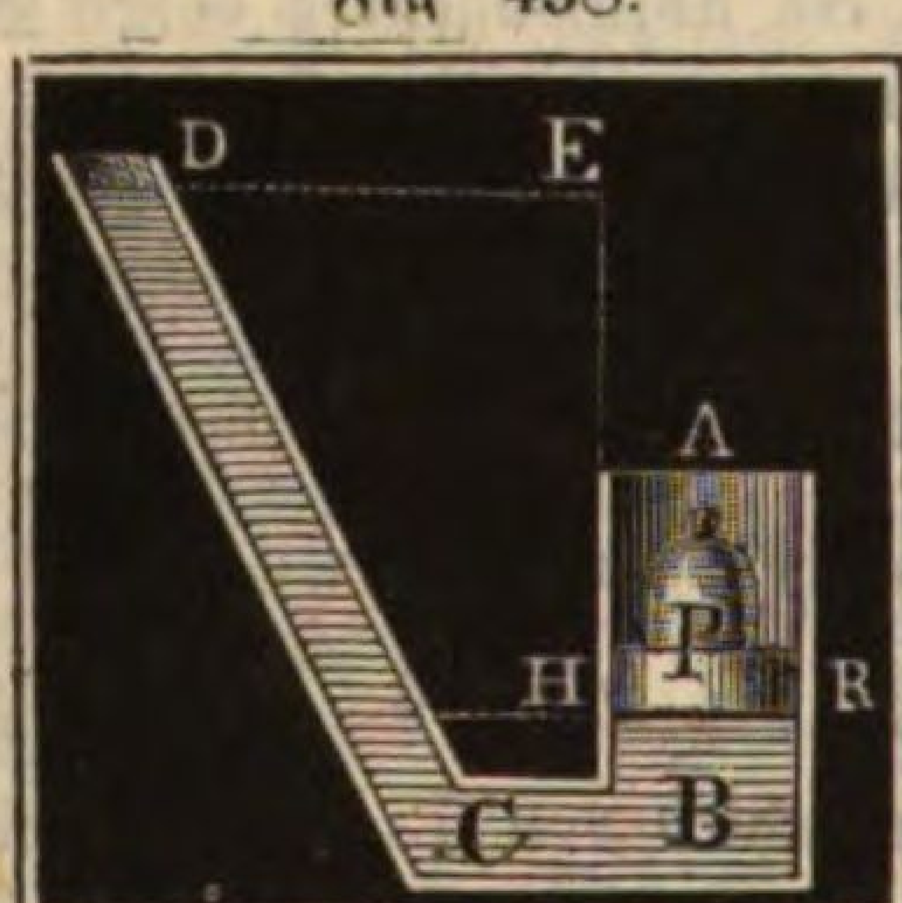


Fig. 458.



Es verhalten sich also in communicirenden Röhren, beim Zustande des Gleichgewichtes unter zwei verschiedenen Flüssigkeiten, die Druckhöhen, oder die Höhen der Flüssigkeitssäulen, von der gemeinschaftlichen Berührungsebene aus gemessen, umgekehrt wie die Dichtigkeiten oder specifischen Gewichte dieser Flüssigkeiten.

Da das Quecksilber ungefähr 13,6 mal so schwer ist als Wasser, so hält hiernach in communicirenden Röhren eine Quecksilbersäule einer 13,6 mal so hohen Wassersäule das Gleichgewicht.

Drittes Kapitel.

Von den Molekularwirkungen des Wassers.

§. 317. Die Cohäsion des Wassers ist, obgleich sehr klein, jedoch nicht Null. Die Theile oder Moleküle (franz. molécules; engl. molecules) hängen aber nicht allein unter einander, sondern auch mit anderen Körpern, z. B. mit den Gefäßwänden, zusammen, so daß es ebenfalls eine Kraft erfordert, um diesen Zusammenhang, den man Adhäsion (franz. adhérence; engl. adhesion) des Wassers nennt, aufzuheben. Ein an einem festen Körper hängender Wassertropfen, weist die Existenz der Cohäsion und Adhäsion des Wassers zugleich nach. Ohne die Cohäsion könnte das Wasser keinen Tropfen bilden, und ohne die Adhäsion könnte es an dem festen Körper nicht hängen bleiben; es wird hier die Schwerkraft nicht allein von der Cohäsion, sondern auch von der Adhäsion des Wassers überwunden. Die Wirkungen, welche aus der Vereinigung der Co- und Adhäsionskräfte hervorgehen, bezeichnet man zur Unterscheidung von den Wirkungen der Trägheit, der Schwerkraft u. s. w. mit dem Namen: die Molekularwirkungen. Die Capillarität oder das Heben oder Senken des Wasser- oder Quecksilberspiegels in engen Röhren oder zwischen sehr nahe stehenden Wänden, ist ein vorzüglicher Fall der Molekularwirkung. Molekularkräfte.

§. 318. Man hat die Cohäsion und Adhäsion des Wassers durch sogenannte Adhäsionsplatten zu bestimmen gesucht. Man hängt zu diesem Zwecke eine solche Platte statt einer Waagschaale an das Ende eines Waagbalkens, bringt die Waage durch ein Tarirgewicht zum Einspielen, und nähert das Gefäß mit der zu untersuchenden Flüssigkeit der Platte allmälig, bis ihre ebene Grundfläche mit der Oberfläche der Flüssigkeit in Berührung kommt. Nun vergrößert man durch allmäliges Zulegen das Gewicht der Waagschaale am anderen Ende des Waagbalkens bis die Platte vom Wasserspiegel abgerissen wird. Die Ergebnisse solcher Versuche sind besonders davon abhängig, ob die Berührungsfläche der Platte von dem Wasser benetzt wird oder nicht. Im ersteren Falle bleibt stets nach der Berührung eine dünne Wasserschicht an der Platte hängen, man hat daher beim Abreißen derselben vom Wasser nicht die Adhäsion des Wassers an der Platte, sondern die Cohäsion des Wassers überwunden. Deshalb hängt auch die Kraft zum Abreißen verschiedener Platten vom Wasserspiegel gar nicht von der materiellen Beschaffenheit der Platten ab. Andere Flüssig- Adhäsionsplatten.

Adhäsionsplatten.

keiten als Wasser erfordern dagegen auch andere Kräfte an den Adhäsionsplatten. Du Buat fand, daß die Adhäsion zwischen dem Wasser und einem überzinnten Eisenbleche auf einen Quadratzoll 65 bis 70 Gran beträgt. Dies giebt auf ein Quadratmeter ohngefähr eine Kraft von 5 Kilogramm, und auf einen Quadratfuß (Rheinländ.) eine Kraft von 1,05 Pfund. Hiervon nur wenig abweichende Werthe fand Achard für Scheiben aus Blei, Eisen, Kupfer, Messing, Zinn und Zink, ferner Gay-Lussac an einer Glasscheibe, und Huth an verschiedenen Holztafeln.

Wenn dagegen die Fläche der Scheibe von der Oberfläche des Wassers nicht benetzt wird, so stellen sich ganz andere Ergebnisse heraus, weil dann nicht die Cohäsion des Wassers an sich, sondern die Adhäsion desselben an der Platte überwunden wird. Es scheint, als wenn in diesem Falle die Zeit der Berührung einen großen Einfluß auf die Kraft zum Losreißen der Scheibe ausübe. Gay-Lussac fand z. B. für eine Glasplatte von 120 Millimeter Durchmesser, um sie von der Oberfläche des Quecksilbers loszureißen, 150 bis 300 Gramm Kraft nöthig, je nachdem die Zeit der Berührung eine kurze oder eine längere war.

Anmerkung. In Frankenheim's Lehre der Cohäsion werden die Cohäsionserscheinungen, wie sie z. B. das Abziehen benetzter Platten von der Oberfläche des Wassers darbietet, Synaphie, und dagegen die Adhäsionserscheinungen, wie sie z. B. bei der Trennung unbenetzter Platten von der Oberfläche einer Flüssigkeit vorkommen, Prosaphie genannt.

Adhäsion an Seitenwänden.

§. 319. Wenn ein Wassertropfen auf der Oberfläche eines anderen Körpers zerfließt, und daher diese benetzt, so ist die Adhäsion überwiegend, bleibt dagegen der Wassertropfen in seiner kugeligen Form auf der Fläche eines festen oder flüssigen Körpers liegen, ohne dieselbe zu benetzen, so herrscht die Cohäsion des Wassers vor.

Ein Zusammenwirken beider Kräfte macht sich besonders an der Oberfläche einer Flüssigkeit in der Nähe der Gefäßwand bemerklich; es steigt daselbst das Wasser in die Höhe und bildet eine concave Oberfläche, wenn die Cohäsion des Wassers von der Adhäsion übertroffen und daher die Gefäßwand benetzt wird; es krümmt sich hingegen der Wasserspiegel in der Nähe der Gefäßwand abwärts und bildet daselbst eine convexe Fläche, wenn keine Benetzung eintritt und daher die Cohäsion überwiegend ist.

Diese Erscheinungen lassen sich sehr leicht auf folgende Weise erklären.

Ein Element E in der Oberfläche FG des Wassers (s. Fig. 459.) wird von seiner Umgebung nach allen Richtungen abwärts gezogen, und es resultirt aus allen diesen Anziehungen eine einzige, vertikal abwärts wirkende Kraft A. Ein Element F an der vertikalen Gefäßwand hingegen wird von dieser mit einer Horizontalkraft P und von dem Wasser mit einer Kraft K angezogen, welche den Quadranten BFG halbirt, und aus zwei gleichen

Componenten A_1 und A_1 besteht, wovon jeder $1/2\,A$ ist. Da der horizontale Component $A_1 = 1/2\,A$ der Adhäsionskraft P entgegenwirkt, so resultirt Adhäsion an Seitenwänden.

Fig. 459.

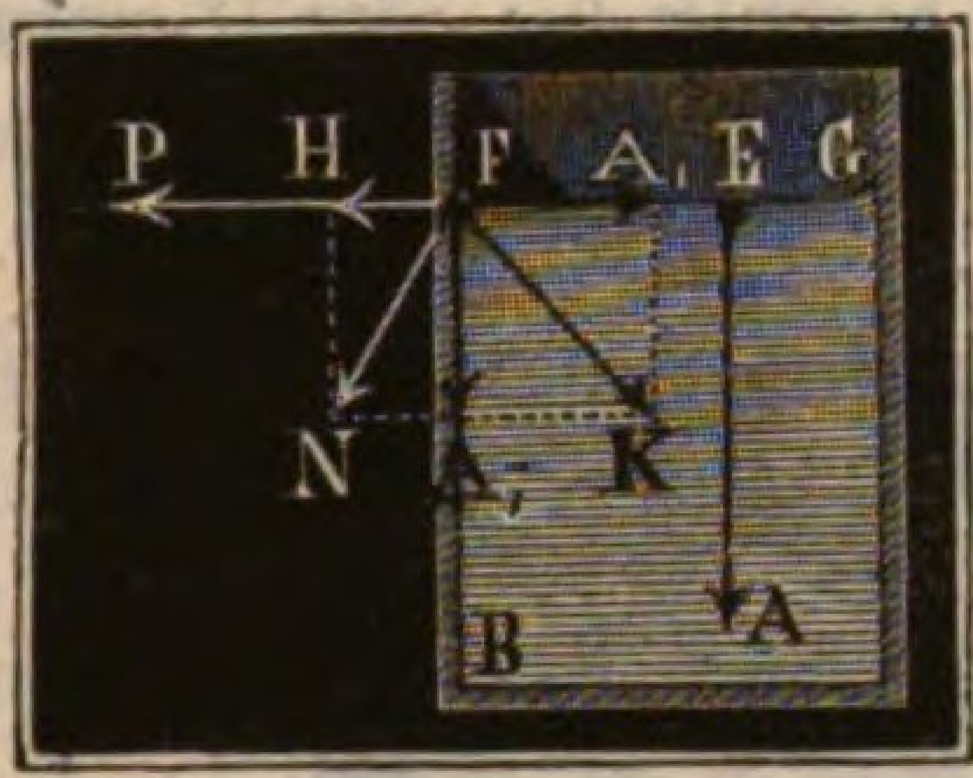


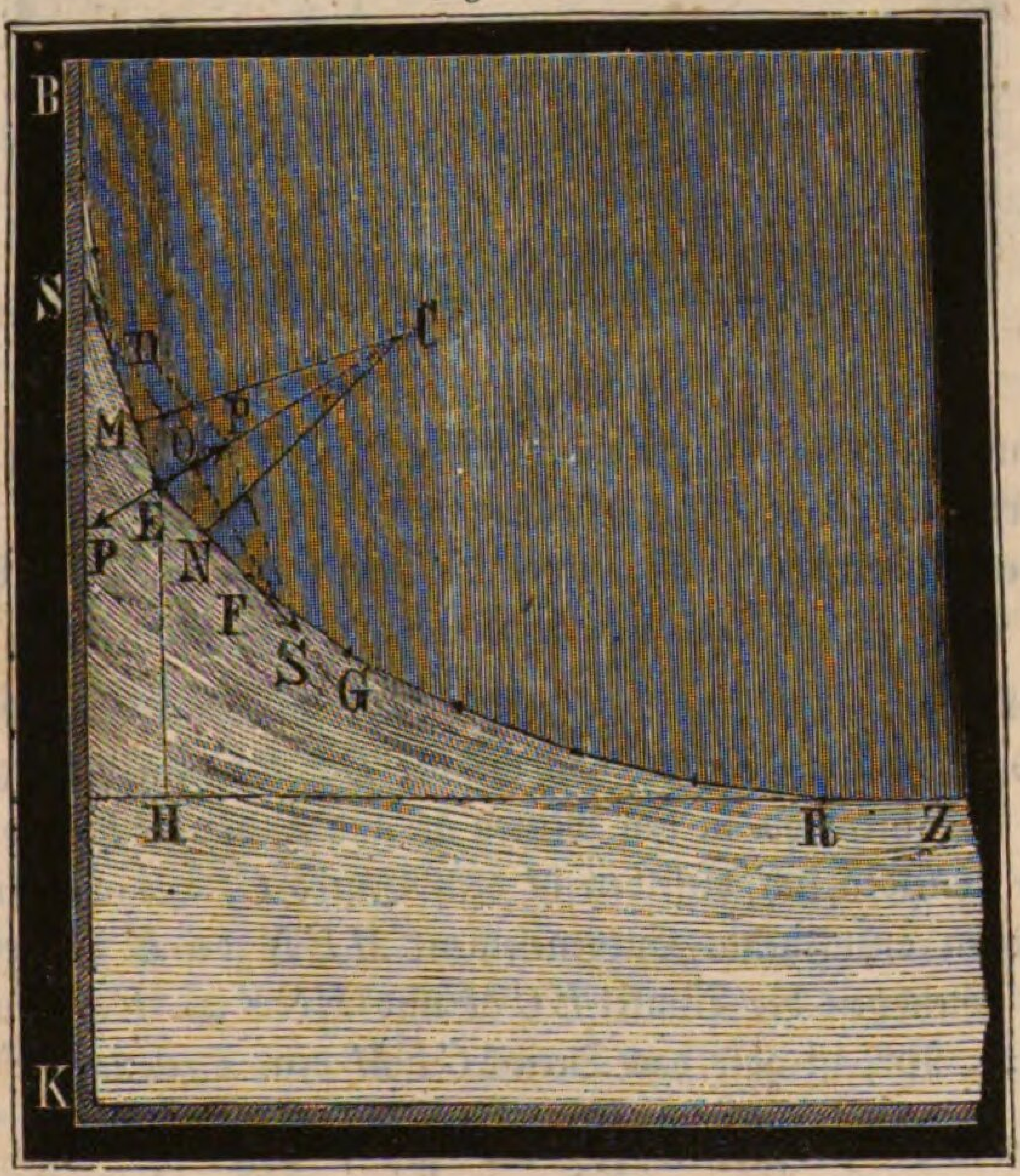
Fig. 460.



aus beiden die Horizontalkraft $H = P - 1/2\,A$, die in Vereinigung mit dem vertikalen Componenten $A_1 = 1/2\,A$ die Mittelkraft N giebt, gegen deren Richtung sich die Oberfläche des Wassers rechtwinkelig stellt. Ist nun $P > 1/2\,A$, so zieht N auswärts und es steigt das Wasser an der Wand in die Höhe, ist aber, wie in Fig. 460, $P < 1/2\,A$, so wirkt N nach innen und es senkt sich der Wasserspiegel an der Gefäßwand.

§. 320. Die Kraft, mit welcher ein Element E in der Oberfläche $DEFG$, Fig. 461, des Wassers von den tiefer liegenden Elementen normal abwärts Spannung des Wasserspiegels.

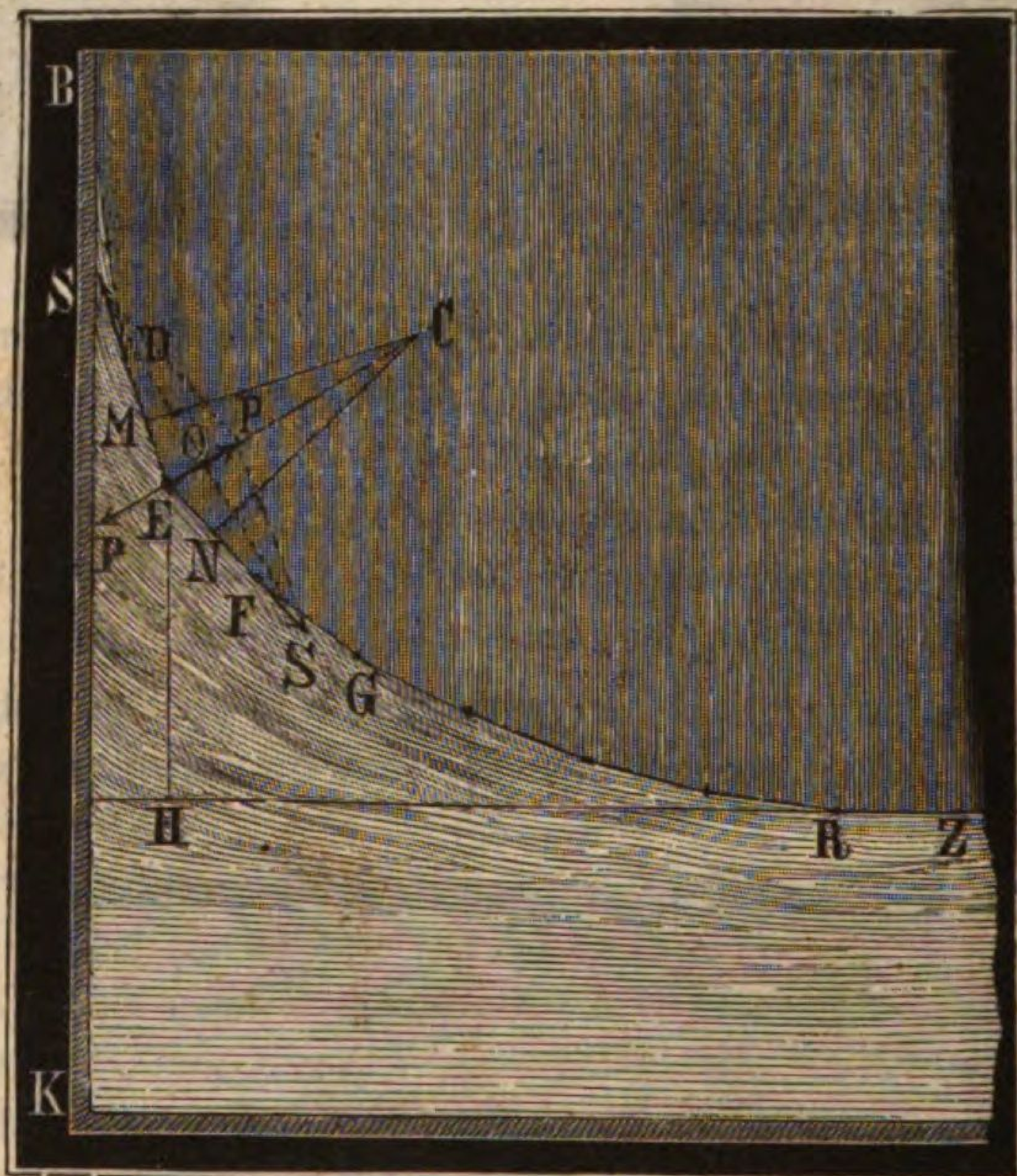
Fig. 461.



Spannung des Wasserspiegels.

gezogen wird, ist dem bekannten Principe von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung zu Folge auch gleich der Kraft, mit welcher das Element die unter ihm befindlichen Elemente an sich zieht; beide Kräfte heben sich daher in der Verbindung von E und den darunter liegenden Elementen auf. Außerdem wird aber auch das Element E noch von jeden der benach-

Fig. 462.



barten Elementen D und F mit einer Kraft S angezogen, aus der eine Mittelkraft P resultirt, welche das Element normal auswärts zieht, und daher der Kraft entgegenwirkt, mit welcher E sammt den darunter befindlichen Elementen vermöge der Schwerkraft nieder zu sinken sucht.

In der Nähe einer ebenen Wand BK bildet die Oberfläche des Wassers eine liegende cylindrische Fläche, von welcher $DEFG$ ein vertikaler Durchschnitt ist. Errichten wir in den Mitten M und N von DE und EF Perpendikel, so schneiden sich dieselben in dem Centro C, aus welchem sich das als Kreisbogen anzusehende Curvenelement MEN bei E beschreiben läßt. Wegen der Gleichheit der Winkel ECM und $ESS = ESO$ und $EMC = EOS = 90^0$, ist aber das Dreieck CEM dem Dreiecke SEO ähnlich, daher hat man die Proportion $\frac{EO}{ES} = \frac{EM}{EC}$, oder $\frac{\frac{1}{2}P}{S} = \frac{\frac{1}{2}MN}{EC}$,

oder, wenn man noch das Bogenelement $MEN = MN$ mit σ und den Krümmungshalbmesser $CE = CM$ mit r bezeichnet, $\frac{P}{S} = \frac{\sigma}{r}$ und daher die Kraft, mit welcher das Element E die tiefer liegenden Elemente an sich zieht, $P = \frac{S\sigma}{r}$. Spannung des Wasserspiegels.

Ist y die Höhe EH, um welche das Element E über dem von der Seitenwand nicht afficirten Wasserspiegel RZ steht, so hat man nach dem hydrostatischen Gesetze in §. 299 die Kraft, mit welcher das Element $MEN = \sigma$, vom Wasser radial auswärts gezogen wird, $P = y\gamma \, . \, \sigma$; es ist daher $\frac{S\sigma}{r} = y\sigma\gamma$, folglich $y = \frac{S}{r\gamma}$ zu setzen.

Da das Element E seine benachbarten Elemente D und F genau eben so stark anzieht, als es von diesen angezogen wird, so läßt sich annehmen, daß die Kraft S, oder die Spannung der Wasseroberfläche an allen Stellen eine und dieselbe sei. Aus diesem Grunde ist $\frac{S}{\gamma}$, oder der Quotient aus der Spannung S und der Dichtigkeit der Flüssigkeit eine constante Zahl, und daher die Erhebung eines Elementes in der Oberfläche des Wassers über dem allgemeinen Wasserspiegel dem Krümmungshalbmesser umgekehrt proportional.

§. 321. In der Nähe einer gekrümmten Seitenwand, z. B. einer vertikalen Cylinderfläche, bildet die Oberfläche des Wassers eine doppelt gekrümmte Fläche, und es wird hier die unter dem quadratischen Flächenelemente $MN = \sigma^2$ hängende Wassersäule von zwei Kräften P_1 und P_2 getragen, wovon die eine Mittelkraft der Spannungen in der durch die Axe des Cylinders gehenden Vertikalebene und die andere Mittelkraft der Spannungen in der durch den Krümmungshalbmesser CE gehenden Normalebene ist. Jener Ebene entspricht der kleinste und dieser der größte Krümmungshalbmesser; setzen wir beide Halbmesser $= r_1$ und r_2, so haben wir die aus den in beiden Ebenen wirkenden Spannungen σS entspringenden Normalkräfte $P_1 = \sigma S \, . \, \frac{\sigma}{r_1} = \frac{S\sigma^2}{r_1}$ und $P_2 = \sigma S \, . \, \frac{\sigma}{r_2} = \frac{S\sigma^2}{r_2}$, und daher die Mittelkraft derselben:

$$P = P_1 + P_2 = S\sigma^2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

Bezeichnet auch hier y die Höhe EH des als ein Quadrat σ^2 anzusehenden Elementes MN der Oberfläche $DEFG$ über dem untersten oder allgemeinen Wasserspiegel, so haben wir die Kraft, mit welcher $MN = \sigma$ von dem darunter befindlichen Wasser normal abwärts gezogen wird,

$$P = y \, . \, \sigma^2\gamma,$$

Spannung des Wasserspiegels.

und es folgt nun durch Gleichsetzung beider Ausdrücke für P,

$$y\sigma^2\gamma = S\sigma^2\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right),\text{ daher also}$$

$$y = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right).$$

Es ist also bei der cylindrischen Wand die Erhebung der Oberfläche des Wassers über dem allgemeinen Wasserspiegel an jeder Stelle der Summe von den umgekehrten Maximal- und Minimalkrümmungshalbmessern proportional. Diese Formel enthält auch die des vorigen in sich, denn wenn die Normalschnitte durch CE gerade sind, so hat man $r_2 = \infty$, daher

$$\frac{1}{r_2} = 0,\ \text{ und }\ y = \frac{S}{\gamma}\cdot\frac{1}{r_1}.$$

Krumme Fläche des Wasserspiegels.

§. 322. *) Die Curve, welche der vertikale Durchschnitt des Wasserspiegels in der Nähe einer ebenen Wand bildet, läßt sich, nach Hagen, wie folgt finden. Es sei AR, Fig. 463, die Oberfläche des von der vertikalen Wand BK angezogenen Wassers, HR der allgemeine Wasserspiegel, ferner der Durchschnitt H beider Flächen der Coordinatenanfangspunkt. Man setze ferner die Coordinaten HM und MO eines Punktes O in AR, $= x$ und y, ferner den Bogen $AO = s$ und den Tangentenwinkel $OTM = \alpha$, und die Elemente OQ, QP und $OP = dx$, dy und ds.

Fig. 463.



Da $y = \frac{S}{r\gamma}$ und nach Artikel 27 der analytischen Hülfslehren $r = \frac{ds}{d\alpha}$, so wie $dy = ds\,sin.\,\alpha$ ist, so hat man

$$y = \frac{S\,d\alpha}{\gamma\,ds} = \frac{S\,sin.\,\alpha\,.\,d\alpha}{\gamma\,dy},\text{ oder}$$

$$y\,dy = \frac{S}{\gamma}\,sin.\,\alpha\,.\,d\alpha,$$

und es giebt nun die Integration

$$\tfrac{1}{2}y^2 = \frac{S}{\gamma}\int sin.\,\alpha\,.\,d\alpha = Con. - \frac{S}{\gamma}\,cos.\,\alpha.$$

Da für den Punkt R, α und y zugleich Null sind, ist Krumme Fläche des Wasserspiegels.

$$0 = Con. - \frac{S}{\gamma} cos. 0, \text{ daher } Con. = \frac{S}{\gamma}, \text{ und}$$

$$y^2 = \frac{2S}{\gamma}(1 - cos.\alpha) = \frac{4S}{\gamma}\frac{(1 - cos.\alpha)}{2} = \frac{4S}{\gamma}(sin. \tfrac{1}{2}\alpha)^2,$$

also $y = 2\sqrt{\frac{S}{\gamma}} . sin. \tfrac{1}{2}\alpha$.

Für $\alpha^0 = 90^0$ hat man $sin. \tfrac{1}{2}\alpha = sin. 45^0 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$; daher ist die größte Erhebung der Oberfläche des Wassers unmittelbar an der Seitenwand

$$h = 2\sqrt{\frac{S}{\gamma}} . \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2S}{\gamma}}, \text{ und umgekehrt,}$$

$$\frac{S}{\gamma} = \tfrac{1}{2}h^2, \text{ und}$$

1) $y = h\sqrt{2} . sin. \tfrac{1}{2}\alpha$.

Durch Differenziiren dieses Ausdruckes bekommt man

$$dy = \tfrac{1}{2}h\sqrt{2}\, cos. \tfrac{1}{2}\alpha . d\alpha = h\sqrt{\tfrac{1}{2}}\, cos. \tfrac{1}{2}\alpha . d\alpha,$$

und da auch $dy = - dx . tang.\alpha$ ist, so folgt

$$dx = - h\sqrt{\tfrac{1}{2}} . \frac{cos. \tfrac{1}{2}\alpha}{tang. \alpha} . d\alpha = - h\sqrt{\tfrac{1}{2}} . \frac{cos. \tfrac{1}{2}\alpha\, cos. \alpha}{sin. \alpha} . d\alpha$$

$$= - h\sqrt{\tfrac{1}{2}} . \frac{cos. \tfrac{1}{2}\alpha\, [(cos. \tfrac{1}{2}\alpha)^2 - (sin. \tfrac{1}{2}\alpha)^2]}{2 sin. \tfrac{1}{2}\alpha . cos. \tfrac{1}{2}\alpha} d\alpha$$

$$= - h\sqrt{\tfrac{1}{2}} . \frac{1 - 2(sin. \tfrac{1}{2}\alpha)^2}{2 sin. \tfrac{1}{2}\alpha} d\alpha$$

$$= - h\sqrt{\tfrac{1}{2}} . \left(\frac{\tfrac{1}{2}}{sin. \tfrac{1}{2}\alpha} - sin. \tfrac{1}{2}\alpha\right) d\alpha.$$

Nun ist aber $\int sin. \tfrac{1}{2}\alpha . d\alpha = - 2 cos. \tfrac{1}{2}\alpha$ und

$$\int \frac{d\alpha}{sin. \tfrac{1}{2}\alpha} = 2\, Log. nat. . tang. \tfrac{1}{2}\alpha,$$

daher hat man

$$x = - h\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(Log. nat. tang. \tfrac{1}{2}\alpha + 2 cos. \tfrac{1}{2}\alpha) + Con.$$

Da für $x = 0$, $\alpha^0 = 90^0$, $tang. \tfrac{1}{2}\alpha = tang. 45^0 = 1$, also $Log. nat. tang. \tfrac{1}{2}\alpha = 0$, und $cos. \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ ist, so folgt

$$Con. = 2h\sqrt{\tfrac{1}{2}} . \sqrt{\tfrac{1}{2}} = h \text{ und}$$

2) $x = h\,(1 - 2 . \sqrt{cos. \tfrac{1}{2}\alpha} - \sqrt{\tfrac{1}{2}} . Log. nat. tang. \tfrac{1}{2}\alpha)$.

Für $\alpha = 0$ hat man $cos. \tfrac{1}{2}\alpha = 1$ und $Log. nat. tang. \tfrac{1}{2}\alpha = -\infty$, daher $x = +\infty$; es ist also HR Asymptote, welcher sich der Durchschnitt AOR der Oberfläche des Wassers ohne Ende nähert.

Krumme Fläche des Wasserspiegels.

Anmerkung. Wenn man die Formel (1) umkehrt, also

$$sin. \tfrac{1}{2} \alpha = \frac{y}{h} \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

setzt, so kann man für jeden beliebigen Werth von y, erst α und hieraus wieder mittelst (2) den entsprechenden Werth von x berechnen.

Die Messungen, welche Hagen hierüber angestellt hat, weisen eine sehr gute Uebereinstimmung dieser Theorie mit der Erfahrung nach. Dieselben wurden mittelst einer matt geschliffenen Messingtafel an Brunnenwasser angestellt, und führten auf folgende Ergebnisse.

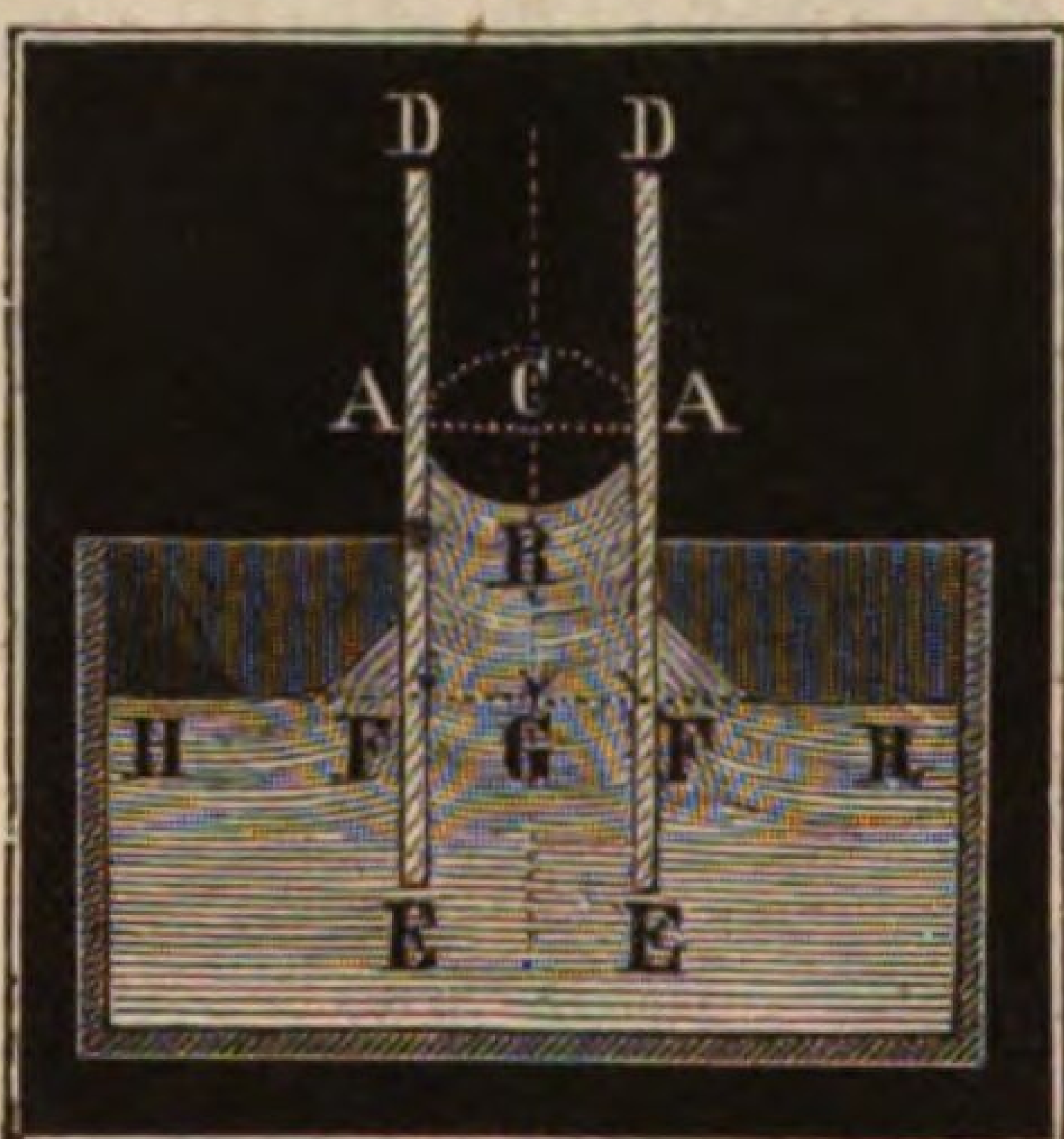
y gemessen	1,37	0,70	0,49	0,34	0,24	0,18	0,12	0,07	0,04	0,016
x gemessen	0,00	0,31	0,63	0,94	1,26	1,57	1,88	2,50	3,13	3,74
x berechnet	0,00	0,33	0,64	0,96	1,28	1,56	1,95	2,47	3,01	3,90

Diese Zahlenwerthe beziehen sich auf Pariser Linien. Aus $h = 1,37$ Linien berechnet sich $\frac{S}{\gamma} = 0,94$ und der kleinste Krümmungshalbmesser $r = 0,68$ Linien. Tafeln von Burbaum, Thonschiefer und Glas gaben dieselben Resultate.

Paralleltafeln

§. 323. Zwischen zwei sehr nahe gestellten Tafeln wie DE, DE, Fig. 464, erhebt sich das Wasser nicht allein an den Rändern, sondern auch in der Mitte, und es bildet die Oberfläche desselben nahe den halben Mantel eines elliptischen Cylinders. Die eine Halbaxe des elliptischen Durchschnittes ist der halben Weite $CA = a$, und die andere Halbaxe $CB = b$, der Differenz $AF - BG = h_2 - h_1$ der größten und kleinsten Erhebung der elliptischen Oberfläche ABA über dem allgemeinen Wasserspiegel gleich.

Fig. 464.



Nach dem Ingenieur S. 238 ist der Krümmungshalbmesser der Ellipse in A: $a_1 = \frac{b^2}{a} = \frac{(h_2 - h_1)^2}{a}$,

und der in B: $a_2 = \frac{a^2}{b} = \frac{a^2}{(h_2 - h_1)}$,

daher hat man nach §. 320 die Erhebung der Oberfläche des Wassers in A:

$$h_2 = \frac{S}{a_1 \gamma} = \frac{a S}{(h_2 - h_1)^2 \gamma},$$

und dagegen in B: $h_1 = \frac{S}{a_2 \gamma} = \frac{(h_2 - h_1) S}{a^2 \gamma}$. Paralleltafeln.

Durch Subtraction dieser Gleichungen erhält man

$$h_2 - h_1 = \frac{S}{\gamma} \left(\frac{a}{(h_2 - h_1)^2} - \frac{h - h_1}{a^2} \right) \text{ oder}$$

$$1 = \frac{S}{\gamma} \left(\frac{a}{(h_2 - h_1)^3} - \frac{1}{a^2} \right);$$

daher folgt 1) $h_2 - h_1 = a \sqrt[3]{\frac{S}{S + a^2 \gamma}}$,

2) $h_2 = \frac{1}{a} \sqrt[3]{\frac{S}{\gamma} \left(\frac{S}{\gamma} + a^2 \right)^2}$,

3) $h_1 = \frac{1}{a} \cdot \frac{S}{\gamma} \sqrt[3]{\frac{S}{S + a^2 \gamma}}$,

und endlich das Verhältniß

$$n = \frac{h_2 - h_1}{h_1} = \frac{a^2 \gamma}{S} = a^2 : \frac{S}{\gamma}.$$

Ist a sehr klein, so kann man $h = h_1 = \frac{1}{a} \cdot \frac{S}{\gamma}$ setzen, dann wächst also die Erhebung der Oberfläche des Wassers umgekehrt wie der Abstand der Tafeln von einander.

Genauer ist aber

$$h_2 = \frac{1}{a} \cdot \frac{S}{\gamma} \left(1 + \tfrac{2}{3} \frac{a^2 \gamma}{S} \right) = \frac{1}{a} \cdot \frac{S}{\gamma} + \tfrac{2}{3} a, \text{ und}$$

$$h_1 = \frac{1}{a} \cdot \frac{S}{\gamma} \left(1 - \tfrac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \gamma}{S} \right) = \frac{1}{a} \cdot \frac{S}{\gamma} - \tfrac{1}{3} a.$$

Umgekehrt folgt hiernach $\frac{S}{\gamma} = a h_1 + \frac{a^2}{3}$.

Diese Formeln stimmen, wenn der Abstand der Tafeln sehr klein, namentlich $\frac{a}{h_1}$ noch nicht $1/2$ ist, sehr gut mit den Beobachtungen überein.

Hagen fand bei Versuchen mit zwei parallelen Plantafeln im Brunnenwasser, im Mittel durch Beobachtungen

$h_1 = 1{,}55$, $h_2 = 2{,}09$ und $h = 1{,}38$ Paris. Linien,

und durch Rechnung

$\frac{S}{\gamma} = 1{,}04$, $h_2 = 2{,}12$ und $h = 1{,}44$ Paris. Linien.

Neuere Versuche (s. Poggendorf's Annalen, Bd. 77.) gaben für

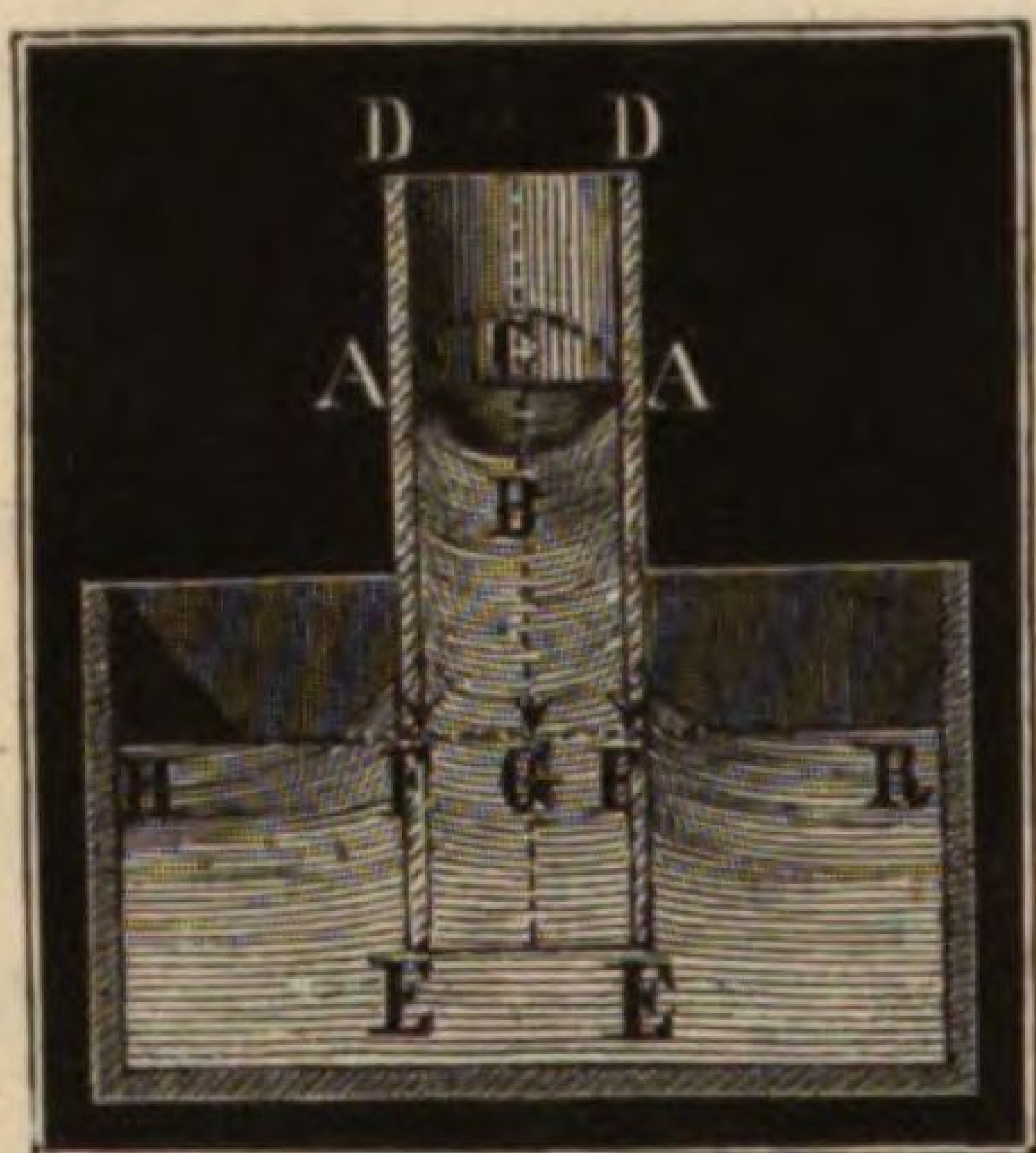
$$a = 0{,}360;\quad 0{,}5875;\quad 0{,}7575 \text{ Linien},$$
$$h_1 = 2{,}562;\quad 1{,}429;\quad 1{,}068 \quad »$$
$$\text{und } \frac{S}{\gamma} = 0{,}949;\quad 0{,}907;\quad 0{,}917 \quad », \text{ also}$$

im Mittel $\frac{S}{\gamma} = 0{,}9243$, und $S = 0{,}01059$ Gramme.

(Vergl. den vorigen Paragraphen.)

Haarröhrchen. §. 324. Die Erhebung der Oberfläche des Wassers in senkrechten engen Röhren, oder sogenannten **Haarröhrchen** (franz. tubes capillaires; engl. capillary tubes) läßt sich bei Zugrundelegung der Formel $y = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$ des §. 321 leicht finden, wenn man annimmt, daß die Oberfläche (der **Meniscus**) ein halbes Sphäroid ABA, Fig. 465, bilde, dessen kreisförmige Basis AA mit dem Querschnitt der Röhre zusammenfällt.

Fig. 465.



Behalten wir die Bezeichnung des vorigen Paragraphen bei, setzen wir also wieder die halbe Röhrenweite $CA = a$, und die Minimal- und Maximalerhebung BG und AF des Wassers in der Röhre über dem allgemeinen Wasserspiegel H, $= h_1$ und h_2, so haben wir für

$$h_2 = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right),\quad r_1 = a \text{ und } r_2 = \frac{(h_2 - h_1)^2}{a},$$

und für

$$h_1 = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right),\quad r_1 = r_2 = \frac{a^2}{h_2 - h_1} \text{ zu setzen, wes-}$$

halb nun $h_2 = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{1}{a} + \frac{a}{(h_2 - h_1)^2}\right)$ und

$$h_1 = \frac{2S}{\gamma} \cdot \frac{(h_2 - h_1)}{a^2} \text{ folgt.}$$

Durch Subtraction der letzten Gleichungen von einander erhält man

$$h_2 - h_1 = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{1}{a} + \frac{a}{(h_2 - h_1)^2} - \frac{2(h_2 - h_1)}{a^2}\right), \text{ oder}$$

$$1 = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{1}{a(h_2 - h_1)} + \frac{a}{(h_2 - h_1)^3} - \frac{2}{a^2}\right), \text{ oder}$$

$$\left(\frac{\gamma}{S} + \frac{2}{a^2}\right)(h_2-h_1)^3 - \frac{1}{a}(h_2-h_1)^2 = a.$$ Haarröhrchen.

Ist a klein, so kann man auch

$$\frac{2}{a^2}(h_2-h_1)^3 - \frac{1}{a}(h_2-h_1)^2 = a$$

setzen, woraus dann $h_2-h_1 = a$ folgen würde. Nimmt man aber $h_2-h_1 = a + \triangle$, und setzt

$(h_2-h_1)^2 = a^2 + 2a\triangle$, sowie $(h_2-h_1)^3 = a^3 + 3a^2\triangle$,

so erhält man

$$\left(\frac{\gamma}{S} + \frac{2}{a^2}\right)(a^3 + 3a^2\triangle) - \frac{1}{a}(a^2+2a\triangle) = a, \text{ oder}$$

$$\frac{\gamma}{S}a^3 + \left(\frac{\gamma}{S} + \frac{2}{a^2}\right).3a^2\triangle - 2\triangle = 0,$$

und es folgt

$$\triangle = -\frac{\gamma a^3}{3\gamma a^2 + 4S} \text{ annähernd } = -\frac{\gamma a^3}{4S}.$$

Hiernach ist nun $h_2-h_1 = a - \frac{\gamma a^3}{4S}$, daher

$$h_1 = \frac{2S}{\gamma}\cdot\frac{1}{a^2}\left(a - \frac{\gamma a^3}{4S}\right) = \frac{2}{a}\cdot\frac{S}{\gamma} - \frac{a}{2} \text{ und}$$

$$h_2 = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{1}{a} + \frac{a}{\left(a-\frac{\gamma a^3}{4S}\right)^2}\right) = \frac{S}{\gamma}\left[\frac{1}{a} + \frac{a}{a^2}\left(1+\frac{\gamma a^2}{4S}\right)^2\right]$$

$$= \frac{S}{\gamma}\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{a}\left(1 + \frac{\gamma a^2}{2S}\right)\right] = \frac{2}{a}\cdot\frac{S}{\gamma} + \frac{a}{2}.$$

Es wächst also bei den Haarröhrchen die **mittlere Erhebung umgekehrt wie die Röhrenweite.**

Umgekehrt hat man zur Bestimmung von S,

$$\frac{S}{\gamma} = \tfrac{1}{2}a h_1 + \frac{a^2}{4}.$$

Beobachtungen, welche **Hagen** mit Brunnenwasser an Haarröhrchen angestellt hat, gaben Folgendes:

Röhrenweite a	0,295	0,336	0,413	0,546	0,647	0,751	0,765
Erhebung h_1	10,08	8,50	6,87	5,17	4,28	3,72	3,59
Spannungsmaaß $\frac{\gamma}{S}$	1,508	1,455	1,458	1,478	1,473	1,512	1,494

Haarröhrchen. Nach diesen Versuchen ist also im Mittel

$$\frac{S}{\gamma} = 1{,}482 \quad \text{und} \quad S = 0{,}0170 \text{ Gramme.}$$

Die Abweichungen dieser Werthe soll seinen Grund darin haben, daß die Spannung S der Oberfläche des Wassers mit der Zeit abnimmt, und bei dem gekochten Wasser viel kleiner ausfällt als bei dem frischen Wasser. Es ist also anzunehmen, daß die Spannung des Wassers in jedem Streifen von 1 Linie Breite $S = 0{,}0106$ bis $0{,}0170$ Gramm beträgt.

§. 325. Die vorstehende Theorie findet auch ihre Anwendung in dem Falle, wenn die Wand nicht von der Flüssigkeit benetzt wird; es findet hier keine Erhöhung, sondern eine Senkung der Oberfläche statt, und es ist dieselbe auch nicht concav, sondern convex. Die aus der Spannung S der Oberfläche ABA, Fig. 466 hervorgehende Mittelkraft wirkt hier von oben nach unten, und hebt dadurch den Druck des Wassers von unten nach oben auf, welcher aus dem Niveauabstande BG entspringt. Die Adhäsionskraft des festen Körpers kommt deshalb nicht weiter in Betracht, weil sie sich mit der Cohäsionskraft des Wassers, von welcher natürlich auch die Spannung S der Oberfläche desselben abhängt, ins Gleichgewicht setzt.

Fig. 466.

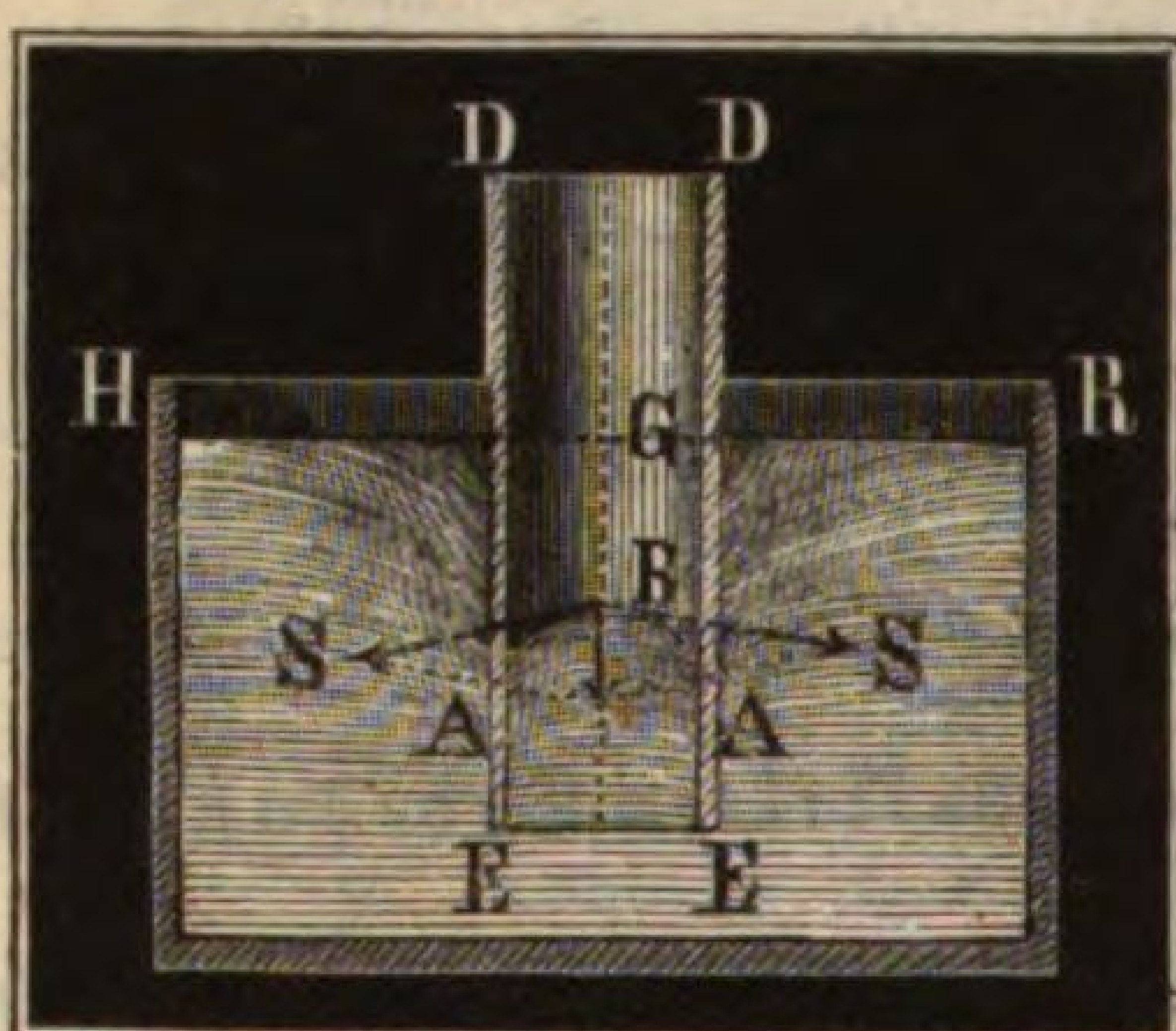
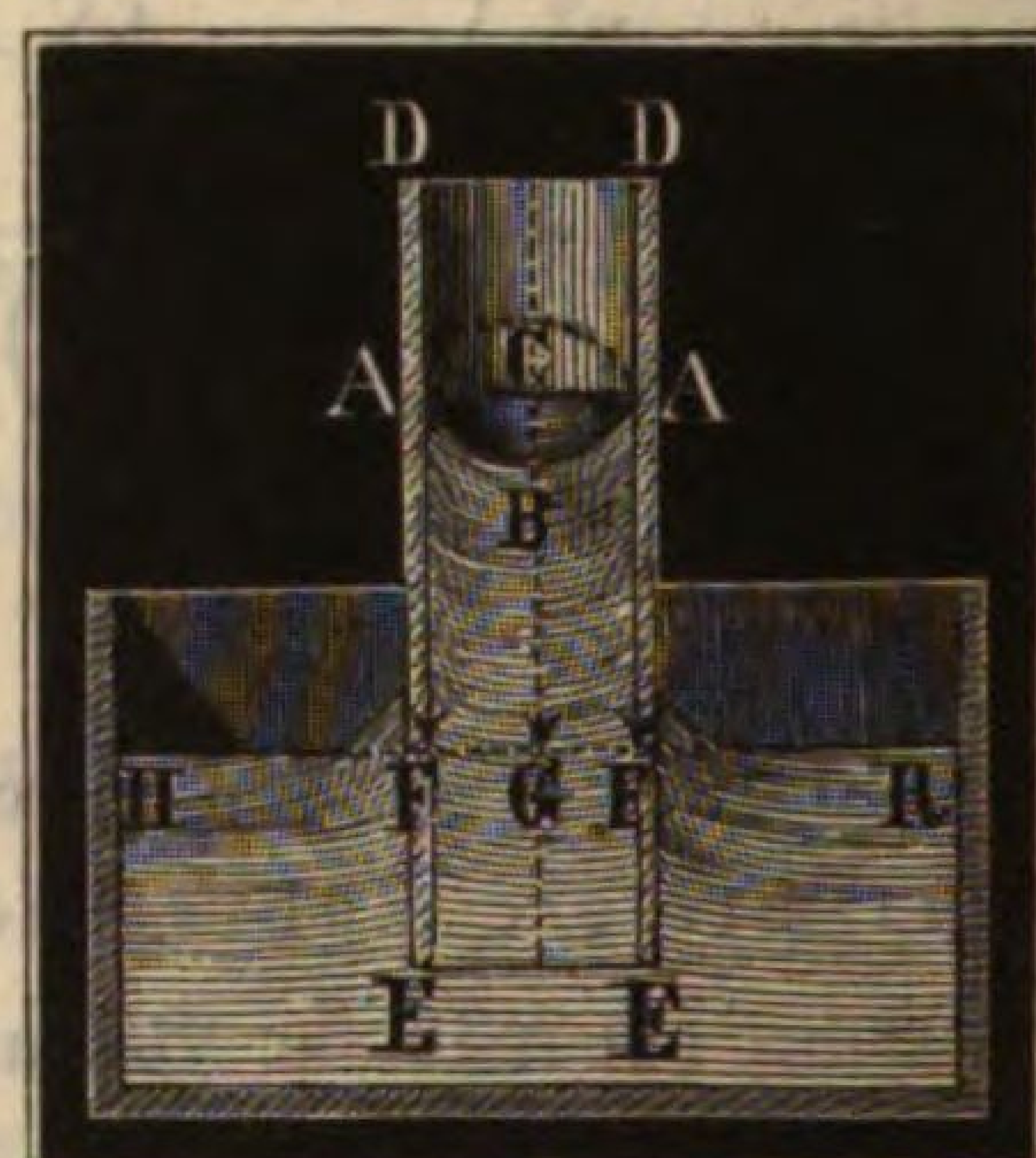


Fig. 467.



Setzt man die Kraft, mit welcher die Röhrenwand die Flüssigkeitssäule BG, Fig. 467, an sich zieht, dem Röhrenumfange proportional, setzt also für eine cylindrische Röhre diese Kraft $P = \mu \,.\, 2\pi a$, wo μ einen Coefficienten ausdrückt, so hat man $\pi a^2 h = 2\mu\pi a$, und daher die mittlere Erhebung des Wassers in der Röhre $h = \frac{2\mu}{a}$.

Für zwei parallele Tafeln ist dagegen $P = 2\mu l$ und $P = 2ahl\gamma$, wo l die unbestimmte Länge der Wassersäule bezeichnet, und daher

$h = \frac{\mu}{a}$, d. i. halb so groß wie bei der Röhre, wenn der

Abstand $2a$ der Tafeln der Röhrenweite gleich ist. Dieses stimmt auch mit Resultaten der letzten Paragraphen vollkommen. Haarröhrchen.

Nach den Hagen'schen Versuchen hängt die Festigkeit oder Spannung der Oberfläche einer Flüssigkeit nicht von dem Grade ihrer Flüssigkeit ab, ist aber um so größer, je schwerer die Flüssigkeit an anderen Körpern haftet. Nach Anderen, namentlich nach Brunner und Frankenheim (s. Poggendorff's Annalen, Bd. 70 und 72), nimmt aber die Steighöhe h in den Haarröhren und folglich auch S ab, wenn die Temperatur der Flüssigkeit eine größere wird.

Für Alkohol ist S ohngefähr die Hälfte und für Quecksilber das Achtfache von der Festigkeit des Wassers.

Anmerkung 1. Hagen findet durch Messung und Wägung von Flüssigkeitstropfen, welche sich von den Grundflächen kleiner Cylinder losreißen, ziemlich dieselben Werthe wie durch die Beobachtungen an Capillartafeln. Ebenso haben die Versuche mit Adhäsionsplatten eine gute Uebereinstimmung geliefert, unter der Voraussetzung, daß die Kraft zum Losreißen einer Platte durch das Gewicht des gehobenen Flüssigkeitcylinders und durch die Spannung in dem Mantel dieses Cylinders das Gleichgewicht gehalten wird.

Anmerkung 2. Die Anzahl der Schriften über die Capillarität ist zu groß, als daß hier eine vollständige Mittheilung derselben erfolgen könnte. Es haben sich mit diesem Gegenstande sogar die größten Mathematiker, wie Laplace, Poisson, Gauß u s. w. beschäftigt. Eine vollständige Mittheilung der Literatur findet man in Frankenheim's Lehre von der Cohäsion. Die Schrift, welche bei Bearbeitung dieses Kapitels vorzüglich benutzt wurde, ist diese: Ueber die Oberfläche der Flüssigkeiten von Hagen, eine in der K. Akademie der Wissenschaften gelesene Abhandlung, Berlin 1845.

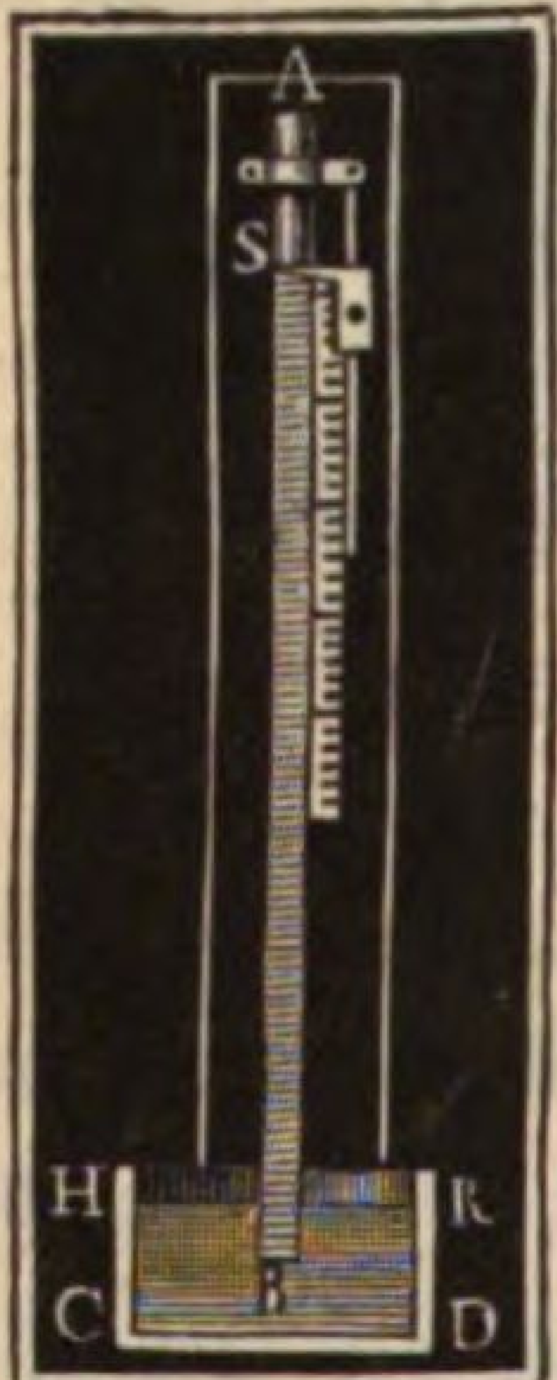
Viertes Kapitel.

Vom Gleichgewichte und Drucke der Luft.

Spannkraft der Gase.

§. 326. Die uns umgebende **atmosphärische Luft** sowie auch alle übrigen **Luftarten** oder Gase (franz. gaz; engl. gases) besitzen, in Folge der Repulsivkraft ihrer Theile oder Molekule, ein Bestreben, einen größeren und größeren Raum einzunehmen. Man erhält daher auch nur eine begrenzte Luftmasse durch Absperren oder Einschließen in vollkommen verschlossenen Gefäßen. Die Kraft, mit welcher sich die Gase auszudehnen suchen, heißt ihre **Elasticität**, **Spannkraft** oder **Expansivkraft** (franz. und engl. tension). Sie äußert sich durch einen Druck gegen die Wände des sie einschließenden Gefäßes, und ist insofern von der Elasticität der festen und tropfbar flüssigen Körper verschieden, als sie in jedem Zustande der Dichtigkeit sich wirksam zeigt, wogegen die Elasticität der letztgenannten Körper bei einem gewissen Zustande der Ausdehnung Null ist. Man mißt den Druck oder die Spannkraft der Luft und anderer Gase durch **Barometer**, **Manometer** und **Ventile**. Das **Barometer** (franz. baromètre; engl. barometer) wird vorzüglich angewendet, um den Druck der Atmosphäre zu bestimmen. Das gewöhnlichste oder sogenannte **Gefäßbarometer** (Fig. 468) besteht in einer, an einem Ende A verschlossenen und am andern Ende B offenen Glasröhre, welche, nachdem sie mit Quecksilber gefüllt ist, umgestürzt und mit ihrem offenen Ende in ein ebenfalls Quecksilber enthaltendes Gefäß CD eingetaucht wird. Nach dem Umkehren dieses Instrumentes bleibt in der Röhre eine Quecksilbersäule BS zurück, welcher (S. §. 316) durch den Druck der Luft gegen die Oberfläche HR des Quecksilbers das Gleichgewicht gehalten wird. Der über der Quecksilbersäule befindliche Raum AS ist luftleer, es erleidet daher diese Säule von oben keinen Druck, weshalb denn auch die Höhe dieser Säule, oder vielmehr die Höhe des Quecksilbers in derselben über dem Quecksilberspiegel HR im Gefäße als Maaß des Luftdruckes dienen kann. Um diese Höhe bequem und scharf messen zu können, ist eine genau eingetheilte Scala angebracht, welche längs der Röhre hinläuft.

Fig. 468.



Die ausführliche Beschreibung der verschiedenen Barometer, die Anleitung zum Gebrauche derselben u. s. w. gehört in die Physik.

§. 327. Durch Barometer hat man gefunden, daß bei einem mittleren Zustande der Atmosphäre und an wenig über dem Meere gelegenen Orten dem Luftdrucke durch eine ohngefähr 76 Centimeter oder 28 Pariser Zoll = 29 preuß. Zoll hohe Quecksilbersäule das Gleichgewicht gehalten wird. Da das specifische Gewicht des Quecksilbers beinahe 13,6 ist, so folgt, daß der Luftdruck auch gleich ist dem Gewichte einer 0,76 . 13,6 = 10,336 Meter = 31,73 Pariser Fuß = 32,84 preuß. Fuß hohen Wassersäule. Spannkraft der Gase.

Man mißt die Spannung der Luft auch oft durch den Druck, welchen dieselbe auf die Flächeneinheit ausübt. Da ein Cubikcentimeter Quecksilber 0,0136 Kilogramm wiegt, so ist der Atmosphärendruck oder das Gewicht einer 76 Centimeter hohen Quecksilbersäule bei 1 Quadratcentimeter Basis = 0,0136 . 76 = 1,0336 Kilogramm, und da ein Cubikzoll Quecksilber $= \frac{66 \,.\, 13,6}{1728} = 0,5194$ preuß. Pfd. wiegt, so ist der mittlere Druck der Atmosphäre auch = 29 . 0,5194 = 15,05 Pfd. auf den Quadratzoll, = 2167 Pfd. auf einen Quadratfuß.

Den mittleren Barometerstand 28 Zoll angenommen, erhält man den Druck der Atmosphäre auf einen Quadratzoll 15,01 Pfund, und auf einen Quadratfuß 2162 Pfund.

Es ist sehr gewöhnlich, in der Mechanik, den mittleren Atmosphärendruck als Einheit anzunehmen, und andere Expansivkräfte auf diesen zu beziehen, und in Atmosphärendrücken, oder Atmosphären, wie man schlechtweg sagt, anzugeben. Hiernach entspricht dem Drucke von n Atmosphären eine $28 \,.\, n$ Pariser Zoll hohe Quecksilbersäule oder ein Gewicht von 15,01 n preuß. Pfd. auf jeden Quadratzoll, und umgekehrt einer h Zoll hohen Quecksilbersäule die Expansivkraft von $\frac{h}{28} = 0,03571\, h$ Atmosphären und dem Drucke von p Pfd. auf den Quadratzoll die Spannung von $\frac{p}{15,01} = 0,06662\, p$ Atmosphären. Uebrigens giebt die Gleichung $\frac{h}{28} = \frac{p}{15,01}$, die Reductionsformeln $h = 1,865\, p$ Zoll und $p = 0,5361\, h$ Pfund. Bei einer Spannung h Zoll $= p$ Pfund ist der Druck gegen eine ebene Fläche von F Quadratzoll:

$$P = Fp = 0,5361\, Fh \text{ Pfund.}$$

Beispiele. 1) Wenn bei einer Wassersäulenmaschine das Wasser 250 Fuß hoch über der Kolbenfläche steht, so ist der Druck gegen diese Fläche $= \frac{250}{32,84} = 7,6$ Atmosphären. 2) Wenn der Wind eines Cylindergebläses 1,2 Atmosphären Spannung hat, so ist der Druck desselben auf jeden Quadratzoll = 1,2 . 15,01 = 18,01 Pfd., und auf die Kolbenfläche von 50 Zoll Durchmesser $= \frac{\pi \,.\, 50^2}{4} \,.\, 18,01 = 35362$ Pfd.

Da die Atmosphäre einen Gegendruck $\frac{\pi \cdot 50^2}{4} \cdot 15{,}01 = 29472$ Pfund ausübt, so folgt die Kolbenkraft $P = 35362 - 29472 = 5890$ Pfund.

Manometer. §. 328. Um die Spannung der in Gefäßen eingeschlossenen Gase oder Dämpfe zu finden, werden barometerähnliche Instrumente, die man Manometer (franz. manomètres; engl. manometers) nennt, angewendet. Diese Instrumente werden mit Quecksilber oder mit Wasser angefüllt, und sind oben entweder offen oder verschlossen, im letzteren Falle aber wieder im oberen Theile entweder luftleer oder mit Luft erfüllt. Das Manometer mit dem luftleeren Raume (Fig. 469) ist von dem gewöhnlichen Barometer nicht verschieden. Um mit Hülfe desselben die Spannung der Luft in einem Behälter messen zu können, wird eine Röhre GK angebracht, die mit einem Ende G in dem Behälter und mit dem andern Ende K über dem Quecksilberspiegel HR im Gehäuse CE des Instrumentes ausmündet. Der Raum $EFHR$ über dem Quecksilber wird dadurch mit dem Luftbehälter in Communication gesetzt, und es nimmt die in ihm befindliche Luft die Spannung der Luft im Behälter an, und drückt eine Quecksilbersäule OS in die Röhre, welche sich mit dem zu messenden Luftdrucke in's Gleichgewicht setzt.

Fig. 469.

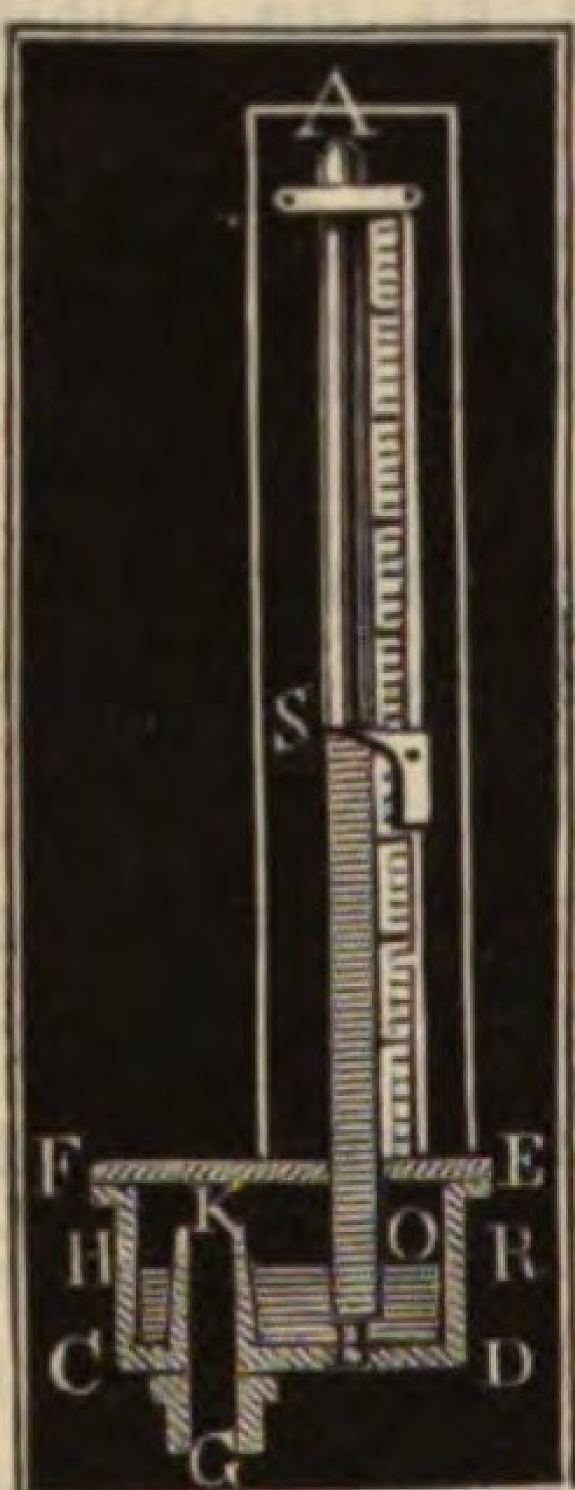
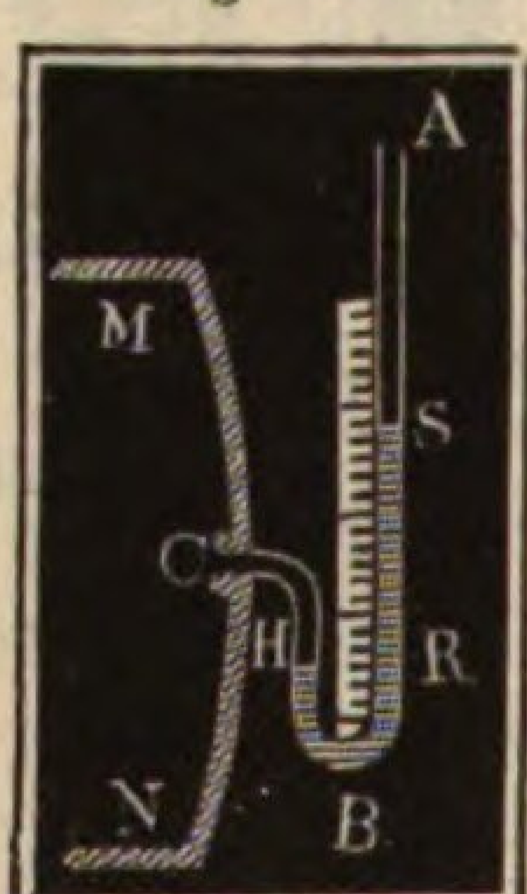


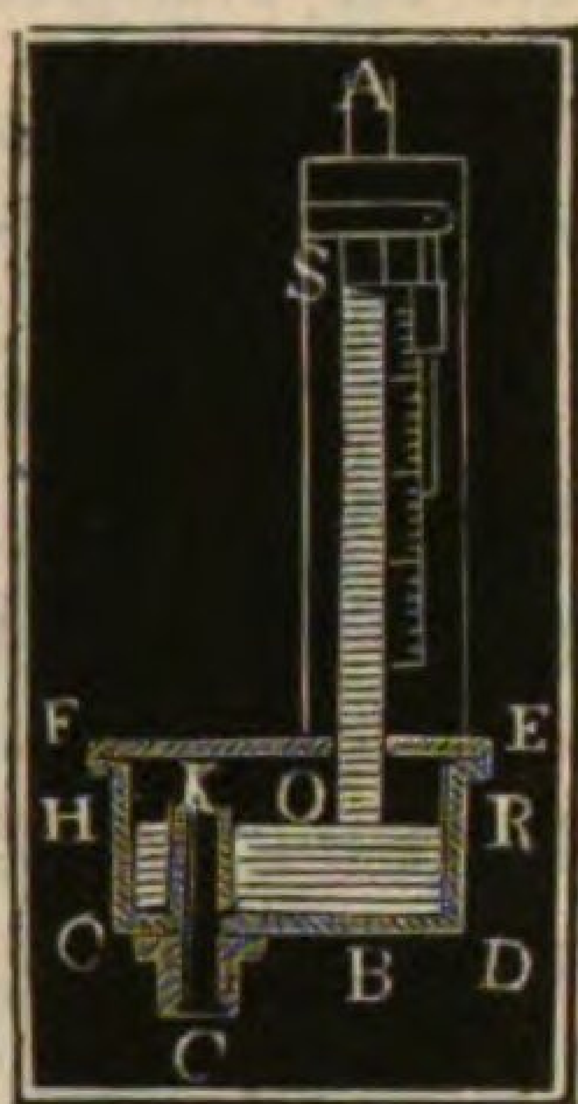
Fig. 470.



Das oben-offene Hebermanometer ABC, Fig. 470, giebt den Ueberschuß der Spannung in einem Gefäße MN über den Atmosphärendruck an, weil dieser Spannung durch die Vereinigung des Luftdruckes über S mit der Quecksilbersäule RS das Gleichgewicht gehalten wird. Ist b der Barometerstand und h der Manometerstand oder der Höhenabstand, RS der Quecksilberspiegel in den beiden Schenkeln des Manometers, so hat man die durch die Höhe einer Quecksilbersäule gemessene Spannung der mit dem kleinen Schenkel communicirenden Luft: $b_1 = b + h$, oder durch den Druck auf den Quadratzoll gemessen: $p = 0{,}5361\ (b + h)$ Pfund, oder wenn b der mittlere Barometerstand ist, $p = 15{,}01 + 0{,}5361\ h$ Pfund.

Gewöhnlicher als die Hebermanometer sind die Gefäßmanometer, wie $ABCE$, Fig. 471 (s. a. f. Seite). Da hier die Luft durch eine größere Quecksilber- oder nach Befinden Wassermasse auf die Flüssigkeitssäule

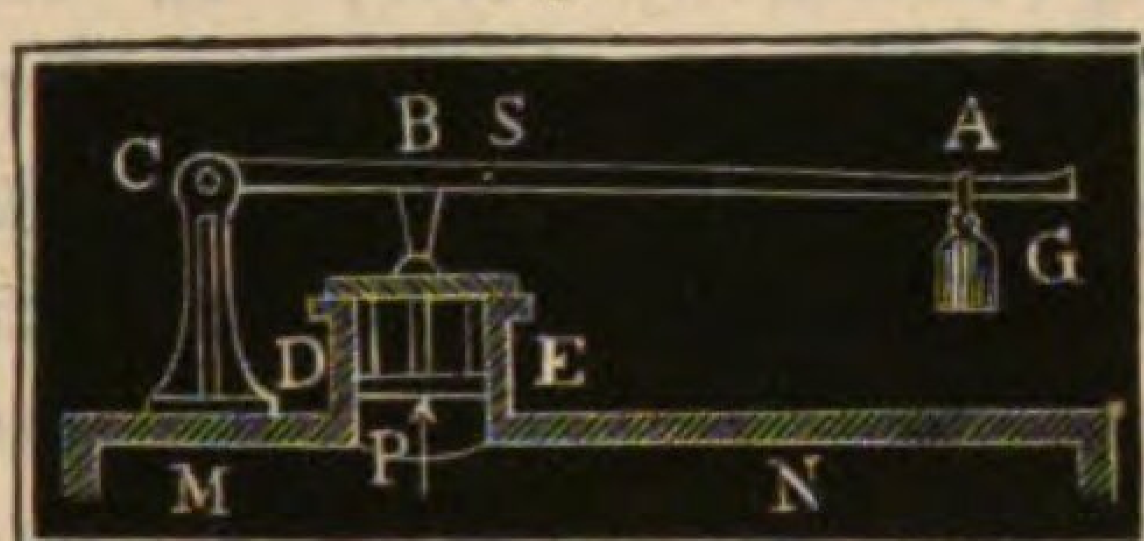
Fig. 471.



wirkt, so werden die Schwingungen der Luft nicht so schnell auf die Flüssigkeitssäule übergetragen, und es wird das Messen dieser mehr in Ruhe befindlichen Säule erleichtert und sicherer. Der Bequemlichkeit des Messens oder Ablesens an der Scala wegen bringt man oft noch einen Schwimmer an, welcher auf dem Quecksilber schwimmt und mittelst eines über einer Rolle liegenden Fadens mit einem über der Scala weggleitenden Zeiger verbunden ist. Manometer.

Mit Hülfe eines Ventiles DE, Fig. 472, bestimmt sich ebenfalls, jedoch weniger scharf, die Expansivkraft des in MN abgeschlossenen Gases oder Dampfes, wenn man das Laufgewicht G so stellt, daß es eben dem Luft- oder Dampfdrucke das Gleichgewicht hält. Ist $CS = s$ die Entfernung des Schwerpunktes des armirten Hebels von der Drehaxe C, $CA = a$ der Hebelarm des Laufgewichtes, und Q das Gewicht des Hebels sammt Ventil, so hat man das statische Moment, mit welchem das Ventil durch die Gewichte zugedrückt wird, $= Ga + Qs$; ist nun der Gas- oder Dampfdruck von unten $= P$, der Atmosphärendruck von oben $= P_1$, und endlich der Hebelarm CB des Ventiles $= d$, so hat man das statische Moment, mit welchem sich das Ventil zu heben sucht $= (P - P_1)\, d$, und es giebt nun das Gleichsetzen dieser beiden Momente: $Pd - P_1 d = Ga + Qs$,

Fig. 472.



$$\text{folglich } P = P_1 + \frac{Ga + Qs}{d}.$$

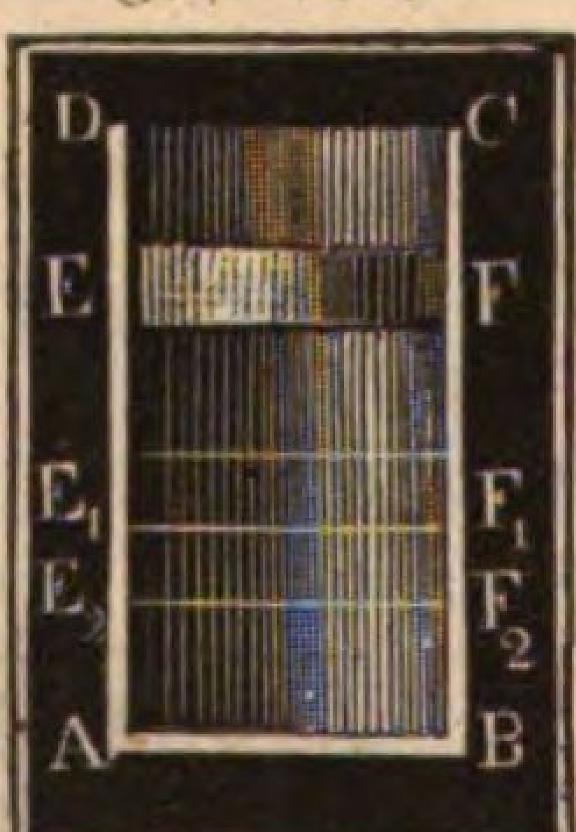
Bezeichnet r den Halbmesser $\frac{1}{2}DE$ des Ventiles, p die innere und p_1 die äußere Spannung, gemessen durch den Druck auf einen Quadratzoll, so hat man $P = \pi r^2 p$ und $P_1 = \pi r^2 p_1$, daher $p = p_1 + \dfrac{Ga + Qs}{\pi r^2 d}$.

Beispiele. 1) Wenn der Quecksilberstand eines oben offenen Manometers 3,5 Zoll, der Barometerstand aber 27 Zoll beträgt, so ist die entsprechende Expansivkraft $h = b + h_1 = 27 + 3{,}5 = 30{,}5$ Zoll, oder $p = 0{,}5361 . h = 0{,}5361 . 30{,}5 = 16{,}35$ Pfund. 2) Wenn der Wassermanometerstand 21 Zoll hoch ist, so entspricht demselben bei dem Barometerstande von 27 Zoll die Expansivkraft $h = 27 + \frac{21}{13{,}6} = 28{,}54$ Zoll $= 15{,}34$ Pfund. 3) Wenn das statische Moment eines unbelasteten Sicherheitsventiles 10 Zollpfd., das statische Moment des 10 Pfd. schweren Laufgewichtes $= 15 . 10 = 150$ Zollpfd., der Hebelarm des Ventiles, von Ventil- bis Drehaxe gemessen, 4 Zoll und der Halbmesser des Ventiles 1,5 Zoll beträgt, so ist die Differenz der Drücke auf beide Ventilflä-

chen: $p - p_1 = \frac{150 + 10}{\pi (1,5)^2 . 4} = \frac{160}{9\pi} = 5{,}66$ Pfund. Wäre der Atmosphärendruck $p_1 = 14$ Pfd, so fiele hiernach die Spannung der Luft unter dem Ventile: $p = 19{,}66$ Pfd. aus.

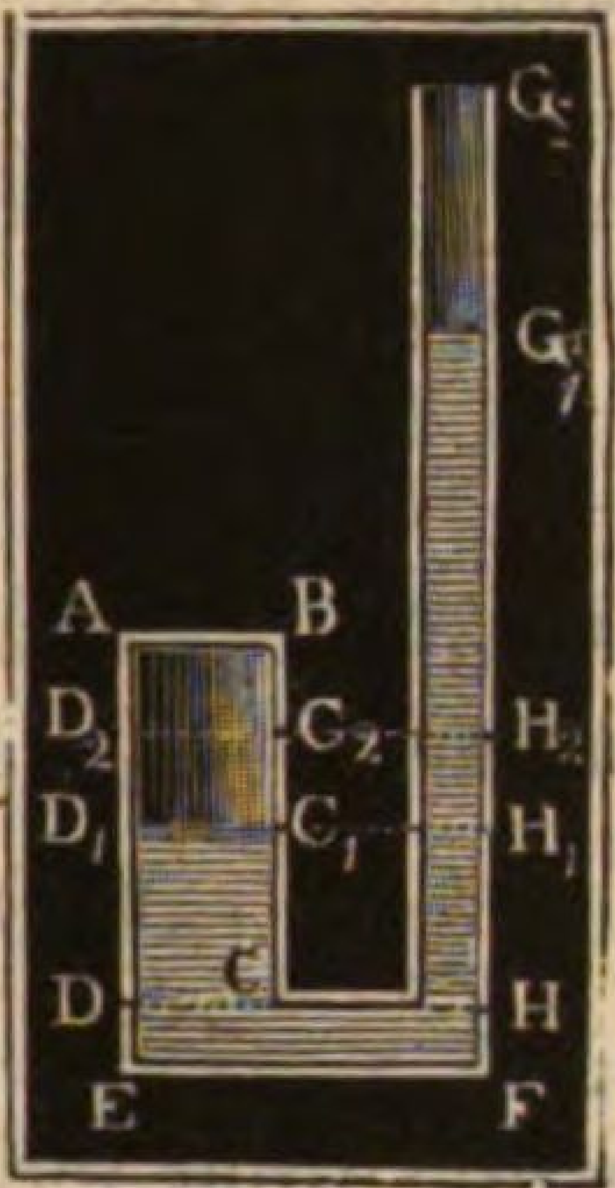
Mariotte'sches Gesetz. §. 329. Die Spannung der Gase wächst mit der Verdichtung derselben; je mehr man ein gewisses Luftquantum zusammendrückt oder verdichtet, je größer wird auch dessen Spannkraft, und je mehr man dasselbe sich ausdehnen oder verdünnen läßt, desto kleiner zeigt sich auch seine Expansivkraft. Das Verhältniß, in welchem die Spannkraft und die Dichtigkeit oder das Volumen der Gase zu einander stehen, wird durch das von Mariotte entdeckte und nach ihm benannte Gesetz ausgedrückt. Es behauptet, daß die Dichtigkeit einer und derselben Luftmenge der Spannkraft derselben proportional, oder, da die Räume, welche von einer und derselben Masse eingenommen werden, den Dichtigkeiten umgekehrt proportional sind, daß sich die Volumina einer und derselben Gasmasse umgekehrt wie deren Expansivkräfte verhalten. Wird demnach eine gewisse Luftmenge bis auf die Hälfte ihres anfänglichen Volumens zusammengedrückt, ihre Dichtigkeit also verdoppelt, so stellt sich auch ihre Spannung noch einmal so groß heraus, als anfänglich, und wird dagegen ein gewisses Luftquantum bis auf das Dreifache ihres anfänglichen Raumes ausgedehnt, also seine Dichtigkeit bis auf den dritten Theil herabgezogen, so bleibt auch die Elasticität desselben nur ein Drittel von der anfänglichen Spannkraft. Ist z. B. unter dem Kolben EF eines Cylinders AC, Fig. 473, gewöhnliche atmosphärische Luft, welche anfänglich auf jeden Quadratzoll mit 15 Pfd. drückt, so wird dieselbe mit 30 Pfd. drücken, wenn man den Kolben nach E_1F_1 geschoben und dadurch die eingeschlossene Luft bis auf die Hälfte ihres anfänglichen Volumens zusammengedrückt hat, und es wird diese Kraft $3 . 15 = 45$ Pfund betragen, wenn der Kolben nach $E_2 F_2$ gekommen ist und zwei Drittel der ganzen Höhe zurückgelegt hat. Ist der Inhalt der Kolbenfläche 1 Quadratfuß, so beträgt der Atmosphärendruck gegen dieselbe $= 144 . 15{,}01 = 2161$ Pfund; um daher den Kolben um die halbe Cylinderhöhe niederzudrücken, sind 2161 Pfd., und um ihn um zwei Drittel dieser Höhe niederzuschieben, sind $2 . 2161 = 4322$ Pfd. aufzusetzen u. s. w.

Fig. 473.



Ebenso läßt sich durch Zugießen von Quecksilber in die mit dem Luftcylinder AC, Fig. 474 (s. a. f. Seite), communicirende Röhre GH das Mariotte'sche Gesetz prüfen. Hat man anfänglich durch die Quecksil-

Fig. 474.



dermasse $DEFH$ eine Luftsäule AC abgesperrt, welche mit der äußeren Luft gleiche Spannkraft besitzt, und später durch zugegossenes Quecksilber den Luftcylinder bis auf die Hälfte, auf das Viertel u. s. w. des anfänglichen Volumens zusammengedrückt, so wird man finden, daß die Niveauabstände G_1H_1, G_2H_2 u. s. w. der Oberfläche des Quecksilbers der einfachen, dreifachen Barometerhöhe b u. s. w. gleich sind, daß also, wenn man hierzu die dem äußeren Luftdrucke entsprechende einfache Höhe addirt, die Spannkraft zweimal, viermal u. s. w. so groß ist, als beim anfänglichen Volumen. Mariotte'sches Gesetz.

Sind h und h_1 oder p und p_1 die Spannkräfte, γ und γ_1 die entsprechenden Dichtigkeiten, und V und V_1 die zugehörigen Volumina einer und derselben Luftmenge, so hat man nach dem angegebenen Gesetze:

$$\frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{V_1}{V} = \frac{h}{h_1} = \frac{p}{p_1};\ \text{daher}$$

$$\gamma_1 = \frac{h_1}{h}\gamma = \frac{p_1}{p}\gamma \text{ und } V_1 = \frac{h}{h_1}V = \frac{p}{p_1}V.$$

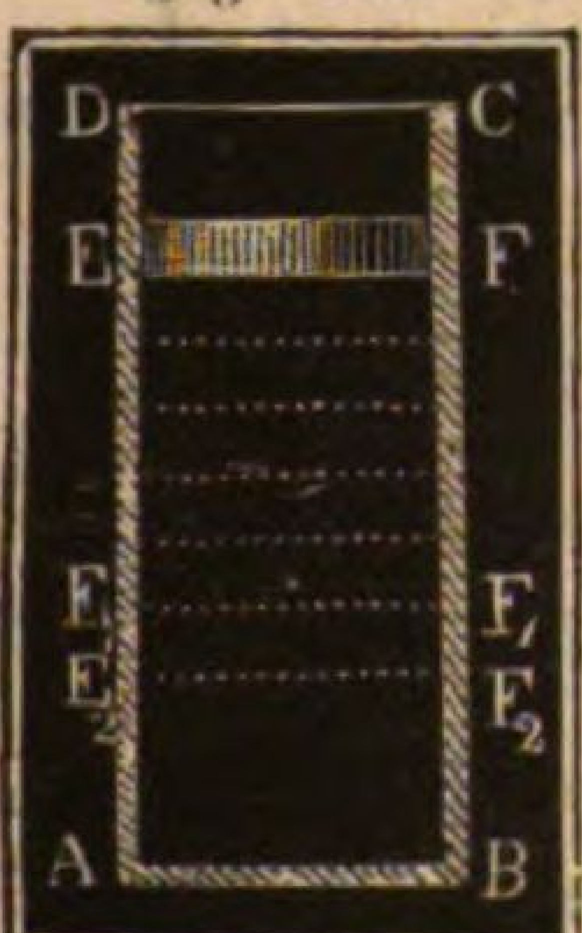
Hiernach läßt sich die Dichtigkeit und auch das Volumen von einer Spannung auf die andere reduciren.

Beispiele. 1) Wenn bei einer Gebläsemaschine der Manometerstand 3 Zoll mißt, während der Barometerstand 28 Zoll beträgt, so ist die Dichtigkeit des Windes $= \frac{28+3}{28} = \frac{31}{28} = 1{,}107$ mal so groß, als die der äußeren Luft.

2) Wenn ein Cubikfuß atmosphärische Luft bei 28 Zoll Barometerstand $\frac{66}{770}$ Pfund wiegt, so hat er bei 34 Zoll Barometerstand ein Gewicht von

$$\frac{66}{770} \cdot \frac{34}{28} = \frac{2244}{21560} = 0{,}1041 \text{ Pfund}.$$

Fig. 475.



§. 330. Die Arbeit, welche aufzuwenden ist, um ein gewisses Luftquantum bis zu einem gewissen Grade zu verdichten, so wie die Arbeit, welche die Luft bei ihrem Ausdehnen zu verrichten vermag, läßt sich nicht sogleich angeben, weil die Expansivkraft in jedem Momente des Verdichtens oder Ausdehnens eine andere ist, wir müssen uns daher nach einer besonderen Formel zur Berechnung dieses Werthes umsehen. Denken wir uns in einem Cylinder AC, Fig. 475, durch einen Kolben EF eine gewisse Luftmasse AF abgesperrt, und unter-

Mariotte'sches Gesetz. suchen wir, welche Arbeit aufzuwenden ist, um den Kolben um einen gewissen Weg $EE_1 = FF_1$ fortzuschieben. Ist die anfängliche Spannung $= p$ und die anfängliche Höhe des Cylinderraumes $= s$, dagegen die Spannung nach Durchlaufung des Raumes $EE_1 = p_1$, und die Höhe des noch übrigbleibenden Luftvolumens $= s_1$, so gilt die Proportion

$$p_1 : p = s : s_1, \text{ und giebt } p_1 = \frac{s}{s_1} p.$$

Während Durchlaufung eines sehr kleinen Wegtheiles $E_1 E_2 = \sigma$ läßt sich die Spannung p_1 als unveränderlich ansehen und es ist daher die dabei aufzuwendende mechanische Arbeit $= A\, p_1 \sigma = \frac{A p s \sigma}{s_1}$, wofern noch A die Kolbenfläche bezeichnet.

Den Lehren der Logarithmen zufolge *) ist aber eine sehr kleine Größe $y = Log.\, nat.\, (1 + y) = 2{,}3026\, Log.\, (1 + y)$, wenn $Log.\, nat.$ den natürlichen und $Log.$ den gemeinen Logarithmen bezeichnet; es läßt sich folglich auch $Aps\, \frac{\sigma}{s_1} = Aps\, Log. nat. \left(1 + \frac{\sigma}{s_1}\right)$ $= 2{,}3026\, Aps\, Log.\, \left(1 + \frac{\sigma}{s_1}\right)$ setzen. Nun ist aber

$$Log.\, nat\, \left(1 + \frac{\sigma}{s_1}\right) = Log. nat. \left(\frac{s_1 + \sigma}{s_1}\right)$$

$= Log. nat. (s_1 + \sigma) - Log.\, nat.\, s_1$; daher jene Elementararbeit auch

$$= Aps\, [Log,\, nat.\, (s_1 + \sigma) - Log.\, nat.\, s_1].$$

Denken wir uns den ganzen Weg EE_1 aus n Wegtheilen wie σ bestehend, setzen wir also $EE_1 = n\sigma$, so finden wir die allen diesen Theilen entsprechenden Arbeiten, wenn wir in der letzten Formel nach und nach statt s_1, $s_1 + \sigma$, $s_1 + 2\sigma$, $s_1 + 3\sigma$, ... bis $s_1 + (n-1)\,\sigma$ und statt $s_1 + \sigma$, $s_1 + 2\sigma$, $s_1 + 3\sigma$ u. s. w. bis $s_1 + n\sigma$ oder s setzen, und finden nun durch Summiren den vollständigen Arbeitsaufwand beim Durchlaufen des Weges $s - s_1$:

$$L = Aps \left\{\begin{array}{l} Log. nat.\, (s_1 + \sigma) - Log. nat.\, s_1 \\ Log. nat.\, (s_1 + 2\sigma) - Log. nat.\, (s_1 + \sigma) \\ Log. nat.\, (s_1 + 3\sigma) - Log. nat.\, (s_1 + 2\sigma) \\ \quad\cdot \qquad\qquad\qquad \cdot \\ \quad\cdot \qquad\qquad\qquad \cdot \\ \quad\cdot \\ Log. nat.\, (s_1 + n\sigma) - Log. nat.\, [s_1 + (n-1)\sigma] \end{array}\right\}.$$

$$= Aps\, [Log. nat.\, (s_1 + n\sigma) - Log. nat.\, s_1]$$

$$= Aps\, (Log.\, nat.\, s - Log.\, nat.\, s_1) = Aps\, Log. nat. \left(\frac{s}{s_1}\right),$$

*) Nach §. 176 ist für ein kleines y, $e^y = 1 + y$, daher $Log. nat. (1 + y) = y$ zu setzen.

da sich immer ein Glied in der einen Zeile mit einem Gliede der folgenden Zeile aufhebt. Mariotte'sches Gesetz.

Da $\frac{s}{s_1} = \frac{h_1}{h} = \frac{p_1}{p}$ ist, so läßt sich diese Arbeit auch setzen:

$$L = A p s \; Log. \, nat. \left(\frac{h_1}{h}\right) = A p s \; Log. \, nat. \left(\frac{p_1}{p}\right).$$

Nehmen wir den Kolbenweg $s - s_1 = x$ an, so finden wir hiernach auch die mittlere Kraft des Kolbens bei Verdichtung der Luft in dem Verhältnisse $\frac{h_1}{h} = \frac{p_1}{p}$, $P = \frac{L}{x} = A p \frac{s}{x} \; Log. \, nat. \left(\frac{p_1}{p}\right)$.

Setzen wir $A = 1$ (Quadratfuß) und $s = 1$ (Fuß), so erhalten wir die Leistung $L = p \; Log. nat. \left(\frac{p_1}{p}\right) = 2{,}3026 p Log. \left(\frac{p_1}{p}\right)$. Diese Formel giebt die mechanische Arbeit an, welche aufzuwenden ist, um eine Raumeinheit (1 Cubikfuß) Luft aus der tieferen Pressung oder Spannung p in die höhere Spannung p_1 zu versetzen und sie dadurch auf das Volumen $\left(\frac{p}{p_1}\right)$ Cubikfuß zurückzuführen. Dagegen drückt $L = p_1 \; Log. nat. \left(\frac{p_1}{p}\right) = 2{,}3026 \, p_1 Log. \left(\frac{p_1}{p}\right)$ die Arbeit aus, welche eine Raumeinheit Gas ausgiebt oder verrichtet, wenn sie aus der höheren Pressung p_1 in die tiefere p übergeht.

Um eine Luftmasse vom Volumen V und der Spannung p durch Verdichtung auf das Volumen V_1 und auf die Spannung $p_1 = \frac{V}{V_1} p$ zurückzuführen, ist hiernach die mechanische Arbeit $Vp \; Log. nat. \left(\frac{V}{V_1}\right)$ aufzuwenden nöthig, und wenn umgekehrt das Volumen V_1 bei der Spannung p_1 durch Verdünnung in das Volumen V und in die Spannung $p = \frac{V_1}{V} \; p_1$ übergeht, so wird die Arbeit $Vp \; Log. nat. \left(\frac{V}{V_1}\right) = V_1 p_1 Log. nat. \left(\frac{V}{V_1}\right)$ frei.

Beispiele. 1) Wenn ein Gebläse pro sec. 10 Cubikfuß Luft von 28 Zoll Spannung in Wind von 30 Zoll Spannung verwandelt, so ist die von demselben in jeder Secunde zu verrichtende Arbeit $= 17280 \,.\, 0{,}5361 \,.\, 28 \, Log. \, nat. \, (^{30}/_{28})$ $= 259400 \, (Log. \, nat. \, 15 - Log. \, nat. \, 14) = 259400 \, (2{,}708050 - 2{,}639057)$ $= 259400 \,.\, 0{,}068993 = 17896$ Zollpfd. $= 1491$ Fußpfd. 2) Wenn bei einer Dampfmaschine unter der Kolbenfläche $A = \pi \,.\, 8^2 = 201$ Quadratzoll eine Dampfmasse von 15 Zoll Höhe und 3 Atmosphären Spannung steht, die denselben bei ihrer Ausdehnung um 25 Zoll fortschiebt, so ist die entwickelte und auf den Kolben übergetragene mechanische Arbeit:

$L = 201 \cdot 3 \cdot 15{,}01 \cdot 15 \; Log.\, nat \left(\frac{15 + 25}{15}\right) = 135765 \; Log.\, nat.\; {}^8\!/_3$
$= 135765 \cdot 0{,}98083 = 133162$ Zollpfd. $= 11097$ Fßpfd. und die mittlere Kolbenkraft ohne Rücksicht auf die Kolbenreibung und den Gegendruck,

$$= \frac{133162}{25} = 5326 \text{ Pfd.}$$

Luftschichten. §. 331. Die in einem Gefäße eingeschlossene Luft ist in verschiedenen Tiefen von verschiedener Dichtigkeit und Spannung, denn die oberen Luftschichten drücken die unteren Luftschichten, auf welchen sie ruhen, zusammen, es ist deshalb nur in einer und derselben Horizontalschicht einerlei Dichtigkeit und einerlei Spannung, und es nehmen beide mit der Tiefe zu. Um aber das Gesetz dieser Zunahme der Dichtigkeit von oben nach unten oder der Abnahme von unten nach oben zu finden, schlagen wir einen Weg ein, der dem des vorigen Paragraphen sehr ähnlich ist.

Fig. 476.



Denken wir uns eine vertikale Luftsäule AE, Fig. 476, vom Querschnitte $AB = 1$, und von der Höhe $AF = s$. Setzen wir für die untere Luftschicht die Dichtigkeit $= \gamma$ und die Spannung $= p$, und für die obere Luftschicht EF die Dichtigkeit $= \gamma_1$ und die Spannkraft $= p_1$, so haben wir zunächst $\frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{p_1}{p}$. Ist x die Höhe EE_1 der Schicht E_1F, so hat man ihr Gewicht, und daher auch die der Höhe x entsprechende Abnahme der Spannkraft: $y = 1 \cdot x \cdot \gamma_1 = \frac{x\gamma p_1}{p}$, und umgekehrt

$x = \frac{p}{\gamma} \cdot \frac{y}{p_1}$, oder, wie im vorigen Paragraphen:

$$x = \frac{p}{\gamma} Log.nat. \left(1 + \frac{y}{p_1}\right) = \frac{p}{\gamma}\, [Log.\, nat.\, (p_1 + y) - Log.nat.p_1].$$

Setzen wir hierin statt p_1, nach und nach $p_1 + y$, $p_1 + 2y$, $p_1 + 3y$ u. s. w. bis $p = p_1 + (n-1)\, y$, und addiren wir die entsprechenden Luftschichthöhen oder Werthe von x, so bekommen wir die Höhe der ganzen Luftsäule, ganz wie im vorigen Paragraphen:

$s = \frac{p}{\gamma}\, (Log.\, nat.\, p - Log.\, nat.\, p_1) = \frac{p}{\gamma}\, Log.\, nat. \left(\frac{p}{p_1}\right)$ oder

auch $s = \frac{p}{\gamma}\, Log.\, nat. \left(\frac{b}{b_1}\right) = 2{,}302\, \frac{p}{\gamma}\, Log. \left(\frac{b}{b_1}\right)$ wenn b und b_1 die den Spannkräften p und p_1 entsprechenden Barometerstände in A und in F sind.

Ist umgekehrt die Höhe s gegeben, so läßt sich die ihr entsprechende

Expansivkraft und Dichtigkeit der Luft berechnen. Es ist nämlich: Luftschichten.

$\frac{p}{p_1} = \frac{\gamma}{\gamma_1} = e^{\frac{s\gamma}{p}}$, also $\gamma_1 = \gamma e^{-\frac{s\gamma}{p}}$, wobei $e = 2,71828$ die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystemes bezeichnet.

Anmerkung. Diese Formel findet ihre Anwendung beim barometrischen Höhenmessen, welches im »Ingenieur« abgehandelt wird. Ohne Berücksichtigung der Temperatur u. s. w. läßt sich $s = 58604\, Log. \left(\frac{b}{b_1}\right)$ setzen.

Beispiele. 1) Wenn man den Barometerstand am Fuße eines Berges 339 und am Gipfel desselben 315 Linien gefunden hat, so ergiebt sich die Höhe dieses Berges: $s = 58604 . Log. {}^{339}/_{315} = 58604 . 0,031889 = 1869$ Fuß.

2) Für die Dichtigkeit der Luft auf einem 10000 Fuß hohen Berge hat man $Log. \frac{\gamma}{\gamma_1} = {}^{10000}/_{58604} = 0,1706$, daher $\frac{\gamma}{\gamma_1} = 1,481$ und $\frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{1}{1,481} = 0,675$; es ist also dieselbe nur $67\frac{1}{2}$ Procent von der Dichtigkeit am Fuße.

§. 332. Einen wesentlichen Einfluß auf die Dichtigkeit und Expansivkraft der Gase hat die Wärme oder Temperatur. Je mehr die in einem Gefäße eingeschlossene Luft erwärmt wird, desto größer zeigt sich auch die Expansivkraft derselben, und je mehr die Temperatur der in einem Gefäße durch einen Kolben abgeschlossenen Luft erhöht wird, desto mehr dehnt sich auch die Luft aus und schiebt den Kolben auswärts. Versuche von Gay-Lussac, welche in neueren Zeiten von Rudberg, Magnus und Regnault wiederholt worden sind, haben ergeben, daß bei gleicher Dichtigkeit die Expansivkraft, und bei gleicher Expansivkraft das Volumen einer und derselben Luftmenge wie die Temperatur wächst. Man kann dieses Gesetz dem Mariotte'schen an die Seite setzen, und es zur Unterscheidung das Gay-Lussac'sche Gesetz nennen. Nach den neuesten Versuchen nimmt die Expansivkraft eines gewissen Luftvolumens bei Erwärmung vom Frost- bis Siedepunkt um 0,367 ihres anfänglichen Werthes zu, oder es wächst bei dieser Temperaturerhöhung das Volumen einer gewissen Luftmasse bei unveränderlicher Spannung um 36,7 Procent. Giebt man die Temperatur nach Centesimalgraden an, deren der Raum zwischen Frost- und Siedepunkt 100 enthält, so folgt die Ausdehnung auf jeden Grad $= 0,00367$ und auf t^0 Temperatur $= 0,00367 . t$; bedient man sich dagegen der Réaumur'schen Grade, von denen 80 auf den Abstand zwischen dem Frost- und Siedepunkt gehen, so hat man die Ausdehnung auf jeden Grad 0,00459, also für $t^0 = 0,00459 . t$. Diese Verhältnißzahl gilt eigentlich nur für die atmosphärische Luft; den übrigen Gasen entsprechen meist wenig größere Werthe, auch nimmt selbst bei der atmosphärischen Luft dieser Coefficient mit der Temperatur wenig zu.

Gay-Lussac'sches Gesetz.

Wird eine Luftmasse vom anfänglichen Volumen V_0 und von der Tem-

Gay-Lussac's sches Gesetz. peratur Null um t Grad erwärmt, ohne eine andere Spannung anzunehmen, so ist das neue Volumen $V = (1 + 0{,}00367\, t)\, V_0$, und erhält es die Temperatur t_1, so entsteht das Volumen $V_1 = (1 + 0{,}00367\, t_1)\, V_0$, und es entsteht durch Division das Volumenverhältniß

$\frac{V}{V_1} = \frac{1 + 0{,}00367\, t}{1 + 0{,}00367\, t_1}$, dagegen das entsprechende Dichtigkeitsverhältniß

$$\frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{V_1}{V} = \frac{1 + 0{,}00367\, t_1}{1 + 0{,}00367\, t}.$$

Geht außerdem noch eine Veränderung in der Spannung vor, ist p_0 die Spannung bei Null, p die bei t und p_1 die bei t_1 Wärme, so hat man

$V = (1 + 0{,}00367\, t)\, \frac{p_0}{p}\, V_0$, ferner $V_1 = (1 + 0{,}00367\, t_1)\, \frac{p_0}{p_1}\, V_0$,

daher $\frac{V}{V_1} = \frac{1 + 0{,}00367\, t}{1 + 0{,}00367\, t_1} \cdot \frac{p_1}{p}$ und $\frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{1 + 0{,}00367 \,.\, t_1}{1 + 0{,}00367 \,.\, t} \cdot \frac{p}{p_1}$,

oder $\frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{1 + 0{,}00367 \,.\, t_1}{1 + 0{,}00367 \,.\, t} \cdot \frac{b}{b_1}$.

Beispiel. Wenn eine Luftmasse von 800 Cubikfuß Inhalt, 15 Pfd. Spannkraft und 10 Grad Wärme durch das Gebläse und durch den Erwärmungsapparat eines Hohofens in eine Spannung von 19 Pfd., und in eine Temperatur von 200 Grad versetzt wird, so nimmt sie zuletzt das größere Volumen

$V_1 = \frac{1 + 0{,}00367 \,.\, 200}{1 + 0{,}00367 \,.\, 10} \cdot {}^{15}/_{19} \,.\, 800 = \frac{1{,}734}{1{,}0367} \cdot \frac{12000}{19} = 1056$ Cubikfuß ein.

Dichtigkeit der Luft. §. 333. Mit Hülfe der Formel am Ende des vorigen Paragraphen läßt sich nun γ durch die einer gegebenen Temperatur und Spannung der Luft entsprechende Dichtigkeit berechnen. Durch genaue Wägungen und Messungen hat man das Gewicht von einem Cubikmeter atmosphärische Luft bei Null Grad Wärme und 0,76 Meter Barometerstand = 1,2995 Kilogramm gefunden. Da ein Cubikfuß (preuß.) = 0,030916 Cubikmeter und 1 Kilogramm = 2,13809 Pfund ist, so ist bei den angegebenen Verhältnissen die Dichtigkeit der Luft = 0,030916 . 2,13809 . 1,2995 = 0,08590 Pfund. Ist nun die Temperatur = t^0 Cent., so folgt die Dichtigkeit für das franz. Maaß $\gamma = \frac{1{,}2995}{1 + 0{,}00367\, t}$ Kilogramm,

und für das preuß. Maaß $\gamma = \frac{0{,}08590}{1 + 0{,}00367 \,.\, t}$ Pfund.

Weicht auch noch die Expansivkraft von der mittleren ab, ist also der Barometerstand nicht 0,76 Meter, sondern b, so erhält man

$$\gamma = \frac{1{,}2995}{1 + 0{,}00367 \,.\, t} \cdot \frac{b}{0{,}76} = \frac{1{,}71 \,.\, b}{1 + 0{,}00367\, t} \text{ Kilogr., oder}$$

wenn man, wie gewöhnlich b in Pariser Zoll giebt,

$$\gamma = \frac{0{,}08565}{1 + 0{,}00367 \,.\, t} \cdot \frac{b}{28} = \frac{0{,}003058 \,.\, b}{1 + 0{,}00367\, t} \text{ Pfund.}$$

Sehr oft drückt man aber auch die Expansivkraft durch den Druck p auf das Quadratcentimeter oder auf den Quadratzoll aus, deshalb ist denn der Faktor $\frac{p}{1,0336}$ oder $\frac{p}{15,01}$ einzuführen, und es folgt so Dichtigkeit der Luft.

$$\gamma = \frac{1,2995}{1 + 0,00367 . t} \cdot \frac{p}{1,0336} = \frac{1,2572\, p}{1 + 0,00367\, t} \text{ Kilogr.}$$

$$\text{oder } \gamma = \frac{0,08565}{1 + 0,00367 . t} \cdot \frac{p}{15,01} = \frac{0,005706\, p}{1 + 0,00367 . t} \text{ Pfund.}$$

Bei gleicher Temperatur und Expansivkraft ist die Dichtigkeit des Wasserdampfes $^5/_8$ von der Dichtigkeit der atmosphärischen Luft, weshalb man für ihn

$$\gamma = \frac{0,8122}{1 + 0,00367 t} \cdot \frac{p}{1,0336} = \frac{0,7857\, p}{1 + 0,00367\, t} \text{ Kilogramm}$$

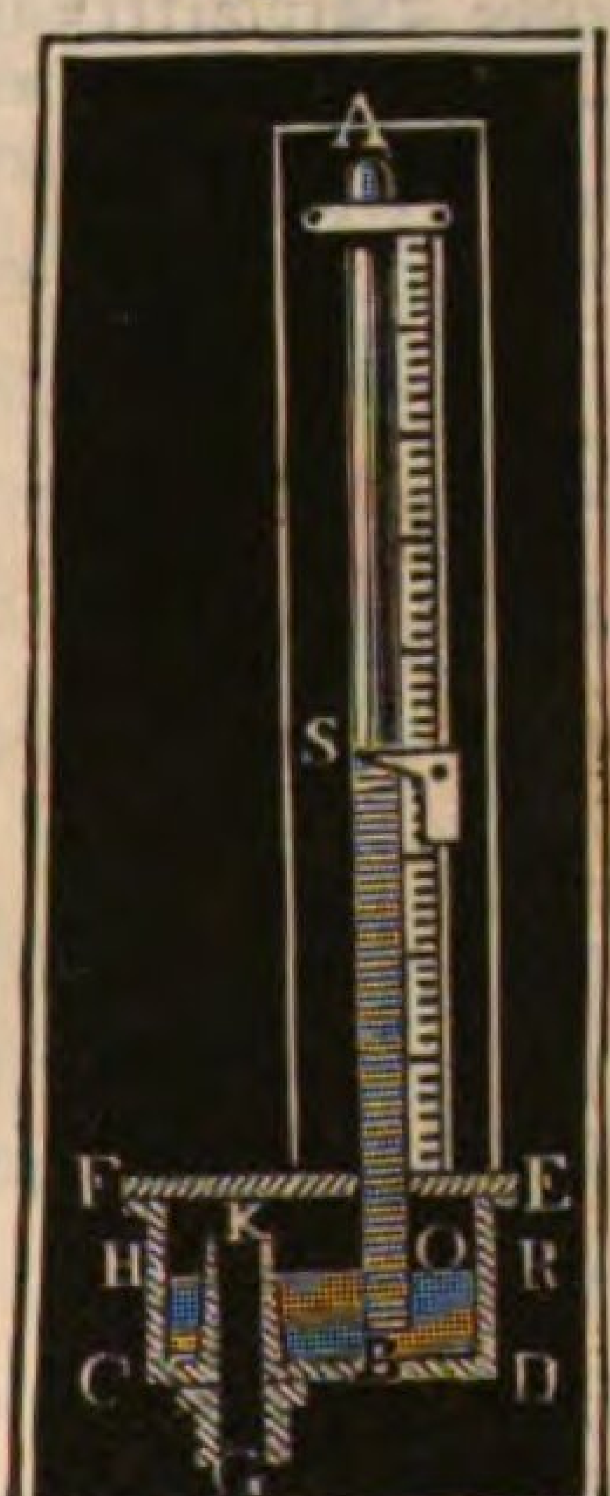
$$\text{oder } \gamma = \frac{0,05353}{1 + 0,00367 . t} \cdot \frac{p}{15,01} = \frac{0,003566\, p}{1 + 0,00367 t} \text{ Pfund}$$

erhält.

Beispiele. 1) Welches Gewicht hat der in einem cylindrischen Regulator von 40 Fuß Länge und 6 Fuß Weite enthaltene Wind bei 10 Grad Wärme und 18 Pfund Pressung? Die Dichtigkeit dieses Windes ist $\gamma = \frac{0.005706 . 18}{1,0367} = \frac{0,10271}{1,0367} = 0,09908$ Pfund; der Fassungsraum des Regulatorkessels aber ist $= \pi . 3^2 . 40 = 1131$ Cubikfuß, daher wiegt die gedachte Windmasse $= 0,09908 . 1131 = 112$ Pfund. 2) Eine Dampfmaschine verbraucht in der Minute 500 Cubikfuß Dampf von 107° Wärme und 36 Pariser Zoll Spannkraft, wie viel Pfund Wasser bedarf sie zur Erzeugung dieser Dampfmenge? Die Dichtigkeit dieses Dampfes ist $= \frac{0.05353}{1 + 0,00367 . 107} \cdot \frac{36}{28} = \frac{0,05353 . 36}{1,393 . 18} = 0,0494$ Pfund, daher das Gewicht von 500 Cubikfuß, oder das Gewicht der entsprechenden Wassermenge

$$= 500 . 0,0494 = 24,7 \text{ Pfund.}$$

Fig. 477.



§. 334. Mit Hilfe der in den letzten Paragraphen gewonnenen Ergebnisse läßt sich nun auch die Theorie des **Luftmanometers** entwickeln. Dasselbe besteht aus einer gut calibrirten, oben mit Luft und unten mit Quecksilber angefüllten Barometerröhre AB, Fig. 477, und aus einem ebenfalls Quecksilber enthaltenden Gefäße CE, welches mit dem Gase oder Dampfe, dessen Spannkraft man wissen will, durch ein Rohr GK in Communication gesetzt wird. Aus den Höhen der Luft- und Quecksilbersäulen läßt sich diese Spannkraft, wie folgt, berechnen. Gewöhnlich ist das Instrument so einge- Luftmanometer.

Luftmanometer. richtet, daß das Quecksilber in der Röhre mit dem Quecksilber im Gefäße auf gleichem Niveau steht, wenn die Temperatur der eingeschlossenen Luft $t = 10$ Grad und die Spannung im Raume EH dem mittleren Atmosphärendrucke $b = 0{,}76$ Meter oder 28 Zoll gleich ist.

Ist aber beim Barometerstande b, in EH eine Quecksilbersäule h_1 in die Röhre gestiegen und die Länge der übrigbleibenden Luftsäule h_2, so hat man die Spannung derselben $= \frac{h_1 + h_2}{h_2} b$, und daher

$b_1 = h_1 + \frac{h_1 + h_2}{h_2} b$. Findet noch ein Temperaturwechsel statt, ist die Temperatur bei der Beobachtung von h_1 und h_2 nicht wie anfänglich $= t$, sondern t_1, so hat man gar die Spannung der Luftsäule AS: $= \frac{h_1 + h_2}{h_2} \cdot \frac{1 + 0{,}00367 \,.\, t_1}{1 + 0{,}00367 \,.\, t} \,.\, b$, und daher den in Frage stehenden Barometerstand $b_1 = h_1 + \frac{h_1 + h_2}{h_2} \cdot \frac{1 + 0{,}00367 \,.\, t_1}{1 + 0{,}00367 \,.\, t} \,.\, b$.

Für $b = 28$ Zoll (Paris.) und $t = 10^0$ C., folgt

$b_1 = h_1 + 27\,(1 + 0{,}00367\ t_1)\,\frac{h}{h_2}$, wobei noch $h = h_1 + h_2$ die ganze Röhrenlänge, bis Quecksilberspiegel HR gemessen, bezeichnet.

Aus dem Barometerstande b_1 folgt die Pressung auf den Quadratzoll (preuß.) $p = \frac{15{,}01}{28}\, h_1 + 15{,}01 \,.\, {}^{27}\!/_{28}\,(1 + 0{,}00367\ t_1)\,\frac{h}{h_2}$

$= 0{,}5361\ h_1 + 14{,}47\,(1 + 0{,}00367\ t)\,\frac{h}{h_2}$ Pfund.

Beispiel. Wenn ein Luftmanometer von 25 Zoll Länge bei 21° Wärme eine Luftsäule von 12 Zoll Länge zeigt, so ist der entsprechende Barometerstand $b_1 = 25 - 12 + 27\,(1 + 0{,}00367 \,.\, 21) \,.\, {}^{25}\!/_{12} = 13 + 9 \,.\, 1{,}07707 \,.\, {}^{25}\!/_{4}$ $= 13 + 60{,}58 = 73{,}58$ Zoll und der Druck auf einen Quadratzoll $= 0{,}5361 \,.\, 73{,}58 = 39{,}45$ Pfund.

Sechster Abschnitt.

Dynamik flüssiger Körper.

Erstes Kapitel.

Die allgemeinen Lehren über den Ausfluß des Wassers aus Gefäßen.

§. 335. Die Lehre vom Ausflusse (franz. écoulement; engl. efflux) Ausfluß. der Flüssigkeiten aus Gefäßen macht den ersten Haupttheil der Hydrodynamik aus. Wir unterscheiden zuerst den Ausfluß der Luft und den Ausfluß des Wassers, und dann noch den Ausfluß bei veränderlichem und den bei unveränderlichem Drucke von einander. Zunächst ist von dem Ausflusse des Wassers unter constantem Drucke die Rede. Als constant läßt sich aber der Druck des Wassers annehmen, wenn von einer Seite ebensoviel Wasser zutritt, als auf einer andern Seite ausfließt, oder wenn die in einer gewissen Zeit ausfließende Wassermenge in Beziehung auf das Gefäß sehr klein ist. Die Hauptaufgabe, um deren Lösung es sich hier handelt, ist die Bestimmung der Wassermenge (franz. dépense, engl. discharge), welche unter gegebenem Drucke in einer bestimmten Zeit durch eine gegebene Oeffnung (franz. orifice; engl. aperture) ausfließt.

Ist die in jeder Secunde ausfließende Wassermenge $= Q$, so hat man für die im Laufe von t Secunden unter unveränderlichem Drucke ausfließende Wassermenge: $Q_1 = Qt$. Um aber die Ausflußmenge pro Secunde zu erhalten, ist es nöthig, die Größe der Oeffnung und die Geschwindigkeit der ausfließenden Wasserelemente zu kennen. Der Einfachheit der Untersuchung wegen, nehmen wir zunächst an, daß die Wasserelemente in geraden und parallelen Linien ausströmen und deshalb einen prismatischen

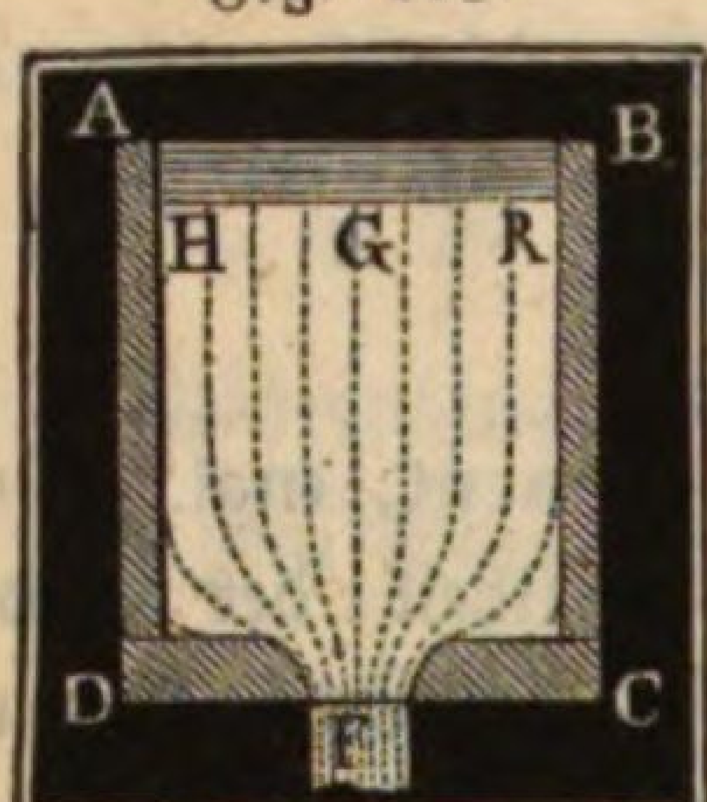
Ausfluß.: Wasserstrahl (franz. veine, courant de fluide; engl. stream of the fluid) bilden. Ist nun F der Querdurchschnitt des Wasserstrahls und v die Geschwindigkeit des Wassers oder eines jeden Wasserelementes, so bildet die Ausflußmenge pro Secunde ein Prisma von der Basis F und Höhe v, es ist also $Q = Fv$ Raumeinheiten und $G = Fv\gamma$ Gewichtseinheiten, wofern γ die Dichtigkeit des Wassers oder der ausströmenden Flüssigkeit bezeichnet.

Beispiele. 1) Wenn durch eine Schutzöffnung von 1,7 Quadratfuß das Wasser mit 14 Fuß Geschwindigkeit ausfließt, so beträgt die Wassermenge pr. Sec. $Q = 14 . 1,7 = 23,8$ Cubikfuß, und daher die stündlich ausfließende Wassermenge $= 23,8 . 3600 = 85680$ Cubikfuß. 2) Wenn durch eine Mündung von 5 Quadratzoll in 3 Minuten 10 Secunden 264 Cubikfuß Wasser ausgeflossen sind, so betrug die mittlere Ausflußgeschwindigkeit

$$v = \frac{Q_1}{Ft} = \frac{264}{\frac{5}{144} . 190} = \frac{264 . 144}{5 . 190} = 40 \text{ Fuß}.$$

Ausflußgeschwindigkeit.

Fig. 478.



§. 336. Denken wir uns ein mit Wasser angefülltes Gefäß AC, Fig. 478, mit einer innen abgerundeten horizontalen Ausmündung F, welche nur einen sehr kleinen Theil vom Querschnitte oder der Bodenfläche CD einnimmt. Setzen wir die während des Ausflusses als unveränderlich anzusehende Druckhöhe FG (franz. charge d'eau; engl. height of water) $= h$, die Ausflußgeschwindigkeit $= v$, und die in jeder Secunde ausfließende Wassermenge $= Q$, also ihr Gewicht $Q\gamma$. Die mechanische Arbeit, welche diese Wassermasse beim Herabsinken von der Höhe h zu verrichten vermag, ist $= Qh\gamma$, und die mechanische Arbeit, welche die ausfließende Masse $Q\gamma$ in sich aufnimmt, indem sie aus der Ruhe in die Geschwindigkeit v übergeht, ist $\frac{v^2}{2g} Q\gamma$ (§. 71). Findet nun ein Arbeitsverlust beim Durchgange durch die Oeffnung nicht statt, so sind beide Arbeiten einander gleich, es ist also $hQ\gamma = \frac{v^2}{2g} Q\gamma$ d. i.

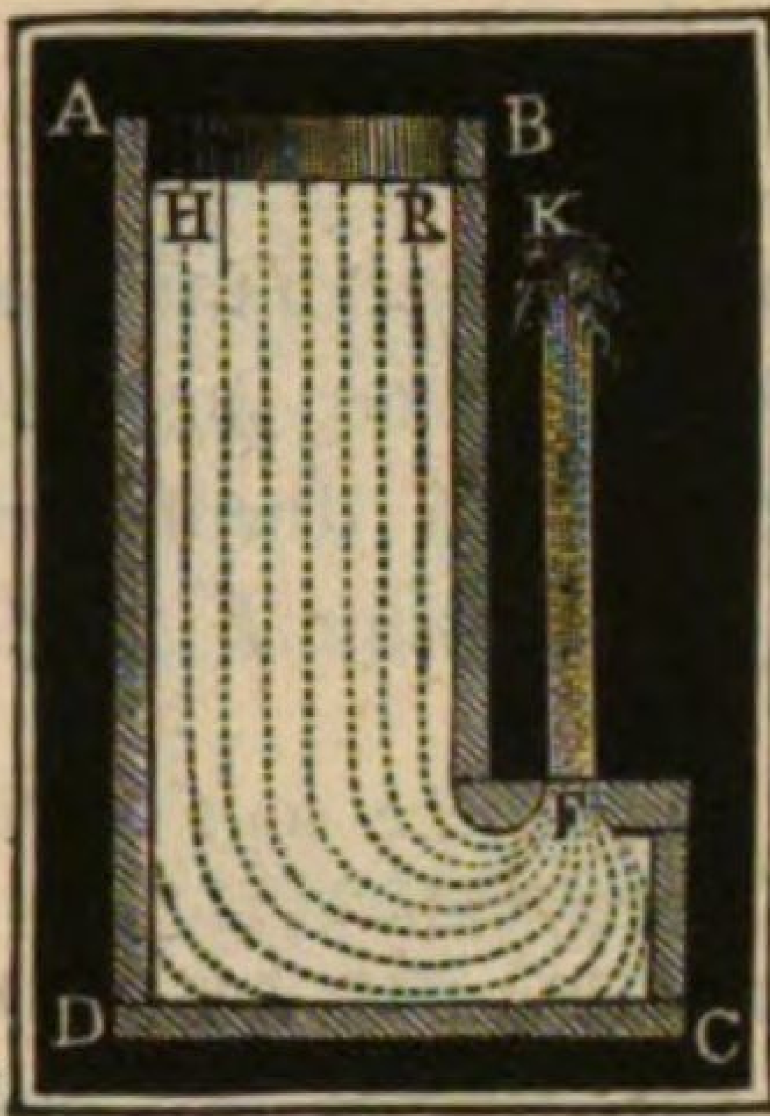
$h = \frac{v^2}{2g}$ und umgekehrt, $v = \sqrt{2gh}$, oder in Fußmaaß,

$h = 0,016\, v^2$, und $v = 7,906 \sqrt{h}$.

Es ist also die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers so groß wie die Endgeschwindigkeit eines von der Druckhöhe frei herabfallenden Körpers.

Die Richtigkeit dieses Gesetzes läßt sich auch durch folgenden Versuch

Fig. 479.



erweisen. Wenn man im Gefäße AC, Fig. 479, eine nach oben gerichtete Oeffnung anbringt, so steigt der Wasserstrahl FK vertikal in die Höhe und erreicht beinahe das Niveau HR des Wassers im Gefäße, und es läßt sich annehmen, daß er es vollkommen erreichen würde, wenn alle Hindernisse, wie z. B. Widerstand der Luft, Reibung an den Gefäßwänden, Störung durch das zurückfallende Wasser u. s. w. beseitigt wären. Da aber ein auf eine senkrechte Höhe h aufsteigender Körper die Anfangsgeschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$ hat (§. 15), so folgt hiernach auch, daß die Ausflußgeschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$ sein müsse. Ausflußgeschwindigkeit.

Für eine andere Druckhöhe h_1 ist die Geschwindigkeit $v_1 = \sqrt{2gh_1}$, man hat daher $v : v_1 = \sqrt{h} : \sqrt{h_1}$; es verhalten sich also die Ausflußgeschwindigkeiten wie die Quadratwurzeln aus den Druckhöhen.

Beispiele. 1) Die Wassermenge, welche in jeder Secunde durch eine 10 Quadratzoll große Oeffnung unter dem Drucke von 5 Fuß ausströmt, ist
$Q = Fv = 10 . 12 \sqrt{2gh} = 120 . 7{,}906 \sqrt{5} = 948{,}7 . 2{,}236 = 2121$ Cubikzoll.
2) Damit durch eine Oeffnung von 6 Quadratzoll in der Secunde 252 Cubikzoll Wasser ausfließen, ist die Druckhöhe $h = \frac{v^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{F}\right)^2 = 0{,}016 \left(\frac{252}{6}\right)^2$
$= 0{,}016 . 42^2 = 28{,}22$ Zoll nöthig.

§. 337. Wenn das Wasser mit einer gewissen Geschwindigkeit c zufließt, so kommt zur Arbeit $h . Q\gamma$ noch die der Geschwindigkeitshöhe $h_1 = \frac{c^2}{2g}$ entsprechende Arbeit $\frac{c^2}{2g} Q\gamma$, weshalb nun zu setzen ist Zu- und Ausflußgeschwindigkeit.

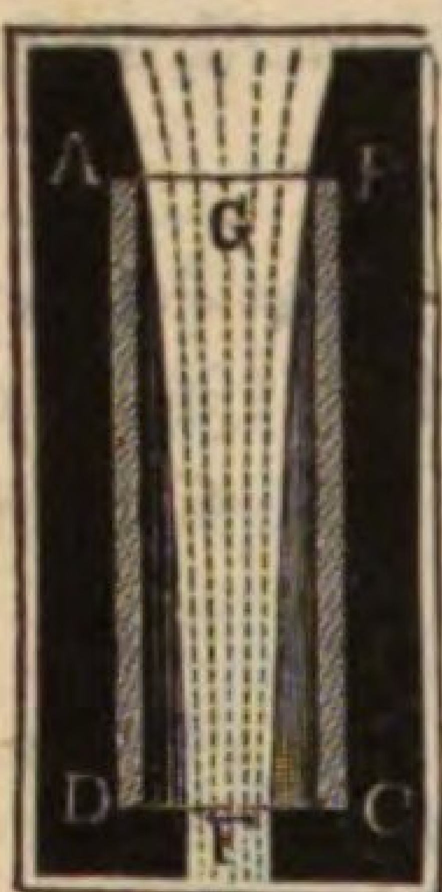
$(h + h_1) Q\gamma = \frac{v^2}{2g} Q\gamma$, oder $h + h_1 = \frac{v^2}{2g}$ und daher die Ausflußgeschwindigkeit $v = \sqrt{2g(h + h_1)} = \sqrt{2gh + c^2}$.

Da bei einem beständig voll erhaltenen Gefäße die zufließende Wassermasse ebenso groß ist, wie die ausfließende Masse Q, so läßt sich $Gc = Fv$ setzen, wofern G den Inhalt des Querschnittes HR (Fig. 478) vom zuströmenden Wasser bezeichnet. Setzen wir hiernach $c = \frac{F}{G} v$, so erhalten wir $h = \frac{v^2}{2g} - \left(\frac{F}{G}\right)^2 \frac{v^2}{2g} = \left[1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2\right] \frac{v^2}{2g}$, und daher

$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2}}.$$

Zu- und Ausflußgeschwindigkeit. Dieser Formel zufolge nimmt die Geschwindigkeit um so mehr zu, je größer das Querschnittsverhältniß $\frac{F}{G}$ ist, nach ihr fällt die Geschwindigkeit am kleinsten, nämlich $= \sqrt{2gh}$ aus, wenn der Querschnitt F der Ausflußöffnung sehr klein ist gegen den Querdurchschnitt G der Zuflußöffnung und es nähert sich dieselbe immer mehr und mehr dem Unendlichen, je kleiner der Unterschied zwischen diesen Mündungen ist. Wenn $F = G$, also $\frac{F}{G} = 1$, so ist $v = \frac{\sqrt{2gh}}{0} = \infty$ und also auch $c = \infty$. Dieser unendliche Werth ist so zu verstehen, daß bei einem bodenlosen Gefäße AC, Fig. 480, das Wasser mit einer unmeßbar großen Geschwindigkeit zu- und abfließen muß, damit der Wasserstrahl GF die Ausmündung F ausfüllt. Setzt man $v = \frac{Gc}{F}$ ein, so erhält man

Fig. 480.



$$h = \left[\left(\frac{G}{F}\right)^2 - 1\right]\frac{c^2}{2g}, \text{ daher } F = \frac{G}{\sqrt{1 + \frac{2gh}{c^2}}},$$

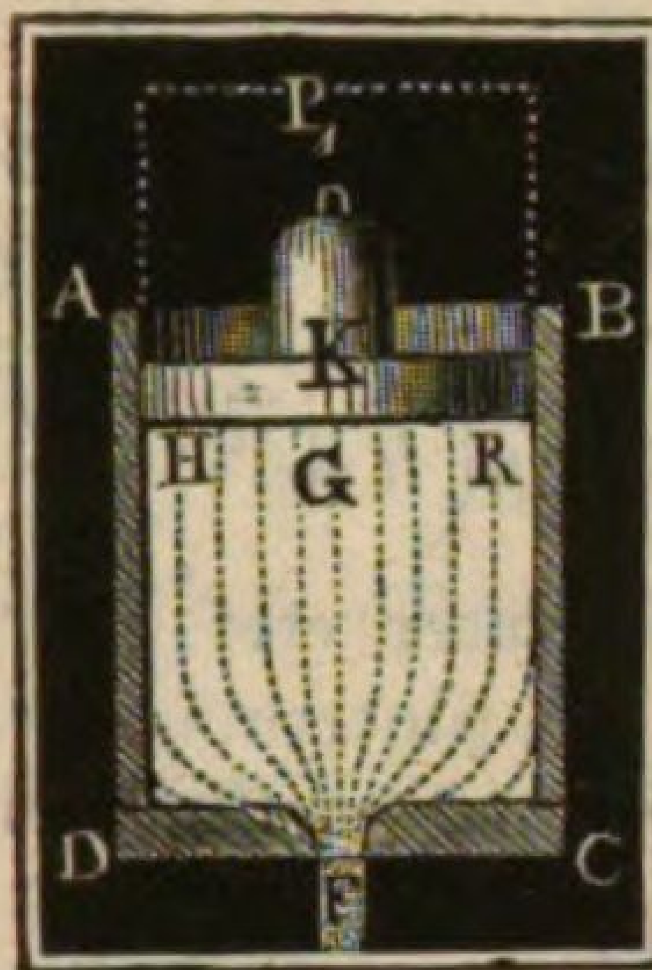
welcher Ausdruck anzeigt, daß der Querschnitt F des ausfließenden Strahles bei einer endlichen Zuflußgeschwindigkeit stets kleiner ist als der Querschnitt G des zufließenden Strahles, und daß er daher die Ausmündung gar nicht ausfüllt, wenn dieselbe größer ist, als $\frac{G}{\sqrt{1 + \frac{2gh}{c^2}}}$.

Anmerkung. Die Richtigkeit der schon von Daniel Bernoulli aufgestellten Formel $v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2}}$ ist später von Vielen in Zweifel gezogen worden; wie unbegründet aber die gemachten Ausstellungen sind, habe ich in der allgemeinen Maschinenencyclopädie, Artikel »Ausfluß«, zu beweisen gesucht.

Beispiel. Wenn aus einem prismatischen Gefäße von 60 Quadratzoll Querschnitt das Wasser durch eine 5 Zoll weite kreisrunde Bodenöffnung bei einer Druckhöhe von 6 Fuß ausfließt, so ist die Geschwindigkeit $v = \frac{7{,}906\sqrt{6}}{\sqrt{1 - \left(\frac{25\pi}{4.60}\right)^2}}$ $= \frac{7{,}906 \;.\; 2{,}449}{\sqrt{1 - (0{,}327)^2}} = \frac{19{,}362}{\sqrt{0{,}8931}} = \frac{19{,}362}{0{,}945} = 20{,}49$ Fuß.

Ausflußgeschwindigkeit, Druck und Dichtigkeit. §. 338. Die gefundenen Formeln gelten nur dann, wenn der Luftdruck auf den Wasserspiegel ebenso groß ist, wie der Druck der Luft gegen die Ausmündung, sind aber diese Drücke verschieden von einander, so hat

Fig. 481.



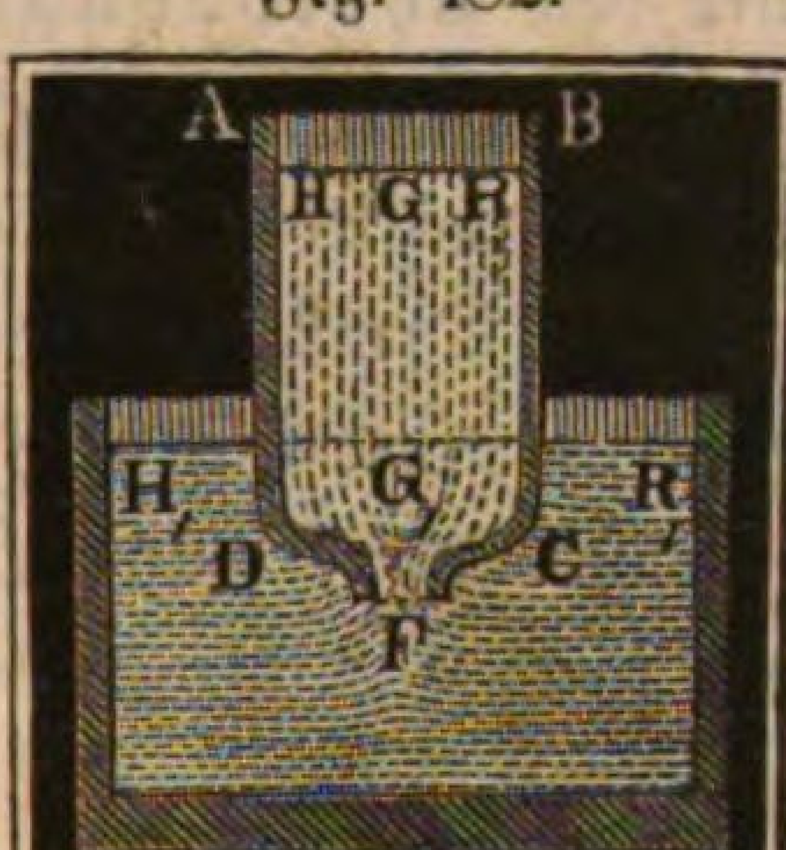
Ausflußgeschwindigkeit Druck und Dichtigkeit

man diese Formeln zu ergänzen. Wird die Oberfläche HR, Fig. 481, durch einen Kolben K mit einer Kraft P_1 gedrückt, welcher Fall z. B. bei Feuerspritzen vorkommt, so denke man sich dieselbe durch den Druck einer Wassersäule ersetzt. Ist h_1 die Höhe dieser Säule, und γ die Dichtigkeit der Flüssigkeit, so setze man also $P_1 = Gh_1\gamma$. Führt man nun statt h die um $h_1 = \frac{P_1}{G\gamma}$ vergrößerte Druckhöhe $h + h_1 = h + \frac{P_1}{G\gamma}$ ein, so bekommt man für die Ausflußgeschwindigkeit: $v = \sqrt{2g\left(h + \frac{P_1}{G\gamma}\right)}$, wobei wir überdieß $\frac{F}{G}$ sehr klein voraussetzen. Bezeichnen wir noch den Druck auf jede Flächeneinheit der Oberfläche G, durch p_1, so haben wir einfacher $\frac{P_1}{G} = p_1$, und daher $v = \sqrt{2g\left(h + \frac{p_1}{\gamma}\right)}$. Bezeichnen wir endlich den Wasserdruck im Niveau der Ausmündung durch p, so können wir auch setzen $p = \left(h + \frac{p_1}{\gamma}\right)\gamma$, also $h + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{p}{\gamma}$, weshalb $v = \sqrt{2g\frac{p}{\gamma}}$ folgt.

Hiernach wächst also die Ausflußgeschwindigkeit wie die Quadratwurzel aus der Pressung auf die Flächeneinheit, und umgekehrt wie die Quadratwurzel aus der Dichtigkeit der Flüssigkeit. Bei gleichem Drucke fließt also z. B. die 4mal so schwere Flüssigkeit $\frac{1}{2}$mal so schnell aus, als die einfach schwere Flüssigkeit. Da die Luft 770mal so leicht als Wasser ist, so würde sie, wenn sie unelastisch wäre, $\sqrt{770} = 27\frac{3}{4}$mal so schnell ausfließen, als Wasser.

Fließt das Wasser nicht frei, sondern unter Wasser aus, so tritt wegen des Gegendruckes eine Verminderung der Ausflußgeschwindigkeit ein. Ist die Mündung F des Gefäßes AC, Fig. 482, um die Höhe $FG = h$ unter dem Wasserspiegel HR des Oberwassers, und um die Höhe $FG_1 = h_1$ unter dem Wasserspiegel H_1R_1 des Unterwassers, so hat man von oben nach unten die Pressung $p = h\gamma$ und von unten nach oben die Gegenpressung $p_1 = h_1\gamma$, daher die Kraft des Ausflusses: $p - p_1 = (h - h_1)\gamma$, und die Ausflußgeschwindigkeit: $v = \sqrt{2g\left(\frac{p-p_1}{\gamma}\right)} = \sqrt{2g(h-h_1)}$.

Fig. 482.



Ausflußgeschwindigkeit, Druck und Dichtigkeit.

Beim Ausflusse unter Wasser ist also der Niveauabstand $h - h_1$ zwischen den Wasserspiegeln als Druckhöhe anzusehen.

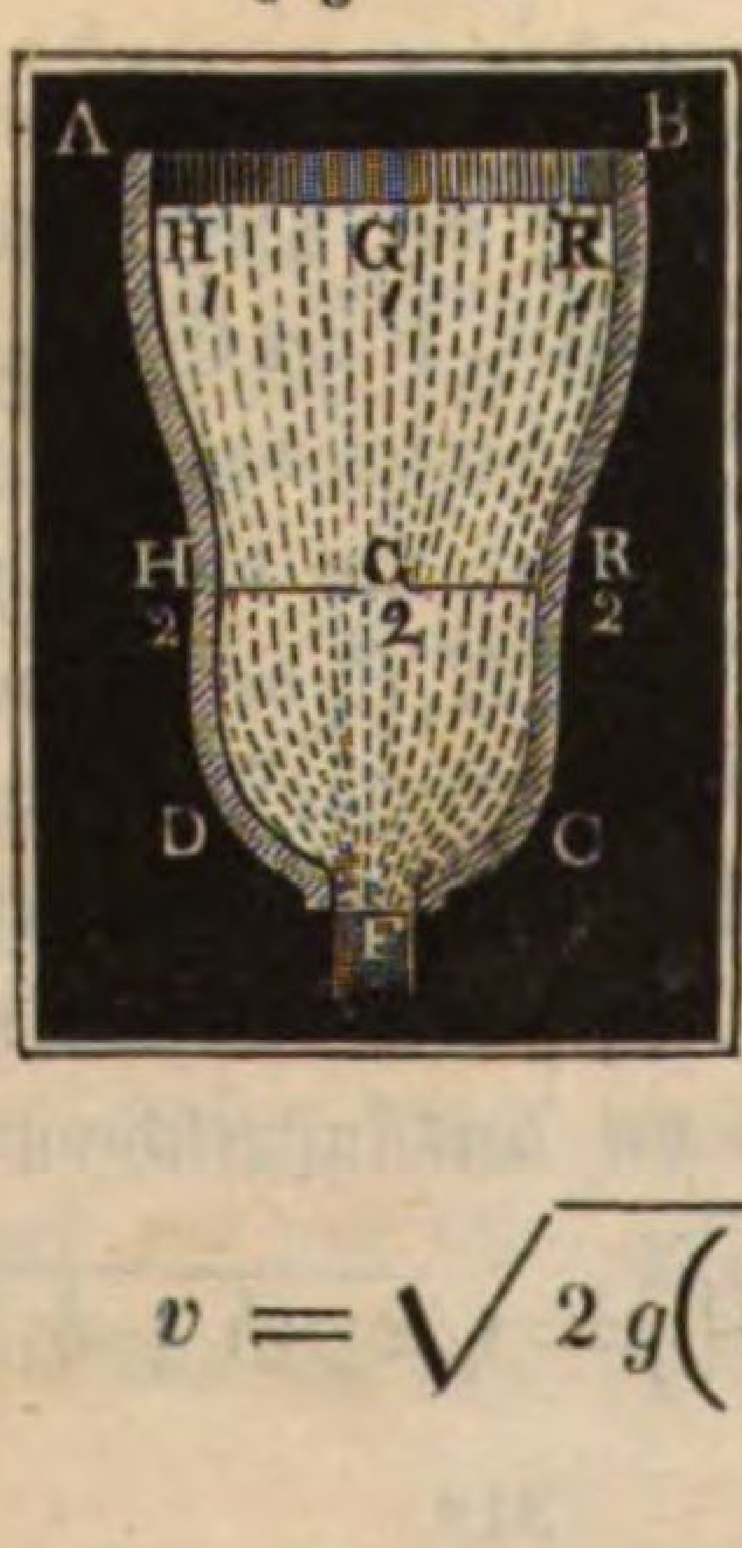
Wird das Wasser auf der Seite der Ausmündung durch die Kraft p und auf der Seite der Einmündung oder des Wasserspiegels durch die Kraft p_1 gepreßt, so hat man nun allgemein $v = \sqrt{2g\left(h + \frac{p_1 - p}{\gamma}\right)}$.

Beispiele. 1) Wenn der Kolben im 12 Zoll weiten Cylinder oder Stiefel einer Feuerspritze mit 3000 Pfd. Kraft niedergedrückt wird und Hindernisse in den Röhren und Schläuchen nicht vorkämen, so würde das Wasser mit der Geschwindigkeit $v = \sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma}} = \sqrt{2g\frac{P_1}{G\gamma}} = 7{,}906\sqrt{\frac{3000}{\frac{\pi}{4}\cdot 66}}$ $= 7{,}906 \cdot \sqrt{\frac{2000}{11\pi}} = 60{,}14$ Fuß durch das Mundstück am Schlauche ausströmen und, vertikal gerichtet, auf die Höhe $h = 0{,}016 \cdot v^2 = 57{,}9$ Fuß steigen.

2) Wenn das Wasser in einen luftverdünnten Raum einströmt, z. B. in den Condensator einer Dampfmaschine, während es von oben oder an seiner freien Oberfläche von der Atmosphäre gedrückt wird, so ist die letzte Formel $v = \sqrt{2g\left(h + \frac{p_1 - p}{\gamma}\right)}$ für die Ausflußgeschwindigkeit in Anwendung zu bringen. Ist die Druckhöhe des Wassers $h = 3$ Fuß, der äußere Barometerstand 27 und der innere 4 Paris. Zoll, so hat man $\frac{p_1 - p}{\gamma} = 27 - 4 = 23$ Paris. Zoll $= \frac{23}{12} \cdot 1{,}035 = 1{,}9837$ preuß. Fuß, oder als Wassersäule $= 13{,}6 \cdot 1{,}9837 = 26{,}98$ Fuß, und es folgt die Geschwindigkeit des in den inneren oder luftverdünnten Raum einströmenden Wassers: $v = 7{,}906\sqrt{3 + 26{,}98} = 7{,}906\sqrt{29{,}98} = 43{,}29$ Fuß. 3) Steht das Wasser in der Speiseröhre eines Dampfkessels 12 Fuß über der Oberfläche des Wassers im Kessel und ist der Dampfdruck 20 Pfd., der Luftdruck aber nur 15 Pfd. auf den Quadratzoll, so beträgt die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser in den Kessel eintritt, $v = 7{,}906\sqrt{12 + \frac{(15-20) \cdot 144}{66}} = 7{,}906\sqrt{12 - \frac{5 \cdot 144}{66}}$ $= 7{,}906\sqrt{1{,}0909} = 8{,}25$ Fuß.

Hydraulischer Druck.

Fig. 483.



§. 339. Wenn das in einem Gefäße eingeschlossene Wasser in Bewegung ist, so drückt es gegen die Gefäßwände schwächer, als wenn es in Ruhe bleibt. Man hat daher den hydrodynamischen oder hydraulischen Wasserdruck von dem hydrostatischen Drucke des Wassers zu unterscheiden. Ist p_1 der Druck auf jede Einheit des Wasserspiegels $H_1R_1 = G_1$, Fig. 483, p der Druck außerhalb der Mündung F, und h die Druckhöhe FG_1, so hat man für die Ausflußgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{2g\left(h + \frac{p_1 - p}{\gamma}\right)} : \sqrt{1 - \left(\frac{F}{G_1}\right)^2}, \text{ oder}$$

$h + \frac{p_1 - p}{\gamma} = \left[1 - \left(\frac{F}{G_1}\right)^2\right] \frac{v^2}{2g}$; ist ferner in einem andern Querschnitte $H_2 R_2 = G_2$, welcher um die Höhe $FG_2 = h_1$ über der Mündung steht, der Druck $= p_2$, so hat man ebenso

Hydraulischer Druck.

$h_1 + \frac{p_2 - p}{\gamma} = \left[1 - \left(\frac{F}{G_2}\right)^2\right] \frac{v^2}{2g}$. Subtrahirt man beide Ausdrücke von einander, so folgt

$h - h_1 + \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \left[\left(\frac{F}{G_2}\right)^2 - \left(\frac{F}{G_1}\right)^2\right] \frac{v^2}{2g}$, oder, wenn man die Druckhöhe $G_1 G_2$ der Schicht $H_2 R_2 = G_2$ durch h_2 bezeichnet, das Maaß des hydraulischen Wasserdruckes in $H_2 R_2$:

$$\frac{p_2}{\gamma} = h_2 + \frac{p_1}{\gamma} - \left[\left(\frac{F}{G_2}\right)^2 - \left(\frac{F}{G_1}\right)^2\right] \frac{v^2}{2g}.$$

Nun ist aber noch $\frac{Fv}{G_1}$ die Geschwindigkeit v_1 des Wassers in der Oberfläche G_1 und $\frac{Fv}{G_2}$ die Geschwindigkeit v_2 des Wassers im Querschnitte G_2, daher läßt sich einfacher $\frac{p_2}{\gamma} = \frac{p_1}{\gamma} + h_2 - \left(\frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}\right)$ setzen.

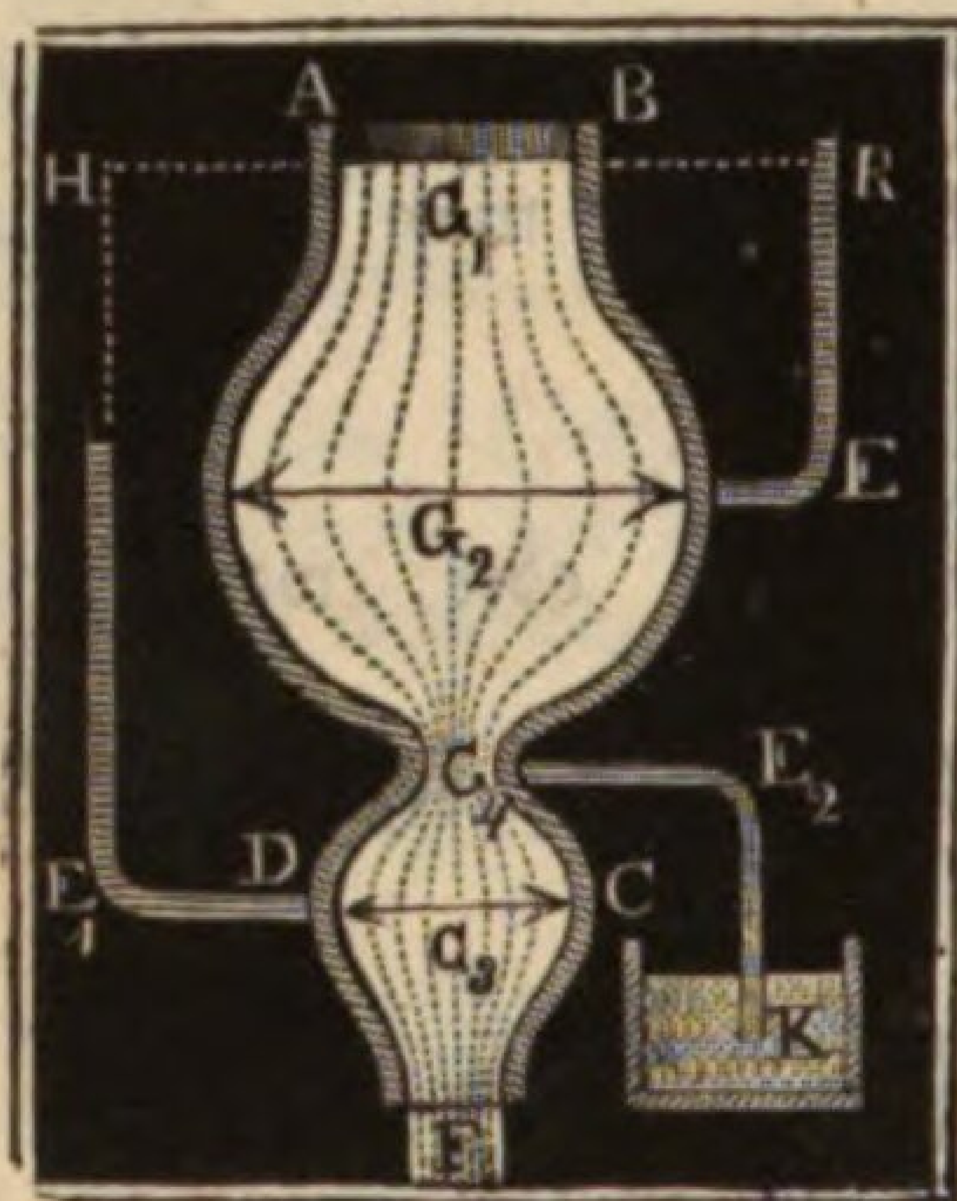
Es ist also hiernach die hydraulische Druckhöhe $\frac{p_2}{\gamma}$ an irgend einer Stelle im Gefäße gleich der hydrostatischen Druckhöhe $\frac{p_1}{\gamma} + h_2$ vermindert um die Differenz der Geschwindigkeitshöhen des Wassers an dieser und an der Eintrittsstelle. Ist die freie Oberfläche G_1 des Wassers groß, so kann man die Zuflußgeschwindigkeit außer Acht lassen und daher $\frac{p_2}{\gamma} = \frac{p_1}{\gamma} + h_2 - \frac{v_2^2}{2g}$ setzen, und es ist hiernach die hydraulische Druckhöhe um die Geschwindigkeitshöhe kleiner, als die hydrostatische Druckhöhe. Je schneller also das Wasser in einer Röhrenleitung fließt, je schwächer drückt dasselbe gegen die Röhrenwand. Aus diesem Grunde zerspringen die Röhren erst oft dann, oder lassen erst dann Wasser durch, wenn die Bewegung des Wassers in denselben gehemmt wird, wenn sich die Röhren verstopfen u. s. w.

Durch einen in Fig. 484 (s. folg. S.) abgebildeten Ausflußapparat *ABCD* kann man die Verschiedenheit zwischen dem hydraulischen und dem hydrostatischen Drucke vor Augen führen. Führt man von dem Querschnitte G_2 ein Röhrchen *ER* in die Höhe, so füllt sich dasselbe mit Wasser, und dieses steigt in demselben über das Niveau des Wasserspiegels,

Hydraulischer Druck.

wenn $G_2 > G_1$, also $v_2 < v_1$, denn da der Druck p_1 auf den Wasserspiegel durch den Luftdruck an der Röhrenmündung aufgehoben wird, so läßt sich die den Druck in G_2 messende Höhe

Fig. 484.



$$x = \frac{p_2}{\gamma} = h_2 - \left(\frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}\right)$$

setzen, und es ist also $x > h_2$, wenn $\frac{v_2^2}{2g} < \frac{v_1^2}{2g}$ ist. Ist dagegen der Querschnitt $G_3 < G_1$, fließt also das Wasser durch G_3 schneller als durch G_1, so hat man die Höhe der Wassersäule in dem bei G_3 einmündenden Röhrchen E_1:

$y = h_3 - \left(\frac{v_3^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}\right)$ kleiner als h_3

und es reicht sonach dieselbe nicht bis zum Niveau HR von G_1. Ist endlich G_4 sehr klein und also die entsprechende Geschwindigkeit v_4 sehr groß, so kann sogar $\frac{v_4^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} > h_4$, und daher die entsprechende hydraulische Druckhöhe z negativ sein, d. h. die Luft von außen mehr drücken, als das Wasser von innen. Dann wird also in einem nach unten geführten und unter Wasser ausmündenden Röhrchen E_2K eine Wassersäule emporsteigen, welche in Vereinigung mit dem Wasserdrucke dem äußeren Atmosphärendrucke das Gleichgewicht hält. Ist dieses Röhrchen kurz, so steigt sogar das zu diesem Zwecke vielleicht gefärbte Wasser aus dem untergesetzten Gefäße K durch das Röhrchen empor, tritt in das Ausflußreservoir und gelangt bei F mit zum Ausflusse.

Fig. 485.

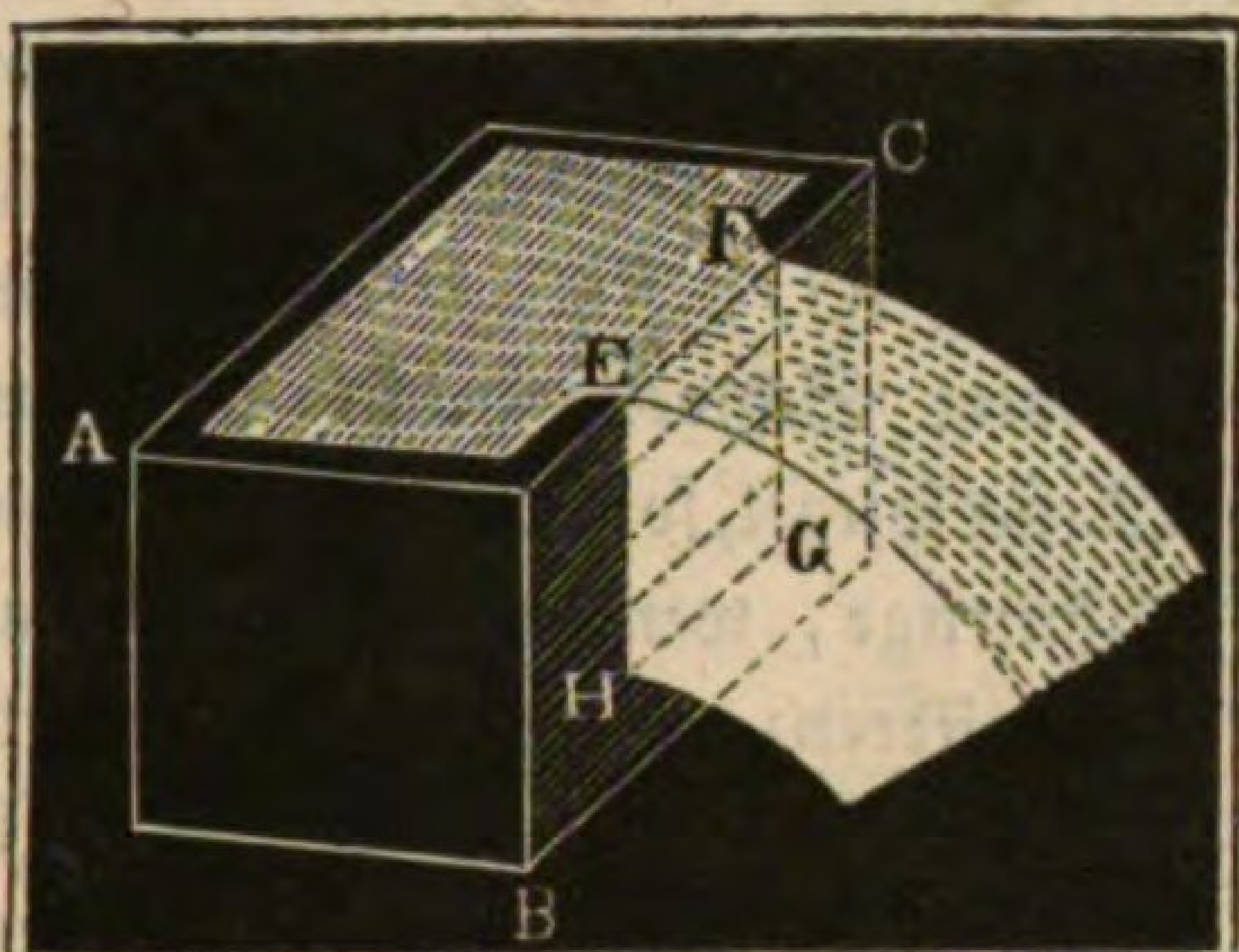


Anmerkung. Besteht das Ausflußgefäß ACE, Fig. 485, aus einem weiten Reservoir AC und aus einer engeren vertikalstehenden Röhre CE, so ist der hydraulische Druck an allen Stellen dieser Röhre negativ. Läßt man den Atmosphärendruck p_1 unberücksichtigt, so ist der Druck des Wassers in der Nähe der Ausmündung F, $=$ Null zu setzen, weil hier die ganze Druckhöhe $GF = h$ auf die Erzeugung der Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$ verwendet wird, dagegen ist an einer Stelle D_1E_1 um die Höhe $G_1G = h_1$ unter dem Wasserspiegel die hydraulische Druckhöhe $= h_1 - h = -(h - h_1)$ negativ, wenn also ein Loch in diese Röhre gebohrt wird, so fließt kein Wasser heraus, es wird vielmehr Luft eingesaugt, die bei F mit zum Ausflusse gelangt. Dieser negative Druck ist unmittelbar unter dem Gefäße am größten, weil hier h_1 am kleinsten ausfällt.

§. 340. Mit Hülfe der Formel $Q = Fv = F\sqrt{2gh}$ läßt sich die in

einer Secunde ausfließende Wassermenge nur dann unmittelbar berechnen, wenn die Mündung horizontal ist, weil nur hier im ganzen Querschnitte F einerlei Geschwindigkeit vorkommt; hat aber der Querschnitt der Mündung eine Neigung gegen den Horizont, befindet sich z. B. die Oeffnung in einer Seitenwand des Gefäßes, so fließen die in verschiedenen Tiefen befindlichen Wasserelemente mit verschiedenen Geschwindigkeiten aus, und es kann die Wassermenge Q nicht als ein Prisma angesehen werden und daher auch die Formel $Q = Fv = F\sqrt{2gh}$ nicht unmittelbar zur Anwendung kommen. Den einfachsten Fall dieser Art bietet der Ausfluß durch einen **Wandeinschnitt** oder der sogenannte **Ueberfall**, Fig. 486, dar. Dieser Wandeinschnitt bildet eine rectanguläre Ausflußöffnung $EFGH$, deren Breite $EF = GH$ durch b und Höhe $EH = FG$ durch h bezeichnet werden möge. Zerlegen wir diese Fläche bh durch Horizontallinien in eine sehr große Anzahl n gleich breiter Streifen, so können wir innerhalb eines jeden einerlei Geschwindigkeit voraussetzen. Da, von oben nach unten gegangen, die Druckhöhen dieser Streifen Rectanguläre Seitenöffnung.

Fig. 486.



$\frac{h}{n}, \frac{2h}{n}, \frac{3h}{n}$ u. s. w. sind, so hat man die entsprechenden Geschwindigkeiten $\sqrt{2g\frac{h}{n}}, \sqrt{2g\cdot\frac{2h}{n}}, \sqrt{2g\cdot\frac{3h}{n}}$, und da ferner der Inhalt eines Streifens: $= b\cdot\frac{h}{n} = \frac{bh}{n}$ ist, so hat man die Wassermengen: $\frac{bh}{n}\sqrt{2g\frac{h}{n}}, \frac{bh}{n}\sqrt{2g\cdot\frac{2h}{n}}, \frac{bh}{n}\sqrt{2g\cdot\frac{3h}{n}}$ u. s. w.; und folglich die Wassermenge durch den ganzen Querschnitt

$$Q = \frac{bh}{n}\left(\sqrt{2g\frac{h}{n}} + \sqrt{2g\cdot\frac{2h}{n}} + \sqrt{2g\cdot\frac{3h}{n}} + \ldots\right)$$

$$= \frac{bh\sqrt{2gh}}{n\sqrt{n}}\left(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n}\right).$$

Nun ist aber, wie im »Ingenieur, Seite 145,« angegeben wird,

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n}, \text{ oder}$$

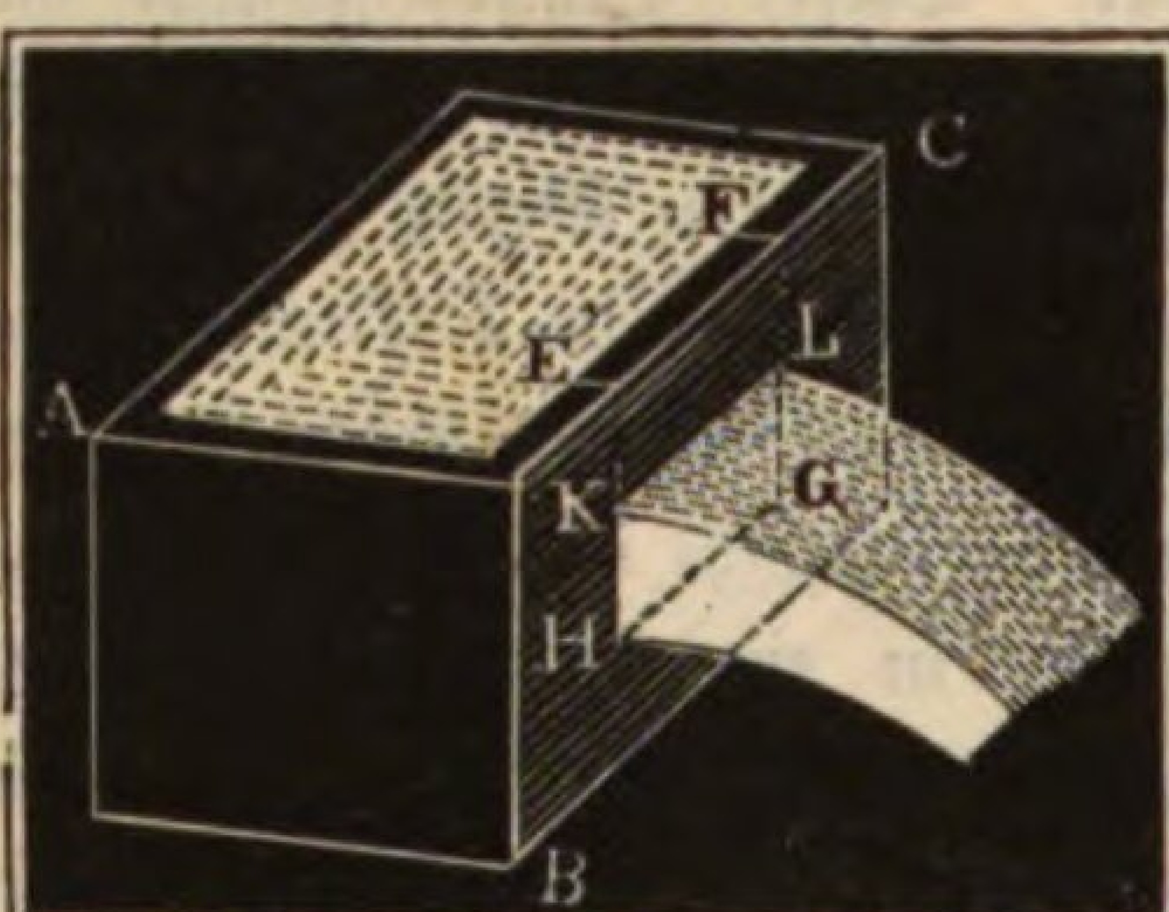
$$1^{1/2} + 2^{1/2} + 3^{1/2} + \ldots + n^{1/2} = \frac{n^{1+1/2}}{1+1/2} = \tfrac{2}{3}n^{3/2} = \tfrac{2}{3}n\sqrt{n};$$

daher folgt die in Frage stehende Wassermenge

Rectangulare Seitenöffnung. $$Q = \frac{bh\sqrt{2gh}}{n\sqrt{n}} \cdot {}^2/_3 n\sqrt{n} = {}^2/_3 bh\sqrt{2gh} = {}^2/_3 b\sqrt{2gh^3}.$$

Versteht man unter der mittleren Geschwindigkeit v diejenige, welche an allen Stellen vorhanden sein müßte, damit ebenso viel Wasser ausfließt, als bei den verschiedenen Ausflußgeschwindigkeiten innerhalb des ganzen Querprofiles, so läßt sich setzen: $Q = bh \cdot v$, und es folgt sonach $v = {}^2/_3 \sqrt{2gh}$, d. h. es ist die mittlere Geschwindigkeit des durch einen rectangulären Wandeinschnitt ausfließenden Wassers zwei Drittel von der Geschwindigkeit an der Schwelle oder unteren Kante des Einschnittes.

Fig. 487



Reicht die rectanguläre Ausflußöffnung KG, Fig. 487, mit horizontaler Schwelle nicht bis zum Wasserspiegel, so findet man die Ausflußmenge, wenn man dieselbe als die Differenz zweier Wandeinschnitte $EFGH$ und $EFLK$ ansieht. Ist daher h_1 die Tiefe HE der unteren und $KE = h_2$ die der oberen Kante, so hat man die Ausflußmenge dieser Einschnitte: ${}^2/_3\, b\sqrt{2gh_1^3}$, und ${}^2/_3\, b\sqrt{2gh_2^3}$, daher das Wasserquantum für die rectanguläre Oeffnung $GHKL$:

$$Q = {}^2/_3 b\sqrt{2gh_1^3} - {}^2/_3 b\sqrt{2gh_2^3} = {}^2/_3 b\sqrt{2g}\,(h_1^{3/2} - h_2^{3/2}),$$

und die mittlere Ausflußgeschwindigkeit

$$v = \frac{Q}{b\,(h_1 - h_2)} = {}^2/_3\sqrt{2g} \cdot \frac{h_1^{3/2} - h_2^{3/2}}{h_1 - h_2}.$$

Ist h die mittlere Druckhöhe $\frac{h_1 + h_2}{2}$, oder die Tiefe des Mittelpunktes der Oeffnung unter dem Wasserspiegel und a die Oeffnungshöhe $HK = h_1 - h_2$, so kann man setzen:

$$v = {}^2/_3\sqrt{2g} \cdot \frac{\left(h + \frac{a}{2}\right)^{3/2} - \left(h - \frac{a}{2}\right)^{3/2}}{a}, \text{ oder annähernd}$$

$$= \left[1 - {}^1/_{96}\left(\frac{a}{h}\right)^2\right]\sqrt{2gh}.$$

Beispiel. Wenn eine rectanguläre Ausflußöffnung 3 Fuß breit und $1^1/_4$ Fuß hoch ist, und die untere Kante um $2^3/_4$ Fuß unter dem Wasserspiegel liegt, so ist die Ausflußmenge $Q = {}^2/_3 \cdot 7{,}906 \cdot 3\,(2{,}75^{3/2} - 1{,}5^{3/2})$ $= 15{,}812\,(4{,}560 - 1{,}837) = 15{,}812 \cdot 2{,}723 = 43{,}06$ Cubikfuß. Nach der

Näherungsformel ist die mittlere Ausflußgeschwindigkeit Rectanguläre Seitenöffnung

$v = \left[1 - \frac{1}{96}\left(\frac{1,25}{2,125}\right)^2\right] . 7,906 \sqrt{2,125} = (1 - 0,0036) . 11,525$

$= 11,525 - 0,042 = 11,483$ Fuß, und daher die Ausflußmenge

$Q = 3 . \frac{5}{4} . 11,483 = 43,06$ Cubikfuß.

Anmerkung. Wenn der Wandeinschnitt unter dem Winkel δ gegen den Horizont geneigt ist, so hat man die Mündungshöhe $\frac{h_1 - h_2}{sin.\ \delta}$ statt ihrer Vertikalprojection einzuführen, weshalb $Q = \frac{2}{3} \frac{b\sqrt{2g}}{sin.\ \delta}(\sqrt{h_1^3} - \sqrt{h_2^3})$ zu setzen ist. Wenn der Querschnitt des Ausflußreservoirs parallel zur Mündung nicht bedeutend größer ist, als der Querschnitt der Mündung, so hat man die Geschwindigkeit $v_1 = \frac{F}{G} v$ des ankommenden Wassers zu berücksichtigen und deshalb zu setzen:

$$Q = \frac{2}{3} b \sqrt{2g}\left[\left(h_1 + \frac{v_1^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(h_2 + \frac{v_1^2}{2g}\right)^{3/2}\right].$$

§. 341. Außer rectangulären Seitenöffnungen kommen noch trianguläre und kreisförmige Mündungen in der Praxis vor. Handeln wir zunächst von dem Ausflusse durch eine trianguläre Mündung EFG, Fig. 488, mit horizontaler Basis, deren Spitze E im Wasserspiegel liegt. Setzen wir die Basis $FG = b$ und die Höhe $EF = h$, theilen wir die letztere in n gleiche Theile und führen wir durch die Theilpunkte Parallellinien zur Basis, so zerlegen wir die ganze Fläche in schmale Elemente von den Inhalten $\frac{b}{n} . \frac{h}{n}, \frac{2b}{n} . \frac{h}{n}, \frac{3b}{n} . \frac{h}{n}$ u. s. w., und den Druckhöhen $\frac{h}{n}, \frac{2h}{n}, \frac{3h}{n}$ u. s. w. Für diese folgen die Ausflußmengen: Trianguläre Seitenöffnung.

Fig. 488.



$\frac{bh}{n^2}\sqrt{2g\frac{h}{n}}, \frac{2bh}{n^2}\sqrt{2g.\frac{2h}{n}}, \frac{3bh}{n^2}\sqrt{2g.\frac{3h}{n}}$ u. s. w., und es ergiebt sich durch Summation die Ausflußmenge für die ganze Mündung

$$Q = \frac{bh}{n^2}\sqrt{2g\frac{h}{n}}\ (1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + \ldots + n\sqrt{n})$$

$= \frac{bh\sqrt{2gh}}{n^2\sqrt{n}}(1 + 2^{3/2} + 3^{3/2} + \ldots + n^{3/2})$, oder da die Reihe in der Parenthese $= \frac{n^{3/2} + 1}{3/2 + 1} = \frac{2}{5} n^{5/2}$ giebt,

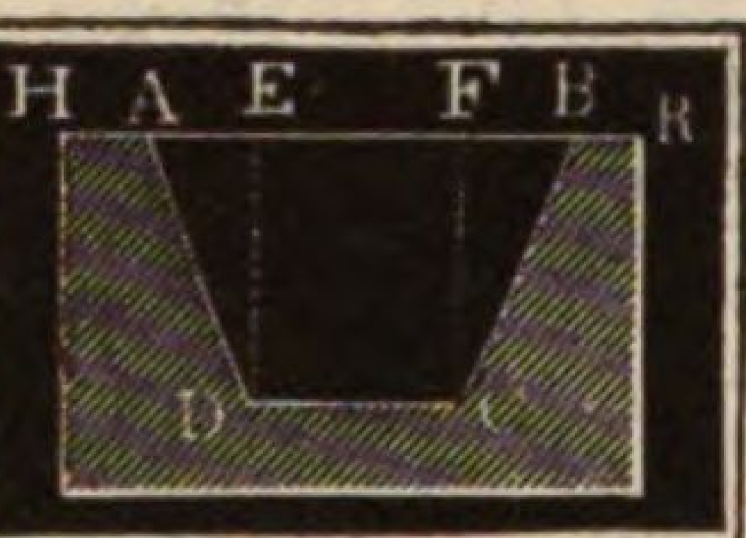
$Q = \frac{2}{5} bh\sqrt{2gh} = \frac{2}{5} b\sqrt{2gh^3}$. Liegt die Basis der Mündung, EGK im Wasserspiegel und die Spitze um h tiefer, so hat man, da durch

Trianguläre Seitenöffnung.

das Rechteck $EFGK$, $\frac{2}{3}\, b h\sqrt{2gh}$ ausfließt, die Wassermenge

$$Q_1 = \frac{2}{3} b h\sqrt{2gh} - \frac{2}{5}\, b h\sqrt{2gh} = \frac{4}{15}\, b h\sqrt{2gh}.$$

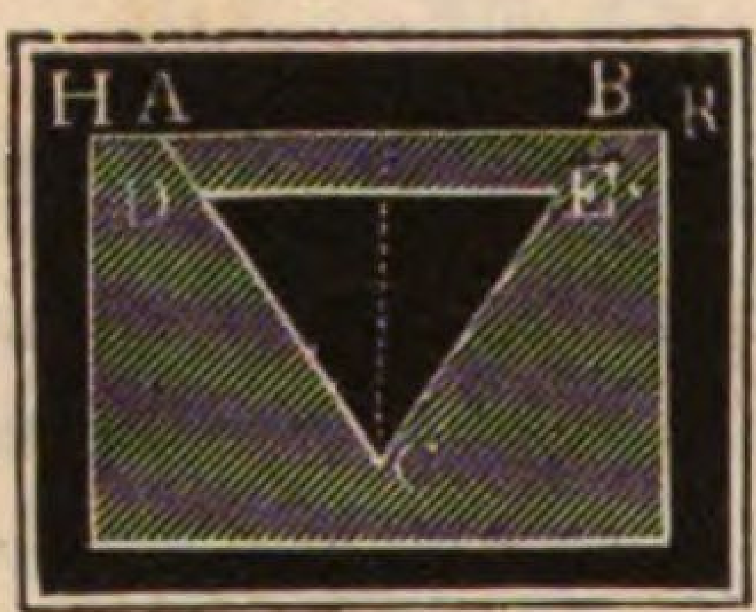
Fig. 489.



Durch das Trapez $ABCD$, Fig. 489, dessen obere im Wasserspiegel liegende Basis $AB = b_1$ und dessen untere Basis $CD = b_2$ und Höhe $DE = h$ ist, findet man die Wassermenge durch Zusammensetzung aus einem Rechtecke und zwei Dreiecken, nämlich:

$$Q = \frac{2}{3} b_2 h\sqrt{2gh} + \frac{4}{15}(b_1 - b_2)\, h\sqrt{2gh}$$
$$= \frac{2}{15}(2b_1 + 3b_2)\, h\sqrt{2gh}.$$

Fig. 490.



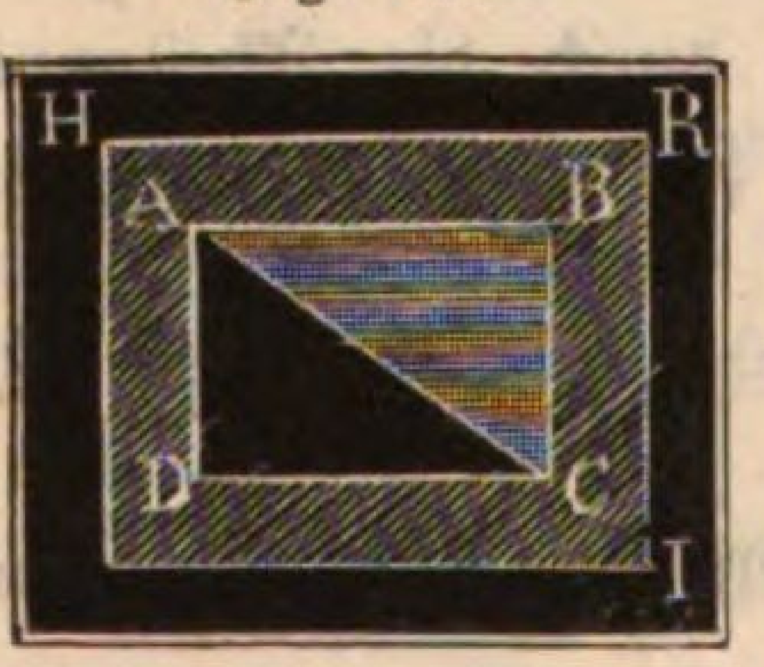
Ferner folgt noch die Ausflußmenge für ein Dreieck CDE, Fig. 490, dessen Basis $DE = b_1$ um die Höhe h_1 und dessen Spitze C um h von dem Wasserspiegel absteht:

Q = Wassermenge durch ABC minus Wassermenge durch AE

$$= \frac{4}{15} bh\sqrt{2gh} - \frac{2}{15}(2b + 3b_1)h_1\sqrt{2gh_1}$$
$$= \frac{2}{15}\sqrt{2g}[2b\,(h^{3/2} - h_1^{3/2}) - 3\,b_1 h_1^{3/2}].$$

Da sich die Breite $AB = b$ durch die Proportion $b : b_1 = h : (h - h_1)$ bestimmen läßt, so folgt

Fig. 491.

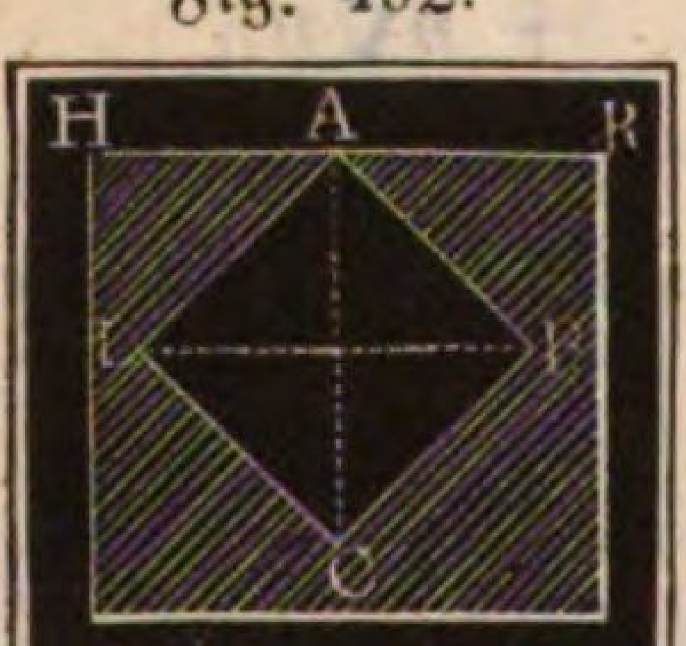


$$Q = \frac{2\sqrt{2g}\,.\,b_1}{15}\left(\frac{2h\,(h^{3/2} - h_1^{3/2})}{h - h_1} - 3h_1^{3/2}\right)$$
$$= \frac{2\sqrt{2g}.b_1}{15}\left(\frac{2\,h^{5/2} - 5\,h h_1^{3/2} + 3\,h_1^{5/2}}{h - h_1}\right).$$

Endlich folgt noch für ein Dreieck ACD, Fig. 491, dessen Spitze über der Basis liegt, die Ausflußmenge

$$Q = \frac{2}{3}\sqrt{2g}.b_1(h^{3/2} - h_1^{3/2}) - \frac{2\sqrt{2g}\,.\,b_1}{15}\left(\frac{2\,h^{5/2} - 5\,h h_1^{3/2} + 3\,h_1^{5/2}}{h - h_1}\right)$$
$$= \frac{2\sqrt{2g}.\,b_1}{15}\left(\frac{3\,h^{5/2} - 5\,h_1 h^{3/2} + 2\,h_1^{5/2}}{h - h_1}\right).$$

Fig. 492.



Beispiel. Welche Wassermasse fließt durch das Quadrat $ABCD$, Fig. 492, mit vertikaler Diagonale AC von 1 Fuß Länge, wenn der Eckpunkt A bis zum Wasserspiegel reicht. Die obere Hälfte dieses Quadrats giebt die Ausflußmenge $Q = \frac{2}{5}\, b\sqrt{2gh^3} = \frac{2}{5}\,.\,1\,.\,7{,}906\,\sqrt{\frac{1}{8}} = 1{,}581\,.\,0{,}7071 = 1{,}118$ Cubikfuß, die untere aber die Wassermenge

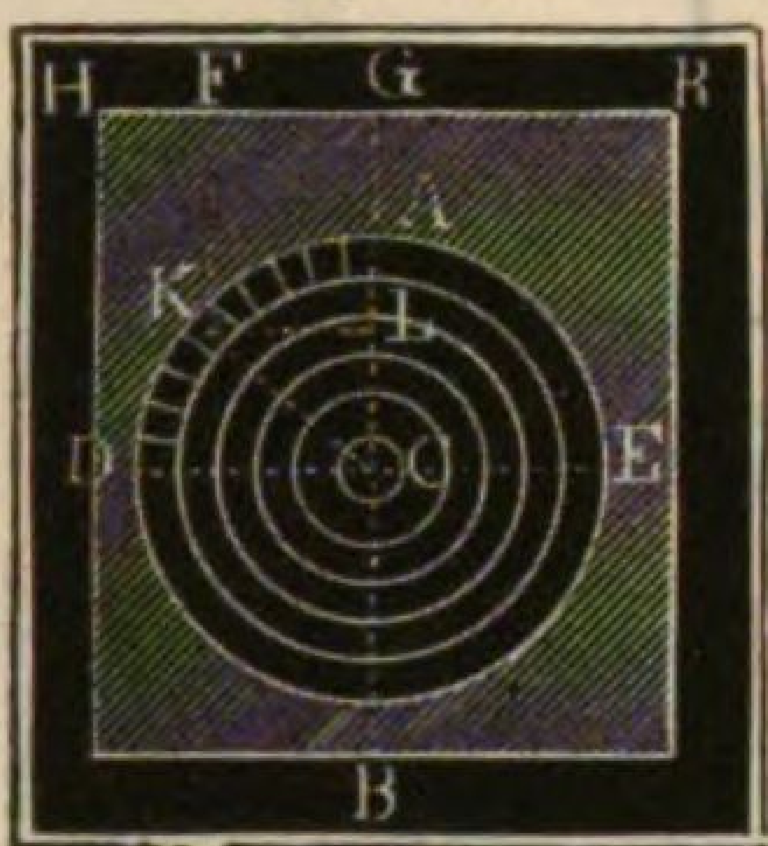
$$Q_1 = \frac{2b\sqrt{2g}}{15}\left(\frac{2h^{5/2} - 5\,h\,h_1^{3/2} + 3h_1^{5/2}}{h - h_1}\right) = \frac{2\,.\,7{,}906}{15}\left(\frac{2 - 5(1/2)^{3/2} + 3(1/2)^{5/2}}{1 - 1/2}\right)$$

$$= \frac{31{,}624}{15}(2 - 1{,}7678 + 0{,}5303) = \frac{31{,}624\,.\,0{,}7625}{15} = 1{,}608 \text{ Cubikfuß},$$

folglich fließt durch die ganze Mündung die Wassermenge

$$Q = 1{,}118 + 1{,}608 = 2{,}726 \text{ Cubikfuß}.$$

Fig. 493.



§. 342. Für eine **kreisförmige Mündung** AB, Fig. 493, bestimmt sich die Ausflußmenge nun durch eine auf folgende Weise zu ermittelnde Näherungsformel. Kreisförmige Seitenöffnung. Zerlegen wir den Kreis durch concentrische Kreise in gleich schmale Ringe, und jeden Ring in lauter gleiche, als Parallelogramme anzusehende Elemente. Ist nun r der Halbmesser eines solchen Ringes, b dessen Breite und n die Anzahl seiner Elemente, so hat man die Größe eines Ringelementes K, $= \frac{2\pi r b}{n}$. Ist h die Tiefe CG des Mittelpunktes C unter dem Wasserspiegel HR, und φ der Winkel ACK, um welchen ein Element K vom höchsten Punkte A des Ringes absteht, so hat man die Druckhöhe dieses Elementes $KF = CG - CL = h - r\cos.\varphi$, und daher die Ausflußmenge dieses Elementes $= \frac{2\pi r b}{n}\sqrt{2g(h - r\cos.\varphi)}$. Nun hat man aber $\sqrt{h - r\cos.\varphi}$

$$= \sqrt{h}\left[1 - \tfrac{1}{2}\frac{r}{h}\cos.\varphi - \tfrac{1}{8}\left(\frac{r}{h}\right)^2 \cos.\varphi^2 + \ldots\right]$$

$$= \sqrt{h}\left[1 - \tfrac{1}{2}\frac{r}{h}\cos.\varphi - \tfrac{1}{16}\left(\frac{r}{h}\right)^2 (1 + \cos.2\varphi) + \ldots\right],$$

daher folgt die Ausflußmenge eines Elementes:

$$= \frac{2\pi r b}{n}\sqrt{2gh}\left[1 - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{r}{h}\cos.\varphi - \tfrac{1}{16}\left(\frac{r}{h}\right)^2 (1 + \cos.2\varphi) + \ldots\right].$$

Die Ausflußmenge des ganzen Ringes ergiebt sich, wenn man in der Parenthese statt 1, $n\,.\,1 = n$, statt $\cos.\,.\,\varphi$ die Summe aller Cosinus φ von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$, und statt $\cos.2\varphi$ die Summe aller Cosinus 2φ von $2\varphi = 0$ bis $2\varphi = 4\pi$ nimmt. Da aber die Summe aller Cosinus eines Vollkreises = Null ist, so fallen diese Cosinus ganz aus, und es folgt die Ausflußmenge für den Ring:

$$= \frac{2\pi r b}{n}\sqrt{2gh}\left[n - \tfrac{1}{16}\left(\frac{r}{h}\right)^2 . n - \ldots\right]$$

$$= 2\pi r b\sqrt{2gh}\left[1 - \tfrac{1}{16}\left(\frac{r}{h}\right)^2 - \ldots\right]$$

Kreisförmige Seitenöffnung.

Setzt man jetzt statt $b = \frac{r}{m}$ und statt $r, \frac{r}{m}, \frac{2r}{m}, \frac{3r}{m}$, bis $\frac{mr}{m}$, so bekommt man die Ausflußmenge aller die ganze Kreisfläche ausmachenden Ringe, und es folgt zuletzt das Ausflußquantum des ganzen Kreises:

$$Q = 2\pi r\sqrt{2gh}\left[\frac{r}{m^2}(1+2+3+..+m) - \frac{1}{16}\frac{r^3}{m^4h^2}(1^3+2^3+3^3+..+m^3)\right]$$

$$= 2\pi r\sqrt{2gh}.\left(\frac{r}{m^2}\cdot\frac{m^2}{2} - \frac{1}{16}\cdot\frac{r^3}{m^4h^2}\cdot\frac{m^4}{4}\right)$$

$$= \pi r^2\sqrt{2gh}\left[1 - \frac{1}{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2 - ..\right], \text{ oder genauer}$$

$$Q = \pi r^2\sqrt{2gh}\left[1 - \frac{1}{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2 - \frac{5}{1024}\left(\frac{r}{h}\right)^4 - ..\right].$$

Reicht der Kreis bis zum Wasserspiegel, so ist

$Q = \frac{987}{1024}\pi r^2\sqrt{2gh} = 0{,}964\ F\sqrt{2gh}$, wenn F den Inhalt der ganzen Kreisfläche bezeichnet.

Uebrigens ist leicht zu erachten, daß man in allen den Fällen, wenn die Druckhöhe im Mittelpunkte dem Durchmesser gleich oder größer ist, als derselbe, den Werth der ganzen Reihe $= 1$ setzen und $Q = F\sqrt{2gh}$ annehmen kann. Auch läßt sich diese Regel auf andere Mündungen anwenden, und also in allen den Fällen, wenn der Schwerpunkt einer Mündung mindestens ebenso tief unter dem Wasserspiegel liegt, als die Mündung hoch ist, die Tiefe h dieses Punktes als Druckhöhe ansehen und $Q = F\sqrt{2gh}$ setzen.

Wenn man berücksichtigt, daß das Mittel aller Cosinus des ersten Quadranten $= \frac{\pi}{4}$ und das Mittel aller Cosinus des zweiten Quadranten $= -\frac{\pi}{4}$, also das Mittel aller Cosinus des ersten und zweiten Quadranten $=$ Null ist, so kann man auf dem oben eingeschlagenen Wege die Ausflußmenge des oberen Halbkreises:

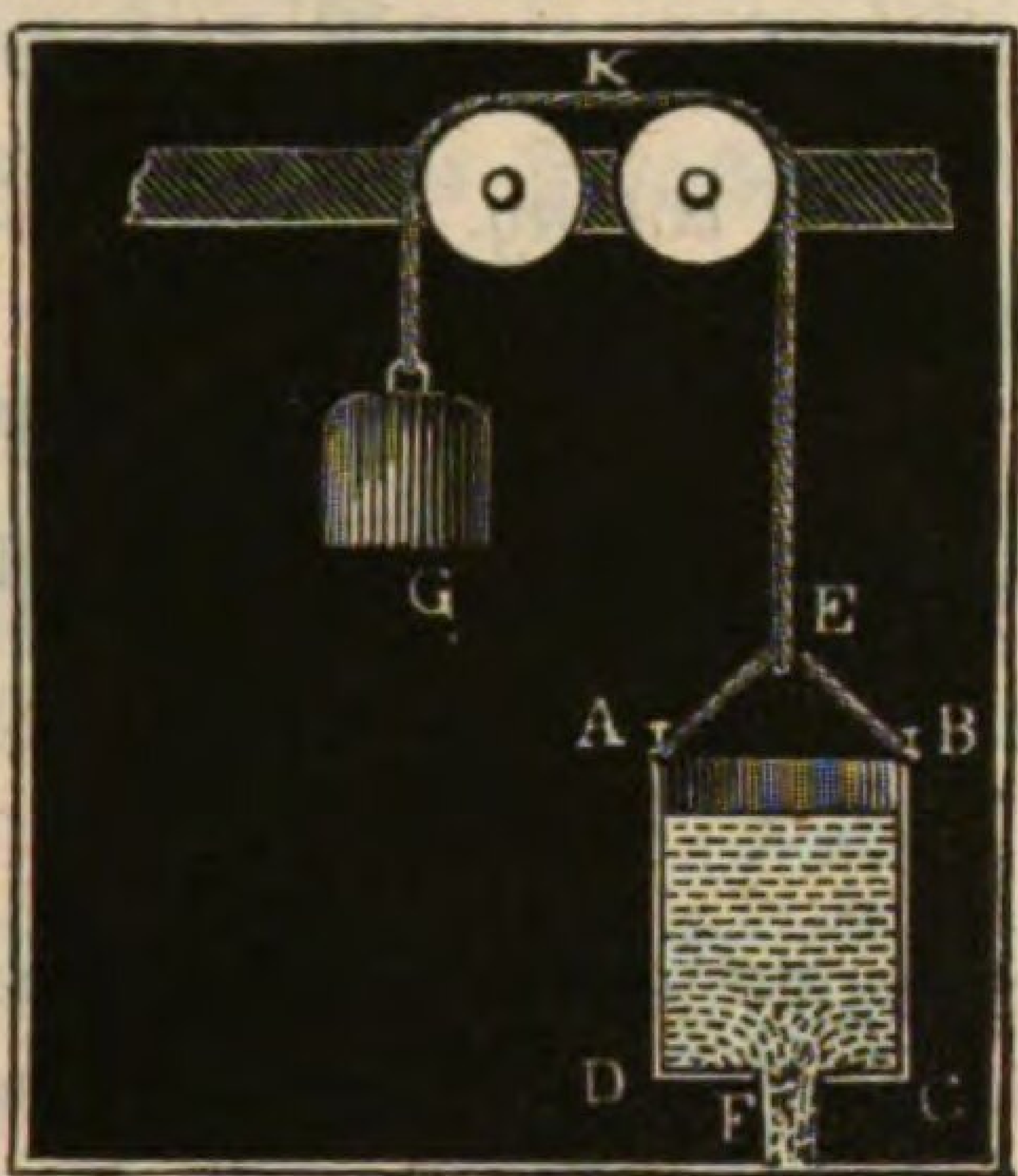
$Q_1 = \frac{\pi r^2}{2}\sqrt{2gh}\left[1 - \frac{\pi}{12}\left(\frac{r}{h}\right) - \frac{1}{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2\right]$ und die des unteren Halbkreises $Q_2 = \frac{\pi r^2}{2}\sqrt{2gh}\left[1 + \frac{\pi}{12}\left(\frac{r}{h}\right) - \frac{1}{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2 ..\right]$ finden.

Beispiel. Welche Wassermenge fließt stündlich durch eine kreisförmige Oeffnung von 1 Zoll Durchmesser, über welcher der Wasserspiegel eine Linie hoch steht? Es ist $\frac{r}{h} = \frac{6}{7}$, daher $\left(\frac{r}{h}\right)^2 = \frac{36}{49} = 0{,}735$, ferner $1 - \frac{1}{32}\left(\frac{h}{r}\right)^2 = 1 - 0{,}023 = 0{,}977$, und folglich die Ausflußmenge pr. sec.

$Q = \frac{\pi \, . \, 1^2}{4} . 12 . 7{,}906 \sqrt{\frac{7}{144}} . 0{,}977 = \frac{\pi}{4} \; . \; 7{,}906 . 0{,}977 \sqrt{7} = 16{,}05$ Cub.-Zoll, *pr. min.* = 963 Cub.-Zoll, und *pr. hor.* = $33\frac{1}{2}$ Cubikfuß.

§. 343. Die Ausflußgeschwindigkeit ändert sich, wenn ein vorher in Ruhe oder in gleichförmiger Bewegung befindliches Gefäß in Bewegung übergeht, oder seinen Bewegungszustand ändert, weil in diesem Falle jedes Wassertheilchen außer seinem Gewichte auch noch durch seine Trägheit gegen die Umgebung wirkt. Bewegte Ausflußgefäße.

Fig. 494.



Bewegt man das Gefäß *AC*, Fig. 494, beschleunigt vertikal aufwärts, während das Wasser durch die Bodenöffnung *F* abfließt, so findet eine Vergrößerung, und bewegt man es beschleunigt vertikal abwärts, so findet eine Verminderung der Ausflußgeschwindigkeit statt. Ist die Acceleration p, so drückt jedes Wassermassenelement M nicht bloß durch sein Gewicht Mg, sondern auch durch seine Trägheit Mp; es ist folglich die Kraft eines jeden Elementes in einem Falle $(g + p)M$ und im zweiten $(g - p)\,M$, also statt g, $g \pm p$ zu setzen. Hiernach folgt denn $\frac{v^2}{2} = (g \pm p)\,h$ und sonach für die Ausflußgeschwindigkeit $v = \sqrt{2\,(g \pm p)\,h}$.

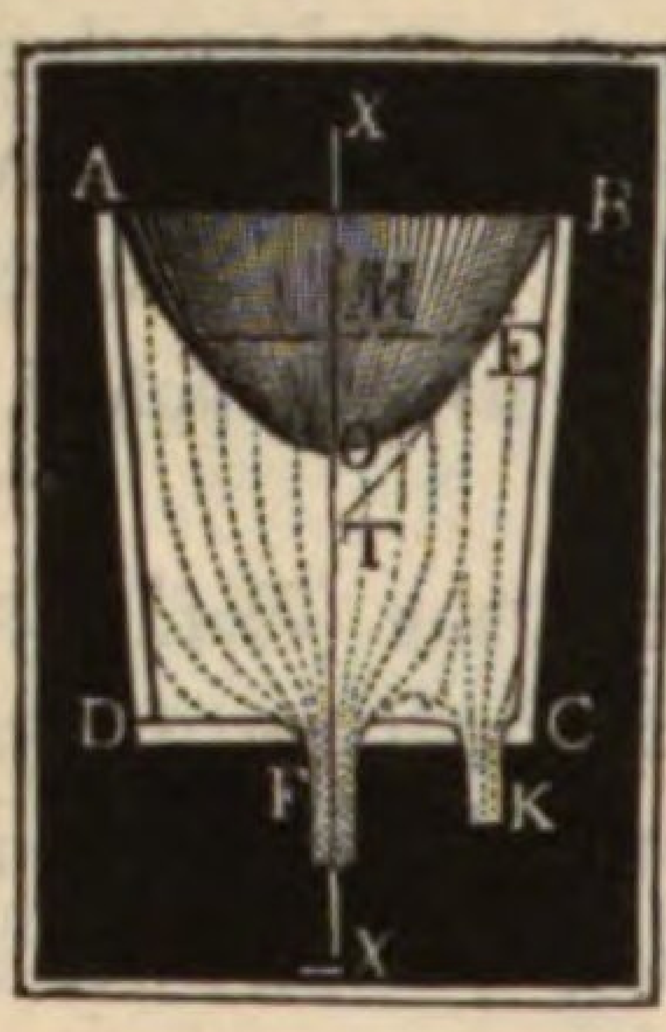
Steigt das Gefäß mit der Acceleration g empor, so ist $v = \sqrt{2 . 2\,gh} = 2\sqrt{gh}$, also die Ausflußgeschwindigkeit 1,414mal so groß, als beim stillstehenden Gefäße. Fällt das Gefäß durch sein eigenes Gewicht, also mit der Acceleration g, so ist $v = \sqrt{0} = 0$, dann fließt also kein Wasser aus. Bewegt sich das Gefäß gleichförmig auf- oder abwärts, so bleibt $v = \sqrt{2gh}$, steigt es aber verzögert, so wird $v = \sqrt{2\,(g - p)\,h}$, und fällt es verzögert, so fällt $v = \sqrt{2\,(g + p)\,h}$ aus.

Bewegt man das Ausflußgefäß horizontal oder unter einem schiefen Winkel gegen den Horizont, so stellt sich (S. §. 297) der Wasserspiegel schief gegen den Horizont und es findet daher auch eine Veränderung der Ausflußgeschwindigkeit statt.

Bei Umdrehung eines Gefäßes *AC*, Fig. 495 (folg. S.), um seine vertikale Axe $\overline{XX}$, bildet nach §. 297 der Wasserspiegel einen parabolischen Trichter *AOB*, es steht daher über der Mitte *F* des Bodens eine kleinere

Bewegte Ausflußgefäße.

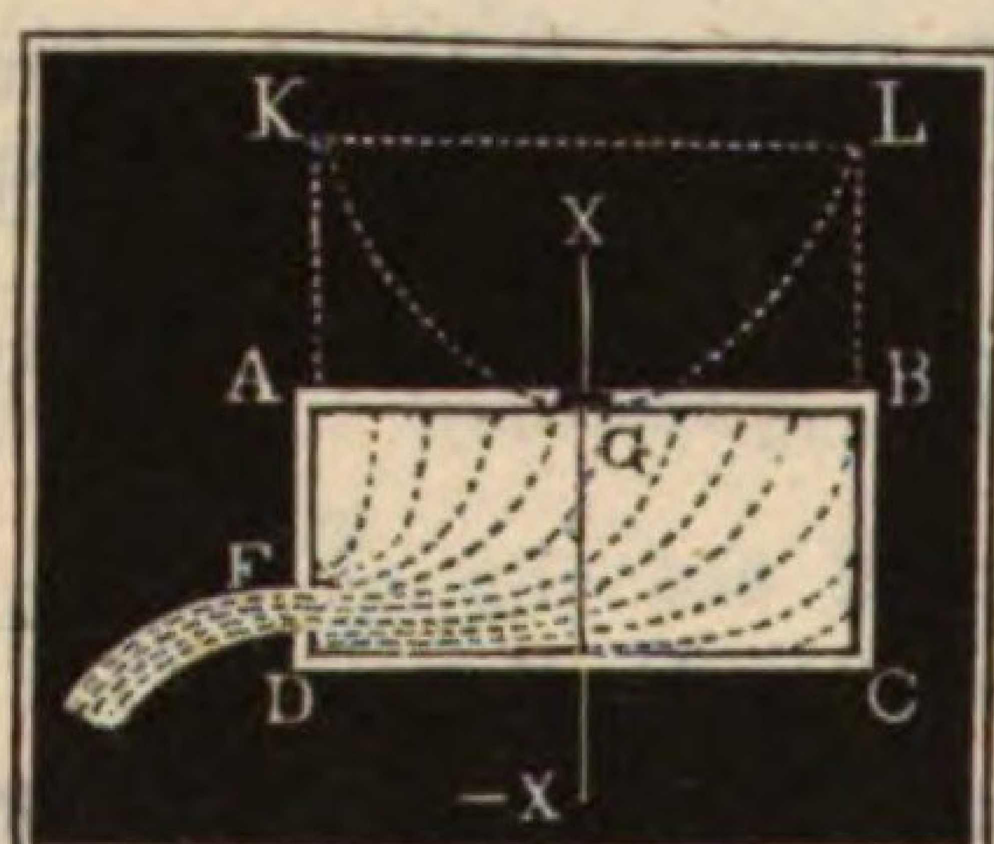
Fig. 495.



Druckhöhe, als nahe am Rande desselben, und es fließt daher auch durch die Mündung F in der Axe das Wasser langsamer, als durch jede andere Bodenöffnung K. Bezeichnet h die Druckhöhe FO in der Mitte, so ist die Ausflußgeschwindigkeit in der Mitte $= \sqrt{2gh}$, bezeichnet aber y die Entfernung $FK = ME$ einer andern Mündung K von der Axe, und ω die Winkelgeschwindigkeit, so hat man die entsprechende Erhebung des Wassers über der Mitte: OM $= \frac{1}{2} TM = \frac{1}{2} ME \; cotang. \; T = \frac{1}{2} y \,.\, \frac{\omega^2 y}{g}$ $= \frac{\omega^2 y^2}{2g} = \frac{w^2}{2g}$, wenn w die Umdrehungsgeschwindigkeit der Mündung K bezeichnet. Hiernach ist denn die Ausflußgeschwindigkeit für die Mündung K

$$v = \sqrt{2g\left(h + \frac{w^2}{2g}\right)} = \sqrt{2gh + w^2}.$$

Fig. 496.



Diese Formel gilt für jedes beliebig gestaltete Gefäß, und auch dann noch, wenn es oben verschlossen ist, wie für AC, Fig. 496, so daß sich der Trichter gar nicht bilden kann. Sie findet bei den Reactionsrädern und Turbinen in der Folge ihre Anwendung.

Beispiele. 1) Wenn das mit Wasser angefüllte Gefäß AC, Fig. 494, 350 Pfd. wiegt, und mittelst eines über Leitrollen K gehenden Seiles durch ein Gewicht G von 450 Pd. aufgezogen wird, so steigt es mit einer Acceleration.

$p = \frac{450 - 350}{450 + 350} \cdot g = \frac{100}{800} g = \frac{1}{8} g$ und es ist deshalb die Ausflußgeschwindigkeit $v = \sqrt{2\,(g + p)\; h} = \sqrt{2 \,.\, \frac{9}{8} \cdot gh} = \sqrt{\frac{9}{4} gh}$. Wäre die Druckhöhe $h = 4$ Fuß, so würde die Ausflußgeschwindigkeit $v = \sqrt{9 \,.\, g} = 3 \sqrt{31{,}25}$ $= 16{,}77$ Fuß betragen. 2) Wenn sich das mit Wasser angefüllte Gefäß AC, Fig. 496, so umdreht, daß es in der Minute 100 Umdrehungen macht, wenn die Tiefe der Mündung F unter dem Wasserspiegel in der Mitte 2 Fuß und die Entfernung von der Axe $\overline{XX}$, 3 Fuß beträgt, so ist die Ausflußgeschwindigkeit

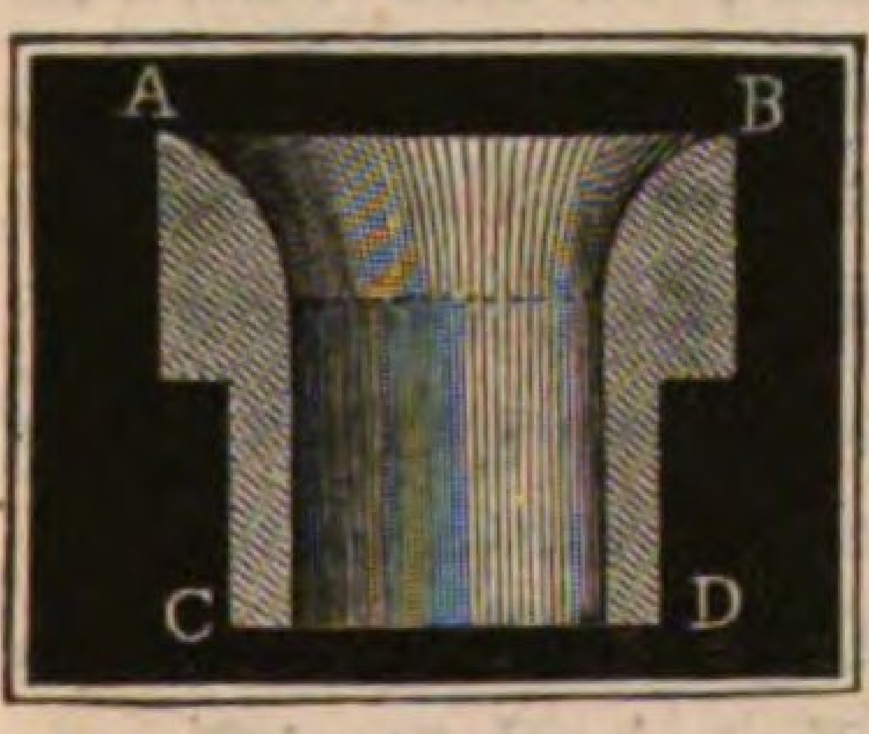
$$v = \sqrt{2gh + w^2} = \sqrt{62{,}5 \,.\, 2 + \left(\frac{3 \,.\, \pi \,.\, 100}{30}\right)^2} = \sqrt{125 + 100 \,.\, \pi^2}$$
$$= \sqrt{125 + 987} = \sqrt{1112} = 33{,}35 \text{ Fuß.}$$ Steht das Gefäß still, so ist $v = \sqrt{125} = 11{,}18$ Fuß.

Zweites Kapitel.

Von der Contraction der Wasserstrahlen beim Ausflusse des Wassers durch Mündungen in der dünnen Wand.

§. 344. Die in dem vorstehenden Kapitel entwickelten Ausflußgesetze stimmen mit den Erfahrungen fast ganz überein, so lange die Druckhöhe in Ansehung der Mündungsweite nicht sehr klein ist, und so lange sich die Ausflußöffnung nach innen allmälig erweitert und sich, ohne Ecken und Kanten zu bilden, an der Boden- oder Seitenfläche des Gefäßes anschließt. Die hierüber an glattpolirten metallenen Mundstücken angestellten Versuche von Michelotti, von Eytelwein und von dem Verfasser haben nachgewiesen, daß die effective oder wirklich ausfließende Wassermenge 96 bis 98 Procent von dem theoretisch bestimmten Wasserquantum ist. Das in der halben natürlichen Größe abgebildete Mundstück AD, Fig. 497, Geschwindigkeitscoefficient.

Fig. 497.



gab bei einer Druckhöhe von 10 Fuß 97,5 Proc., bei 5 Fuß 96,9 Proc. und bei 1 Fuß 95,8 Proc. (Versuche mit größeren Mündungen s. Untersuchungen in dem Gebiete der Mechanik und Hydraulik, zweite Abtheil.) Da bei diesem Ausflusse der Strahl mit der Mündung gleichen Querschnitt F hat, so ist anzunehmen, daß diese Verminderung der Wassermenge aus einem Verluste an Geschwindigkeit hervorgeht, der in der Reibung oder Adhäsion des Wassers an dem inneren Umfange der Mündung und in der Klebrigkeit des Wassers seinen Grund hat. Wir nennen in der Folge das Verhältniß der effectiven Ausflußgeschwindigkeit zur theoretischen Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$, den Geschwindigkeitscoefficienten (franz. coefficient de vitesse; engl. coefficient of velocity) und bezeichnen ihn durch φ. Hiernach ist also die effective Ausflußgeschwindigkeit im einfachsten Falle: $v_1 = \varphi v = \varphi \sqrt{2gh}$, und die Ausflußmenge: $Q = F v_1 = \varphi F v = \varphi F \sqrt{2gh}$.

Geschwindigkeitscoefficient. Führen wir für φ den mittleren Werth 0,97 ein, so erhalten wir für das Fußmaaß

$$Q = 0,97 \,.\, F\sqrt{2gh} = 0,97 \,.\, 7,906\, F\sqrt{h} = 7,669\, F\sqrt{h}.$$

Einer mit der Geschwindigkeit v_1 ausfließenden Wassermenge Q wohnt die lebendige Kraft $\frac{Q\gamma}{g} \,.\, v_1^2$ inne, vermöge welcher sie die mechanische Arbeit $Q\gamma \cdot \frac{v_1^2}{2g}$ zu verrichten vermag. Da aber beim Niedersinken von der Höhe $h = \frac{v^2}{2g}$ das Gewicht $Q\gamma$ die Arbeit $Q\gamma \,.\, h = Q\gamma \frac{v^2}{2g}$ verrichtet, so folgt, daß durch den Ausfluß das Wasser den Verlust

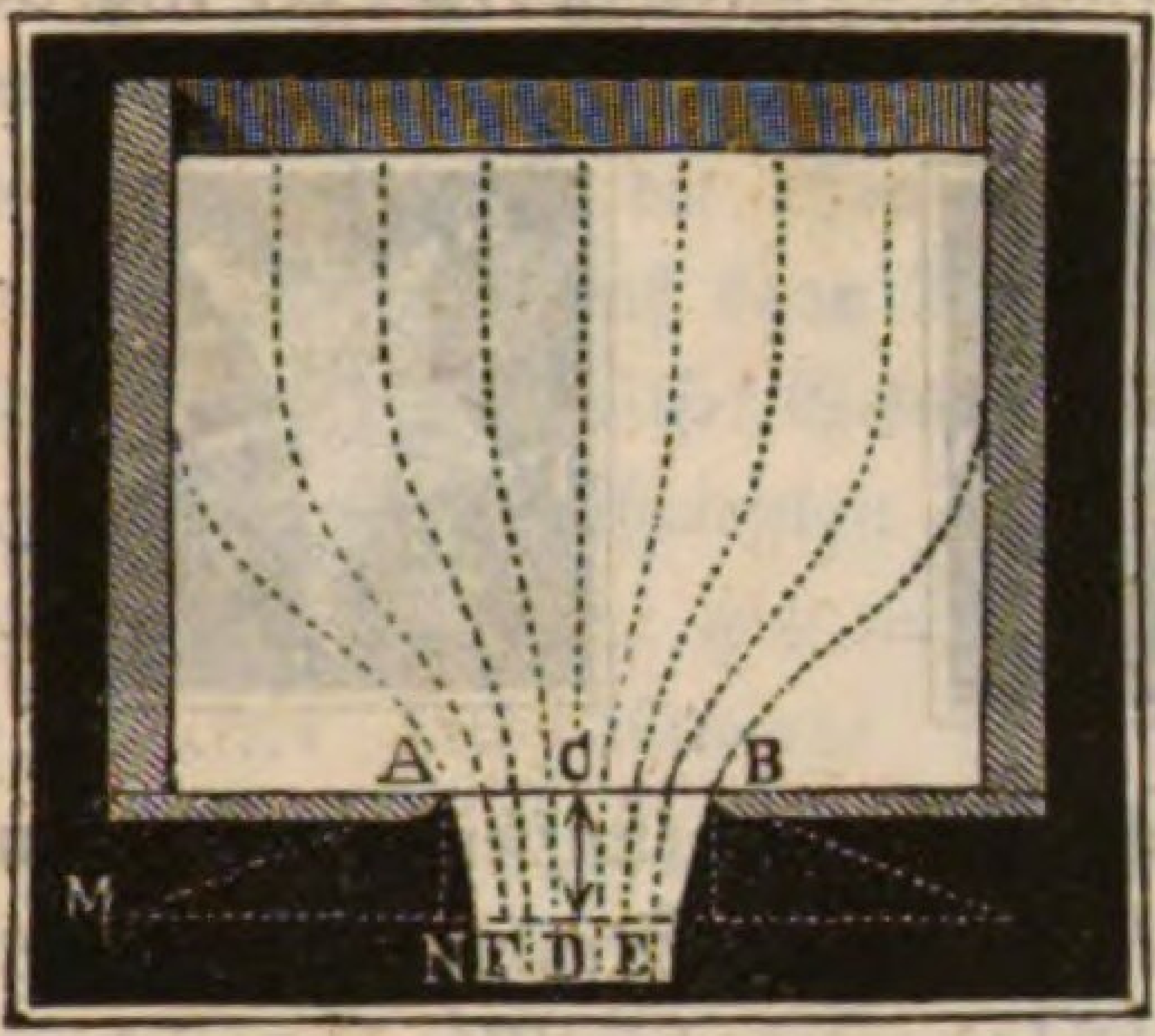
$$Q\gamma\left(\frac{v^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}\right) = Q\gamma . \frac{v^2}{2g}(1 - \varphi^2) = (1 - 0,97^2)\, Q\gamma \,.\, \frac{v^2}{2g}$$

$= 0,059\, Q\gamma \,.\, \frac{v^2}{2g}$ oder 5,9 Procent erleidet. Es kann also das ausfließende Wasser durch seine lebendige Kraft 5,9 Procent weniger Arbeit verrichten, als durch sein Gewicht beim Herabsinken von der Höhe h.

Anmerkung. Der Verfasser hat das durch die Formel $v = \sqrt{2gh}$ ausgedrückte Ausflußgesetz auch unter dem hohen Drucke von 390 Fuß (12 Atmosphären) geprüft. Ein innen gut abgerundetes Mundstück von 1 Centimeter Weite gab bei den Druckhöhen h = 1, 10 und 390 Fuß die Ausflußcoefficienten φ = 0,96, 0,97 und 0,98. S. Bornemann's u. s. w. Zeitschrift für das gesammte Ingenieurwesen (Ingenieur), Band 1.

Contractionscoefficient. §. 345. Fließt das Wasser durch eine **Mündung in der dünnen Wand** (franz. orifice en mince paroi; engl. orifice in a thin plate), so tritt unter übrigens gleichen Umständen eine bedeutende Verminderung der Ausflußmenge ein, indem die Wasserelemente in convergenten Richtungen durch die Mündung hindurch gehen und dadurch einen **zusammengezogenen oder contrahirten Wasserstrahl** (franz. veine contractée; engl. contracted stream) hervorbringen. Die von Vielen, namentlich auch die in der neuesten Zeit von dem Verfasser angestellten Strahlenmessungen haben ergeben, daß der Strahl in einer Entfernung, die ohngefähr der halben Mündungsweite gleich kommt, die stärkste Zusammenziehung und eine Dicke hat, die 0,8 des Durchmessers der Mündung gleichkommt. Ist F_1 der Querschnitt des zusammengezogenen Wasserstrahles, sowie F der Querschnitt der Mündung, so hat man hiernach $F_1 = (0,8)^2\, F = 0,64\, F$. Man nennt das Verhältniß $\frac{F_1}{F}$ dieser Querschnitte den **Contractionscoefficienten** (franz. coefficient de contraction; engl. coefficient of contraction) und bezeichnet ihn mit α,

Fig. 498.



und es ist sonach der mittlere Werth für den Ausfluß des Wassers durch Mündungen in der dünnen Wand $\alpha = 0,64$ zu setzen. Contractions-coefficient.

So lange man keine nähere Kenntniß über die Contraction der Wasserstrahlen hat, kann man annehmen, daß der durch eine kreisrunde Oeffnung AB, Fig. 498, fließende Strahl einen Rotationskörper $ABEF$ bilde, dessen Umfläche durch Umdrehung eines Kreisbogens AF um die Axe CD des Strahles entsteht. Setzen wir den Durchmesser AB der Mündung $= d$, und die Entfernung CD des contrahirten Querschnittes EF, $= \frac{1}{2} d$, so erhalten wir für den Halbmesser $MA = MF = r$ des Erzeugungsbogens AF mittels der Gleichung $\overline{AN}^2 = FN\,(2MF - FN)$ oder

$\frac{d^2}{4} = \frac{d}{10}\left(2r - \frac{d}{10}\right)$, $r = 1,3\,d$. Mündungen nach dieser Gestalt des contrahirten Wasserstrahles geformt, geben so ziemlich die Ausflußgeschwindigkeit $v_1 = 0,97\,.\,v$.

Die Contraction des Wasserstrahles hat ihren Grund darin, daß nicht allein das Wasser, welches unmittelbar über der Mündung befindlich ist, ausfließt, sondern auch das zur Seite befindliche Wasser herbeiströmt und mit zum Ausflusse gelangt. Es findet also schon im Innern des Gefäßes eine Convergenz der Wasserfäden, ähnlich wie sie die Figur andeutet, statt, und es besteht die Contraction des Wasserstrahles in einer bloßen Fortsetzung dieser Convergenz. Von dieser Bewegung des Wassers in der Nähe der Mündung kann man sich mit Hülfe eines gläsernen Ausflußapparates überzeugen, wenn man kleine Körper, welche wenig leichter oder schwerer als Wasser sind, wie z. B. Sägespähne von Eichenholz, Stücke von Siegellack u. s. w., in das Wasser bringt und mit zum Ausflusse gelangen läßt.

§. 346. Fließt das Wasser durch **dreiseitige**, **vierseitige** Mündungen u. s. w. im dünnen Bleche, so nimmt der Wasserstrahl besondere Gestalten an. In die Augen fallend ist zumal die Umkehrung des Strahles, oder die veränderte Stellung seines Querschnittes in Hinsicht auf den Querschnitt der Mündung, vermöge welcher ein Eck dieses Querschnittes mit der Mitte einer Seite der Mündung gleichzuliegen kommt. Hiernach bildet bei einer dreiseitigen Mündung ABC, Fig. 499 a. f. S., der Querschnitt Contrahirte Wasserstrahlen.

Contrahirte Wasserstrahlen des Strahles in einem gewissen Abstande von der Mündung einen dreistrahligen Stern *DEF*, bei einer vierseitigen Mündung *ABCD*, Fig. 500,

Fig. 499.



Fig. 500.

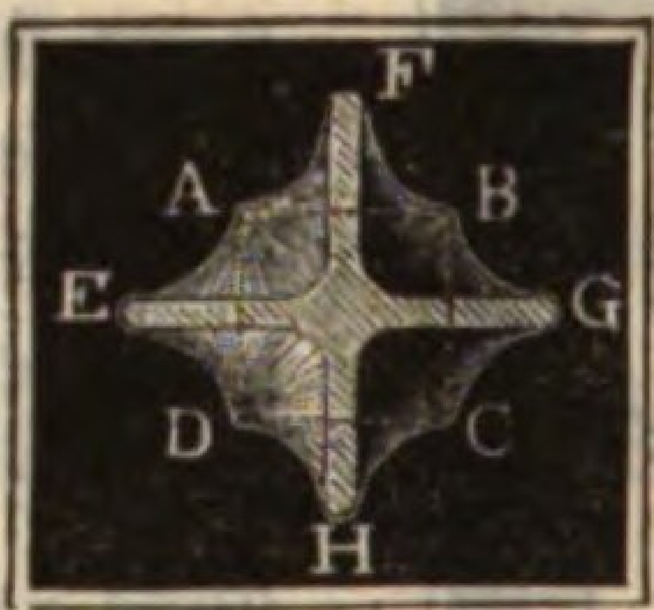
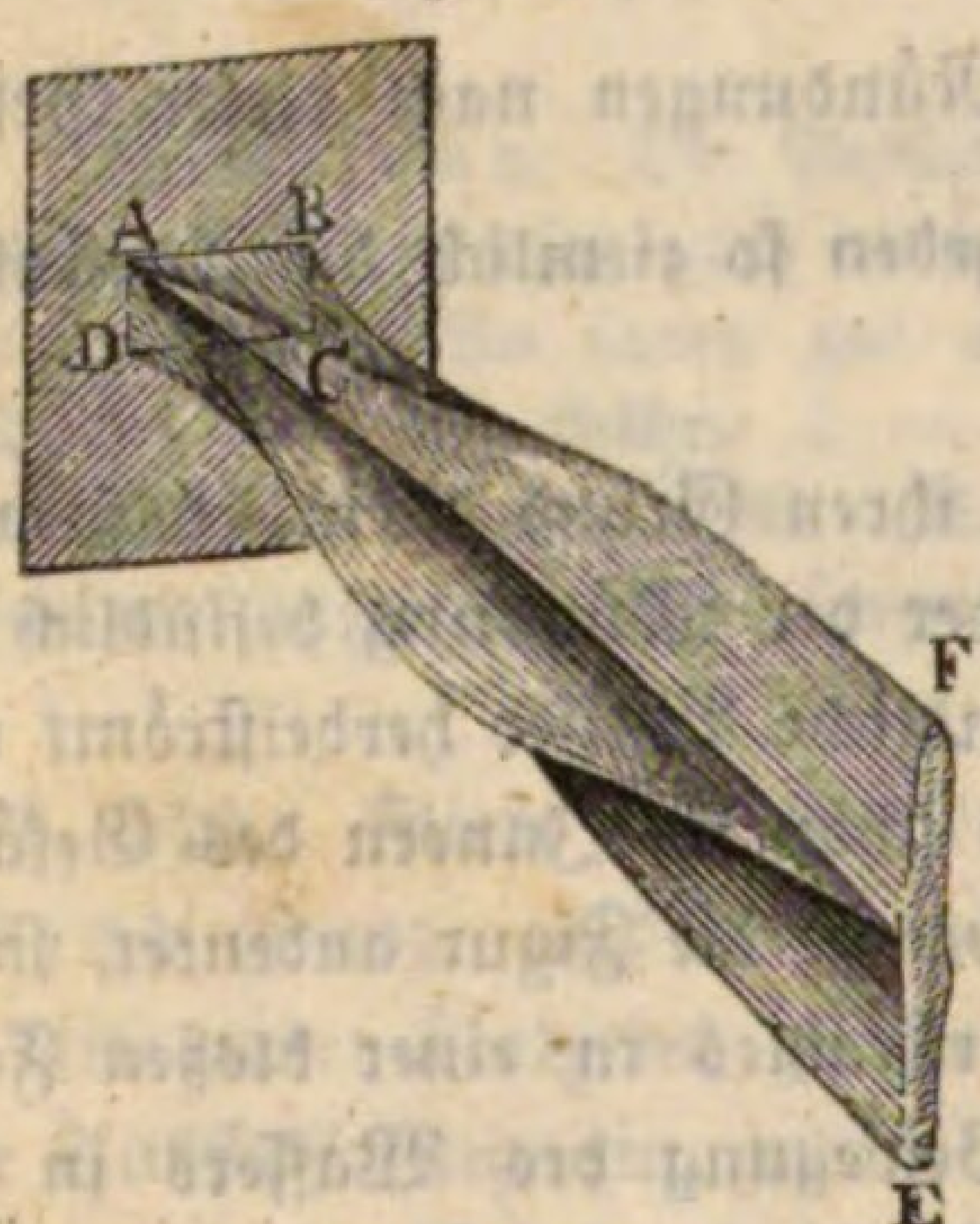


Fig. 501.



einen vierstrahligen Stern *EFGH*, ebenso, bei einer fünfseitigen Mündung *ABCDE*, Fig. 501, einen Stern *FGHKL* mit fünf Strahlen u. s. w. Diese Querschnitte sind aber in verschiedenen Abständen von der Mündung sehr verschieden, sie nehmen auf einer gewissen Distanz ab und auf einer folgenden wieder zu u. s. w.; es besteht daher der Strahl aus Blättern oder Rippen von veränderlicher Breite und bildet dadurch, was namentlich beim Ausflusse unter sehr großem Drucke zu beobachten ist, Bäuche und Knoten, ähnlich wie die Cacteen. Ist die Mündung *ABCD*, Fig. 502, rectangulär, so bildet in kleinerer Entfernung von der Mündung der Querschnitt zwar ebenfalls ein Kreuz oder einen Stern, allein in größerer Entfernung nimmt derselbe wieder mehr die Gestalt eines verwendeten Rechteckes *EF* an.

Fig. 502.



Den Ausfluß bei den verschiedenartigsten Mündungen hat Bidone beobachtet; genaue Strahlenmessungen bei quadratischen Mündungen sind aber nur von Poncelet und Lesbros angestellt worden (s. Allgem. Maschinenencyclopädie, Artikel »Ausfluß«). Die letzten Messungen haben auf einen kleinen Contractionscoefficienten 0,563 geführt. Wassermessungen beim Ausflusse durch kleinere Mündungen führen aber auf größere Contractionscoefficienten, sie weisen sogar nach, daß dieselben bei langgezogenen Rechtecken größer sind als bei Rechtecken, die sich mehr den Quadraten nähern.

Ausfluß-coefficient. §. 347. Wäre beim Ausflusse des Wassers durch Mündungen in der dünnen Wand die effective Geschwindigkeit gleich der theoretischen $v = \sqrt{2gh}$, so hätte man die effective Ausflußmenge $Q = \alpha F . v = \alpha F \sqrt{2gh}$, weil αF den Querschnitt des Strahles an der Stelle der größten Zusammenziehung, wo sich die Wasserelemente in parallelen Richtungen bewegen, bezeichnet. Diesem ist aber keineswegs

so, es zeigt sich vielmehr in der Erfahrung, daß Q noch kleiner als $\alpha F \sqrt{2gh}$ ist, daß man also die theoretische Wassermenge $F\sqrt{2gh}$ durch einen Coefficienten multipliciren muß, der kleiner als der Contractionscoefficient ist, um die effective Ausflußmenge zu erhalten. Wir müssen daher annehmen, daß beim Ausflusse durch eine Mündung in der dünnen Wand noch ein gewisser Geschwindigkeitsverlust eintrete, deshalb auch einen Geschwindigkeitscoefficienten φ einführen und daher die effective Ausflußgeschwindigkeit $v_1 = \varphi v = \varphi \sqrt{2gh}$ setzen. Hiernach haben wir also die effective Ausflußmenge $Q_1 = F_1 . v_1 = \alpha F . \varphi v = \alpha \varphi F v = \alpha \varphi F \sqrt{2gh}$ zu setzen. Nennen wir endlich noch das Verhältniß der effectiven Ausflußmenge zum theoretischen oder hypothetischen Ausflußquantum den Ausflußcoefficienten (franz. coefficient de dépense; engl. coefficient of efflux ion) und bezeichnen wir ihn in der Folge durch μ, so haben wir $Q_1 = \mu Q = \mu F v = \mu F \sqrt{2gh}$, und daher $\mu = \alpha\varphi$, d. h. der Ausflußcoefficient ist das Product aus dem Contractions- und dem Geschwindigkeitscoefficienten. Ausfluß-coefficient.

Vielfältige Beobachtungen, namentlich aber auch die Messungen des Verfassers, haben darauf geführt, daß der Ausflußcoefficient für Mündungen in der dünnen Wand nicht constant ist, daß er bei kleinen Mündungen und kleinen Ausflußgeschwindigkeiten größer ist, als bei großen Mündungen und bei großen Geschwindigkeiten, daß er auch bei langen und schmalen Mündungen bedeutend größer ausfällt als bei Mündungen, die sich einer regelmäßigen Form oder dem Kreise nähern.

Für quadratische Mündungen von 1 bis 9 Quadratzoll Inhalt bei 7 bis 21 Fuß Druckhöhe ist nach den Versuchen von Bossut und Michelotti der mittlere Ausflußcoefficient $\mu = 0{,}610$, für kreisförmige von $\frac{1}{2}$ bis 6 Zoll Durchmesser bei 4 bis 21 Fuß Druckhöhe aber ist derselbe $\mu = 0{,}615$ oder ohngefähr $\frac{8}{13}$. Die einzelnen Beobachtungswerthe von Bossut und Michelotti weichen unter einander nicht unbedeutend ab, doch läßt sich aus ihnen eine Abhängigkeit von der Größe der Mündung und der Größe der Druckhöhe nicht entnehmen. Nach den Versuchen des Verfassers ist bei einem Drucke von 0,6 Meter der Ausflußcoefficient für eine Mündung von 1 Centimeter Durchmesser: $\mu = 0{,}628$

»	2	»	»	$= 0{,}621$
»	3	»	»	$= 0{,}614$
»	4	»	»	$= 0{,}607$.

Dagegen bei einem Drucke von $\frac{1}{4}$ Meter für die runde Mündung

von	1	Centimeter	Durchmesser:	$\mu = 0{,}637$
»	2	»	»	$= 0{,}629$
»	3	»	»	$= 0{,}622$
»	4	»	»	$= 0{,}614$.

Ausfluß-coefficient. Aus ihnen sieht man deutlich, daß der Ausflußcoefficient zunimmt, wenn die Mündungsgröße und die Druckhöhe abnehmen.

Nehmen wir für μ den mittleren Werth $= 0{,}615$, und für $\alpha = 0{,}64$, so bekommen wir den Geschwindigkeitscoefficienten beim Ausflusse durch Mündungen in der dünnen Wand: $\varphi = \frac{\mu}{\alpha} = 0{,}96$, also ziemlich so groß wie beim Ausflusse durch abgerundete oder conoidische Mündungen.

Anmerkung 1. Versuche von Buff (S. Poggendorff's Annalen, 46. B.) zeigen, daß die Ausflußcoefficienten bei kleinen Mündungen und kleinen Druckhöhen oder Geschwindigkeiten bedeutend größer sind, als bei großen und mittleren Mündungen und Geschwindigkeiten. Eine Mündung von 2,084 Linien Durchmesser gab bei $1\frac{1}{2}$ Zoll Druck $\mu = 0{,}692$, bei 35 Zoll aber $\mu = 0{,}644$; dagegen eine Mündung von 4,848 Linien bei $4\frac{1}{2}$ Zoll Druck $\mu = 0{,}682$ und bei 29 Zoll $\mu = 0{,}653$.

Anmerkung 2. Beim Ausflusse unter Wasser fallen nach den Versuchen des Verfassers die Ausflußcoefficienten um $1\frac{1}{3}$ Procent kleiner aus, als beim Ausflusse in die Luft.

Versuche. §. 348. Es läßt sich der Ausflußcoefficient μ, welcher einer gewissen Ausflußmündung entspricht, finden, wenn man das Wasserquantum V kennt, welches in einer gewissen Zeit t bei einer bekannten Druckhöhe h durch den bekannten Querschnitt F der Mündung ausströmt; es ist nämlich

$$V = \mu \,.\, F \,.\, \sqrt{2gh} \,.\, t, \text{ also umgekehrt: } \mu = \frac{V}{Ft \,.\, \sqrt{2gh}}.$$

Um aber die beiden Factoren desselben, nämlich den Contractions- und den Geschwindigkeitscoefficienten zu ermitteln, bedarf es entweder noch einer Ausmessung des Strahlenquerschnittes $F_1 = \alpha F$, oder einer Bestimmung der Ausflußgeschwindigkeit $v_1 = \varphi v = \varphi \sqrt{2gh}$ mittels der Sprungweite des Strahles. Beide Messungen lassen sich jedoch nur bei dünnen Strahlen mit kreisförmigen Querschnitten erträglich genau bewerkstelligen.

Fig. 503.

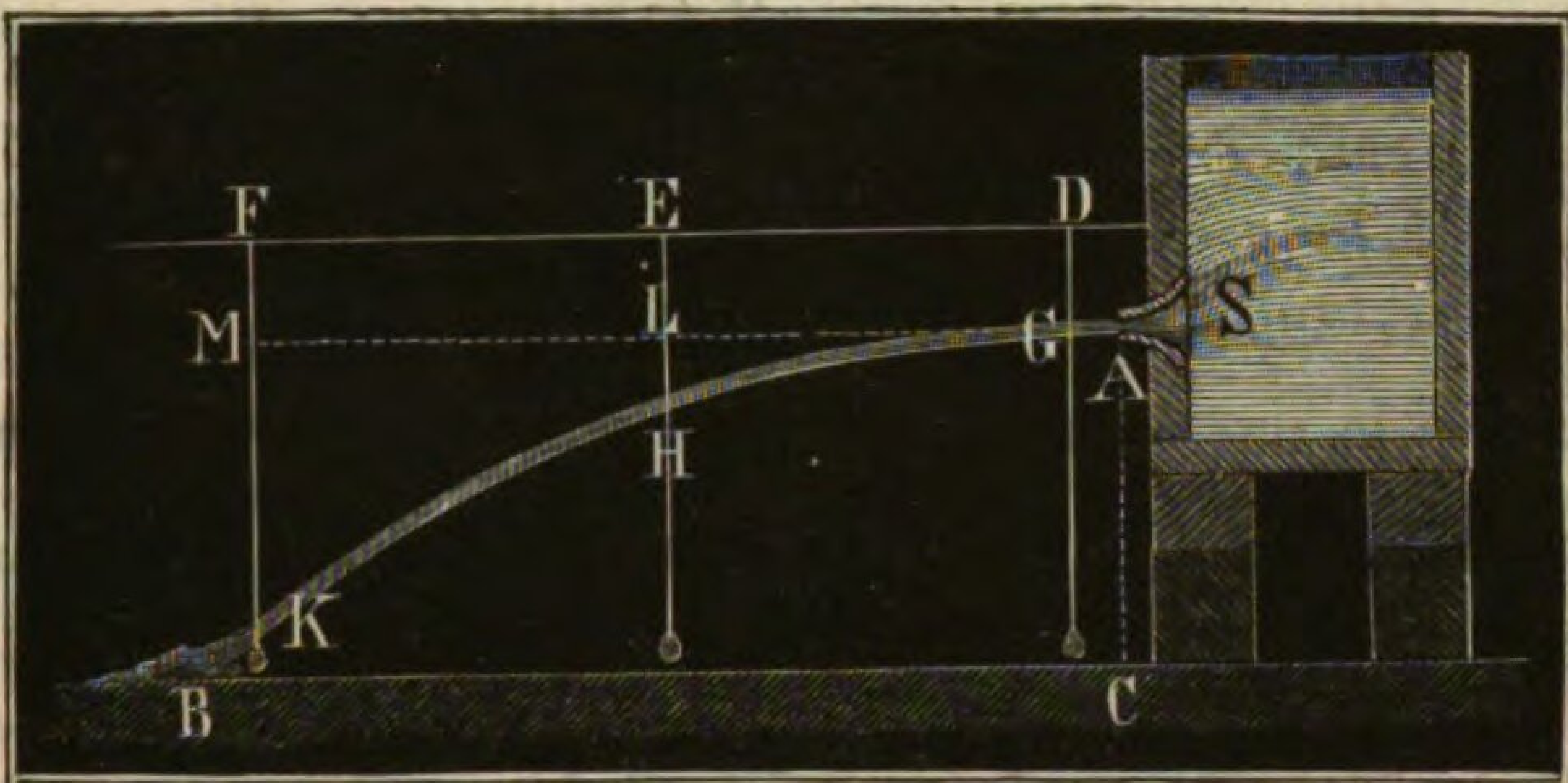


Der kreisförmige Querschnitt F_1 eines Strahles bestimmt sich sehr sicher mit Hülfe eines in Fig 503 abgebildeten, aus einem Ringe und 4 spitz zulaufenden Schrauben A, B, C, D bestehenden Apparates. Die Schrauben sind nach dem Mittelpunkte des Strahlenquerschnittes gerichtet, und werden so lange gestellt, bis ihre Spitzen die Oberfläche des Strahles berühren. Nach diesem wird der Ring von dem Strahle abgezogen und es werden die Abstände der gegenüberstehenden Schraubenspitzen von einander gemessen; zuletzt wird das

Mittel d_1 dieser Abstände als Durchmesser des Strahles angenommen. Versuche.
Ist nun noch d der Durchmesser des Mündungsquerschnittes, so hat man nun: $\alpha = \frac{F_1}{F} = \left(\frac{d_1}{d}\right)^2$, und dann $\varphi = \frac{\mu}{\alpha}$.

Mißt man die Sprungweite $BC = b$ eines aus dem Mundstücke SA horizontal ausfließenden Strahles AB, Fig. 504, welche einer gewissen

Fig. 504.



Höhe $AC = a$ zukommt, so hat man nach §. 38 die Ausflußgeschwindigkeit $v_1 = \sqrt{\frac{g b^2}{2a}}$, und da nun $v_1 = \varphi v = \varphi \sqrt{2gh}$ ist, so erhält man dann: $\varphi = \frac{v_1}{v} = \sqrt{\frac{b^2}{4ah}} = \frac{b}{2\sqrt{ah}}$, und hieraus $\alpha = \frac{\mu}{\varphi}$.

Die Bestimmung von v ist jedoch noch sicherer, wenn man statt a und b die horizontalen und vertikalen Coordinaten dreier Punkte der parabolischen Axe AB des Strahles ausmißt, weil dann auch die Axe des Mundstückes eine unbekannte Neigung gegen den Horizont haben kann. Am einfachsten geht man zu Werke, wenn man eine horizontale Schnur DF über dem Strahle ausspannt, von drei gleichweit von einander abstehenden Punkten D, E, F derselben Lothe herabläßt, und an diesen die Abstände DG, EH und FK der Axe des Strahles von DF abmißt. Ist $DF = x$ die horizontale Entfernung der äußersten Punkte, sind ferner die Vertikalabstände DG, EH und FK, $= z$, z_1 und z_2, und nimmt man G als Coordinatenanfangspunkt an, so hat man die Coordinaten für den Punkt H:

$$x_1 = GL = DE = \tfrac{1}{2} DF = \frac{x}{2} \text{ und } y_1 = LH = EH - DG = z_1 - z,$$

und die für den Punkt K:

$$x_2 = GM = DF = x \text{ und } y_2 = MK - DG = z_2 - z.$$

Nach §. 38 ist nun, wenn α den Neigungswinkel der Strahlaxe in G bezeichnet:

Versuche.

$$y_1 = x_1\, tang.\alpha + \frac{g\, x_1^2}{2\, v_1^2 \cos.\alpha^2} \text{ und auch}$$

$$y_2 = x_2\, tang.\alpha + \frac{g\, x_2^2}{2\, v_1^2 \cos.\alpha^2}, \text{ oder}$$

$$y_1 - x_1\, tang.\alpha = \frac{g\, x_1^2}{2\, v_1^2 \cos.\alpha^2} \text{ und}$$

$$y_2 - x_2\, tang.\alpha = \frac{g\, x_2^2}{2\, v_1^2 \cos.\alpha^2};$$

und es folgt durch Division, da $x_2 = 2\, x_1$ ist,

$$\frac{y_1 - x_1\, tang.\alpha}{y_2 - x_2\, tang.\alpha} = \tfrac{1}{4}; \text{ hieraus aber } tang.\alpha = \frac{4\, y_1 - y_2}{x}.$$

Setzt man in eine der vorigen Formeln statt $\frac{1}{\cos.\alpha^2} = 1 + tang.\alpha^2$, und führt man statt $tang.\alpha$ den letzten Ausdruck ein, so erhält man für die in Frage stehende Ausflußgeschwindigkeit die Formel:

$$v_1 = \sqrt{\frac{g\, x^2}{2\,(y_2 - x\, tang.\alpha)\cos.\alpha^2}} = \sqrt{\frac{(1 + tang.\alpha^2)\, g\, x^2}{2\,(2 y_1 - 4\, y_1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{g\,[x^2 + (4\, y_1 - y_2)^2]}{4\,(y_2 - 2\, y_1)}}.$$

Der Geschwindigkeitscoefficient ist hiernach:

$$\varphi = \frac{v_1}{v} = \frac{v_1}{\sqrt{2gh}} = \sqrt{\frac{x^2 + (4\, y_1 - y_2)^2}{8 h\,(y_2 - 2\, y_1)}}.$$

Beispiel 1. Bei einem Strahle, welcher aus einem gut abgerundeten Mundstücke von 1 Centimeter Weite ohne Contraction ausfloß, wurden folgende Messungsresultate gefunden: $x = 2{,}480$ Meter,

$y_1 = z_1 - z = 0{,}267 - 0{,}1135 = 0{,}1535$ Meter,

$y_2 = z_2 - z = 0{,}669 - 0{,}1135 = 0{,}5555$ Meter,

und die Druckhöhe $h = 3{,}359$ Meter. Hiernach ist der Geschwindigkeitscoefficient

$$\varphi = \sqrt{\frac{2{,}48^2 + 0{,}059^2}{8\,.\,3{,}359\,.\,0{,}2485}} = \sqrt{\frac{6{,}185}{26{,}872\,.\,0{,}2485}} = 0{,}963.$$

Da keine Contraction statt hat, so ist $\alpha = 1$ und daher $\mu = \varphi$. Hiermit stimmen die in der Anmerkung zu §. 344 mitgetheilten Messungsresultate ganz gut überein.

Beispiel 2. Messungen an einem vollständig contrahirten Strahle, welcher durch eine 1 Centimeter weite kreisrunde Mündung in der ebenen dünnen Wand floß, gaben bei der Druckhöhe $h = 3{,}396$ Meter Folgendes:

$x = 2{,}70$ Meter,

$y_1 = z_1 - z = 0{,}2465 - 0{,}1115 = 0{,}1350$ Meter, und

$y_2 = z_2 - z = 0{,}6620 - 0{,}1115 = 0{,}5505$ Meter;

und es folgt hieraus:

$$\varphi = \sqrt{\frac{2{,}70^2 + 0{,}01^2}{8\,.\,3{,}396\,.\,0{,}2805}} = \sqrt{\frac{7{,}2901}{27{,}168\,.\,0{,}2805}} = 0{,}978.$$

Aus der gemessenen Ausflußmenge berechnete sich aber $\mu = 0{,}617$, daher ist der Contractionscoefficient $\alpha = \frac{\mu}{\varphi} = 0{,}631$, womit auch die Strahlenquerschnittsmessungen gut übereinstimmen.

§. 349. Die genauesten Versuche über den Ausfluß durch größere rectanguläre Seitenmündungen sind in Metz von Poncelet und Lesbros angestellt worden. Die Weiten dieser Mündungen waren durchgängig 2 Decimeter, die Höhen aber waren sehr verschieden, nämlich 1 Centimeter bis 2 Decimeter. Um eine vollständige Contraction herbeizuführen, wurden zur Herstellung dieser Mündungen 4 Millimeter dicke Messingbleche verwendet. Aus den Ergebnissen dieser Versuche haben diese Experimentatoren mit Hülfe des Interpolirens die am Ende des Paragraphen folgenden Tabellen für die Ausflußcoefficienten berechnet, die man zur Messung oder Berechnung der Ausflußmenge benutzen kann. Rectanguläre Seitenöffnungen.

Ist b die Breite der Ausflußöffnung und sind h_1 und h_2 die Wasserstände über der untersten und über der obersten horizontalen Kante der Mündung, so hat man nach §. 340 die Ausflußmenge

$Q = \frac{2}{3} b \sqrt{2g} \left(h_1^{3/2} - h_2^{3/2}\right)$. Führt man aber die Oeffnungshöhe a und die mittlere Druckhöhe $h = \frac{h_1 + h_2}{2}$ ein, so hat man annähernd

$Q = \left(1 - \frac{a^2}{96 h^2}\right) ab \sqrt{2gh}$, und daher die effective Ausflußmenge

$Q_1 = \mu Q = \left(1 - \frac{a^2}{96 h^2}\right) \mu a b \sqrt{2gh}$. Setzt man noch

$\left(1 - \frac{a^2}{96 h^2}\right) \mu = \mu_1$, so hat man einfach $Q_1 = \mu_1 ab \sqrt{2gh}$, und um mit dieser einfachen oder gewöhnlichen Ausflußformel rechnen zu können, sind in den folgenden Tabellen nicht erst die Werthe für μ, sondern die für μ_1 zusammengestellt.

Da das Wasser in der Nähe der Oeffnung in Bewegung ist, so steht es unmittelbar vor der Oeffnung tiefer als in größerer Entfernung vor der Wand, in welcher sich die Mündung befindet; es sind deshalb auch zwei Tabellen zusammengestellt worden, die eine für die in größerer Entfernung von der Mündung und die andere für die unmittelbar an der Mündungswand gemessenen Druckhöhen. Man ersieht übrigens aus beiden Tabellen, daß, wenn auch mit einigen Schwankungen, die Ausflußcoefficienten wachsen, je niedriger die Oeffnung und je kleiner die Druckhöhe ist.

Haben die Mündungen andere Breiten, so bleibt, so lange man keine anderen Versuche zu Grunde legen kann, nichts übrig, als die Coefficienten dieser Tabellen ebenfalls anzuwenden, um die Ausflußmenge zu berechnen. Sind ferner die Oeffnungen nicht rectangulär, so bestimme man ihre

Rectanguläre Seiten-öffnungen.

mittlere Breite und mittlere Höhe und führe die diesen Dimensionen entsprechenden Coefficienten in der Rechnung ein. Endlich ist es immer vorzuziehen, die Druckhöhe in einer größeren Entfernung vor der Mündungswand zu messen und die erste Tabelle anzuwenden, als unmittelbar an der Mündung, wo der Wasserspiegel gekrümmt und weniger ruhig ist, als mehr oberhalb der Mündung.

Beispiele. 1) Welche Wassermenge fließt durch eine rectanguläre Oeffnung von 2 Decimeter Breite und 1 Decimeter Höhe, wenn der Wasserspiegel $1\frac{1}{2}$ Meter über der oberen Kante steht? Hier ist

$$b = 0{,}2,\ a = 0{,}1,\ h = \frac{h_1 + h_2}{2} = \frac{1{,}6 + 1{,}5}{2} = 1{,}55,$$

daher die theoretische Ausflußmenge

$$Q = 0{,}1 \,.\, 0{,}2 \sqrt{2g} \,.\, \sqrt{1{,}55} = 0{,}02 \,.\, 4{,}429 \,.\, 1{,}245 = 0{,}1103 \text{ Cubikmeter.}$$

Nun giebt aber die Tabelle I. für $a = 0{,}1$ und $h_2 = 1{,}5$, $\mu_1 = 0{,}611$, daher ist die effective Ausflußmenge $Q_1 = 0{,}611 \,.\, 0{,}1103 = 0{,}0674$ Cubikmeter.

2) Welche Ausflußmenge entspricht einer rectangulären Mündung in der dünnen Wand von 8 Zoll Breite, und 2 Zoll Höhe bei 15 Zoll Wasserhöhe über der oberen Kante? Die theoretische Ausflußmenge ist

$$Q = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{6} \,.\, 7{,}906 \sqrt{\tfrac{4}{3}} = 0{,}8784 \,.\, 1{,}1547 = 1{,}014 \text{ Cubikfuß.}$$

Nun ist aber 2 Zoll ohngefähr 0,05 Meter und 15 Zoll ohngefähr 0,4 Meter, daher ist nach der Tabelle für $a = 0{,}05$ und $h_2 = 0{,}4$ der entsprechende Coefficient $\mu_1 = 0{,}628$ anzunehmen und das gesuchte Wasserquantum

$$Q_1 = 0{,}628 \,.\, 1{,}014 = 0{,}637 \text{ Cubikfuß zu setzen.}$$

3) Wenn die Breite 0,25, die Höhe 0,15 und der Wasserstand $h_2 = 0{,}045$ Meter beträgt, so ist

$$Q = 0{,}25 \,.\, 0{,}15 \,.\, 4{,}429 \,.\, \sqrt{0{,}12} = 0{,}166 \,.\, 0{,}3464 = 0{,}0575 \text{ Cubikmeter.}$$

Der Höhe 0,15 entspricht für $h_2 = 0{,}04$ der Mittelwerth

$$\mu_1 = \frac{0{,}582 + 0{,}603}{2} = 0{,}5925 \text{ und für } h_2 = 0{,}05,\ \mu_1 = \frac{0{,}585 + 0{,}605}{2} = 0{,}595;$$

da nun aber $h_2 = 0{,}045$ gegeben ist, so setzen wir das neue Mittel $\frac{0{,}5925 + 0{,}595}{2} = 0{,}594$ als Ausflußcoefficient ein, und erhalten so die gesuchte Wassermenge $Q_1 = 0{,}594 \,.\, 0{,}0575 = 0{,}03415$ Cubikmeter.

Tabelle I.

Die Ausflußcoefficienten für den Ausfluß des Wassers durch rectanguläre Mündungen in einer dünnen vertikalen Wand, nach Poncelet und Lesbros. Die Druckhöhen sind oberhalb der Mündung, an einer Stelle gemessen, wo das Wasser als stillstehend angesehen werden kann. Rectanguläre Seitenöffnungen.

Druckhöhe oder Abstand des Wasserspiegels von der oberen Seite der Mündung, in Metern.	Oeffnungshöhen in Metern.					
	0,20	0,10	0,05	0,03	0,02	0,01
0,000	»	»	»	»	»	»
0,005	»	»	»	»	»	0,705
0,010	»	»	0,607	0,630	0,660	0,701
0,015	»	0,593	0,612	0,632	0,660	0,697
0,020	0,572	0,596	0,615	0,634	0,659	0,694
0,030	0,578	0,600	0,620	0,638	0,659	0,688
0,040	0,582	0,603	0,623	0,640	0,658	0,683
0,050	0,585	0,605	0,625	0,640	0,658	0,679
0,060	0,587	0,607	0,627	0,640	0,657	0,676
0,070	0,588	0,609	0,628	0,639	0,656	0,673
0,080	0,589	0,610	0,629	0,638	0,656	0,670
0,090	0,591	0,610	0,629	0,637	0,655	0,668
0,100	0,592	0,611	0,630	0,637	0,654	0,666
0,120	0,593	0,612	0,630	0,636	0,653	0,663
0,140	0,595	0,613	0,630	0,635	0,651	0,660
0,160	0,596	0,614	0,631	0,634	0,650	0,658
0,180	0,597	0,615	0,630	0,634	0,649	0,657
0,200	0,598	0,615	0,630	0,633	0,648	0,655
0,250	0,599	0,616	0,630	0,632	0,646	0,653
0,300	0,600	0,616	0,629	0,632	0,644	0,650
0,400	0,602	0,617	0,628	0,631	0,642	0,647
0,500	0,603	0,617	0,628	0,630	0,640	0,644
0,600	0,604	0,617	0,627	0,630	0,638	0,642
0,700	0,604	0,616	0,627	0,629	0,637	0,640
0,800	0,605	0,616	0,627	0,629	0,636	0,637
0,900	0,605	0,615	0,626	0,628	0,634	0,635
1,000	0,605	0,615	0,626	0,628	0,633	0,632
1,100	0,604	0,614	0,625	0,627	0,631	0,629
1,200	0,604	0,614	0,624	0,626	0,628	0,626
1,300	0,603	0,613	0,622	0,624	0,625	0,622
1,400	0,603	0,612	0,621	0,622	0,622	0,618
1,500	0,602	0,611	0,620	0,620	0,619	0,615
1,600	0,602	0,611	0,618	0,618	0,617	0,613
1,700	0,602	0,610	0,617	0,616	0,615	0,612
1,800	0,601	0,609	0,615	0,615	0,614	0,612
1,900	0,601	0,608	0,614	0,613	0,612	0,611
2,000	0,601	0,607	0,613	0,612	0,612	0,611
3,000	0,601	0,603	0,606	0,608	0,610	0,609

Anmerk. Tabellen dieser Art für das preuß. Fußmaaß theilt der »Ingenieur« S. 448 mit.

Tabelle II.

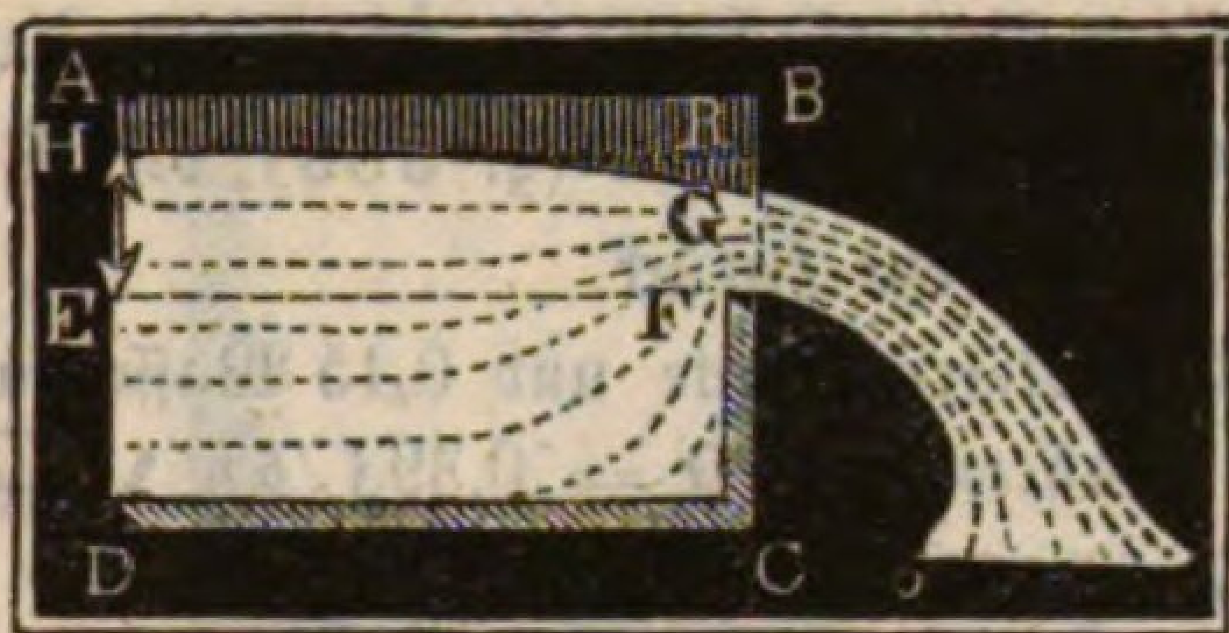
Rectanguläre Seiten-öffnungen.

Die Ausflußcoefficienten für den Ausfluß des Wassers durch rectanguläre Mündungen in einer vertikalen dünnen Wand, nach Poncelet und Lesbros. Die Druckhöhen sind unmittelbar an der Mündung gemessen.

Druckhöhe oder Abstand des Wasserspiegels von der oberen Seite der Mündung, in Metern.	Oeffnungshöhen in Metern.					
	0,20	0,10	0,05	0,03	0,02	0,01
0,000	0,619	0,667	0,713	0,766	0,783	0,795
0,005	0,597	0,630	0,668	0,725	0,750	0,778
0,010	0,595	0,618	0,642	0,687	0,720	0,762
0,015	0,594	0,615	0,639	0,674	0,707	0,745
0,020	0,594	0,614	0,638	0,668	0,697	0,729
0,030	0,593	0,613	0,637	0,659	0,685	0,708
0,040	0,593	0,612	0,636	0,654	0,678	0,695
0,050	0,593	0,612	0,636	0,651	0,672	0,686
0,060	0,594	0,613	0,635	0,647	0,668	0,681
0,070	0,594	0,613	0,635	0,645	0,665	0,677
0,080	0,594	0,613	0,635	0,643	0,662	0,675
0,090	0,595	0,614	0,634	0,641	0,659	0,672
0,100	0,595	0,614	0,634	0,640	0,657	0,669
0,120	0,596	0,614	0,633	0,637	0,655	0,665
0,140	0,597	0,614	0,632	0,636	0,653	0,661
0,160	0,597	0,615	0,631	0,635	0,651	0,659
0,180	0,598	0,615	0,631	0,634	0,650	0,657
0,200	0,599	0,615	0,630	0,633	0,649	0,656
0,250	0,600	0,616	0,630	0,632	0,646	0,653
0,300	0,601	0,616	0,629	0,632	0,644	0,651
0,400	0,602	0,617	0,629	0,631	0,642	0,647
0,500	0,603	0,617	0,628	0,630	0,640	0,645
0,600	0,604	0,617	0,627	0,630	0,638	0,643
0,700	0,604	0,616	0,627	0,629	0,637	0,640
0,800	0,605	0,616	0,627	0,629	0,636	0,637
0,900	0,605	0,615	0,626	0,628	0,634	0,635
1,000	0,605	0,615	0,626	0,628	0,633	0,632
1,100	0,604	0,614	0,625	0,627	0,631	0,629
1,200	0,604	0,614	0,624	0,626	0,628	0,626
1,300	0,603	0,613	0,622	0,624	0,625	0,622
1,400	0,603	0,612	0,621	0,622	0,622	0,618
1,500	0,602	0,611	0,620	0,620	0,619	0,615
1,600	0,602	0,611	0,618	0,618	0,617	0,613
1,700	0,602	0,610	0,617	0,616	0,615	0,612
1,800	0,601	0,609	0,615	0,615	0,614	0,612
1,900	0,601	0,608	0,614	0,613	0,613	0,611
2,000	0,601	0,607	0,614	0,612	0,612	0,611
3,000	0,601	0,603	0,606	0,608	0,610	0,609

§. 350. Fließt das Wasser durch Ueberfälle (franz. und engl. déversoirs) oder Einschnitte in einer dünnen Wand wie z. B. FB, Fig. 505, so erleidet der Strahl an drei Seiten eine Contraction, wodurch ebenfalls eine Verminderung der Ausflußmenge herbeigeführt wird. Es ist daher das Ausflußquantum für diese Mündungen: Ueberfälle.

Fig. 505.



$Q_1 = \frac{2}{3} \mu b h \sqrt{2gh}$ zu setzen. Hier ist aber die Druckhöhe $EH = h$, oder der Wasserstand über der Ueberfallsschwelle F nicht unmittelbar an der Schwelle, sondern mindestens 2 Fuß vor der Wand, in welcher sich die Mündung befindet, zu messen, weil der Wasserspiegel vor der Mündung eine Senkung erleidet, die nach der Mündung zu immer größer und größer wird, und in der Mündungsebene selbst eine Größe GR von 0,1 bis 0,25 der Druckhöhe FR beträgt, so daß die Dicke FG des Wasserstrahles in dieser Ebene nur 0,9 bis 0,75 der Druckhöhe oder des Wasserstandes beträgt. Ueber den Ausfluß des Wassers durch Ueberfälle in dünnen Wänden sind von Vielen Versuche angestellt worden, und es bieten deren Resultate eine große Mannichfaltigkeit, aber nicht überall die gewünschte Uebereinstimmung dar. Die Ergebnisse der Versuche von Poncelet und Lesbros an Ueberfällen von 2 Decimeter Breite enthält folgende kleine Tabelle.

Tabelle der Ausflußcoefficienten für Ueberfälle von 2 Decimeter Breite, nach Poncelet und Lesbros.

Druckhöhe h in Metern.	0,01	0,02	0,03	0,04	0,06	0,08	0,10	0,15	0,20	0,22
Ausflußcoefficient $\mu_1 = \frac{2}{3}\mu$.	0,424	0,417	0,412	0,407	0,401	0,397	0,395	0,393	0,390	0,385

Bei ohngefähren Bestimmungen kann man hiernach $\mu_1 = 0,4$ setzen. Versuche an Ueberfällen mit größeren Breiten gaben Eytelwein im Mittel $\mu_1 = \frac{2}{3}\,\mu = 0,42$ und Bidone $\mu_1 = \frac{2}{3} \,.\, 0,62 = 0,41$ u. s. w. Die ausgedehntesten Versuche sind von D'Aubuisson und Castel ausgeführt worden. Aus ihnen folgert D'Aubuisson, daß für Ueberfälle, deren Breite nicht mehr als den dritten Theil der Breite des Kanales oder der Wand beträgt, worin sich der Ueberfall befindet, μ im Mittel 0,60, also $\frac{2}{3}\mu = 0,40$ zu setzen sei, daß dagegen für Ueberfälle, welche über die ganze Wand weggehen, oder mit dem Kanale einerlei Breite haben,

Ueberfälle. $\mu = 0{,}665$ also $\mu_1 = 0{,}444$ angenommen werden müsse, daß endlich bei anderen Verhältnissen zwischen der Ueberfall- und Kanalbreite die Ausflußcoefficienten sehr verschieden, und zwar zwischen 0,58 und 0,66 liegend, ausfallen. Die vom Verfasser angestellten Untersuchungen über den Ausfluß des Wassers durch Ueberfälle bringen weiter unten (§. 356) die Veränderlichkeit dieser Ausflußcoefficienten auf Gesetze zurück.

Beispiele. 1) Ein Ueberfall von 0,25 Meter Breite und 0,15 Wasserstand oder Druckhöhe giebt in der Secunde die Wassermenge $Q = 0{,}393 \,.\, b h \sqrt{2 g h}$ $= 0\,393 \,.\, 4{,}429 \,.\, 0{,}25 \,.\, (0{,}15)^{3/2} = 0{,}435 \,.\, 0{,}0581 = 0{,}02527$ Cubikmeter.
2) Welche Breite hat man einem Ueberfalle zu geben, der bei einem Wasserstande von 8 Zoll eine Wassermenge von 6 Cubikfuß pr. Secunde durchlassen soll? Es ist

$$b = \frac{Q_1}{\mu_1 \sqrt{2 g h^3}} = \frac{6}{0{,}4 \,.\, 7{,}906 \sqrt{(2/3)^3}} = \frac{6}{3{,}1624 \,.\, 0{,}5443} = 3{,}486 \text{ Fuß}.$$

Nimmt man nach Eytelwein $\mu_1 = 0{,}42$ an, so folgt

$$b = \frac{6}{3{,}32 \,.\, 0{,}5443} = 3{,}320 \text{ Fuß}.$$

Maximum und Minimum der Contraction. §. 351. Bei dem Ausflusse des Wassers durch Mündungen in einer ebenen Wand steht die Axe des Strahles rechtwinkelig auf die Wandfläche und es ist deshalb die Größe der Contraction eine mittlere, bildet aber die Axe der Mündung oder des Strahles einen spitzen Winkel mit dem die Mündung enthaltenden Theile der Wand, so fällt die Contraction kleiner aus, und ist der Winkel zwischen dieser Axe und den inneren Randflächen der Oeffnung ein stumpfer, so stellt sich eine noch größere Contraction heraus. Den einen Fall repräsentirt Fig. 506, und den andern Fig. 507. Jedenfalls hat diese Verschiedenheit der Contraction darin ihren Grund, daß dort die von den Seiten zufließenden Wasserelemente weniger, hier aber mehr von ihrer Richtung abgelenkt werden, wenn sie durch die Mündung gehen und zu einem Strahle sich vereinigen.

Fig. 506.

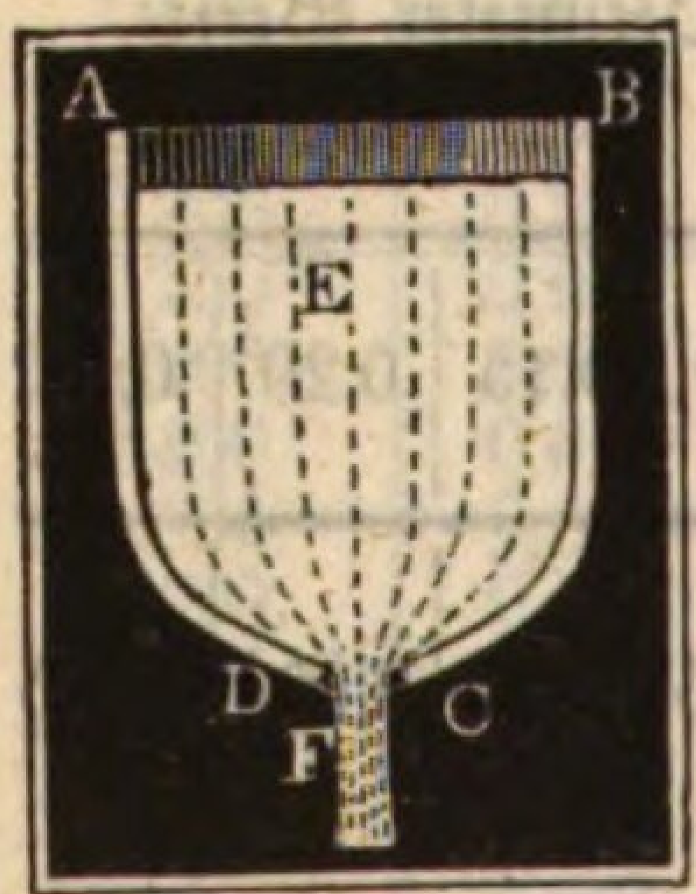
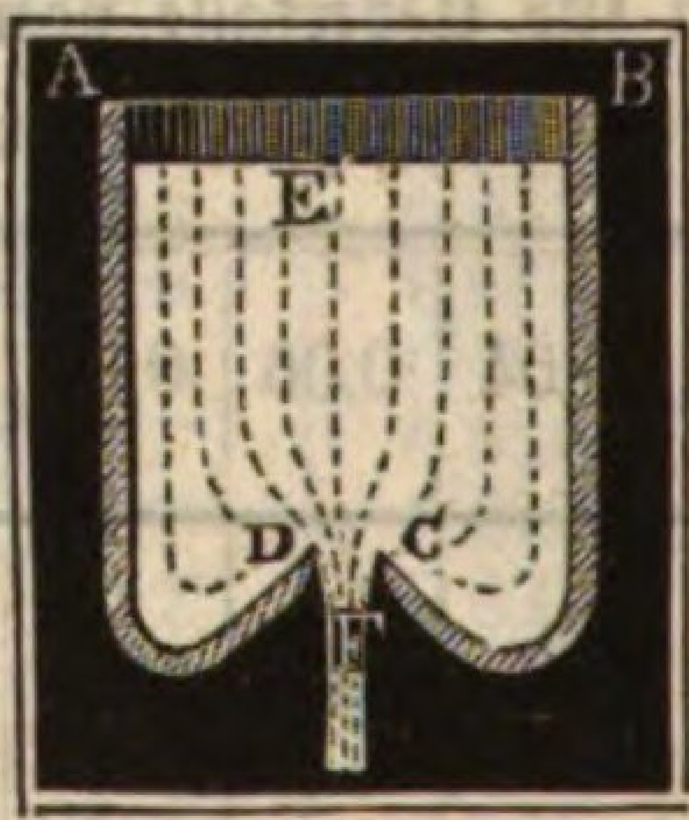


Fig. 507.



Die Contraction ist ein Minimum, d. h. Null, wenn durch allmälige Zusammenziehung der die Mündung umfassenden Wand das Zufließen von der Seite ganz verhindert wird, und ein Maximum, wenn die Wand der Richtung des Strahles entgegen gerichtet ist, so daß gewisse Wasserelemente sich um 180° wenden müssen, um in die Mündung zu gelangen. Beide Fälle sind in den Figuren 508 und 509 abgebildet. In dem ersten Falle ist der Ausflußcoefficient beinahe 1, nämlich 0,96 bis 0,98, und im zweiten hat er sich bei den Messungen von Borda, Bidone und von dem Verfasser im Mittel 0,53 herausgestellt.

In der Praxis kommen, durch convergente Wände herbeigeführt, Veränderungen der Ausflußcoefficienten sehr oft vor, namentlich tritt der Fall bei Schützen ein, wenn diese gegen den Horizont geneigt sind, wie z. B. Fig. 510 vor Augen führt. **Poncelet** fand für eine derartige Schutzöffnung den Ausflußcoefficienten $\mu = 0,80$, wenn das Schutzbrett 45^0 geneigt war, und dagegen μ nur $= 0,74$ bei einer Neigung von $63\frac{1}{2}$ Grad, d. h. bei einer Böschung von $\frac{1}{2}$. Für derartige Ueberfälle, Fig. 511, wo ebenfalls wie bei der Poncelet'schen Schütze nur an einer Seite Contraction eintritt, fand der Verfasser $\mu = 0,70$, also $\mu_1 = \frac{2}{3}\mu = 0,467$ bei einer Neigung von 45^0; und $\mu = 0,67$, also $\mu_1 = 0,447$, bei einer Neigung von $63\frac{1}{2}$ Grad.

Maximum und Minimum der Contraction.

Fig. 508.

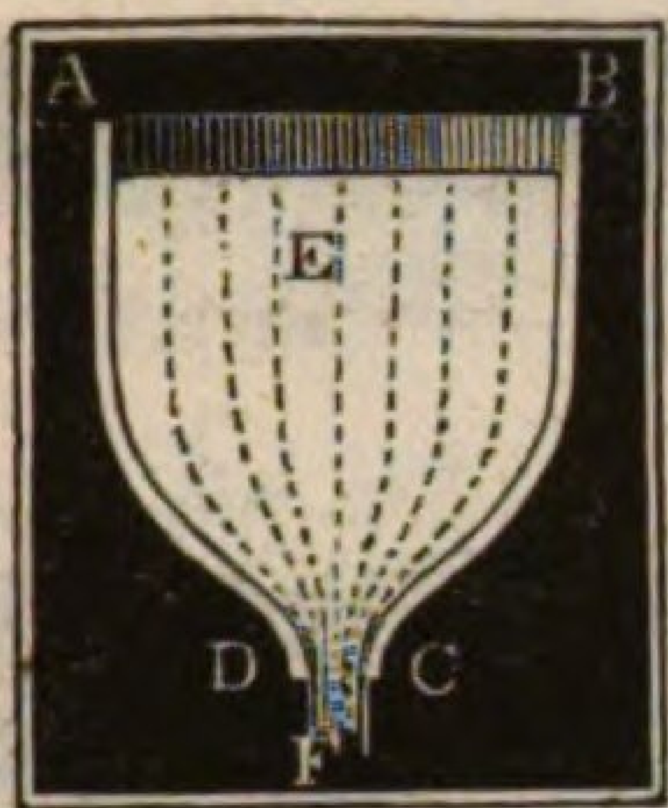


Fig. 509.

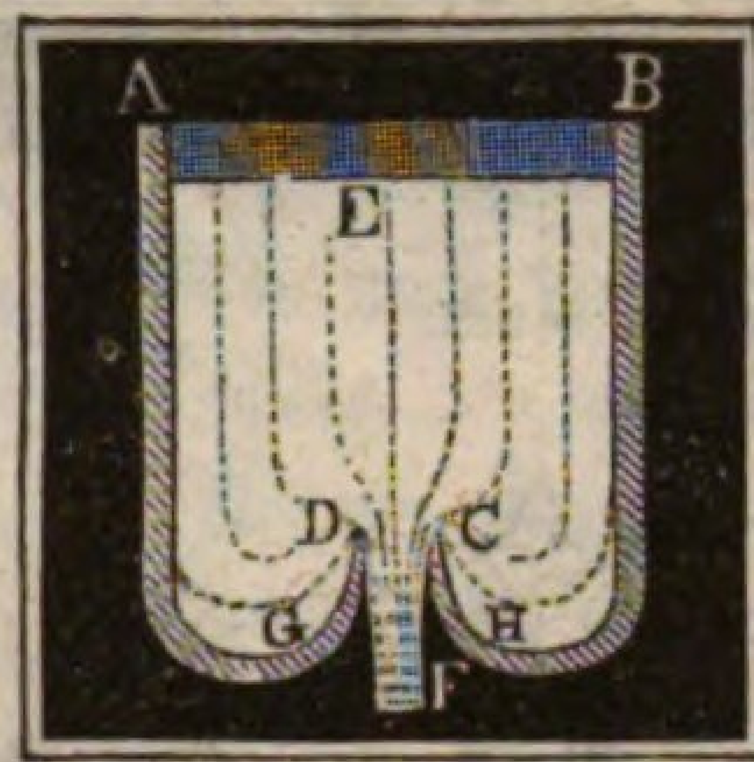


Fig. 510.

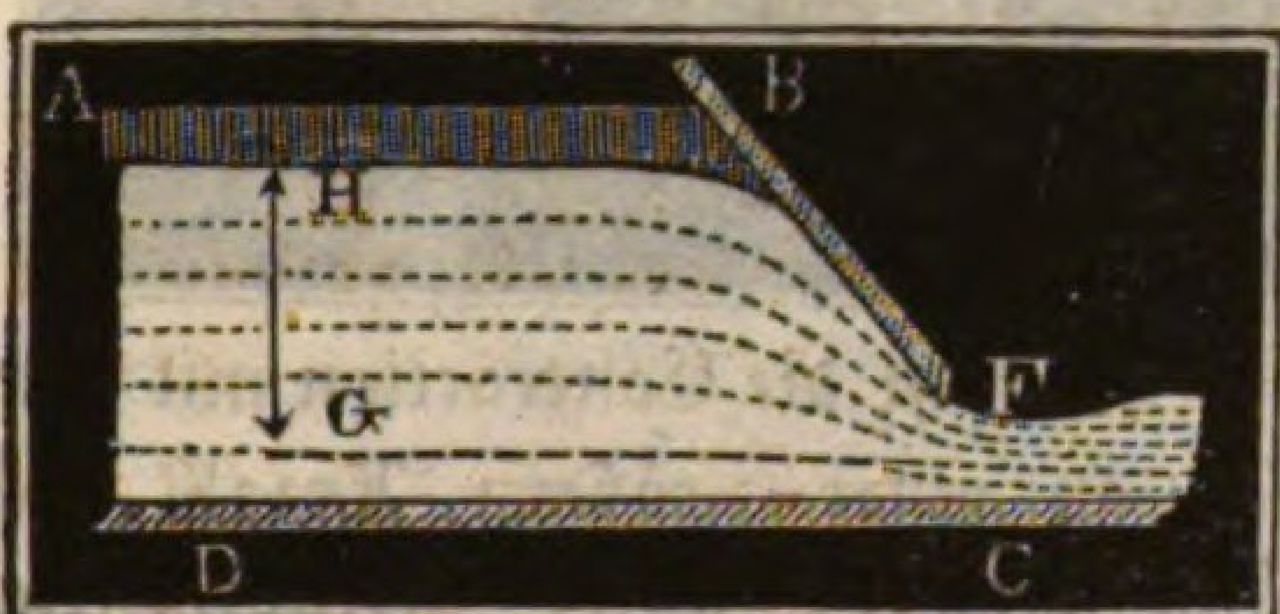
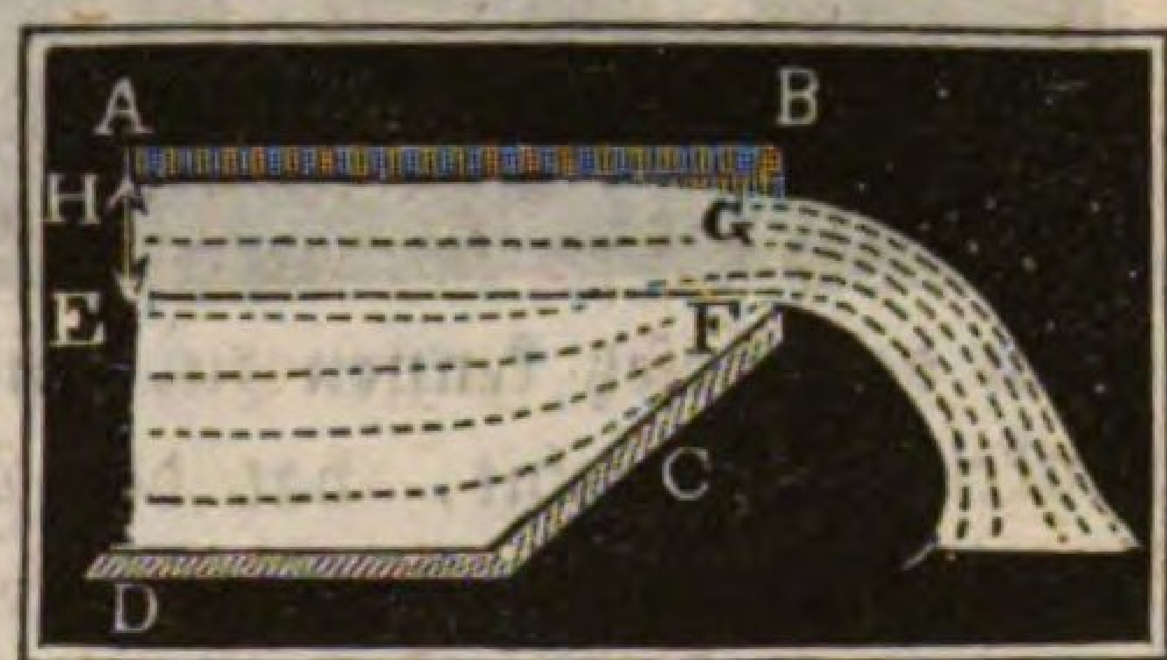


Fig. 511.



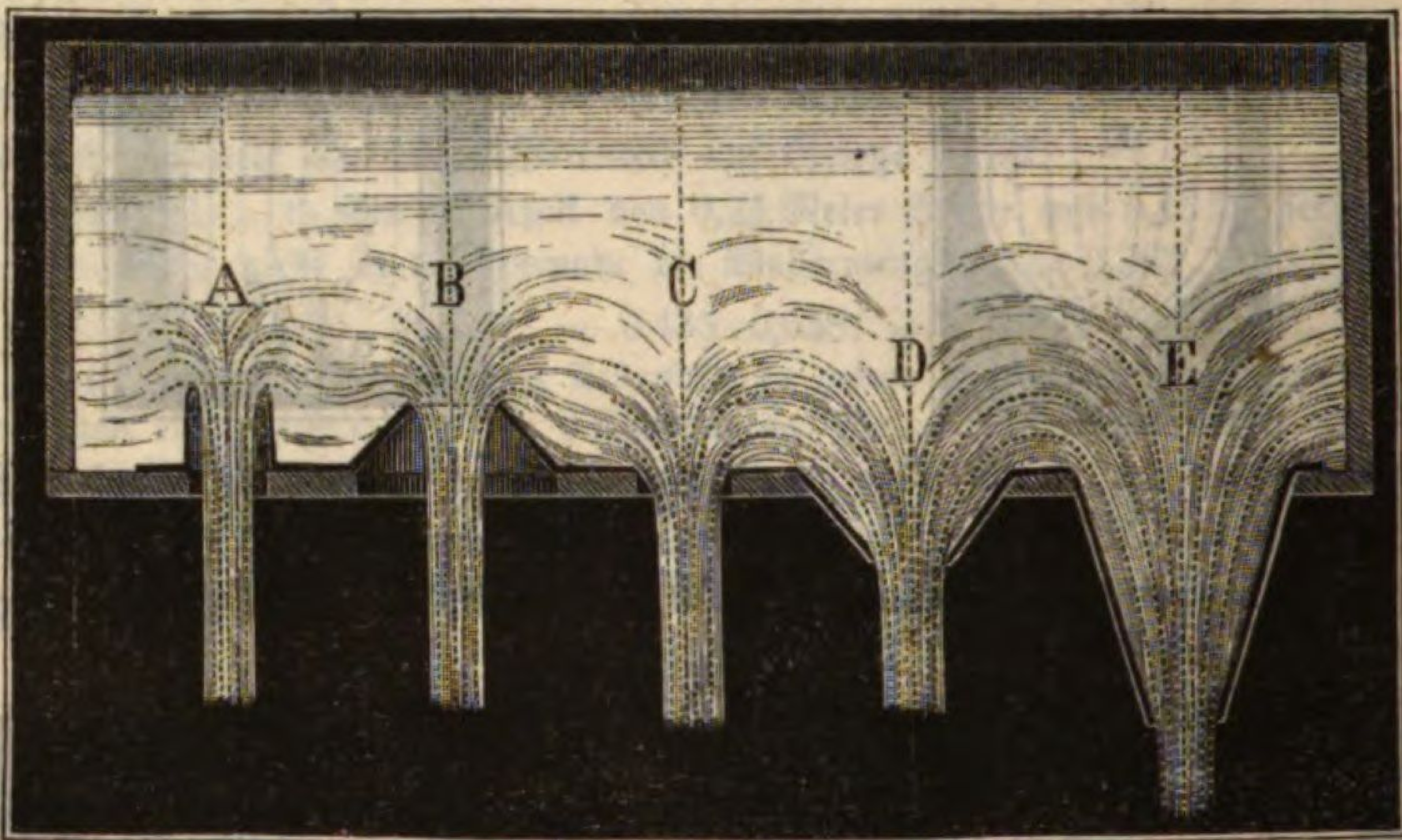
Beispiel. Wenn das unter dem Winkel von 50 Grad geneigte Schutzbrett, welches quer über ein $2\frac{1}{4}$ Fuß breites Gerinne weggeht, $\frac{1}{2}$ Fuß hoch gezogen wird, und sich hierauf der Wasserspiegel um 4 Fuß über den Gerinnboden stellt, so läßt sich die Oeffnungshöhe $a = \frac{1}{2} sin. 50^0 = 0,3830$ Fuß, die Druckhöhe $h = 4 - \frac{1}{2} . 0,3830 = 3,8085$ Fuß, und der Ausflußcoefficient $\mu = 0,78$, daher die Ausflußmenge $Q_1 = 0,78 . 2,25 . 0,3830 . 7,906 \sqrt{3,8085} = 10,36$ Cubikfuß setzen.

§ 352. Die Contraction eines Wasserstrahles ist um so größer, je mehr die Richtung des von der Seite zuströmenden Wassers von der Bewegungsrichtung des Strahles abweicht. Bei dem Ausflusse durch die Mündung C, Fig. 512 a. f. S., in der ebenen dünnen Wand beträgt der Winkel δ, um welchen die Bewegungsrichtung der von der Seite zuströmenden Wasserelemente von der Axen- oder Bewegungsrichtung des Strahles abweicht, den Rechtwinkel, bei der Mündung A, welche von einer dünnen Röhrenwand gebildet wird, mißt dieser Winkel δ 2 Rechte $(2R)$; bei dem Ausflusse durch ein conisch divergentes Mundstück B ist δ zwischen R und

Contractions-scala.

Contractions-scala. $2R$, und bei dem Ausflusse durch conisch convergente Ansatzstücke D und E ist δ zwischen 0^0 und R.

Fig. 512.



Um das Gesetz kennen zu lernen, nach welchem die Contraction mit dem Winkel δ abnimmt, hat der Verfasser an einer größern Anzahl von Mundstücken von 2 Centimeter Mündungsweite unter verschiedenem Drucke (von 1 bis 10 Fuß) eine ganze Reihe von Versuchen angestellt, und die Ergebnisse derselben in folgender Tabelle zusammengestellt:

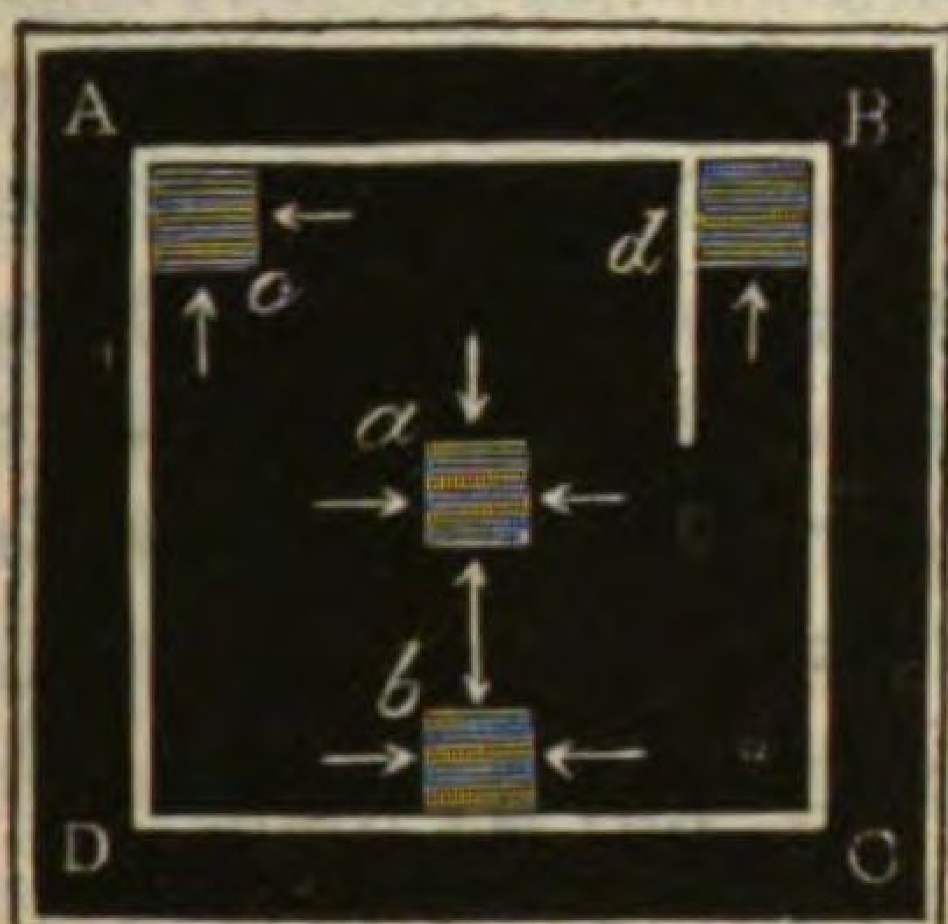
δ	180°	157½°	135°	112½°	90°	67½°	45°	22½°	11¼°	5¾°	0°
μ	0,541	0,546	0,577	0,606	0,632	0,684	0,753	0,902	0,924	0,949	0,966

Diese Tabelle giebt allerdings nur die Ausflußcoefficienten (μ) an, welche den verschiedenen Abweichungswinkeln δ zukommen; die Contractionscoefficienten sind noch ein Paar Procent größer, da bei jedem Ausflusse auch ein kleiner Verlust an Geschwindigkeit eintritt. Um bei dem Eintritte des Wassers in die convergenten Ansatzstücke D und E keinen Verlust an lebendiger Kraft zu erleiden, wurden diese Stücke bei der Einmündung abgerundet. Die Reibung, welche das Wasser bei der Bewegung an den Wänden dieser Mundstücke zu überwinden hat, wird weiter unten (§. 368) bestimmt werden.

Partielle Contraction. §. 353. Wir haben seither nur den Fall kennen gelernt, wo das Wasser von allen Seiten her der Oeffnung zuströmt und einen ringsherum contrahirten Strahl bildet, und müssen nun noch auch die Fälle, wenn das Wasser nur von einer oder einigen Seiten her gegen die Oeffnung strömt und deshalb einen nur theilweise contrahirten Strahl hervorbringt,

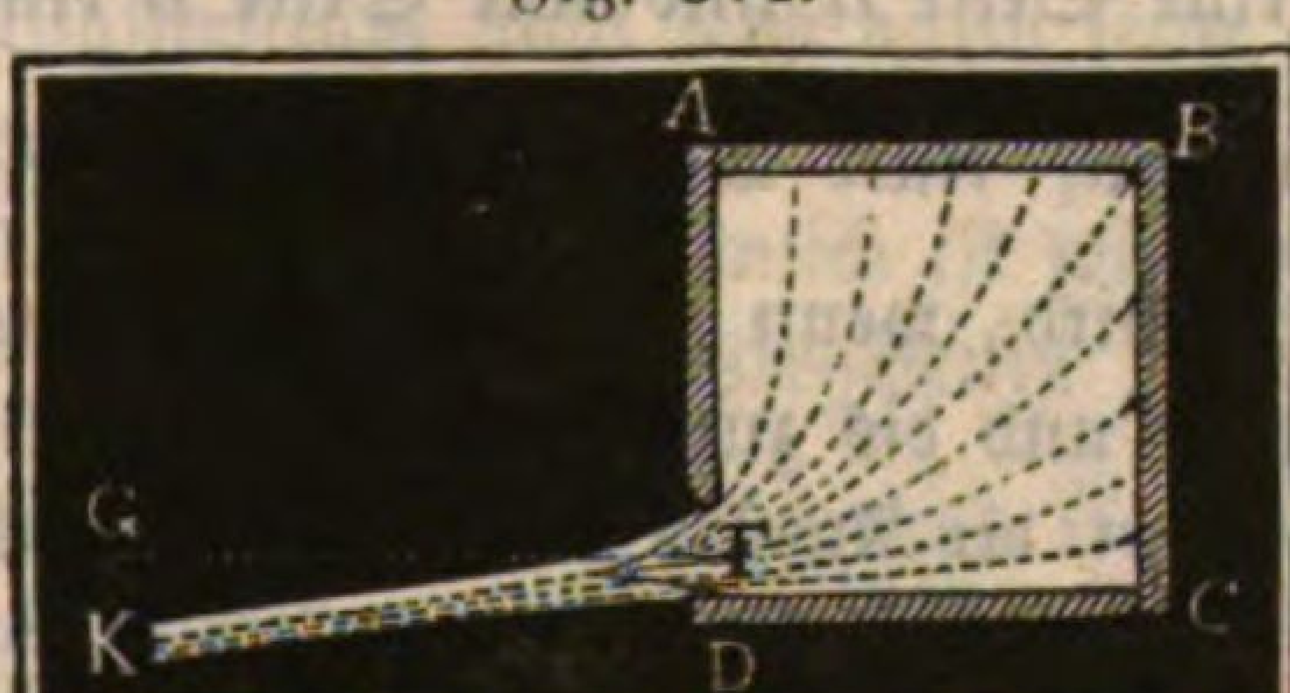
in Untersuchung ziehen. Um diese Contractionsverhältnisse von einander zu unterscheiden, wollen wir den Fall, wenn der Strahl auf allen Seiten contrahirt, die vollständige und den Fall, wenn der Strahl nur auf einen Theil seines Umfanges zusammengezogen ist, die unvollständige oder partielle Contraction (franz. contraction incomplète; engl. incomplete contraction) nennen. Die unvollständige Contraction wird herbeigeführt, wenn eine Mündung in der ebenen dünnen Wand durch andere Wände in der Richtung des Strahles auf einer oder mehreren Seiten eingefaßt ist. In Fig. 513 sind vier gleichgroße Mündungen a, b, c, d, im Boden AC eines Gefäßes abgebildet. Die Contraction beim Ausflusse durch die Mündung a in der Mitte des Bodens ist vollständig, weil bei ihr das Wasser von allen Seiten zuströmen kann; die Contraction beim Ausflusse durch b, c und d ist aber unvollständig, weil bei diesen das Wasser nur von drei, zwei oder einer Seite zuströmen kann. Ebenso, wenn eine rectanguläre Seitenöffnung bis zum Boden des Gefäßes geht, so ist die Contraction partiell, weil dann dieselbe auf der Seite im Boden wegfällt; wenn ferner die Schutzöffnung bis zum Boden und bis an die Seitenwände des Gerinnes reicht, so bleibt nur noch an einer Seite Contraction übrig. Partielle Contraction.

Fig. 513.



Die partielle Contraction macht sich auf zweierlei Weise bemerklich. Erstens giebt sie dem Strahl eine schiefe Richtung, und zweitens bewirkt sie einen stärkeren Ausfluß.

Fig. 514.



Reicht z. B. die Seitenöffnung F, Fig. 514, bis an eine zweite Seitenwand CD, so daß daselbst eine Contraction nicht eintreten kann, so weicht die Axe FK des Strahles um einen Winkel KFG von ohngefähr 9 Grad von der Normale FG zur Ebene der Mündung ab. Viel größer stellt sich aber noch die Schiefe des Strahles heraus, wenn zwei benachbarte Seiten der Mündung eingefaßt sind. Ist die Mündung an zwei gegenüberliegenden Seiten eingefaßt, und die Contraction an denselben aufgehoben, so tritt natürlich eine solche Abweichung nicht ein, wohl aber nimmt der Strahl auf den nicht eingefaßten Seiten in einiger Entfernung außerhalb der Mündung noch mehr Ausbreitung an, als wenn diese Einfassung nicht vorhanden wäre.

Partielle Contraction. Wenn auch durch die partielle Contraction eine größere Ausflußmenge erzielt wird, so muß man sie doch in der Regel zu vermeiden suchen, weil durch sie der Strahl eine abweichende Richtung und eine große Ausbreitung erleidet.

Versuche über den Ausfluß des Wassers bei partieller Contraction sind von Bidone und von dem Verfasser angestellt worden. Sie haben gezeigt, daß die Ausflußcoefficienten mit dem Verhältnisse des eingefaßten Theiles zum ganzen Umfange fast gleichmäßig zunehmen; doch ist leicht zu ermessen, daß diese Beziehung eine andere wird, wenn der Umfang beinahe oder ganz eingefaßt und die Contraction beinahe oder ganz aufgehoben ist. Setzen wir das Verhältniß der Einfassung zum ganzen Umfange $= n$, und verstehen wir unter $\varkappa$ irgend eine Erfahrungszahl, so können wir, wenn auch nur annähernd, das Verhältniß des entsprechenden Ausflußcoefficienten μ_n der partiellen Contraction zum Ausflußcoefficienten μ_o bei vollständiger Contraction:

$$\frac{\mu_n}{\mu_o} = 1 + \varkappa n, \text{ und folglich } \mu_n = (1 + \varkappa n)\, \mu_o \text{ setzen.}$$

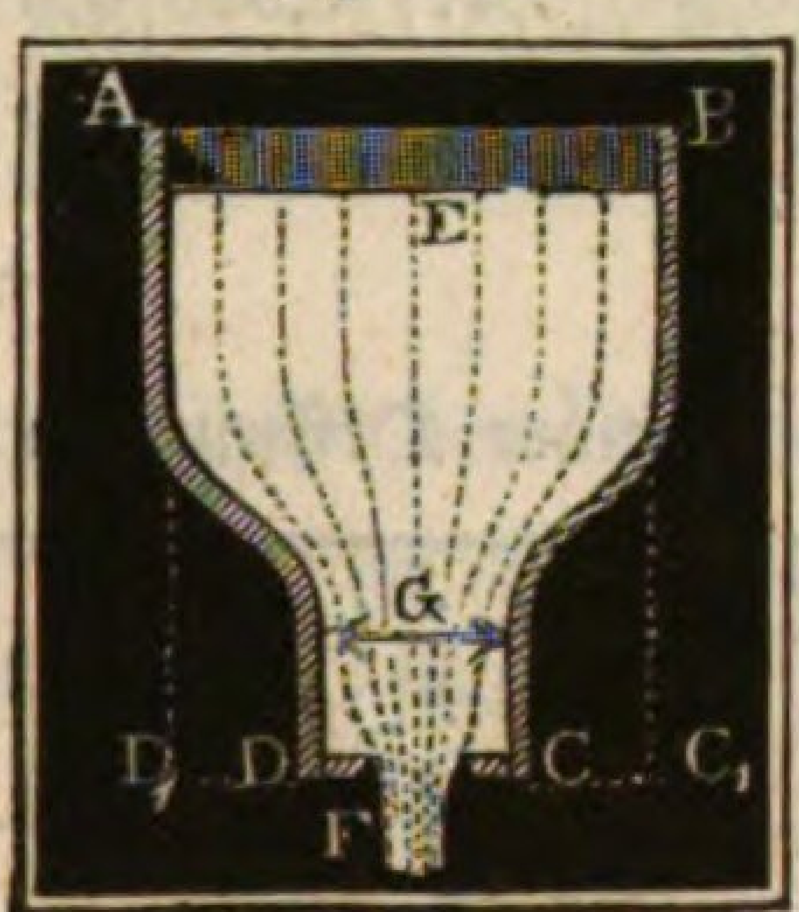
Die Versuche Bidone's geben für kleine kreisförmige Mündungen $\varkappa = 0{,}128$ und für quadratische $\varkappa = 0{,}152$; die des Verfassers haben für kleine rectanguläre Mündungen $\varkappa = 0{,}134$, für größere (Ponceletmündungen) 0,2 Meter Breite und 0,1 Meter Höhe aber $\varkappa = 0{,}157$ geliefert (s. die Zeitschrift: »der Ingenieur«, Bd. 2.) In der Anwendung kommen fast nur rectanguläre Mündungen mit Einfassungen vor; wir werden für sie den mittleren Werth $\varkappa = 0{,}155$ annehmen und hiernach $\mu_n = (1 + 0{,}155 \,.\, n)\, \mu_o$ setzen. Bei einer rectangulären Seitenöffnung von der Höhe a und Breite b ist $n = \frac{b}{2\,(a+b)}$, wenn die Contraction an einer Seite b wegfällt, wenn z. B. diese Seite in der Ebene des Bodens liegt, ferner $n = \frac{1}{2}$, wenn eine Seite a und eine Seite b eingefaßt sind, und $n = \frac{2\,a + b}{2\,(a+b)}$, wenn auf einer Seite b und auf beiden Seiten a die Contraction verhindert wird, wenn z. B. die Mündung die ganze Breite des Reservoirs einnimmt und bis zur Bodenebene reicht.

Beispiel. Welches Wasserquantum liefert der Ausfluß des Wassers durch eine 3 Fuß breite und 10 Zoll hohe vertikale Schutzöffnung, bei einem Drucke von $1\frac{1}{2}$ Fuß über der oberen Mündungsseite, wenn die untere Mündungsseite in den Gerinnboden fällt, und daher die Contraction am Boden wegfällt. Die theoretische Ausflußmenge ist $Q = {}^{10}/_{12} \,.\, 3 \,.\, 7{,}906\sqrt{1{,}5 + {}^{5}/_{12}} = {}^{5}/_{2} \,.\, 7{,}906\sqrt{1{,}9166} = 27{,}35$ Cubikfuß. Nach der Poncelet'schen Tabelle ist bei vollständiger Contraction $\mu = 0{,}604$ zu setzen, nun hat man aber $n = \frac{3}{2\,(3 + {}^{10}/_{12})} = \frac{9}{18+5} = {}^{9}/_{23}$, daher ist für den vorliegenden Fall der partiellen Contraction $\mu_n = (1 + 0{,}155 \,.\, {}^{9}/_{23}) \,.\, 0{,}604 = 1{,}060 \,.\, 0{,}604 = 0{,}640$ und das effective Ausflußquantum $Q_1 = 0{,}640\, Q = 0{,}640 \,.\, 27{,}35 = 17{,}50$ Cubikfuß.

§. 354. Die Contraction des Wasserstrahles ist auch noch davon abhängig, ob das Wasser vor der Mündung ziemlich in Ruhe steht, oder ob es mit einer gewissen Geschwindigkeit vor derselben ankommt; je schneller das Wasser der Ausflußmündung zuströmt, je weniger ist auch der Strahl zusammengezogen, desto größer fällt auch die Ausflußmenge aus. Die oben angegebenen und untersuchten Contractions- und Ausflußverhältnisse beziehen sich nur auf den Fall, wenn sich die Mündung in einer großen Wand befindet, und nun angenommen werden kann, daß das Wasser nur mit einer sehr kleinen Geschwindigkeit der Mündung zufließt; wir müssen daher auch die Contractions- und Ausflußverhältnisse kennen lernen, wenn der Mündungsquerschnitt nicht viel kleiner ist, als der Querschnitt des zufließenden Wassers, wenn folglich das Wasser schon mit einer beträchtlichen Geschwindigkeit an der Mündung ankommt. Um diese beiden Fälle von einander zu unterscheiden, wollen wir die Contraction bei stillstehendem Oberwasser die vollkommene und die bei bewegtem Oberwasser die unvollkommene Contraction (franz. contraction imparfaite; engl. imperfect contraction) nennen. Unvollkommen ist z. B. die Contraction beim Ausfluß aus dem Gefäße AC, Fig. 515, weil der Querschnitt F der Mündung nicht viel kleiner ist, als der Querschnitt G des ankommenden Wassers oder der Inhalt der Wand CD, in welchem sich diese Mündung befindet. Hätte dagegen das Gefäß die Form ABC_1D_1, wäre also der Inhalt der Bodenfläche C_1D_1 viel größer als der Mündungsquerschnitt F, so würde der Ausfluß mit vollkommener Contraction vor sich gehen. Uebrigens unterscheidet sich der unvollkommen contrahirte Wasserstrahl nicht bloß durch seine größere Stärke, sondern auch dadurch von dem vollkommen contrahirten Wasserstrahle, daß er nicht so durchsichtig und krystallähnlich ist wie dieser.

Unvollkommne Contraction.

Fig. 515.



Setzt man das Verhältniß zwischen den Flächenräumen der Mündung F und der Mündungswand G, also $\frac{F}{G} = n$, den Ausflußcoefficienten bei vollkommener Contraction $= \mu_o$ und den bei unvollkommener Contraction $= \mu_n$, so kann man mit großer Genauigkeit, den vom Verfasser hierüber angestellten Versuche und Rechnungen zufolge, setzen:

1) für kreisförmige Mündungen:

$$\mu_n = \mu_o \left[1 + 0{,}04564\,(14{,}821^n - 1)\right], \text{ und}$$

2) für rectanguläre Mündungen:

$$\mu_n = \mu_o \left[1 + 0{,}0760\,(9^n - 1)\right]\ ^{*)}.$$

*) Versuche über die unvollkommene Contraction des Wassers u. s. w. Leipzig, 1843.

Unvollkommne Contraction.

Zur Erleichterung der Rechnung in Fällen der Anwendung sind die Correctionen $\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$ der Ausflußcoefficienten wegen Unvollkommenheit der Contraction in folgenden kleinen Tabellen zusammengestellt.

Tabelle I.

Die Correctionen der Ausflußcoefficienten für kreisrunde Oeffnungen.

n	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$	0,007	0,014	0,023	0,034	0,045	0,059	0,075	0,092	0,112	0,134

n	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$	0,161	0,189	0,223	0,260	0,303	0,351	0,408	0,471	0,546	0,613

Tabelle II.

Die Correctionen der Ausflußcoefficienten für rectanguläre Oeffnungen.

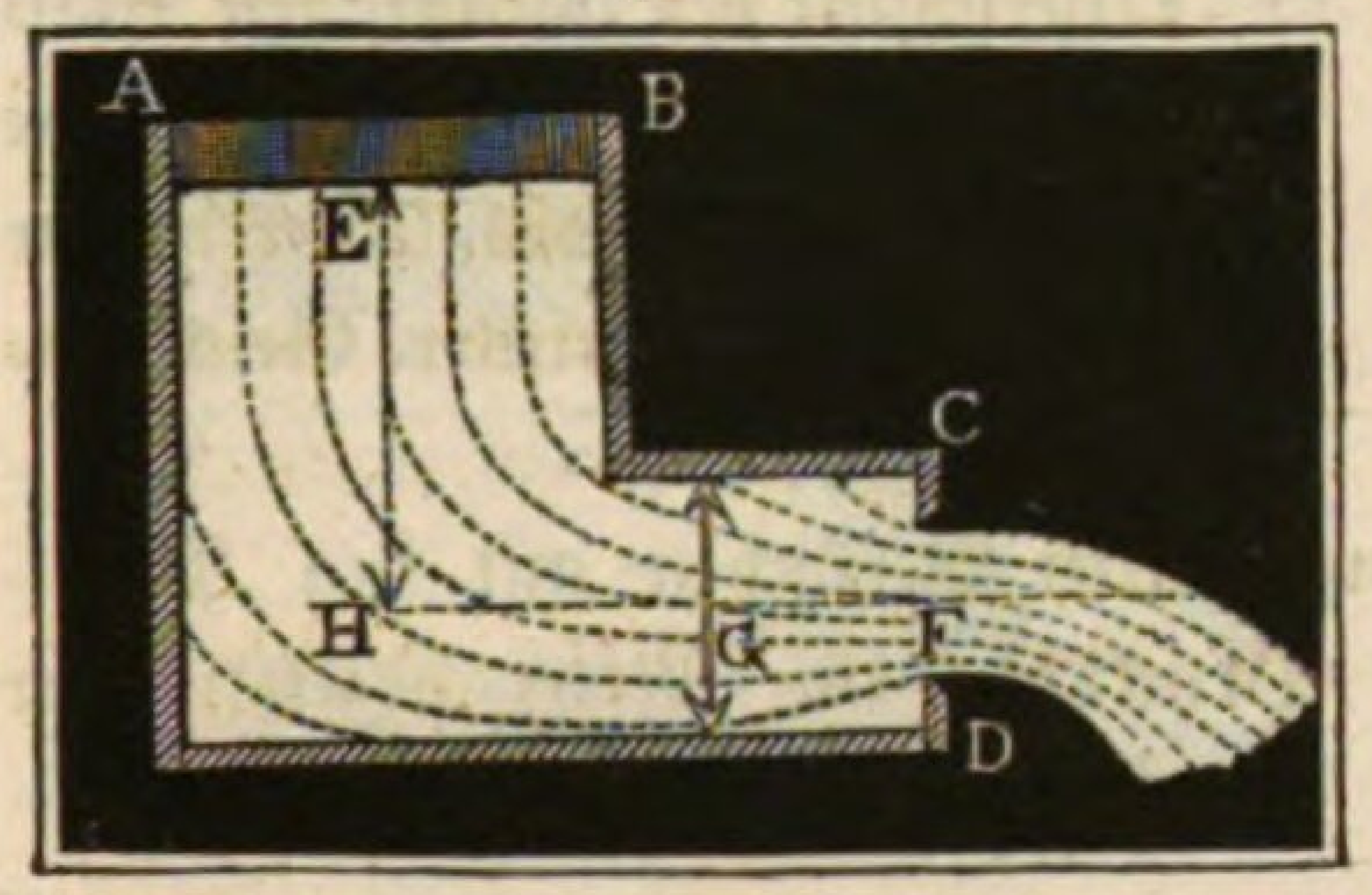
n	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$	0,009	0,019	0,030	0,042	0,056	0,071	0,088	0,107	0,128	0,152

n	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$	0,178	0,208	0,241	0,278	0,319	0,365	0,416	0,473	0,537	0,608

Bei diesen Tabellen stehen oben verschiedene Werthe von den Querschnittsverhältnissen $n = \frac{F}{G}$, und unmittelbar darunter die entsprechenden Zusätze der Ausflußcoefficienten wegen der Unvollkommenheit der Contraction. Z. B. beim Querschnittsverhältniß $n = 0,35$, d. i. für den

Fall, wenn der Inhalt der Mündung 35 Hundertel vom Inhalte der ganzen Mündungswand ist, hat man bei kreisförmigen Mündungen $\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 0{,}075$ und bei rectangulären Mündungen $= 0{,}088$; es ist also der Ausflußcoefficient bei vollkommener Contraction im ersten Falle um 75 Tausendel und im zweiten um 88 Tausendel größer zu machen, um den entsprechenden Ausflußcoefficienten bei unvollkommener Contraction zu erhalten. Wäre der Ausflußcoefficient $\mu_0 = 0{,}615$, so hätte man daher im ersten Falle $\mu_{0{,}35} = 1{,}075 \,.\, 0{,}615 = 0{,}661$ und im zweiten Falle $\mu_{0{,}35} = 1{,}088 \,.\, 0{,}615 = 0{,}669$. Unvollkommene Contraction.

Fig. 516.



Beispiel. Welche Ausflußmenge giebt die rectanguläre $1\frac{1}{4}$ Fuß breite und $\frac{1}{2}$ Fuß hohe Seitenmündung F, wenn dieselbe in einer rectangulären Wand CD, Fig. 516, von 2 Fuß Breite und 1 Fuß Höhe ausgeschnitten ist, und die Druckhöhe $EH = h$ im stillstehenden Wasser 2 Fuß beträgt? Die theoretische Wassermenge ist $Q = 1{,}25 \,.\, 0{,}5 \,.\, 7{,}906\sqrt{2} = 4{,}941 \,.\, 1{,}414 = 6{,}987$ Cubikfuß, und der Ausflußcoefficient bei vollkommner Contraction ist nach Poncelet: $\mu_0 = 0{,}610$; nun ist aber das Querschnittsverhältniß $n = \frac{F}{G} = \frac{1{,}25 \,.\, 0{,}5}{2 \,.\, 1} = 0{,}312$, und für $n = 0{,}312$, nach Tabelle II.,

$$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 0{,}071 + \tfrac{12}{50}\,(0{,}088 - 0{,}071) = 0{,}071 + 0{,}004 = 0{,}075$$

zu setzen, daher folgt denn der Ausflußcoefficient für den vorliegenden Fall $\mu_{0{,}312} = 1{,}075 \,.\, \mu_0 = 1{,}075 \,.\, 0{,}610 = 0{,}6557$ und die Ausflußmenge $Q_1 = 0{,}6557 \,.\, Q = 0{,}6557 \,.\, 6{,}987 = 4{,}581$ Cubikfuß.

§. 355. Wir haben seither angenommen, daß die Druckhöhe im stillstehenden Wasser gemessen worden sei, und müssen nun noch den Fall abhandeln, wenn nur der Wasserstand des bewegten, der Mündung mit einer gewissen Geschwindigkeit zufließenden Wassers gemessen werden kann. Setzen wir eine rectanguläre Seitenöffnung voraus, bezeichnen wir deren Breite durch b und die Wasserstände in Hinsicht auf die beiden horizontalen Kanten durch h_1 und h_2, die der Geschwindigkeit c des zufließenden Wassers entsprechende Höhe aber durch k, so haben wir die theoretische Ausflußmenge $Q = \frac{2}{3} b \sqrt{2g}\,[(h_1 + k)^{3/2} - (h_2 + k)^{3/2}]$. Ausfluß des bewegten Wassers.

Diese Formel läßt sich aber nicht unmittelbar anwenden zur Bestimmung der Wassermenge, weil die Geschwindigkeitshöhe

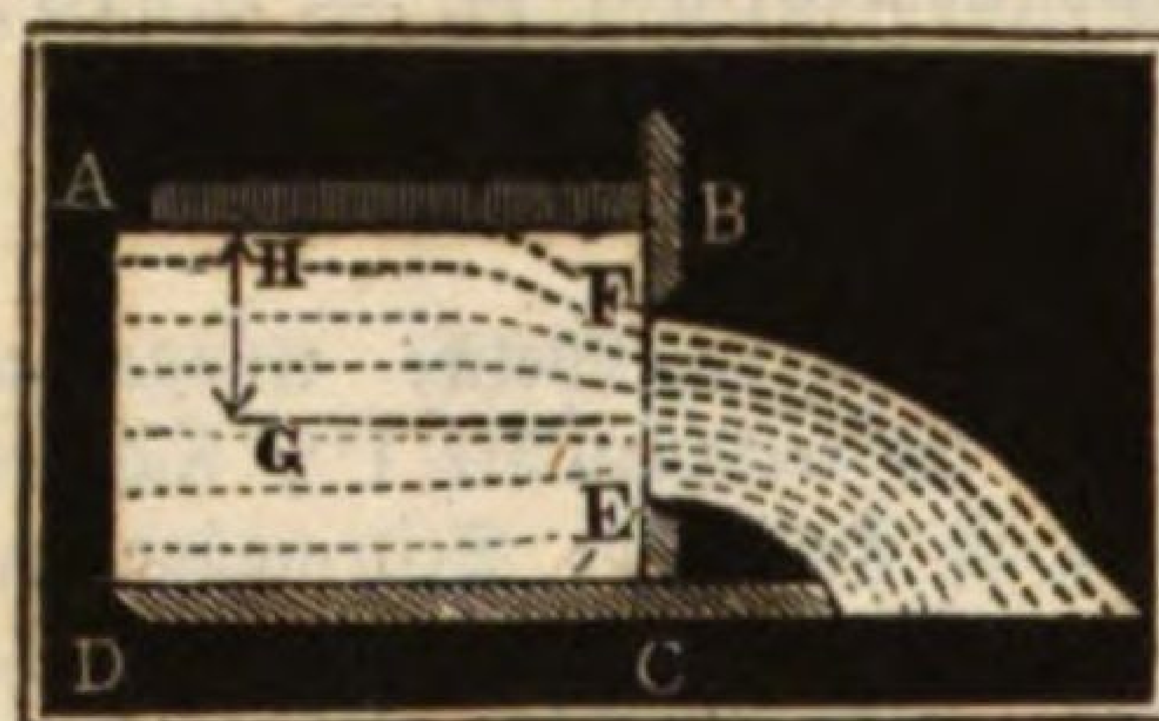
$k = \frac{c^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{G}\right)^2$ wieder von Q abhängt, und die weitere Um-

33*

Ausfluß des bewegten Wassers.

formung auf eine complicirte höhere Gleichung führt, es ist daher weit einfacher, wenn man die effective Wassermenge $Q_1 + \mu_1\, ab \sqrt{2\,gh}$ setzt, und unter μ_1 nicht den bloßen Ausfluß-, sondern einen vorzüglich vom Querschnittsverhältnisse abhängigen Coefficienten versteht. Am häufigsten kommt der Fall vor, wenn es darauf abgesehen ist, das in Gerinnen und Kanälen fließende Wasser zu messen, weil es hier nur selten möglich ist, das Wasser durch eine die Ausflußöffnung enthaltende Querwand BC, Fig. 517, so hoch aufzustauen, daß die Mündung EF nur ein kleiner Theil gegen den Querschnitt des zufließenden Wasserstromes wird und daher die Geschwindigkeit des letzteren sehr klein gegen die mittlere Geschwindigkeit ausfällt.

Fig. 517.



Aus den vom Verfasser hierüber angestellten Versuchen mit den Poncelet'schen Mündungen, wobei die Druckhöhe ein Meter oberhalb der Mündungsebene gemessen wurde, hat sich ziemlich genau

$$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 0{,}641 \left(\frac{F}{G}\right)^2 = 0{,}641\,.\,n^2, \text{ ergeben, wobei } n = \frac{F}{G}$$

das Querschnittsverhältniß, welches jedoch nicht viel über $\frac{1}{2}$ sein soll, ferner μ_0 den aus der Poncelet'schen Tabelle genommenen Ausflußcoefficienten bei vollkommener Contraction, und μ_n den derselben Mündung im vorliegenden Falle entsprechenden Ausflußcoefficienten bezeichnet. Ist b die Breite, a die Höhe der Mündung, b_1 die Breite und a_1 die Höhe des Wasserstromes und ist h die Tiefe der oberen Mündungsseite unter dem Wasserspiegel, so hat man hiernach die effective Ausflußmenge

$$Q_1 = \left[1 + 0{,}641 \left(\frac{a\,b}{a_1 b_1}\right)^2\right] \mu_0\,.\,ab \sqrt{2\,g\left(h + \frac{a}{2}\right)}.$$

Folgende Tabelle dient zur Abkürzung der Rechnung in Fällen der Anwendung.

n	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$	0,002	1,006	0,014	0,026	0,040	0,058	0,079	0,103	0,130	0,160

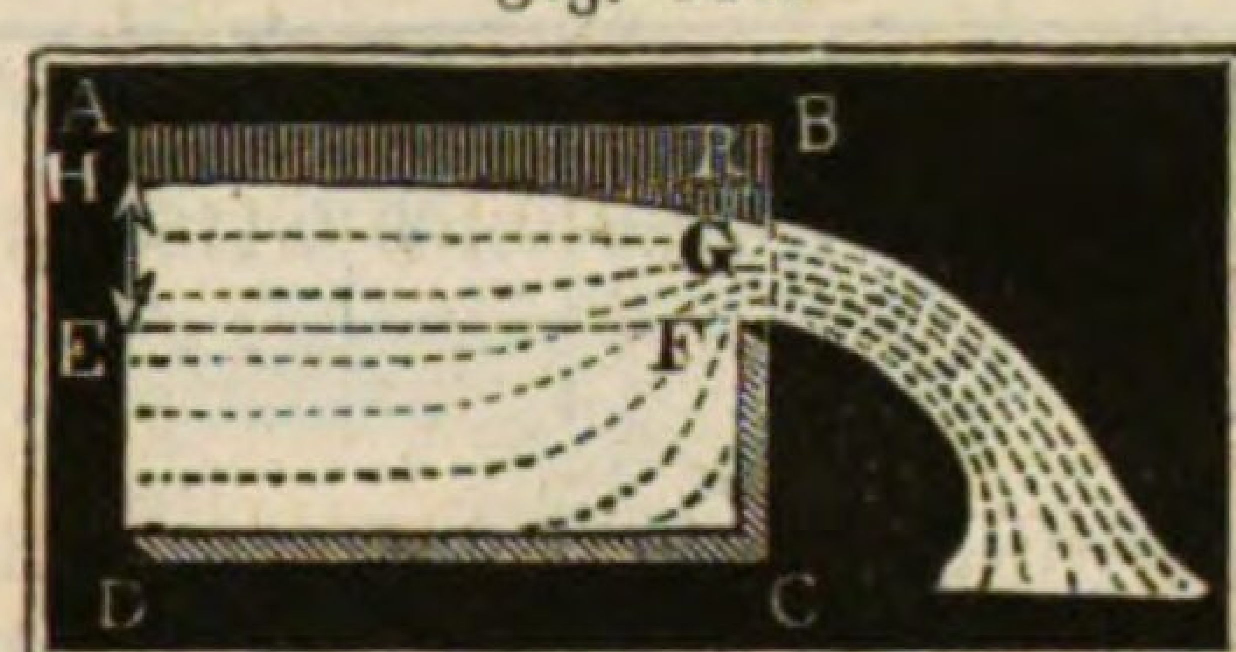
Beispiel. Um das durch ein 3 Fuß breites Gerinne zugeführte Wasserquantum zu finden, hat man eine Spundwand mit einer 2 Fuß weiten und 1 Fuß

hohen rectangulären Mündung eingesetzt, und dadurch das Wasser endlich so aufgestaut, daß es beim Eintritt des Beharrungszustandes um eine Höhe von $2^1/_4$ Fuß über der Sohle und $1^3/_4$ Fuß über der unteren Kante der Mündung stand. Die theoretische Wassermenge ist $Q = ab\sqrt{2gh} = 1 \,.\, 2 \,.\, 7{,}906\sqrt{1{,}25}$ $= 15{,}812 \,.\, 1{,}118 = 17{,}68$ Cubikfuß, der Ausflußcoefficient bei vollkommner Contraction läßt sich 0,602 setzen, und das Querschnittsverhältniß $n = \frac{F}{G} = \frac{ab}{a\,b_1}$ $= \frac{1\,.\,2}{2{,}25\,.\,3} = 0{,}296$, daher folgt der Ausflußcoefficient für das vorstehende Ausflußverhältniß $= (1 + 0{,}641 \,.\, 0{,}296^2)\,\mu_0 = 1{,}056 \,.\, 0{,}602 = 0{,}6357$ und das effective Ausflußquantum $= 17{,}68 \,.\, 0{,}6357 = 11{,}24$ Cubikfuß.

Ausfluß des bewegten Wassers.

§. 356. Die unvollkommne Contraction kommt auch sehr oft beim Ausflusse durch Ueberfälle, wie Fig. 518, vor. Die Ueberfälle können aber entweder nur einen Theil der Breite des Reservoirs oder Kanales einnehmen, oder sie können über die ganze Breite des Gerinnes weggehen. In dem letzten Falle fällt auch die Contraction an den Seiten der Mündung weg, und es fließt also aus diesem Grunde mehr Wasser durch, als bei den Ueberfällen der ersten Art. Auch über diese Ausflußverhältnisse hat der Verfasser Versuche angestellt, und aus den Ergebnissen derselben Formeln abgeleitet, wodurch sich mit ziemlicher Sicherheit mit Hülfe des Querschnittsverhältnisses $n = \frac{F}{G} = \frac{hb}{a_1 b_1}$ der entsprechende Ausflußcoefficient berechnen läßt. Behalten wir die Bezeichnungen der vorigen Paragraphen bei, so haben wir für die Poncelet'schen Ueberfälle:

Fig. 518.



$$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 1{,}718\left(\frac{F}{G}\right)^4 = 1{,}718 \,.\, n^4,$$ und für die die ganze Gerinnbreite einnehmenden Ueberfälle $$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 0{,}041 + 0{,}3693\, n^2,$$ es ist daher im ersten Falle die Ausflußmenge:

$$Q_1 = {}^2/_3\left[1 + 1{,}718\left(\frac{hb}{a_1 b_1}\right)^4\right]\mu_0 \,.\, b\sqrt{2gh^3},$$ und im zweiten Falle: $$Q_1 = {}^2/_3\left[1{,}041 + 0{,}3693\left(\frac{h}{a_1}\right)^2\right]\mu_0 \,.\, b\sqrt{2gh^3},$$ wo h den etwa 1 Meter vor dem Ueberfall gemessenen Wasserstand EH über der Ueberfallschwelle F bezeichnet.

In folgenden Tabellen sind die Correctionen $\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$ für die einfachsten Werthe von n zusammengestellt.

Ausfluß des bewegten Wassers.

Tabelle I. Correctionen für die Poncelet'schen Ueberfälle.

n	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$	0,000	0,000	0,001	0,003	0,007	0,014	0,026	0,044	0,070	0,107

Tabelle II. Correctionen für Ueberfälle über die ganze Wand, oder ohne Seitencontraction.

n	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$	0,041	0,042	0,045	0,049	0,056	0,064	0,074	0,086	0,100	0,116	0,133

Beispiel. Um das in einem 5 Fuß breiten Kanale fortgeführte Wasserquantum zu bestimmen, hat man eine Spundwand mit einer nach außen abgeschrägten Kante eingezogen, und das Wasser über diese wegfließen lassen. Nachdem das Steigen des Oberwassers aufgehört hatte, ergab sich der Wasserstand über dem Gerinnboden $3\frac{1}{2}$ Fuß, und über der Schwelle $1\frac{1}{2}$ Fuß, es ist daher die theoretische Ausflußmenge $Q = \frac{2}{3} \cdot 5 \cdot 7{,}906 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = 48{,}41$ Cubikfuß. Der Ausflußcoefficient ist, da $\frac{h}{a_1} = \frac{1{,}5}{3{,}5} = \frac{3}{7}$ und $\mu_0 = 0{,}577$, $\mu_{\frac{3}{7}} = [1{,}041 + 0{,}3693 \cdot (\frac{3}{7})^2] \cdot 0{,}577 = 1{,}110 \cdot 0{,}577 = 0{,}64$, daher die effective Wassermenge $Q_1 = 0{,}64 \cdot Q = 0{,}64 \cdot 48{,}41 = 31$ Cubikfuß.

Drittes Kapitel.

Von dem Ausflusse des Wassers durch Röhren.

Kurze Ansatzröhren.

§. 357. Läßt man das Wasser durch eine kurze Ansatzröhre (franz. tuyau additionel; engl. short pipe) ausfließen, so treten ganz andere Verhältnisse ein, als wenn es durch Mündungen in der dünnen, oder durch nach außen abgeschrägte Mündungen in der dicken Wand ausfließt. Ist die Ansatzröhre prismatisch, und ihre Länge $2\frac{1}{2}$ bis 3mal so groß als ihre Weite, so giebt sie einen uncontrahirten und undurchsichtigen Strahl, welcher eine kleine Sprungweite und daher auch eine kleinere Geschwindigkeit hat, als der durch eine Mündung in der dünnen Wand unter

übrigens gleichen Umständen ausfließende Strahl. Hat also die Röhre *KL* mit der Mündung *F*, Fig. 519, gleichen Querschnitt und ist auch die Druckhöhe von beiden eine und dieselbe, so erhält man in *LR* einen trüben und uncontrahirten, also dickeren, und in *FH* einen klaren und contrahirten, also schwächeren Strahl, und es läßt sich auch wahrnehmen, daß die Sprungweite *ER* kleiner ist als die Sprungweite *DH*. Dieses Ausflußverhältniß tritt aber nur dann ein, wenn die Röhre die angegebene Länge hat; ist die Röhre kürzer, vielleicht nur so lang als weit, so legt sich der Strahl *KL*, Fig. 520, gar nicht an die Röhrenwand an, es bleibt die Röhre ganz ohne Einwirkung auf den Ausfluß, und der Strahl wie beim Ausflusse durch Mündungen in der dünnen Wand.

Kurze Ansatzröhren.

Fig. 519.

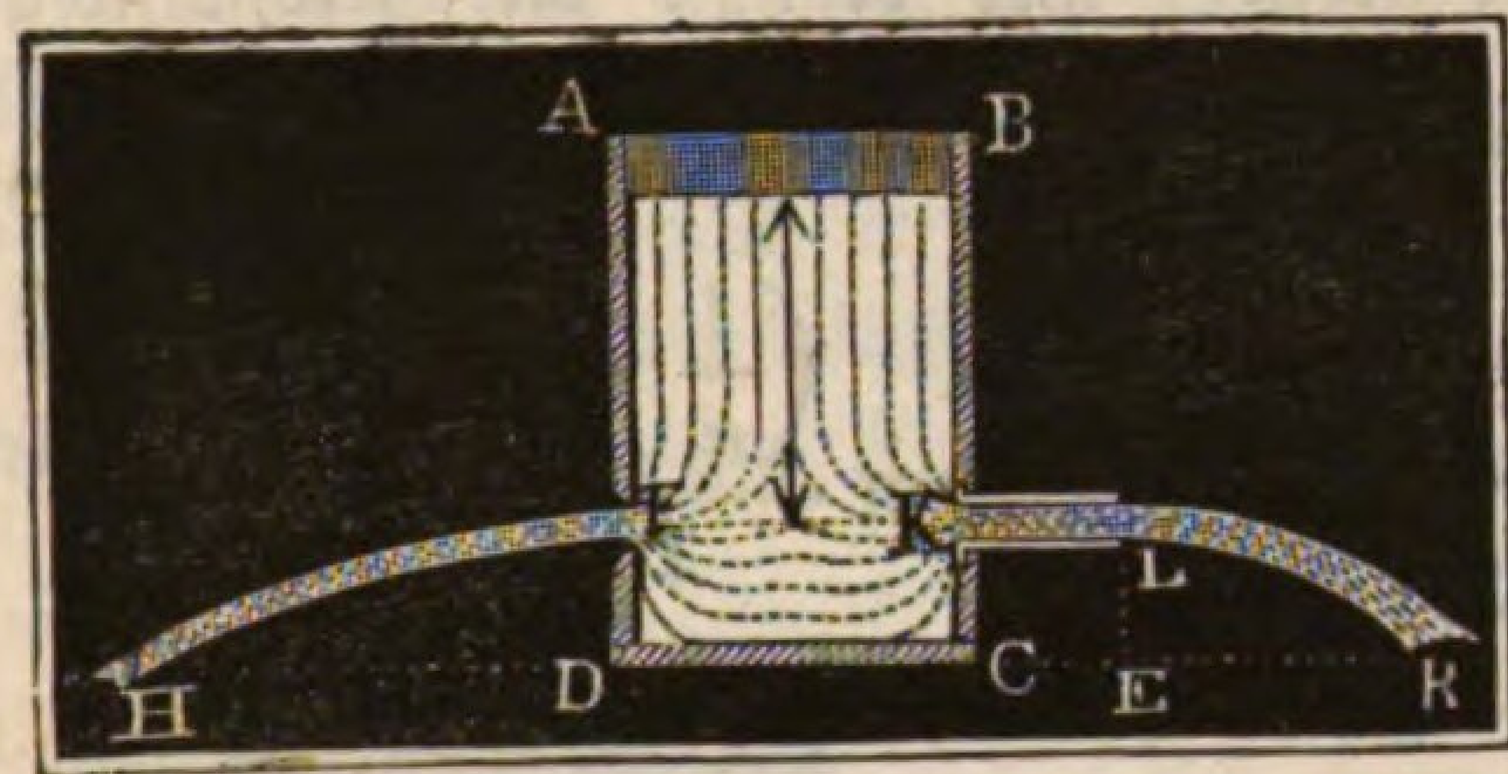
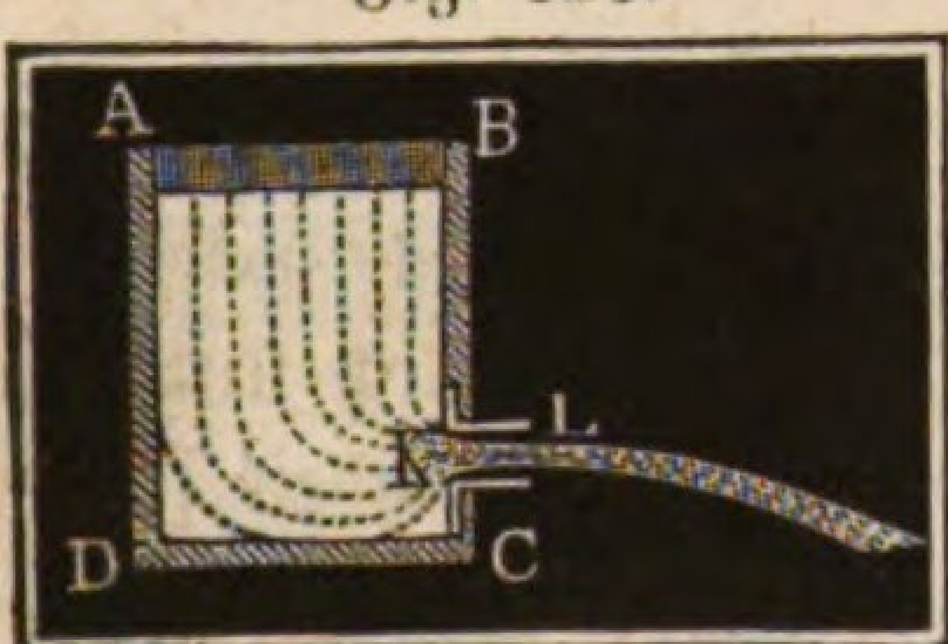
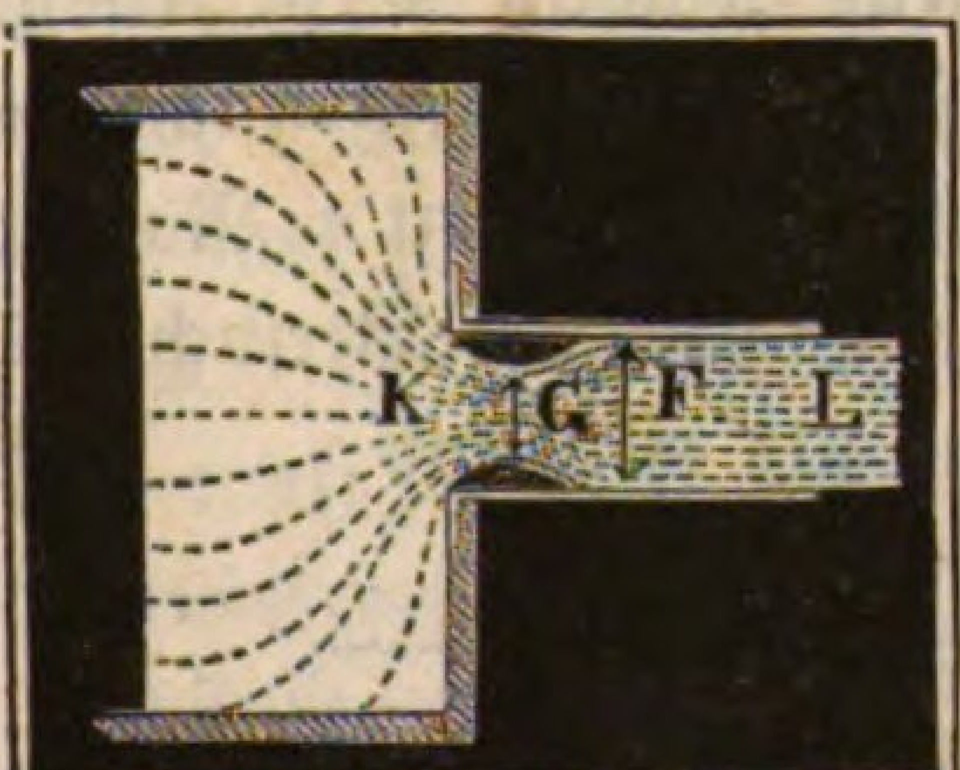


Fig. 520.



Zuweilen findet auch bei Röhren von größerer Länge ein Ausfüllen der Röhre durch den Strahl nicht statt, nämlich dann, wenn dem Wasser keine Gelegenheit gegeben worden ist, mit der Röhrenwand in Berührung zu kommen; verschließt man aber in diesem Falle die äußere Mündung durch die Hand oder durch ein Brett auf einige Augenblicke, so bildet sich nachher ein die Röhre vollkommen füllender Strahl, und es findet ein sogenannter voller Ausfluß (franz. à gueule-bée; engl. of filled tube) statt. Die Contraction des Wasserstrahles findet auch beim Ausfluß durch Röhren statt, nur fällt hier der contrahirte Theil in das Innere der Röhre. Man kann sich hiervon überzeugen, wenn man sich gläserner Ansatzröhren, wie *KL*, Fig. 521, bedient, und dem Wasser eine Färbung giebt, denn man bemerkt in diesem Falle, daß nur in der Mitte des Querschnittes *G* nahe hinter der Eintrittsstelle *K*, nicht aber am Umfange desselben progressive Bewegung vorhanden ist, daß hier vielmehr nur eine wirbelnde Bewegung stattfindet. Es ist aber die Capillarität oder die Adhäsion des Wassers an der Röhrenwand, welche macht, daß das Wasser das Ende *FL* der Röhre ganz aus-

Fig. 521.



Kurze Ansatzröhren. füllt. Das aus der Röhre fließende Wasser hat nur den der Atmosphäre gleichen Druck, nun ist aber der contrahirte Querschnitt G nur α mal so groß als der Querschnitt F der Röhre, und deshalb die Geschwindigkeit in ihm $\frac{1}{\alpha}$ mal so groß als die Ausflußgeschwindigkeit v, daher ist auch der Druck des Wassers in der Nähe von G um $\frac{\left(\frac{1}{\alpha}v\right)^2}{2g} - \frac{v^2}{2g}$ $= \left[\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 - 1\right]\frac{v^2}{2g}$ (§. 339) kleiner als beim Austritte, oder als der Atmosphärendruck. Bohrt man bei G ein enges Loch in die Röhre, so findet auch wirklich kein Ausfluß durch dasselbe, sondern vielmehr ein Einsaugen von Luft statt, auch hört endlich der volle Ausfluß und die Einwirkung der Ansatzröhre ganz auf, wenn man das Loch weiter macht, oder mehrere Löcher anbringt.

Cylindrische Ansatzröhren. §. 358. Ueber den Ausfluß des Wassers durch kurze cylindrische Ansatzröhren sind von Vielen Versuche angestellt worden, doch weichen die Resultate derselben ziemlich viel von einander ab. Namentlich sind es die Bossut'schen Ausflußcoefficienten, welche durch ihre Kleinheit (0,785) von den von Anderen gefundenen bedeutend abweichen. Aus den Versuchen von Michelotti mit $1\frac{1}{2}$ bis 3 Zoll weiten Röhren und bei 3 bis 20 Fuß Druckhöhe folgt im Mittel dieser Ausflußcoefficient $\mu = 0,813$. Die Versuche von Bidone, Eytelwein und D'Aubuisson weichen hiervon nur wenig ab. Im Mittel läßt sich aber, namentlich auch den Versuchen des Verfassers entsprechend, der Ausflußcoefficient für kurze cylindrische Ansatzröhren: $\mu = 0,815$ setzen. Da wir denselben für runde Mündungen in der dünnen Wand 0,615 gefunden haben, so folgt, daß unter übrigens gleichen Umständen und Verhältnissen durch kurze Ansatzröhren $^{815}/_{615} = 1,325$ mal so viel Wasser ausfließt als durch runde Mündungen in der dünnen Wand. Uebrigens wachsen diese Ausflußcoefficienten, wenn die Röhrenweite kleiner wird, und nehmen auch wenig zu bei Abnahme der Druckhöhe oder Ausflußgeschwindigkeit. Nach den bei einem Drucke von 0,23 bis 0,60 Meter angestellten Versuchen des Verfassers ist für Röhren, welche 3mal so lang als weit sind:

bei	1	2	3	4 Centimeter Weite
$\mu =$	0,843	0,832	0,821	0,810

Dieser Tabelle zufolge nehmen also die Ausflußcoefficienten merklich zu, wenn die Röhrenweite kleiner wird. Ebenso fand Buff bei einer 2,79 Linien weiten und 4,3 Linien langen Röhre die Ausflußcoefficienten allmälig von 0,825 bis 0,855 zunehmend, wenn die Druckhöhe von 33 bis $1\frac{1}{2}$ Zoll nach und nach herabsank. Cylindrische Ansatzröhren.

Beim Ausflusse des Wassers durch kurze parallelepipedische Ansatzröhren fand der Verfasser einen Ausflußcoefficienten von 0,819.

Fig. 522.

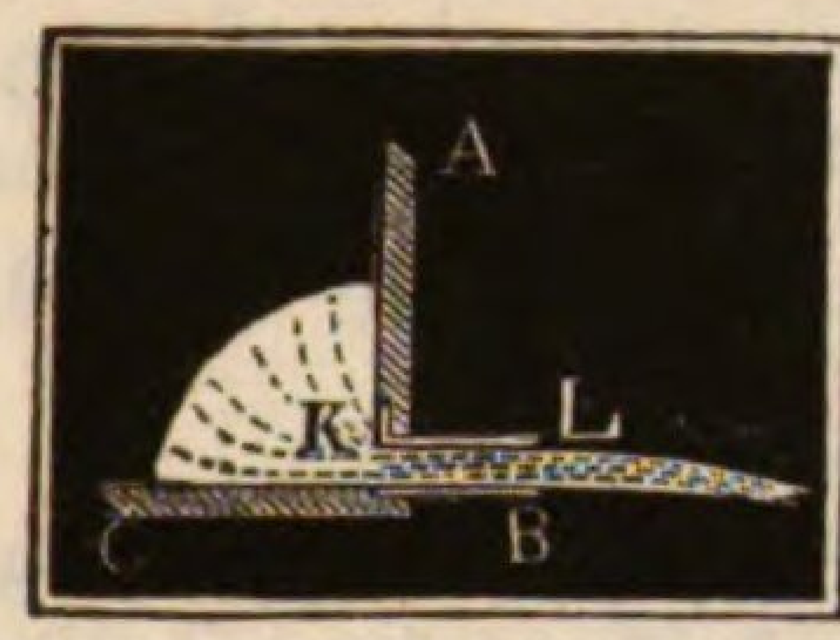
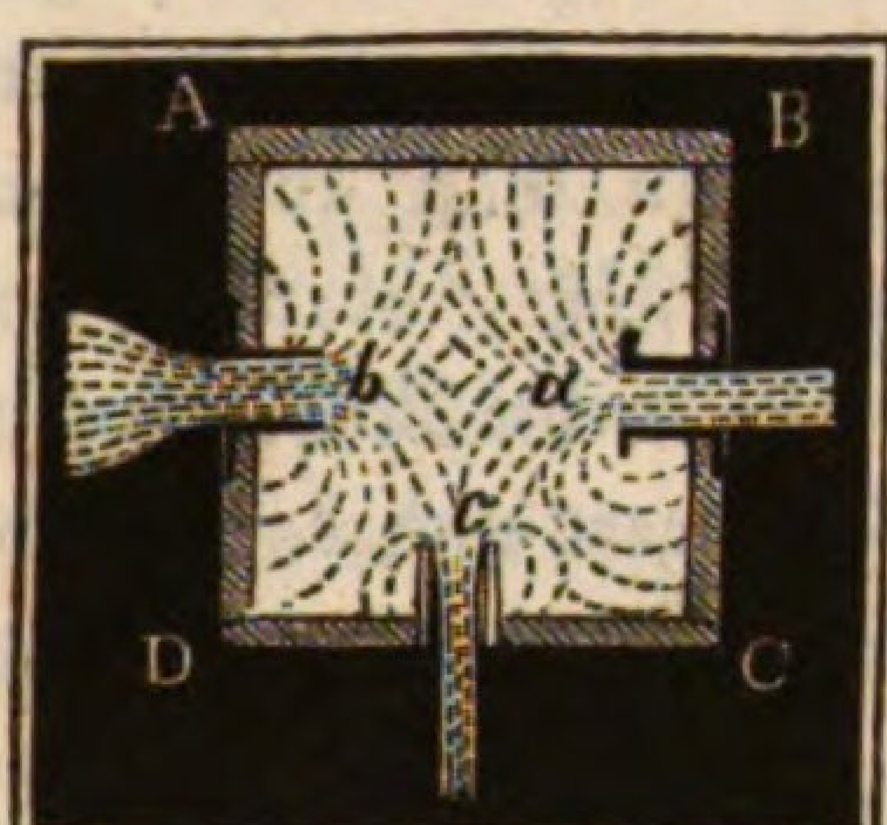


Fig. 523.



Sind die Ansatzröhren KL, Fig. 522, inwendig theilweise eingefaßt, stoßen sie z. B. mit der einen Seite an den Boden BC an, und wird dadurch eine partielle Contraction herbeigeführt, so steigt nach den Versuchen des Verfassers der Ausflußcoefficient nicht ansehnlich, wohl aber fließt das Wasser an verschiedenen Stellen des Querschnittes mit verschiedenen Geschwindigkeiten, und zwar auf der Seite BC schneller aus, als auf der gegenüberliegenden. Wenn die innere Stirnfläche einer Ansatzröhre nicht in die Wandfläche fällt, sondern vorsteht, wie a, b, c, Fig. 523, so nennt man diese Röhre eine innere Ansatzröhre. Ist die Stirnfläche dieser Röhre mindestens $\frac{1}{5}$ mal so breit als die Röhre weit, wie z. B. a, so bleibt der Ausflußcoefficient derselbe, als wenn die Stirnfläche in der Ebene der Wand läge, ist aber die Stirnfläche schmaler, wie z. B b und c, so fällt der Ausflußcoefficient kleiner aus. Bei einer sehr schmalen fast verschwindenden Stirnfläche wird derselbe den Versuchen Bidone's und des Verfassers zufolge 0,71, wenn der Strahl die Röhre ausfüllt, und 0,53 (vergl. §. 351), wenn er sich gar nicht an die innere Röhrenwand anlegt. Im ersten Falle (b) ist der Strahl ganz zerrissen und besenförmig divergirend, im zweiten (c) aber stark zusammengezogen und ganz krystallrein.

§. 359. Da das Wasser ohne Contraction aus der prismatischen Ansatzröhre tritt, so folgt, daß bei dem Ausflusse durch diese Mundstücke der Contractionscoefficient = Eins und der Geschwindigkeitscoefficient φ = dem Ausflußcoefficienten μ ist. Eine mit der Geschwindigkeit v ausströmende Wassermenge Q besitzt die lebendige Kraft $\frac{Q\gamma}{g} v^2$ und kann dadurch die mechanische Arbeit $\frac{v^2}{2g} Q\gamma$ (S. §. 71) verrichten. Nun ist aber Widerstandscoefficient.

Widerstands-coefficient. bei dem Ausflusse die theoretische Geschwindigkeit $= \frac{v}{\varphi}$, daher entspricht der ausfließenden Wassermasse die Leistung $\frac{1}{\varphi^2} \cdot \frac{v^2}{2g} \cdot Q\gamma$, und es verliert sonach die Wassermenge Q durch den Ausfluß die mechanische Arbeit $\left(\frac{1}{\varphi^2} \cdot \frac{v^2}{2g} - \frac{v^2}{2g}\right) Q\gamma = \left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right) \frac{v^2}{2g} Q\gamma$. Beim Ausflusse durch Mündungen in der dünnen Wand ist φ im Mittel $= 0{,}97$, daher beträgt hier der Arbeitsverlust $\left[\left(\frac{1}{0{,}97}\right)^2 - 1\right] \frac{v^2}{2g} Q\gamma = 0{,}063 \frac{v^2}{2g} Q\gamma$; beim Ausflusse durch kurze cylindrische Ansätze ist $\varphi = 0{,}815$ und es stellt sich der entsprechende Verlust an Arbeit $= \left[\left(\frac{1}{0{,}815}\right)^2 - 1\right] \frac{v^2}{2g} Q\gamma = 0{,}505 \frac{v^2}{2g} Q\gamma$, d. i. 8mal so groß heraus, als beim Ausflusse durch Mündungen in der dünnen Wand. Bei Benutzung der lebendigen Kraft des ausfließenden Wassers ist es folglich besser, das Wasser durch Mündungen in der dünnen Wand als durch prismatische Ansatzröhren ausfließen zu lassen. Wenn man aber die inneren Kanten, womit die Röhre an die Gefäßwand stößt, abrundet und dadurch einen allmäligen Uebergang aus dem Gefäße in die Röhre hervorbringt, so wird der Ausflußcoefficient auf 0,96 gesteigert und dadurch der Arbeitsverlust auf $8\frac{1}{2}$ Procent herabgezogen. Bei kürzeren, genau abgerundeten oder nach der Form des contrahirten Wasserstrahles gebildeten Mundstücken ist $\mu = \varphi = 0{,}97$ und daher der Arbeitsverlust wie bei Mündungen in der dünnen Wand $= 6$ Procent.

Dem Arbeitsverluste $\left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right) \frac{v^2}{2g} Q\gamma$ entspricht eine Druckhöhe $\left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right) \frac{v^2}{2g}$; man kann sich daher auch vorstellen, daß durch die Hindernisse des Ausflusses die Druckhöhe den Verlust $\left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right) \frac{v^2}{2g}$ erleide, und annehmen, daß nach Abzug dieses Verlustes der übrigbleibende Theil der Druckhöhe auf die Erzeugung der Geschwindigkeit verwendet werde. Diesen mit dem Quadrate der Ausflußgeschwindigkeit proportional wachsenden Verlust $\left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right) \frac{v^2}{2g}$ kann man **Widerstandshöhe** (franz. hauteur de résistance; engl. height of resistance) und den Coefficienten $\frac{1}{\varphi^2} - 1$, womit die Geschwindigkeitshöhe zu multipliciren ist, um die Widerstandshöhe zu erhalten, den **Widerstandscoefficienten**

nennen. Wir werden in der Folge diesen, auch das Verhältniß der Widerstandshöhe zur Druckhöhe ausdrückenden Coefficienten durch den Buchstaben ζ bezeichnen, also die Widerstandshöhe selbst durch $\zeta \cdot \frac{v^2}{2g}$ ausdrücken. Durch die Formeln $\zeta = \frac{1}{\varphi^2} - 1$ und $\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta}}$ läßt sich aus dem Geschwindigkeitscoefficienten der Widerstandscoefficient, und aus diesem wieder jener berechnen. Widerstandscoefficient.

Beispiele. 1) Welche Wassermenge fließt unter einer Druckhöhe von 3 Fuß durch eine 2 Zoll weite Röhre aus, welcher der Widerstandscoefficient $\zeta = 0,4$ entspricht? Es ist $\varphi = \frac{1}{\sqrt{1,4}} = 0,845$, daher

$$v = 0,845 \cdot 7,906 \sqrt{3} = 11,574 \text{ Fuß, ferner}$$
$$F = (1/12)^2 \pi = 0,02182 \text{ Quadratfuß,}$$

folglich das gesuchte Wasserquantum $Q = 0,02182 \cdot 11,574 = 0,253$ Cubikfuß. 2) Wenn eine Röhre von 2 Zoll Weite unter einem Drucke von 2 Fuß in der Minute 10 Cubikfuß Wasser liefert, so ist ihr Ausfluß- oder Geschwindigkeitscoefficient

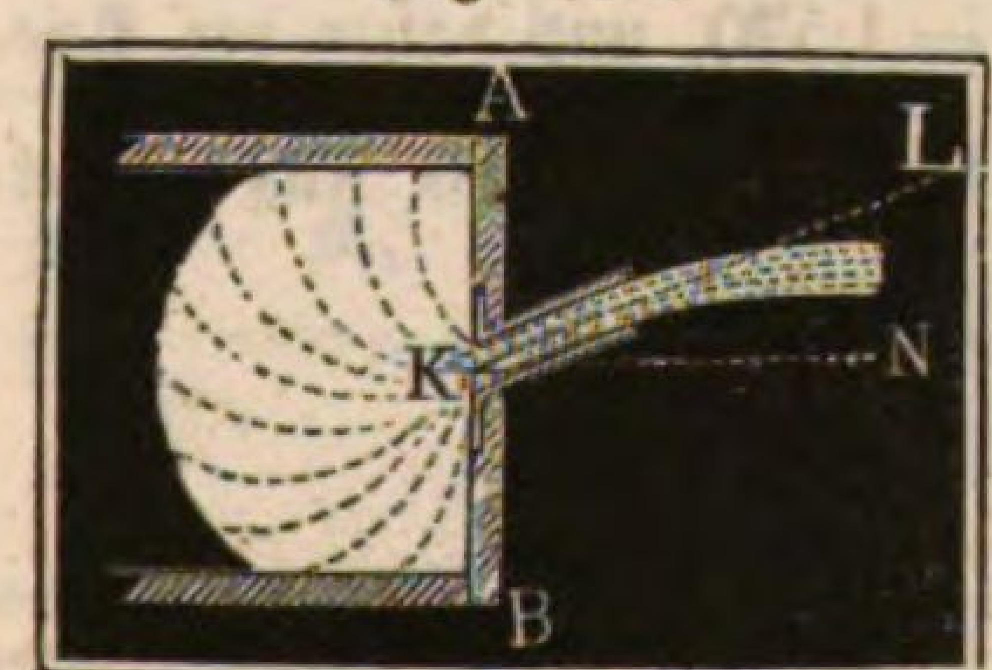
$$\varphi = \frac{Q}{F\sqrt{2gh}} = \frac{10}{60 \cdot 0,02182 \cdot 7,906 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{1,035\sqrt{2}} = 0,683,$$ der

Widerstandscoefficient $= \left(\frac{1}{0,683}\right)^2 - 1 = 1,143$, und endlich der durch die Hindernisse der Röhre bewirkte Verlust an Druckhöhe

$$= 1,143 \cdot \frac{v^2}{2g} = 1,143 \cdot 0,016 \left(\frac{Q}{F}\right)^2 = 0,0183 \cdot \frac{1}{0,1309^2} = 1,066 \text{ Fuß.}$$

§. 360. Schief angesetzte oder schief abgeschnittene Ansatzröhren geben ein kleineres Wasserquantum als rechtwinkelig angesetzte oder rechtwinkelig abgeschnittene Ansatzröhren, weil die Richtung des Wassers in denselben eine Aenderung erleidet. Die hierüber in nicht unbedeutender Ausdehnung angestellten Versuche haben den Verfasser auf Folgendes geführt. Ist δ der Winkel, welchen die Röhrenaxe KL, Fig. 524, mit der Normale KN zur Ebene AB der Einmündung einschließt, und ist ζ der Widerstandscoefficient für die winkelrecht abgeschnittene Röhre, so hat man den Widerstandscoefficienten der schiefen Ansatzröhre: $\zeta_1 = \zeta + 0,303 \sin. \delta + 0,226 \sin. \delta^2$. Nehmen wir für ζ den mittleren Werth 0,505, so erhalten wir: Schiefe Ansatzröhren.

Fig. 524.



Schiefe Ansatzröhren.

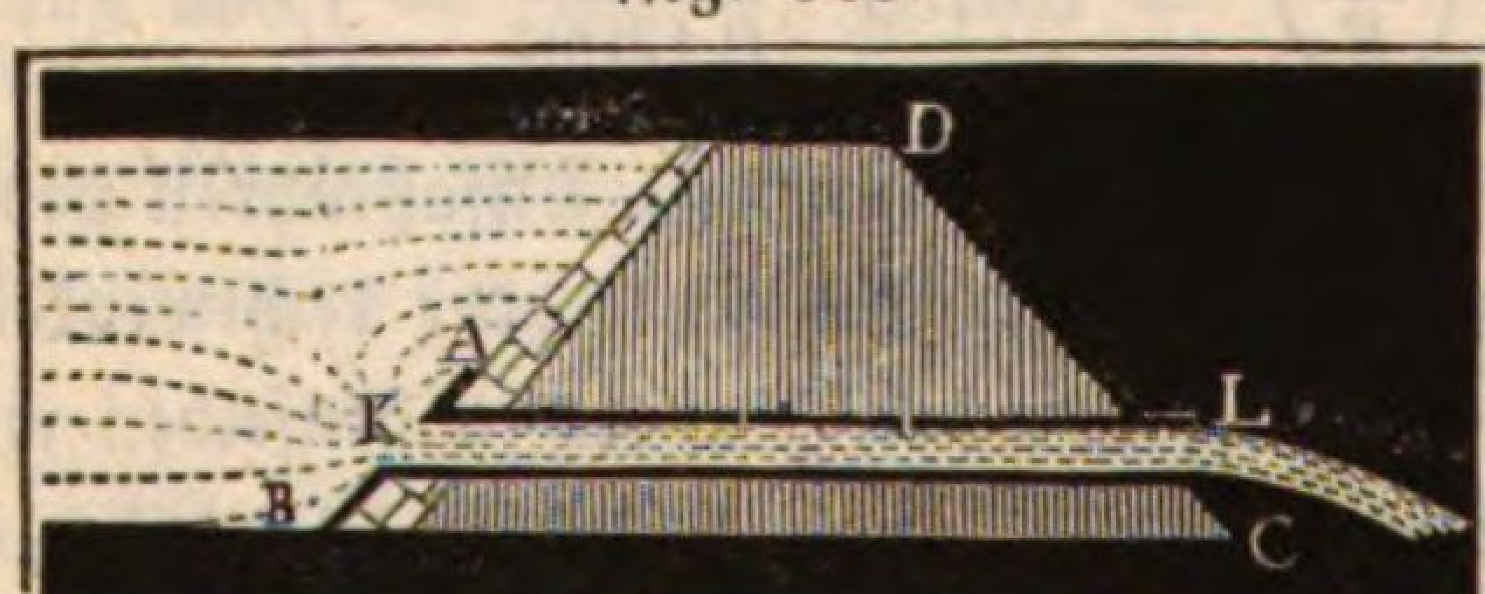
bei δ^0 =	0	10	20	30	40	50	60 Grad.
den Widerstandscoefficienten ζ_1 =	0,505	0,565	0,635	0,713	0,794	0,870	0,937
den Ausflußcoefficienten μ_1 =	0,815	0,799	0,782	0,764	0,747	0,731	0,719

Hiernach ist z. B. der Widerstandscoefficient einer kurzen Ansatzröhre bei 20 Grad Axenabweichung $\zeta = 0,635$ und der Ausflußcoefficient $= \frac{1}{\sqrt{1,635}} = 0,782$, und bei 35^0 Axenabweichung der erstere $= 0,753$ und der letztere $= 0,755$.

In der Regel sind diese schiefen Ansatzröhren länger als wir seither angenommen haben, auch müssen sie länger sein, weil außerdem das Wasser die Röhre nicht vollkommen ausfüllen würde. Die vorstehende Formel giebt nur denjenigen Theil des Widerstandes an, welcher dem Röhrenstück an der Einmündung entspricht, das dreimal so lang als die ganze Röhre weit ist. Der Widerstand, welchen das übrige Röhrenstück der Bewegung des Wassers entgegensetzt, wird in der Folge angegeben werden.

Beispiel. Wenn die Einmündungsebene AB eines horizontalliegenden Teichgerinnes KL, Fig. 525, sowie die Innenfläche des Teichdammes 40 Grad gegen den Horizont geneigt ist, so schließt die Röhrenaxe mit der Normale dieser Ebene einen Winkel von 50 Grad ein, und es ist daher der Widerstandscoefficient für den Ausfluß durch das Einmündungsstück dieser Röhre $= 0,870$, und wenn nun dem übrigen und längeren Röhrenstücke der Widerstandscoefficient 0,650 entspräche, so wäre der Widerstandscoefficient für die ganze Rohre $= 0,870 + 0,650 = 1,520$, und daher der Ausflußcoefficient $= \frac{1}{\sqrt{1 + 1,520}} = \frac{1}{\sqrt{2,520}} = 0,630$. Bei 10 Fuß Druckhöhe und 1 Fuß Röhrenweite ergäbe sich folglich die Ausflußmenge:

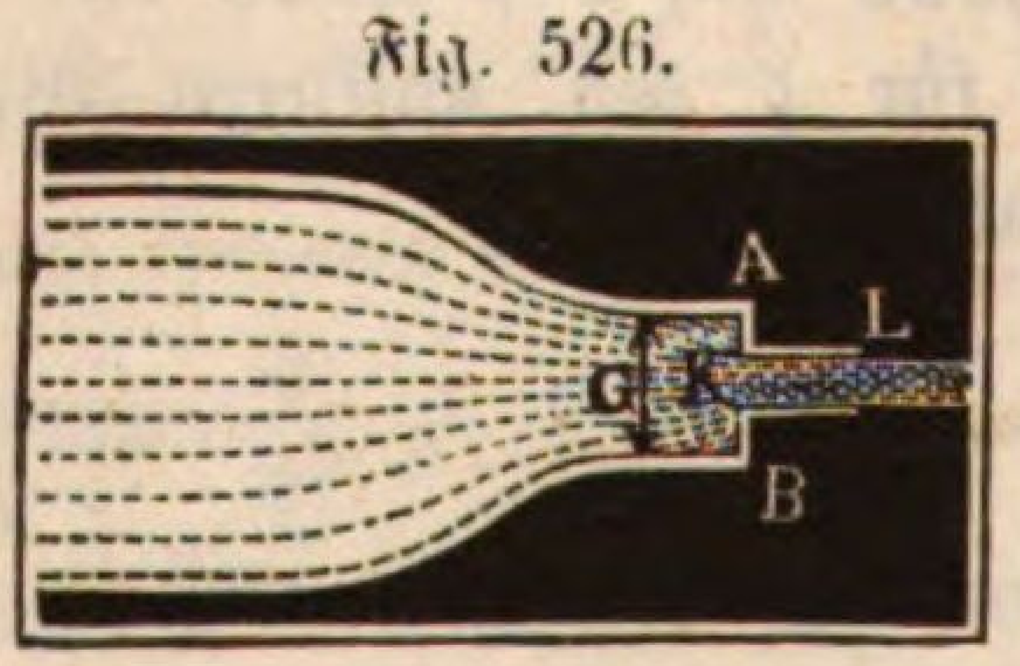
Fig. 525.



$$Q = 0,630 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 7,906 \sqrt{10} = 12,37 \text{ Cubikfuß}.$$

Unvollkommene Contraction.

Fig. 526.



§. 361. Mündet eine kurze cylindrische Ansatzröhre KL, Fig. 526, in einer ebenen Wand AB ein, deren Inhalt G den Querschnitt F der Röhre nicht vielmal übertrifft, so kommt das Wasser mit einer nicht zu vernach-

lässigenden Geschwindigkeit an der Einmündungsstelle an, und es tritt deshalb nur mit unvollkommener Contraction in das Rohr, weshalb wieder die Ausflußgeschwindigkeit eine größere ist, als wenn das Wasser als stillstehend vor dem Eintritt in die Röhre angenommen werden muß. Unvollkommene Contraction.
Ist wieder $\frac{F}{G} = n$ das Verhältniß des Röhrenquerschnittes zum Inhalte der Wandfläche, ferner μ_0 der Ausflußcoefficient bei vollkommener Contraction, wo $\frac{F}{G}$ der Null gleich gesetzt werden kann, so hat man den Versuchen des Verfassers zufolge den Ausflußcoefficienten bei unvollkommener Contraction oder dem Querschnittsverhältnisse n zu setzen:

$$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 0{,}102\ n + 0{,}067\ n^2 + 0{,}046\ n^3, \text{ oder}$$

$$\mu_n = \mu_0 (1 + 0{,}102\ n + 0{,}067\ n^2 + 0{,}046\ n^3).$$

Nimmt z. B. der Röhrenquerschnitt den sechsten Theil der ganzen Wandfläche ein, so ist:

$$\mu_{1/6} = \mu_0 (1 + 0{,}102 \,.\, 1/6 + 0{,}067 \,.\, 1/36 + 0{,}046 \,.\, 1/216)$$

$$= \mu_0 (1 + 0{,}017 + 0{,}0019 + 0{,}0002) = 1{,}019\ \mu_0, \text{ oder}$$

$$\mu_0 = 0{,}815 \text{ gesetzt, } \mu_{1/6} = 0{,}815 \,.\, 1{,}019 = 0{,}830.$$

Etwas genauer giebt die Correctionswerthe $\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$ folgende, zum Gebrauch bequeme Tabelle an.

Tabelle

der Correctionen wegen der unvollkommenen Contraction, beim Ausflusse durch kurze cylindrische Ansatzröhren.

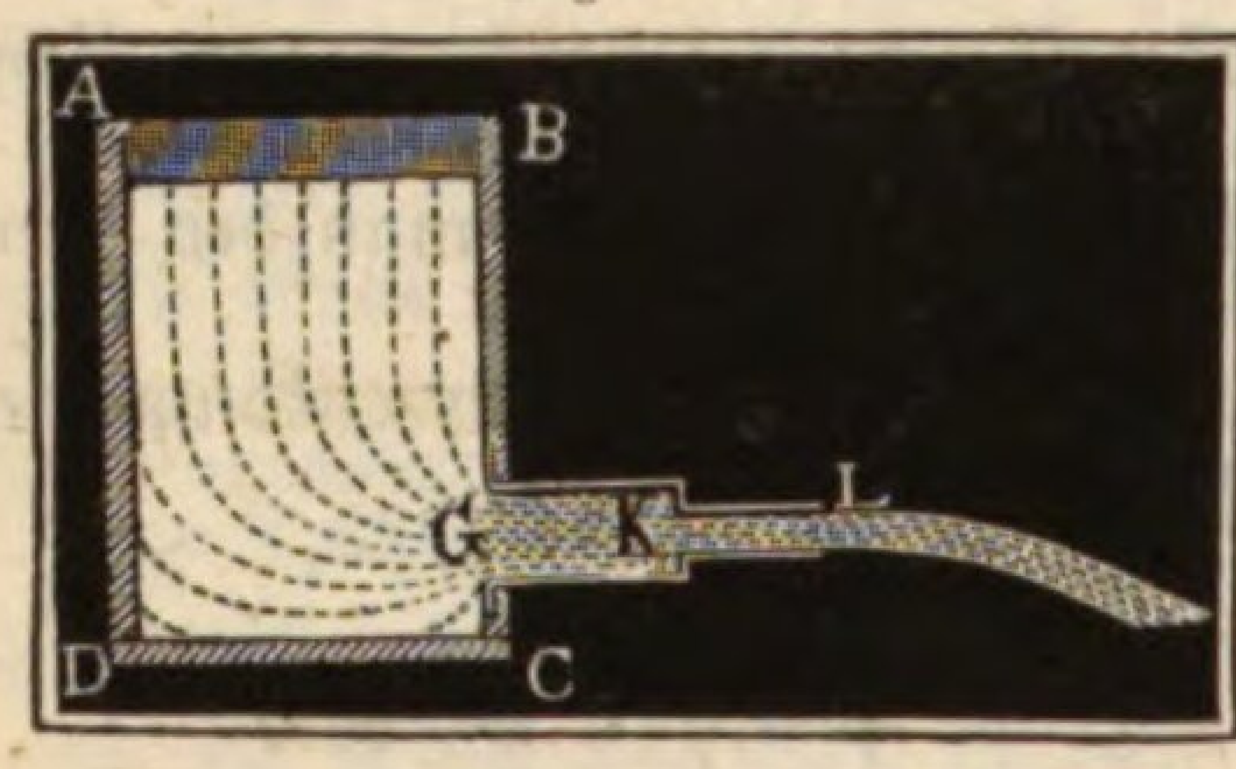
n	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$	0,006	0,013	0,020	0,027	0,035	0,043	0,052	0,060	0,070	0,080
n	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$	0,090	0,102	0,114	0,127	0,138	0,152	0,166	0,181	0,198	0,227

Unvollkommene Contraction.

Beim Ausflusse durch kurze parallelepipedische Röhren sind diese Correctionen ziemlich die nämlichen.

Diese Coefficienten finden ihre Anwendung vorzüglich beim Ausfluß des Wassers durch zusammengesetzte Röhren, wie z. B. in dem durch die Fig. 527 dargestellten Falle, wo die kurze Ansatzröhre KL in einer weiteren kurzen Ansatzröhre GK und diese wieder in dem Gefäße AC einmündet. Hier ist beim Eintritt des Wassers aus der weiteren Röhre in die engere unvollkommene Contraction vorhanden und daher der Ausflußcoefficient nach der letzten Regel zu bestimmen. Setzen wir den diesem Ausflußcoefficienten entsprechenden Widerstandscoefficienten $= \zeta_1$, den Widerstandscoefficienten für den Eintritt aus dem Gefäße in die weitere Röhre $= \zeta$, die Druckhöhe $= h$,

Fig. 527.



die Ausflußgeschwindigkeit $= v$ und das Verhältniß $\frac{F}{G}$ der Röhrenquerschnitte $= n$, also die Geschwindigkeit des Wassers in der weiteren Röhre $= nv$, so giebt die Formel: $h = \frac{v^2}{2g} + \zeta \cdot \frac{(nv)^2}{2g} + \zeta_1 \cdot \frac{v^2}{2g}$,

d. i $h = (1 + n^2\zeta + \zeta_1)\frac{v^2}{2g}$ und es ist daher

$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 + n^2\zeta + \zeta_1}}.$$

Beispiel. Welche Wassermenge liefert der in Figur 527 abgebildete Apparat, wenn die Druckhöhe $h = 4$ Fuß, die Weite der engeren Röhre 2 Zoll und die der weiteren 3 Zoll beträgt? Es ist $n = (2/3)^2 = 4/9$, daher $\mu_{4/9} = 1{,}069 . 0{,}815 = 0{,}871$ und der entsprechende Widerstandscoefficient $\zeta_1 = \left(\frac{1}{0{,}871}\right)^2 - 1 = 0{,}318$; nun hat man aber $\zeta = 0{,}505$ und $n^2 . \zeta = 16/81 . 0{,}505 = 0{,}099$, daher folgt $1 + n^2\zeta + \zeta_1 = 1 + 0{,}099 + 0{,}318 = 1{,}471$ und die Ausflußgeschwindigkeit $v = \frac{7{,}906 . \sqrt{4}}{\sqrt{1{,}417}} = \frac{15{,}812}{\sqrt{1{,}417}} = 13{,}29$ Fuß. Da endlich der Röhrenquerschnitt $= 0{,}02182$ Quadratfuß ist, so folgt die Ausflußmenge

$$Q = 13{,}29 . 0{,}02182 = 0{,}290 \text{ Cubikfuß}.$$

Conische Ansatzröhren.

§. 362. **Conische Ansatzröhren** geben andere Ausflußmengen als prismatische oder cylindrische Ansatzröhren. Sie sind entweder conisch convergent oder conisch divergent; im ersten Falle ist die Ausmündung kleiner, im zweiten Falle aber ist sie größer als die Einmündung. Die Ausflußcoefficienten bei den ersteren Röhren sind größer und die bei den letzteren kleiner, als bei den cylindrischen Röhren. Eine und dieselbe coni-

Conische Ansatzröhren

sche Röhre giebt allerdings mehr Wasser, wenn man die weitere Mündung zur Ausmündung macht, wie K in Fig. 528, als wenn man sie nach innen richtet, wie L in derselben Figur, allein sie giebt nicht in demselben Verhältniß mehr als die weitere Mündung die engere übertrifft. Wenn Manche, wie z. B. Venturi und Eytelwein, für conisch divergente Röhren größere Ausflußcoefficienten angeben, als für conisch convergente, so ist zu berücksichtigen, daß sie immer den engeren Querschnitt als Mündung behandeln. Den Einfluß der Conicität der Röhren auf die Ausflußmenge führen folgende, unter Druckhöhen von 0,25 bis 3,3 Meter angestellte Versuche mit einer 9 Centimeter langen Röhre AD, Fig. 529, vor Augen. Die Weite dieser Röhre betrug an einem Ende $DE = 2.468$, am andern Ende $AB = 3,228$ Centimeter und der Convergenzwinkel, d. i. der Winkel AOB, unter den die gegenüberliegenden Seiten AE und BD eines Längenaxenschnittes zusammenlaufen, $= 4^0, 50'$. Beim Ausflusse durch die engere Mündung war der Ausflußcoefficient $= 0,920$; bei dem Ausflusse durch die weitere Mündung aber $= 0,553$; und wenn man die engere Einmündung als Querschnitt in die Rechnung einführt, ergab er sich $= 0,946$. Der Strahl war im ersten Falle, wo die Röhre als conisch convergentes Mundstück gebraucht wurde, wenig contrahirt, dicht und glatt, im zweiten Falle aber, wo er als conisch divergentes Mundstück diente, war er stark divergent, zerrissen und stark pulsirend. Ueber den Ausfluß durch conisch divergente Röhren haben noch Venturi und Eytelwein experimentirt. Beide Hydrauliker haben noch diese conische Röhren an cylindrische und conoidische, nach der Form des contrahirten Wasserstrahles geformte Mundstücke angesetzt. Durch eine solche Verbindung, wie Fig. 530 darstellt, wo das divergente Ausmündungsstück KL innen 12 und außen $21\frac{1}{2}$ Linien weit, und $8\frac{13}{16}$ Zoll lang war, der Convergenzwinkel sich aber $5^0, 9'$ berechnet, fand Eytelwein $\mu = 1,5526$, wobei er das engere Ende als Mündung behandelte, und dagegen μ nur $= 0,483$, wenn, wie recht, das weitere Ende als Mündung angesehen wird. Allerdings fließt durch dieses combinirte Mundstück $\frac{1,5526}{0,615} = 2,5$mal so viel, als durch die einfache Mündung

Fig. 528.

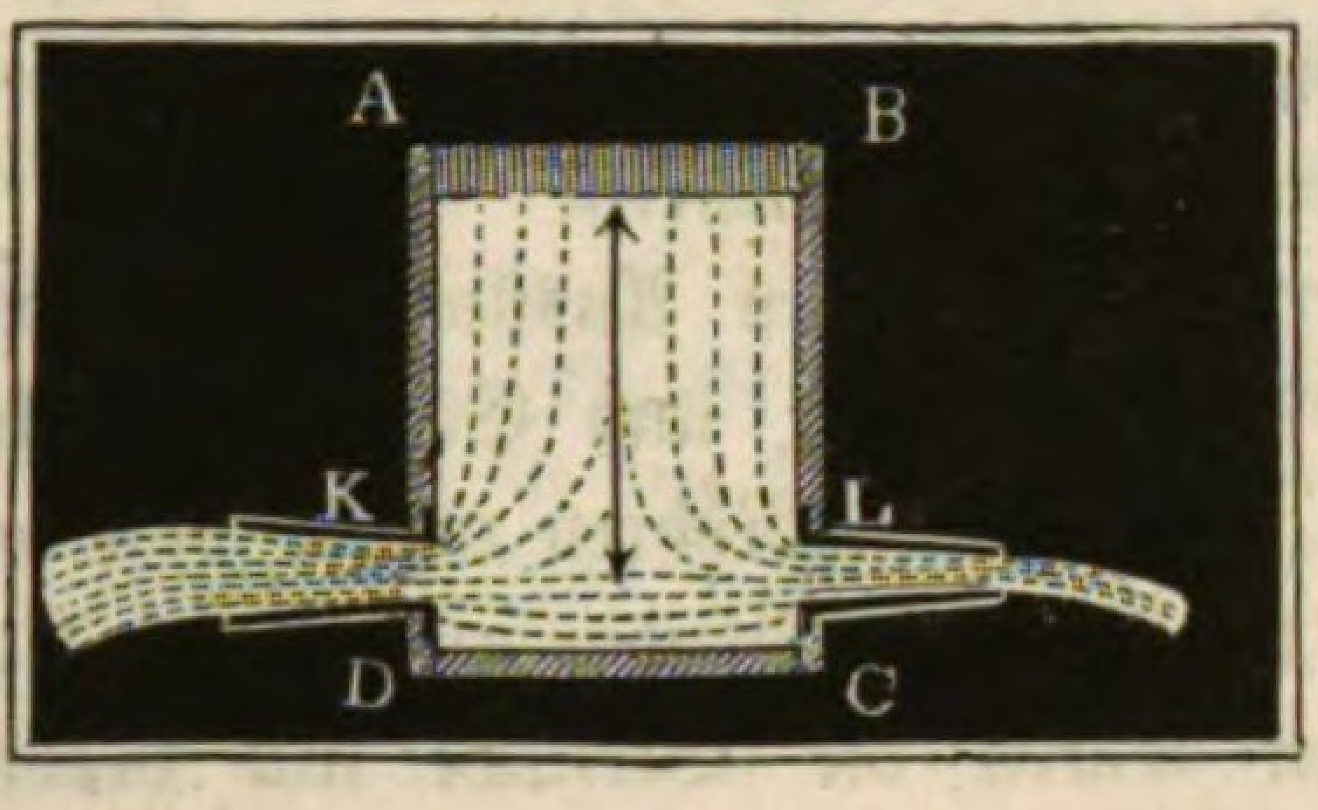


Fig. 529.

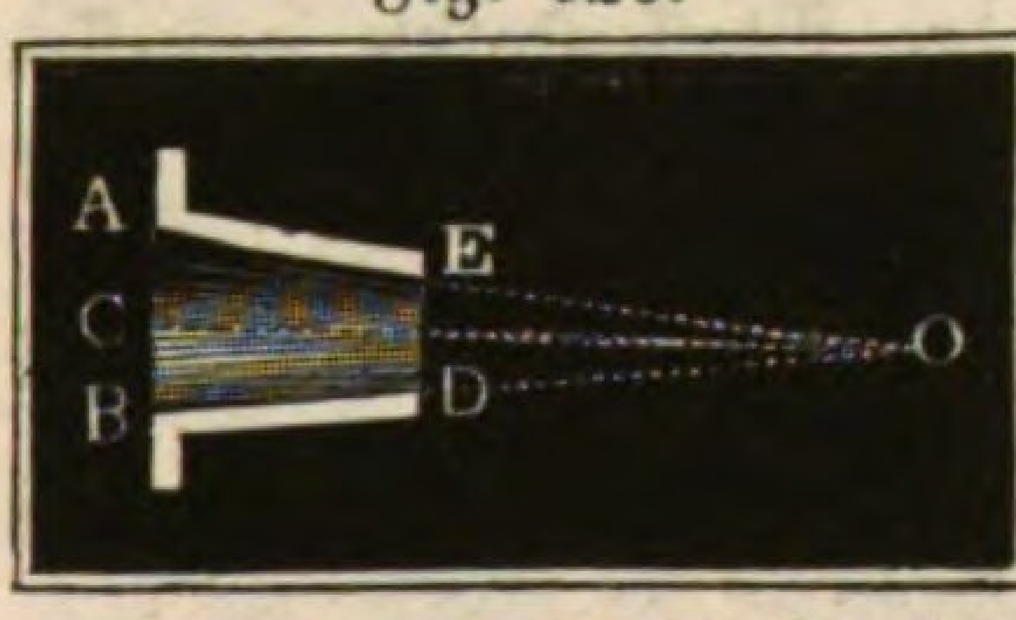


Fig. 530.



Conische Ansatzröhren. in der dünnen Wand und $\frac{1,5526}{0,815} = 1,9$mal so viel als durch die kurze cylindrische Ansatzröhre. Bei kleinen Geschwindigkeiten und bei größerer Divergenz ist es übrigens gar nicht möglich, selbst durch vorhergegangenes Zuhalten der Röhren, den vollen Ausfluß herbeizuführen.

§. 363. Die ausführlichsten Versuche über den Ausfluß durch conisch convergente Ansatzröhren sind von D'Aubuisson und Castel angestellt worden. Die hierzu in Anwendung gekommenen Röhren waren von großer Mannichfaltigkeit, verschieden in den Längen, Weiten und in den Convergenzwinkeln. Am ausgedehntesten waren die Versuche mit Röhren von 1,55 Centimeter Weite in der Ausmündung und von 2,6mal so großer, d. i. von 4 Centimeter Länge, weswegen wir ihre Ergebnisse auch in folgender Tabelle hier mittheilen. Die Druckhöhe war durchgängig 3 Meter. Die Ausflußmengen wurden durch ein besonderes Aichgefäß gemessen, um aber außer den Ausflußcoefficienten auch noch die Geschwindigkeits- und Contractionscoefficienten zu erhalten, wurden die gegebenen Höhen entsprechenden Sprungweiten der Wasserstrahle gemessen und hieraus die Ausflußgeschwindigkeiten (s. §. 348) berechnet. Das Verhältniß $\frac{v}{\sqrt{2gh}}$ der effectiven Geschwindigkeit v zur theoretischen Geschwindigkeit $\sqrt{2gh}$ gab den Geschwindigkeitscoefficienten φ, sowie das Verhältniß $\frac{Q}{F\sqrt{2gh}}$ der effectiven Ausflußmenge Q zur theoretischen Ausflußmenge $F\sqrt{2gh}$ auf den Ausflußcoefficienten μ führte und das Verhältniß beider Coefficienten, d. i. $\frac{\mu}{\varphi}$, endlich den Contractionscoefficienten α bestimmte.

Tabelle
der Ausfluß- und Geschwindigkeitscoefficienten für den Ausfluß durch conisch convergente Röhren.

Convergenzwinkel.	Ausflußcoefficienten.	Geschwindigkeitscoefficienten.	Convergenzwinkel.	Ausflußcoefficienten.	Geschwindigkeitscoefficienten.
0°, 0′	0,829	0,829	13°, 24′	0,946	0,963
1°, 36′	0,866	0,867	14°, 28′	0,941	0,966
3°, 10′	0,895	0,894	16°, 36′	0,938	0,971
4°, 10′	0,912	0,910	19°, 28′	0,924	0,970
5°, 26′	0,924	0,919	21°, 0′	0,919	0,972
7°, 52′	0,930	0,932	23°, 0′	0,914	0,974
8°, 58′	0,934	0,942	29°, 58′	0,895	0,975
10°, 20′	0,938	0,951	40°, 20′	0,870	0,980
12°, 4′	0,942	0,955	48°, 50′	0,847	0,984

Man ersieht aus dieser Tabelle, daß die Ausflußcoefficienten bei einer Röhre von $13\frac{1}{2}^0$ Seitenconvergenz ihr Maximum 0,946 erreicht haben, daß dagegen die Geschwindigkeitscoefficienten immer größer und größer ausfallen, je größer der Convergenzwinkel ist. Wie in vorkommenden Fällen der Praxis diese Tabelle zu gebrauchen ist, mag folgendes Beispiel lehren. Conische Ansatzröhren.

Beispiel. Welche Wassermenge liefert eine kurze conische Ansatzröhre von $1\frac{1}{2}$ Zoll Weite in der Ausmündung und von 10 Grad Convergenz bei einem Drucke von 16 Fuß? Nach des Verfassers Versuchen giebt eine cylindrische Röhre von dieser Weite $\mu = 0{,}810$, die Röhre von D'Aubuisson aber gab $\mu = 0{,}829$, also um $0{,}829 - 0{,}810 = 0{,}019$ mehr; nun ist aber der Tabelle zufolge für die Röhre von 10^0 Convergenz $\mu = 0{,}937$, daher ist es angemessen, für die gegebene Röhre $\mu = 0{,}937 - 0{,}019 = 0{,}918$ zu setzen, weshalb die Ausflußmenge $Q = 0{,}918 \cdot \frac{\pi}{4 \cdot 8^2} \cdot 7{,}906 \sqrt{16} = \frac{0{,}918 \cdot 7{,}906 \cdot \pi}{64} = 0{,}3563$ Cubikfuß folgt.

§. 364. Lange prismatische oder cylindrische Ansatzröhren verzögern den Ausfluß um so mehr, je länger dieselben sind; es ist daher anzunehmen, daß die Röhrenwände durch Reibung, Adhäsion oder Klebrigkeit des Wassers an denselben der Bewegung des Wassers ein Hinderniß entgegensetzen. Vernunftgründen und vielfachen Beobachtungen und Messungen zufolge läßt sich annehmen, daß dieser Reibungswiderstand ganz unabhängig ist vom Drucke, daß er aber direct wie die Länge l und umgekehrt wie die Weite d derselben wächst, daß er also dem Verhältnisse $\frac{l}{d}$ proportional ist. Außerdem hat sich auch noch herausgestellt, daß dieses Hinderniß größer ist bei größeren und kleiner bei kleineren Geschwindigkeiten des Wassers, und daß es beinahe mit dem Quadrate der Geschwindigkeit v des Wassers selbst wächst. Messen wir dieses Hinderniß durch die Höhe einer Wassersäule, die nachher von der ganzen Druckhöhe h abzuziehen ist, um die zur Erzeugung der Geschwindigkeit nöthige Höhe zu erhalten, so können wir diese Höhe, die wir in der Folge Reibungswiderstandshöhe nennen wollen, setzen: $h_1 = \zeta \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}$, und es ist hierbei unter ζ eine Erfahrungszahl, die wir den Reibungscoefficienten nennen können, zu verstehen. Man verliert also hiernach durch die Reibung des Wassers in der Röhre um so mehr an Druck oder Druckhöhe, je größer das Verhältniß $\frac{l}{d}$ der Länge zur Weite und je größer die Geschwindigkeitshöhe $\frac{v^2}{2g}$ ist. Aus der Wassermenge Q und dem Röhrenquerschnitte $F = \frac{\pi d^2}{4}$ folgt die Geschwindigkeit $v = \frac{4\,Q}{\pi d^2}$ Reibungswiderstand.

Reibungswiderstand.

und daher die Reibungshöhe

$$h_1 = \zeta \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{1}{2g}\left(\frac{4Q}{\pi d^2}\right)^2 = \zeta \cdot \frac{1}{2g} \cdot \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{l\,Q^2}{d^5}.$$

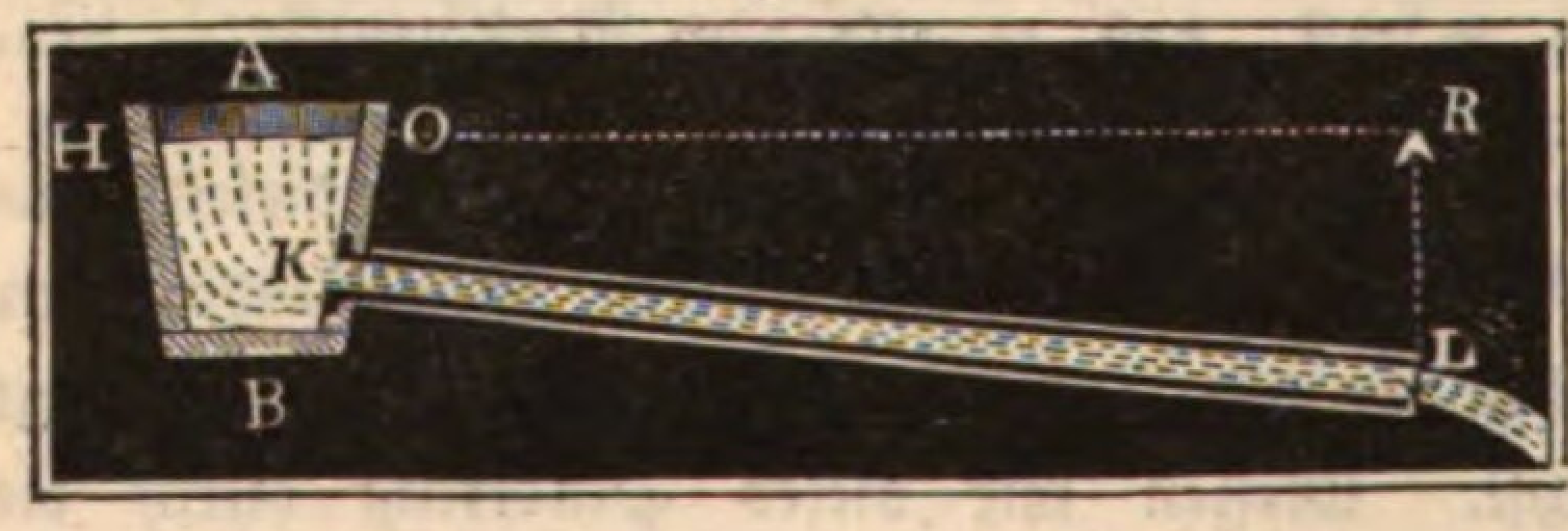
Um durch das Fortleiten einer gewissen Wassermenge Q in einer Röhre möglichst wenig Verlust an Druckhöhe oder Gefälle zu erhalten, soll man die Röhre möglichst weit und nicht unnöthig lang machen. Die doppelte Weite beansprucht z. B. nur $(\frac{1}{2})^5 = \frac{1}{32}$mal so viel Gefälle als die einfache Weite.

Ist der Querschnitt einer Röhre ein Rechteck von der Höhe a und der Breite b, so hat man statt $\frac{1}{d} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi d}{\frac{1}{4}\pi d^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\text{Umfang}}{\text{Inhalt}}$ $= \frac{1}{4} \cdot \frac{2(a+b)}{ab} = \frac{a+b}{2ab}$ einzusetzen, weshalb folgt:

$$h_1 = \zeta \cdot \frac{l(a+b)}{2ab} \cdot \frac{v^2}{2g}.$$

Mit Hülfe dieser Formel für den Röhrenreibungswiderstand lassen sich nun auch die Ausflußgeschwindigkeit und das Ausflußquantum finden, welches eine Röhre von einer gegebenen Länge und Weite unter einem gegebenen Drucke fortleitet. Uebrigens ist es vollkommen gleich, ob die Röhre KL, Fig. 531, horizontal ist, fällt, oder aufsteigt, wenn nur unter der Druckhöhe die Tiefe RL des Mittelpunktes L der Röhrenmündung unter dem Wasserspiegel HO des Ausflußreservoirs verstanden wird. Ist h die Druckhöhe, h_1 die Widerstandshöhe für das Einmündungsstück und h_2 die Widerstandshöhe für den übrigen Theil der Röhre, so hat man

Fig. 531.



$h - (h_1 + h_2) = \frac{v^2}{2g}$, oder $h = h_1 + h_2 + \frac{v^2}{2g}$. Bezeichnet ζ_1 den Widerstandscoefficienten für das Einmündungsstück, und ζ den Coefficienten des Reibungswiderstandes der übrigen Röhre, so hat man

$$h = \frac{v^2}{2g} + \zeta_1 \cdot \frac{v^2}{2g} + \zeta \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g},$$

oder 1) $h = \left(1 + \zeta_1 + \zeta\frac{l}{d}\right)\frac{v^2}{2g}$,

und 2) $v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 + \zeta_1 + \zeta \cdot \frac{l}{d}}}$.

Aus der letzteren Formel ergiebt sich aber die Wassermenge $Q = Fv$. Reibungswiderstand.
Bei sehr langen Röhren fällt $1 + \zeta$ sehr klein gegen $\zeta \frac{l}{d}$ aus, weshalb dann einfach $h = \zeta \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}$, sowie umgekehrt

$$v = \sqrt{\frac{1}{\zeta} \cdot \frac{d}{l} \cdot 2gh} \text{ folgt.}$$

§. 365. Der Reibungscoefficient ist, wie die Ausflußcoefficienten, nicht ganz constant, er ist bei kleinen Geschwindigkeiten größer und bei großen Geschwindigkeiten kleiner, d. h. der Reibungswiderstand des Wassers in den Röhren wächst nicht genau mit dem Quadrate der Geschwindigkeit, sondern auch noch mit einer andern Potenz der Geschwindigkeit. Prony und Eytelwein haben angenommen, daß die durch den Reibungswiderstand verlorene Druckhöhe wie die einfache Geschwindigkeit und wie das Quadrat derselben wachse und für sie den Ausdruck $h_1 = (\alpha v + \beta v^2) \frac{l}{d}$, wo α und β Erfahrungscoefficienten bezeichnen, festgesetzt. Um diese Coefficienten zu bestimmen, haben die genannten Hydrauliker 51 Versuche benutzt, welche zu verschiedenen Zeiten von Couplet, Bossut und Du Buat über die Bewegung des Wassers durch lange Röhren angestellt worden sind. Prony fand hieraus:

$$h_1 = (0{,}0000693\, v + 0{,}0013932\, v^2) \frac{l}{d},$$

Eytelwein $h_1 = (0{,}0000894\, v + 0{,}0011213\, v^2) \frac{l}{d}$, D'Aubuisson nimmt an $h_1 = (0{,}0000753\, v + 0{,}001370\, v^2) \frac{l}{d}$ Meter.

Noch weit genauer an die Beobachtungen schließt sich eine von dem Verfasser aufgefundene Formel an, welche die Form

$$h_1 = \left(\alpha + \frac{\beta}{\sqrt{v}}\right) \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$$

hat und sich auf die Voraussetzung gründet, daß der Reibungswiderstand wie das Quadrat und wie die Quadratwurzel aus dem Cubus der Geschwindigkeit zugleich wächst. Man hat also hiernach den Widerstandscoefficienten $\zeta = \alpha + \frac{\beta}{\sqrt{v}}$ und die Höhe der Reibungswiderstandshöhe einfach $h_1 = \zeta \cdot \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$ zu setzen.

Zur Ermittelung des Widerstandscoefficienten ζ oder der Hülfsconstanten α und β sind aber von dem Verfasser nicht nur die schon bei den

Reibungswiderstand. Prony'schen und Eytelwein'schen Bestimmungen zu Grunde gelegten 51 Versuche von Couplet, Bossut und Du Buat, sondern auch noch 11 Versuche vom Verfasser und 1 Versuch von einem Herrn Gueymard in Grenoble benutzt worden. Die älteren Versuche erstrecken sich nur auf Geschwindigkeiten von 0,043 bis 1,930 Metern, durch die Versuche des Verfassers ist aber die letzte Grenze der Geschwindigkeiten bis auf 4,648 Meter hinausgerückt worden. Die Weiten der Röhren waren bei den älteren Versuchen 27, 36, 54, 135 und 490 Millimeter, die neuen Versuche aber wurden an Röhren von 33, 71 und 275 Millimetern angestellt. Mit Hülfe der Methode der kleinsten Quadrate ist nun aus den zum Grunde gelegten 63 Versuchen gefunden worden:

$$\zeta_1 = 0{,}01439 + \frac{0{,}0094711}{\sqrt{v}}, \text{ also}$$

$$h_1 = \left(0{,}01439 + \frac{0{,}0094711}{\sqrt{v}}\right) \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \text{ Meter,}$$

oder für das preußische Maaß

$$h_1 = \left(0{,}01439 + \frac{0{,}016921}{\sqrt{v}}\right) \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \text{ Fuß.}$$

§. 366. Zur Erleichterung der Rechnung ist folgende Tabelle der Widerstandscoefficienten zusammengestellt worden. Man ersieht aus ihr, daß allerdings die Veränderlichkeit dieser Coefficienten nicht unbedeutend ist, da dieser Coefficient für 0,1 Meter Geschwindigkeit = 0,0443, für 1 Meter = 0,0239 und für 5 Meter = 0,0186 ausfällt.

Tabelle der Reibungscoefficienten des Wassers.

		Zehntel Meter.									
	v	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ganze Meter.	0	∞	0,0443	0,0356	0,0317	0,0294	0,0278	0,0266	0,0257	0,0250	0,0244
	1	0239	0234	0230	0227	0224	0221	0219	0217	0215	0213
	2	0211	0209	0208	0206	0205	0204	0203	0202	0201	0200
	3	0199	0198	0197	0196	0195	0195	0194	0193	0193	0192
	4	0191	0191	0190	0190	0189	0189	0188	0188	0187	0187

Man findet in dieser Tabelle die einer gewissen Geschwindigkeit entsprechenden Widerstandscoefficienten, wenn man die ganzen Meter in der ersten Vertikal- und die Zehntel in der ersten Horizontalcolumne aufsucht, von der ersten Zahl horizontal und von der letzten vertikal fortgeht bis zur

Stelle, wo sich beide Bewegungen begegnen. Z. B. für $v = 1{,}3$ Meter ist $\zeta = 0{,}0227$, für $v = 2{,}8$, $\zeta = 0{,}0201$. Reibungswiderstand.

Für das preußische Fußmaaß läßt sich setzen:

v	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9 Fuß.
ζ	0,0679	0,0522	0,0453	0,0411	0,0383	0,0362	0,0346	0,0333	0,0322

v	1	1¼	1½	2	3	4	6	8	12	20 Fuß.
ζ	0,0313	0,0296	0,0282	0,0263	0,0242	0,0229	0,0213	0,0204	0,0192	0,0182

Anmerkung. Eine ausgedehntere und bequemere Tafel giebt der »Ingenieur«, Seite 458.

§. 367. In Ansehung der Bewegung des Wassers in langen Röhren oder Röhrenleitungen können folgende drei Hauptaufgaben zur Lösung vorkommen. Lange Röhren.

1) Es ist die Länge l und Weite d der Röhre und das fortzuführende Wasserquantum Q gegeben, und man sucht die entsprechende Druckhöhe. Hier hat man zunächst die Geschwindigkeit $v = \frac{Q}{F} = \frac{4Q}{\pi d^2} = 1{,}2732 . \frac{Q}{d^2}$ zu berechnen, dann den diesem Werthe entsprechenden Reibungscoefficienten ζ in einer der letzten Tafeln aufzusuchen, und zuletzt die Werthe d, l, v, ζ und ζ_1, wo ζ_1 den Widerstandscoefficienten für das Einmündungsstück bezeichnet, in der ersten Hauptformel $h = \left(1 + \zeta_1 + \zeta \frac{l}{d}\right) \frac{v^2}{2g}$ zu substituiren.

2) Es ist die Länge und Weite der Röhre, sowie die Druckhöhe oder das Gefälle gegeben, und die Wassermenge zu bestimmen. Hier ist zunächst die Geschwindigkeit durch die Formel

$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 + \zeta_1 + \zeta . \frac{l}{d}}}$$

zu finden; da aber der Widerstandscoefficient nicht ganz constant ist, sondern sich mit v etwas ändert, so muß man v vorher schon annähernd kennen, um darnach ζ ermitteln zu können.

Aus v folgt dann $Q = \frac{\pi d^2}{4} v = 0{,}7854\ d^2 v$.

Lange Röhren.

3) Es ist die Wassermenge, die Druckhöhe und die Länge der Röhre gegeben, und die nöthige Weite der Röhre zu bestimmen.

$$\text{Da } v = \frac{4Q}{\pi d^2}, \text{ also } v^2 = \left(\frac{4Q}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{d^4},$$

$$\text{so hat man } 2gh = \left(1 + \zeta_1 + \zeta \frac{l}{d}\right)\left(\frac{4Q}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{d^4}, \text{ oder}$$

$$2gh \cdot \left(\frac{\pi}{4Q}\right)^2 = (1 + \zeta_1) \frac{1}{d^4} + \zeta \frac{l}{d^5}, \text{ oder}$$

$2gh \cdot \left(\frac{\pi}{4Q}\right)^2 d^5 = (1 + \zeta_1)\, d + \zeta\, l$; daher ist die Röhrenweite

$$d = \sqrt[5]{\frac{(1 + \zeta_1)\, d + \zeta l}{2gh} \cdot \left(\frac{4Q}{\pi}\right)^2}.$$

Nun ist aber $\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 = 1,6212$, $1 + \zeta_1$ im Mittel $= 1,505$ und für das preuß. Maaß $\frac{1}{2g} = 0,016$, daher läßt sich setzen:

$$d = 0,4817 \sqrt[5]{(1,505\ .\ d + \zeta\, l)\frac{Q^2}{h}} \text{ Fuß.}$$

Auch diese Formel ist nur als Näherungsformel zu gebrauchen, weil die Unbekannte d und auch der von $v = \frac{4Q}{\pi d^2}$ abhängige Coefficient ζ in ihr mit vorkommen.

Beispiele. 1) Welche Druckhöhe beansprucht eine Röhrenleitung von 150 Fuß Länge und 5 Zoll Weite, wenn dieselbe in der Minute 25 Cubikfuß Wasser fortleiten soll? Hier ist $v = 1,2732\ .\ \frac{25\ .\ 12^2}{60\ .\ 5^2} = 3,056$ Fuß, daher läßt sich $\zeta = 0,0242$ setzen, und es folgt nun die Druckhöhe oder das totale Röhrengefälle $h = \left(1,505 + 0,0242\ .\ \frac{150\ .\ 12}{5}\right) .\ 0,016\ .\ 3,056^2$

$$= (1,505 + 8,712)\ 0,016\ .\ 9,339 = 1,527 \text{ Fuß.}$$

2) Welche Wassermenge wird eine Röhrenleitung von 48 Fuß Länge und 2 Zoll Weite bei 5 Fuß Druckhöhe liefern? Es ist

$$v = \frac{7,906\ \sqrt{5}}{\sqrt{1,505 + \zeta . \frac{48.12}{2}}} = \frac{17,678}{\sqrt{1,505 + 288.\zeta}}$$

Vorläufig $\zeta = 0,020$ angenommen, erhält man $v = \frac{17,678}{\sqrt{7,26}} = \frac{17,678}{2,7} = 6,5$, aber $v = 6,5$ giebt richtiger $\zeta = 0,0211$, daher hat man genauer $v = \frac{17,678}{\sqrt{1,505 + 288\ .\ 0,0211}} = \frac{17,678}{\sqrt{7,582}} = 6,42$ Fuß, und das Wasserquantum $Q = 0,7854 \cdot \left(\frac{2}{12}\right)^2 .\ 6,42 = 0,140$ Cubikfuß $= 242$ Cubikzoll.

3) Welche Weite muß man einer 100 Fuß langen Röhrenleitung geben, die bei 5 Fuß Druckhöhe in jeder Secunde einen halben Cubikfuß Wasser liefert? Lange Röhren.

Es ist $d = 0,4817 \sqrt[5]{(1,505\,d + 100\,\zeta)\,.\,{}^1/_5\,({}^1/_2)^2} = 0,4817 \sqrt[5]{0,075\,d + 5\,\zeta}$.

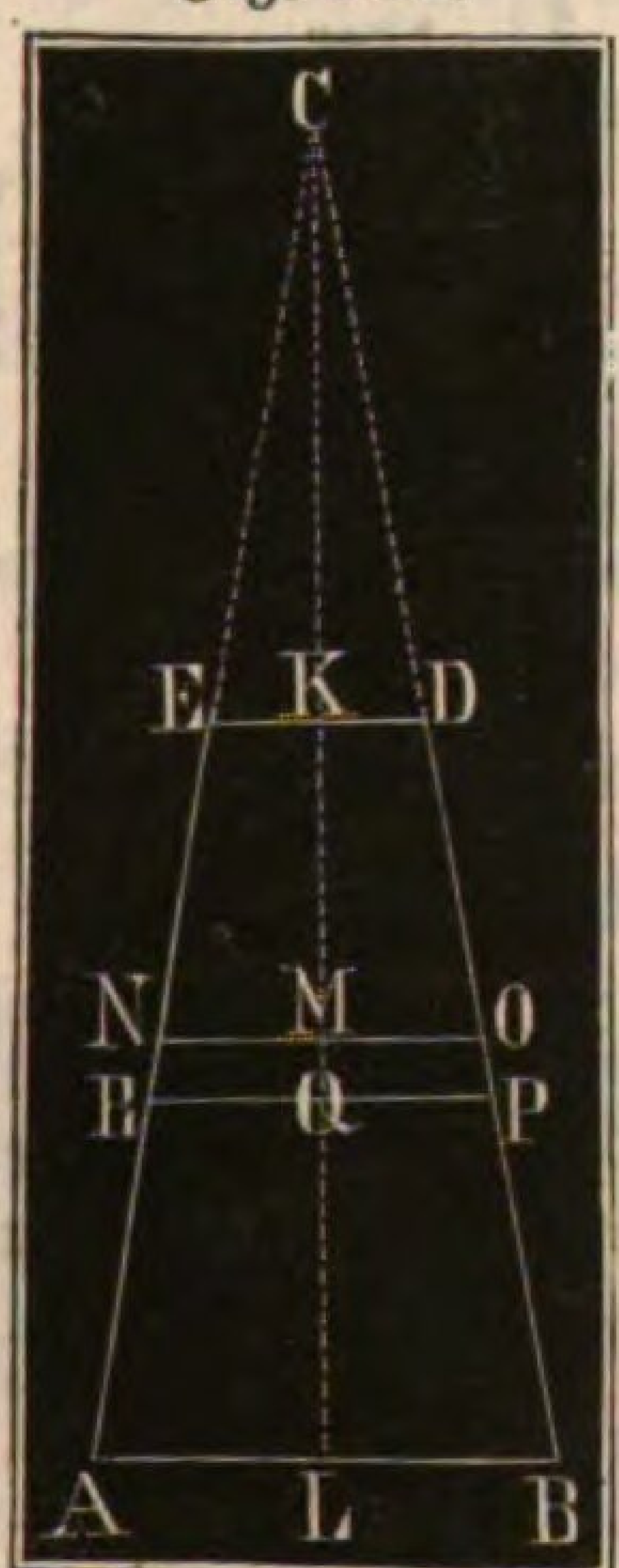
Setze ich vorläufig $\zeta = 0,02$, so bekomme ich $d = 0,4817 \sqrt[5]{0,075\,d + 0,100}$, oder annähernd $= 0,4817 \sqrt[5]{0,100} = 0,30$, also genauer

$d = 0,4817 \sqrt[5]{0,0225 + 0,100} = 0,4817 \sqrt[5]{0,1225} = 0,3165$ Fuß $= 3,8$ Zoll. Dieser Weite entspricht der Querschnitt $F = 0,7854\,.\,0,3165^2 = 0,0787$ Quadratfuß, die Geschwindigkeit $v = \frac{Q}{F} = \frac{0,5}{0,0787} = 6,35$ Fuß, und dieser wieder der Widerstandscoefficient $\zeta = 0,0211$. Führt man den letzteren genaueren Werth ein, so erhält man $d = 0,4817 \sqrt[5]{0,1280} = 0,319$ Fuß.

Anmerkung. Versuche mit $2^1/_2$ und $4^1/_2$ Zoll weiten ordinären Holzröhren haben dem Verfasser den Widerstandscoefficienten 1,75mal so groß gegeben, als bei den Metallröhren, auf die sich die in den Tabellen des vorigen §. aufgeführten Werthe beziehen. Während also z. B. für die Geschwindigkeit von 3 Fuß bei Metallröhren $\zeta = 0,0242$ ist, müssen wir ihn bei Holzröhren $= 0,0242\,.\,1,75 = 0,04235$ setzen; während wir im Beispiel 1. die Druckhöhe in einer 150 Fuß langen Metallröhre 1,527 Fuß gefunden haben, wird sie bei einer gleich weiten Holzröhre unter denselben Umständen
$h = (1,505 + 0,04235\,.\,360)\,.\,0,016\,.\,9,339 = 16,75\,.\,0,1494 = 2,50$ Fuß betragen müssen.

§. 368 *). Bei einer conischen Röhre AD, Fig. 532, läßt sich der Reibungswiderstand auf folgende Weise finden. Es sei der Convergenzwinkel ACB der Röhrenwand $= \delta$, der Durchmesser AB der Einmündung $= d_1$, der Durchmesser DE der Ausmündung $= d$, ferner die Länge KL der Röhre $= l$, und die Ausflußgeschwindigkeit (bei DE) $= v$. Conische Röhren.

Fig. 532.



In einem Abstande $KM = x$ von der Ausmündung ist der Durchmesser der Röhre

$$NO = y = DE + 2\,KM\; tang.\, \frac{\delta}{2}$$

$$= d + 2x\; tang.\, \frac{\delta}{2},$$

und daher die Geschwindigkeit daselbst, da sich $\frac{w}{v} = \frac{d^2}{y^2}$ setzen läßt,

$$w = \frac{d^2}{y^2}\, v = \frac{v}{\left(1 + \frac{2x}{d}\; tang.\, \frac{\delta}{2}\right)^2}.$$

Für ein Element $NOPR$ des Röhrenstückes von der Länge $MQ = dx$ ist daher die Widerstandshöhe der Reibung:

Conisch. Röhren.

$$\partial h = \zeta \cdot \frac{\partial x}{y} \cdot \frac{w^2}{2g} = \zeta \cdot \frac{\partial x}{y\left(1 + \frac{2x}{d} \, tang \, \frac{\delta}{2}\right)^4} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

$$= \zeta \cdot \frac{\partial x}{d\left(1 + \frac{2x}{d} \, tang. \, \frac{\delta}{2}\right)^5} \cdot \frac{v^2}{2g},$$

und es folgt die Reibungswiderstandshöhe für die ganze Röhre:

$$h = \zeta \cdot \frac{v^2}{2gd} \int_o^l \frac{\partial x}{\left(1 + \frac{2x}{d} \, tang. \, \frac{\delta}{2}\right)^5}.$$

Nun ist aber

$$\int \frac{\partial x}{\left(1 + \frac{2x}{d} \, tang. \, \frac{\delta}{2}\right)^5}$$

$$= \frac{d}{2} \, cotang. \, \frac{\delta}{2} \int \left(1 + \frac{2x}{d} \, tang. \, \frac{\delta}{2}\right)^{-5} \partial \left(\frac{2x}{d} \, tang. \, \frac{\delta}{2}\right)$$

$$= \frac{d}{8} \, cotang. \, \frac{\delta}{2} \left(1 + \frac{2x}{d} \, tang. \, \frac{\delta}{2}\right)^{-4}, \text{ daher}$$

$$\int_o^l \frac{\partial x}{\left(1 + \frac{2x}{d} \, tang. \, \frac{\delta}{2}\right)^5}$$

$$= \frac{d}{8} \, cotang. \, \frac{\delta}{2} \left[1 - \left(1 + \frac{2l}{d} \, tang. \, \frac{\delta}{2}\right)^{-4}\right], \text{ oder}$$

$$= \frac{d}{8} \, cotang. \, \frac{\delta}{2} \left[1 - \left(\frac{d_1}{d}\right)^{-4}\right] = \frac{d}{8} \, cotang. \, \frac{\delta}{2} \left[1 - \left(\frac{d}{d_1}\right)^4\right],$$

da $d + 2l \, tang. \, \frac{\delta}{2}$ den Durchmesser d_1 der Einmündung ausdrückt.

Es ist folglich die gesuchte Widerstandshöhe

$$h = \zeta \cdot \frac{v^2}{2gd} \cdot \frac{d}{8} \, cotang. \, \frac{\delta}{2} \left[1 - \left(\frac{d}{d_1}\right)^4\right]$$

$$= \tfrac{1}{8} \zeta \cdot \left[1 - \left(\frac{d}{d_1}\right)^4\right] cotang, \frac{\delta}{2} \cdot \frac{v^2}{2g}.$$

Ist die Einmündung viel weiter als die Ausmündung, so kann man $\frac{d}{d_1}$ = Null setzen, und erhält hiernach

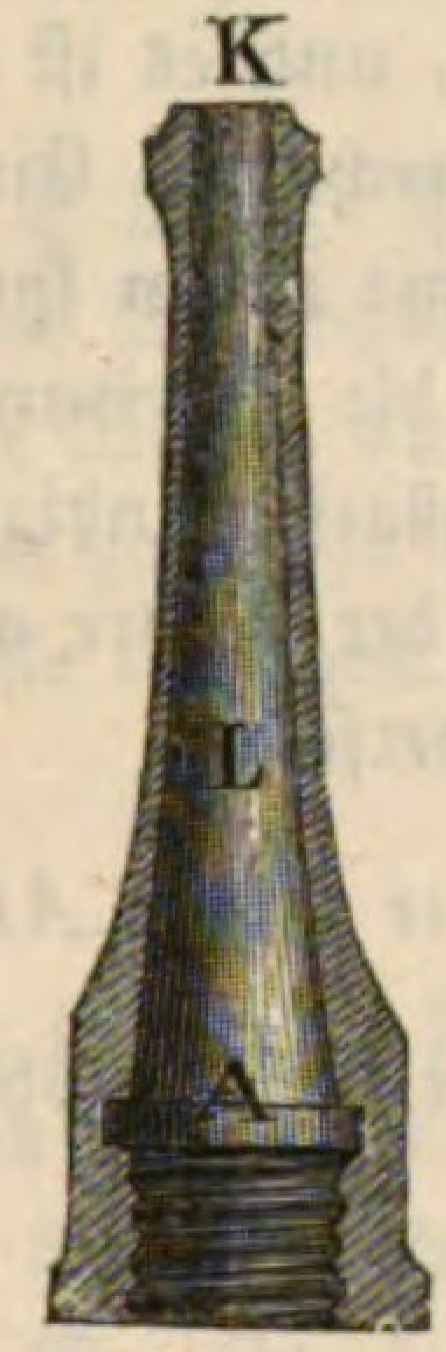
$$h = \tfrac{1}{8} \zeta \, cotang. \, \frac{\delta}{2} \cdot \frac{v^2}{2g};$$

es hängt also in diesem Falle der Reibungswiderstand gar nicht von der Länge der Röhre ab.

Conische Röhren.

Beispiel. Bei einem Feuerspritzenmundstück AK, Fig. 533, ist der Convergenzwinkel der Ausmündung LK, $\delta = 5^0$, und der der Einmündung AK, $\delta_1 = 18^0$, ferner die Weite der Ausmündung, $d = 7$ Linien, die Weite der Einmündung $d_1 = 1\frac{1}{2}$ Zoll $= 18$ Linien, und die ganze Länge des Gußstückes $AK = l = 6$ Zoll 72 Linien, wie groß ist der Widerstandscoefficient desselben? Setzen wir die Länge des Ausmündungsstückes $KL = l_1$, und die des Einmündungsstückes $AL = l_2$, so haben wir

Fig. 533.



$$l_1 + l_2 = l \text{ und } l_1 \, tang. \frac{\delta}{2} + l_2 \, tang. \frac{\delta_1}{2} = \frac{d_1 - d}{2},$$

in Zahlen,

$$l_1 + l_2 = 72 \text{ und } l_1 \, tang. \, 2\tfrac{1}{2}^0 + l_2 \, tang. \, 9^0 = \tfrac{11}{2},$$

oder $0{,}04362 \, l_1 + 0{,}15838 \, l_2 = 5{,}5$. Hieraus folgt $l_1 = 49{,}44$ und $l_2 = 20{,}56$ Linien, und die Weite bei L, wo die Kegelflächen zusammenstoßen,

$$d_2 = d + 2 l_1 \, tang. \frac{\delta}{2} = 7 + 2 . 49{,}44 . 0{,}04362 = 11{,}3$$

Linien. Da diese Stelle abzurunden ist, möge aber $d_2 = 13$ Linien gesetzt werden. Nun folgt für das Ausmündungsstück

$$\left[1 - \left(\frac{d}{d_2}\right)^4\right] cotang. \frac{\delta}{2} = [1 - (\tfrac{7}{13})^4] \, . \, cotang. \, 2\tfrac{1}{2}^0$$
$$= 0{,}9159 \, . \, 22{,}904 = 20{,}98,$$

und für das Einmündungsstück

$$\left[1 - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2\right] cotang. \frac{\delta_1}{2} = [1 - (\tfrac{13}{18})^4] \, . \, cotang. \, 9^0$$
$$= 0{,}7795 \, . \, 6{,}314 = 4{,}92,$$

daher ist für das ganze Gußstück die Widerstandshöhe

$$h = \frac{\zeta}{8}\left[20{,}98 + 4{,}92 \, . \left(\frac{d}{d_2}\right)^4\right] . \frac{v^2}{2g} = \frac{\zeta}{8}\left[20{,}98 + 4{,}92 \, . \left(\frac{7}{13}\right)^4\right]\frac{v^2}{2g}$$

$= 22{,}41 \, . \, \frac{\zeta}{8} \, . \, \frac{v^2}{2g} = 2{,}8\zeta \, . \, \frac{v^2}{2g}$, und wenn man $\zeta = 0{,}02$ annimmt,

$h = 0{,}056 \, . \, \frac{v^2}{2g}$, d. i. über $5\frac{1}{2}$ Procent der Geschwindigkeitshöhe, womit auch die angestellten Versuche übereinstimmen.

§. 369. Eine Röhrenleitung mündet entweder in freier Luft oder unter Wasser aus. Beide Fälle sind in den Figuren 534 und 535 abgebildet. Röhrenleitung.

Fig. 534.

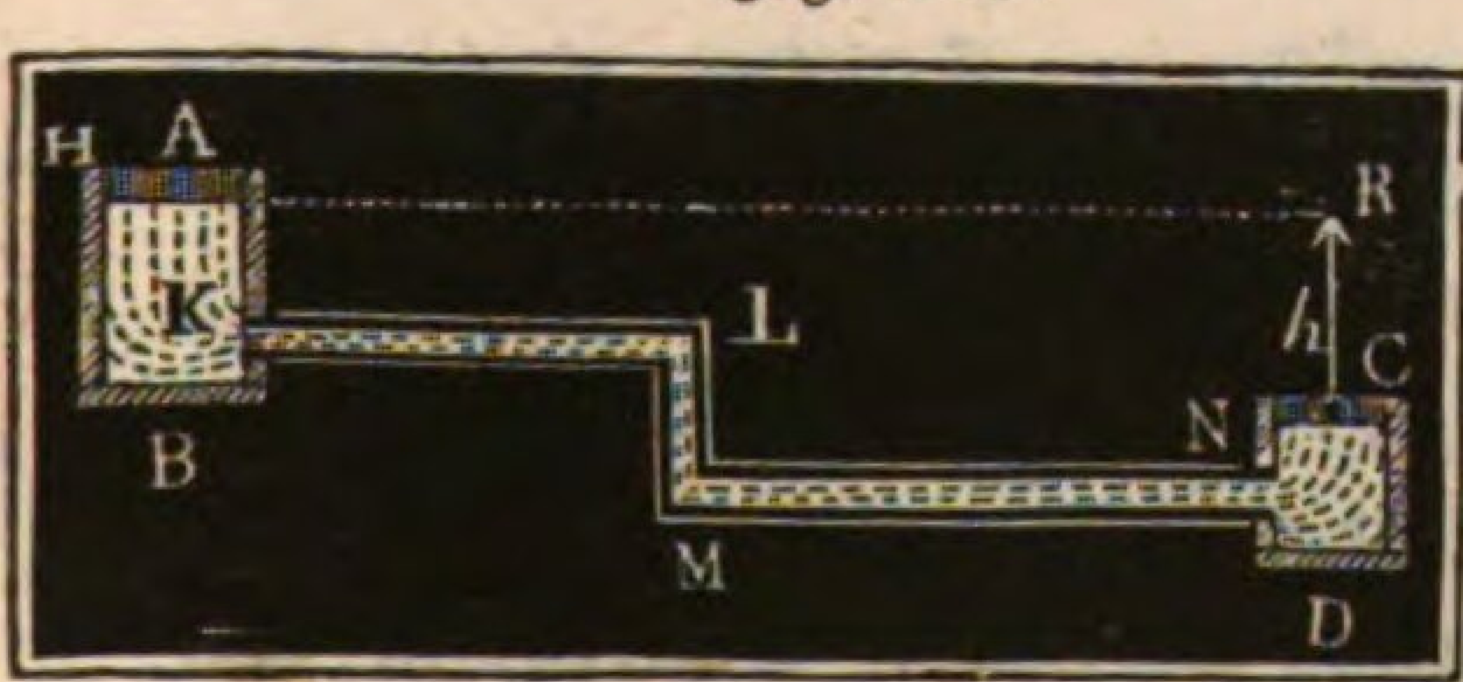
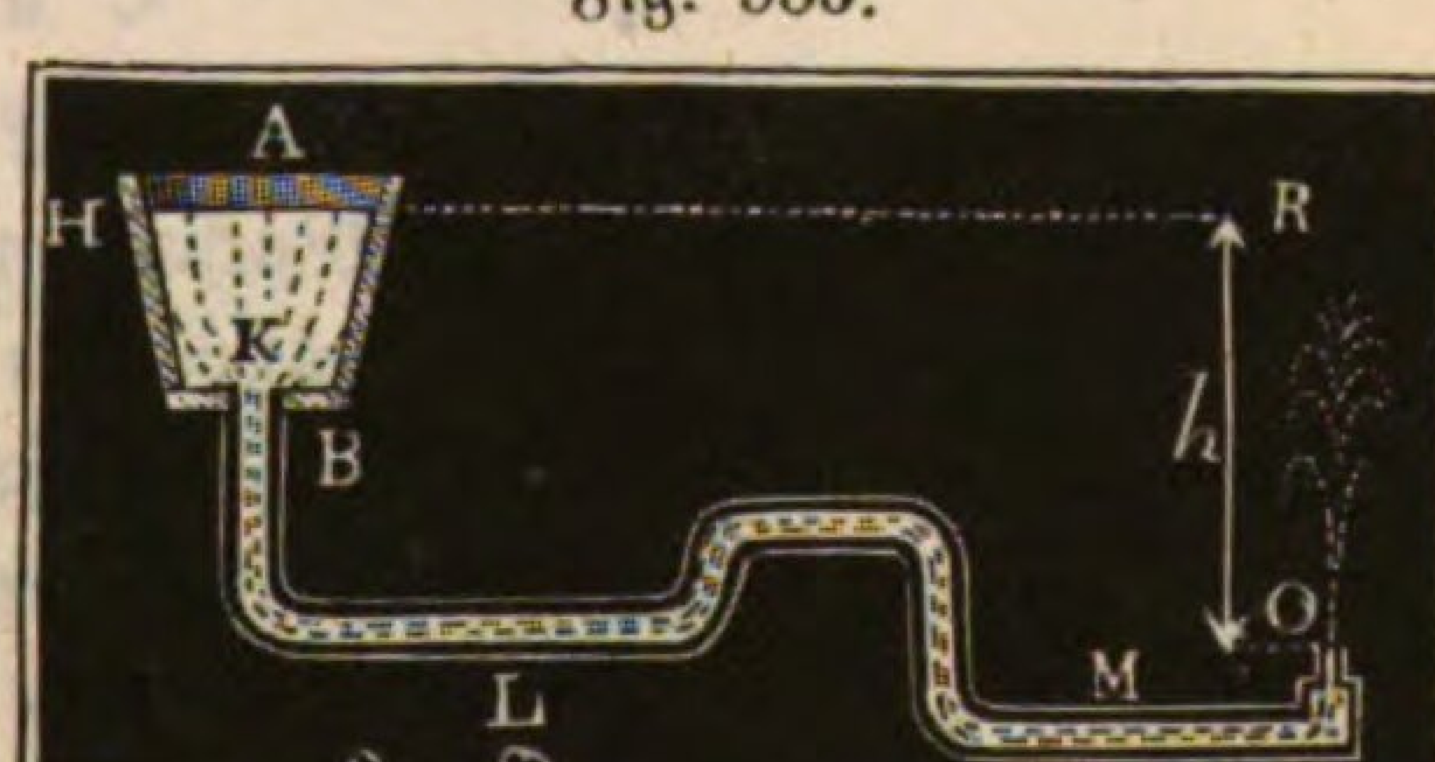


Fig. 535.



Im ersten Falle ist als Druckhöhe h der Niveauabstand BC beider Wasserspiegel, im zweiten aber die senkrechte Tiefe BO der Ausmün-

Röhrenleitung. dung O unter dem Wasserspiegel A des Zuflußapparates anzunehmen. Behält nun die Röhre überall eine und dieselbe Weite d, so finden in beiden Fällen die im §. 367 entwickelten Formeln ihre unmittelbare Anwendung, verengert oder erweitert sich aber die Röhre an einer Stelle, so hat man es mit verschiedenen Röhrengeschwindigkeiten zu thun, und es ist daher der Reibungswiderstand für jede Röhre besonders zu berechnen. Einen solchen Fall bietet z. B. die Wasserleitung in Fig. 535 mit einem springenden Strahle dar, wo das Mundstück O enger ist als die Zuleitungsröhre BLM. Setzen wir, wie gewöhnlich, die Ausflußgeschwindigkeit $= v$, die Weite der Ausmündung $O = d$, die Weite der Röhre aber $= d_1$, so haben wir die Geschwindigkeit des Wassers in derselben $v_1 = \left(\frac{d}{d_1}\right)^2 v$, und bezeichnet nun noch l_1 die Länge der Röhre ALM und ζ den Reibungscoefficienten, so folgt die entsprechende Reibungshöhe

$$k = \zeta \frac{l_1 v_1^2}{d_1 2g} = \zeta \frac{l_1}{d_1} \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 \cdot \frac{v^2}{2g}.$$

Ist nun noch ζ_1 der Widerstandscoefficient für das Einmündungsstück K und ζ_2 der für das Ausmündungsstück, so ist der Druckhöhenverlust, welchen das erstere verursacht,

$$k_1 = \zeta_1 \frac{v_1^2}{2g} = \zeta_1 \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 \cdot \frac{v^2}{2g},$$

dagegen der, welcher aus der Bewegung durch das zweite entspringt,

$$k_2 = \zeta_2 \frac{v^2}{2g};$$

und hiernach hat man nun das ganze Gefälle

$$h = \frac{v^2}{2g} + k + k_1 + k_2 = \left[1 + \zeta \frac{l_1}{d_1}\left(\frac{d}{d_1}\right)^4 + \zeta_1 \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 + \zeta_2\right] \frac{v^2}{2g},$$

und umgekehrt die Ausflußgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \left(\zeta \frac{l_1}{d_1} + \zeta_1\right)\left(\frac{d}{d_1}\right)^4 + \zeta_2}}.$$

Die Mund- oder Ausgußstücke müssen zur Erzielung einer großen Steighöhe nicht bloß dem Wasser einen möglichst kleinen Widerstand darbieten, sondern auch das Ausströmen in möglichst parallelen Fäden bewirken, damit dieselben beim Aufsteigen einen langen zusammenhängenden Strahl bilden, der durch die Luft weniger gestört wird als ein zerrissener Strahl. Aus diesem Grunde zieht man die kurzen cylindrischen oder wenig conischen Mundstücke mit abgerundeter Einmündung den Ausmündungen in der dünnen Wand oder den nach der Gestalt des contrahirten Wasserstrahles geformten Mundstücken vor, obgleich sie einen wenig grö-

ßeren Geschwindigkeitsverlust verursachen als diese. Die Knoten und Bäuche, welche der aus den letzteren Mündungen kommende Strahl bildet oder zu bilden sucht, geben der äußeren Luft mehr Gelegenheit zum Eindringen, als ein cylindrischer Strahl. Röhrenleitung.

§. 370. Aus der Geschwindigkeit v, mit welcher das Wasser aus einem Mundstücke ausströmt, läßt sich auch die Höhe berechnen, auf welche der Strahl aufsteigt. Ist δ der Neigungswinkel des Strahles gegen den Horizont, so hätte man, wenn dem aufsteigenden Strahle keine Hindernisse entgegen ständen, die Steighöhe (s. §. 38): Springende Strahlen.

$$s = \frac{v^2 \sin. \delta^2}{2g};$$

da jedoch die Luft und, zumal bei einem ganz senkrechten Strahle, auch das zurückfallende Wasser dem Aufsteigen des Strahles hinderlich sind, so fällt die effective Steighöhe noch etwas kleiner aus.

Bei Strahlen, welche der Verfasser durch kreisförmige Mündungen in der dünnen Wand, oder durch kurze cylindrische oder wenig conische Mundstücke von 1 Centimeter Weite fließen und ohngefähr $13\frac{1}{2}$ Fuß, jedoch nicht ganz senkrecht in die Höhe steigen ließ, war der Widerstand der Luft noch unmerklich, fiel wenigstens die effective Steighöhe δ noch nicht $\frac{1}{4}$ Fuß kleiner aus als die Geschwindigkeitshöhe $\frac{v^2}{2g}$. Nach Mariotte, der hierüber mehrere Versuche angestellt hat (s. dessen Grundlehren der Hydrostatik und Hydraulik, deutsch von Meinig, 1723), ist für eine kreisförmige Mündung von 6 Linien Weite bei einer Druckhöhe von 26,08 Fuß die Steighöhe 24,21 Fuß, und bei einer Druckhöhe von 34,96 Fuß die Steighöhe 31,71 Fuß; nun beträgt aber der Widerstandscoefficient für diese Mündung (s. §. 347) mindestens 5 Procent, folglich ist die der ersten Druckhöhe entsprechende Geschwindigkeitshöhe

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{26,08}{1,05} = 24,84 \text{ Fuß},$$

und die der zweiten

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{34,96}{1,05} = 33,30 \text{ Fuß},$$

und der Verlust an Steighöhe, im ersten Falle

$$\frac{v^2}{2g} - s = 24,84 - 24,21 = 0,63 \text{ Fuß},$$

und im zweiten

$$\frac{v^2}{2g} - s = 33,30 - 31,71 = 1,59 \text{ Fuß};$$

Springende Strahlen.

oder im Verhältniß zur Steighöhe s:

$$\left(\frac{v^2}{2\,g} - s\right) : s = \frac{0,63}{24,21} = 0,026 \text{ und}$$

$$= \frac{1,59}{31,71} = 0,050.$$

Setzt man $\frac{v^2}{2\,g} = s\,(1 + \varkappa\,s)$, so erhält man nach diesen Angaben für das Pariser Fußmaaß im Mittel den Coefficienten

$$\varkappa = \left(\frac{v^2}{2\,g} - s\right) : s^2 = 0,0013, \text{ und daher}$$

$$\frac{v^2}{2\,g} = s\,(1 + 0,0013\,s),$$

und umgekehrt, annähernd

$$s = \frac{v^2}{2\,g}\left(1 - 0,0013\,.\,\frac{v^2}{2\,g}\right).$$

Beispiel. Wenn bei einem Springbrunnen die Leitungsröhre 350 Fuß lang und 2 Zoll weit ist, wenn ferner das conische Mundstück desselben $\frac{1}{2}$ Zoll weit ist, und den Widerstandscoefficienten $\zeta_2 = 0,08$ hat, wie hoch wird bei einer Druckhöhe von 40 Fuß der Strahl springen, vorausgesetzt, daß außer der Reibung alle übrigen Röhrenwiderstände klein genug sind, um sie vernachlässigen zu können. Es ist hier, wenn man $\zeta = 0,025$, $\zeta_1 = 0$, 0,

Fig. 536.



$$\zeta_2 = 0,08, \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 = (\tfrac{1}{4})^4 = \tfrac{1}{256}$$

$$\text{und } \frac{l_1}{d_1} = \frac{350}{\tfrac{2}{12}} = 2100 \text{ setzt,}$$

die Höhe der Ausflußgeschwindigkeit

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{h}{1 + \zeta\,\frac{l_1}{d_1}\,.\left(\frac{d}{d_1}\right)^4 + \zeta_2}$$

$$= \frac{40}{1,08 + 0,025\,.\,2100\,.\,\tfrac{1}{256}} = \frac{40}{1,287}$$

$= 31,08$ Fuß, und daher die zu erwartende Steighöhe bei ruhiger Luft

$$s = 31,08\,(1 - 0,0013\,.\,31) = 31,08 - 1,25$$
$$= 29,83 \text{ Fuß.}$$

Anmerkung*). Unter der Voraussetzung, daß die Luft dem aufsteigenden Wasserstrahl ebenso entgegenwirkt, wie die Fläche einer Röhre, läßt sich die Steighöhle s wie folgt bestimmen. Ist w die Geschwindigkeit und y die Weite DE des Strahles ABC, Fig. 536, im Abstande $KL = x$ von der Mündung, so hat man ohne Rücksicht auf die Störung der Luft

$$x = \frac{v^2}{2g} - \frac{w^2}{2g},$$

oder, da $v^2 d = w^2 y$ zu setzen ist, Springende Strahlen.

$$x = \left[1 - \left(\frac{d}{y}\right)^4\right] \frac{v^2}{2g},$$

Ist ζ der Widerstandscoefficient der Luft, so hat man aber den entsprechenden Verlust an Steighöhe

$$= \int_0^x \frac{\partial x}{y} \cdot \frac{w^2}{y} = \zeta \int_0^x \frac{\partial x}{y} \cdot \left(\frac{d}{y}\right)^4 \cdot \frac{v^2}{2g} \text{ (Vergl. §. 368*).}$$

und es ist daher

$$x = \left[1 - \left(\frac{d}{y}\right)^4\right] \frac{v^2}{2g} - \int \frac{\partial x}{x} \cdot \left(\frac{d}{y}\right)^4 \cdot \frac{v^2}{2g} \text{ zu setzen.}$$

Nun ist aber annähernd

$$\partial x = - d^4 \cdot \frac{v^2}{2g} \partial (y)^{-4} = 4 d^4 \cdot \frac{v^2}{2g} \cdot y^{-5} \partial y,$$

daher folgt nun schärfer

$$x = \left[1 - \left(\frac{d}{y}\right)^4\right] \frac{v^2}{2g} - \zeta \int_d^y 4 \cdot d^4 \cdot \frac{v^2}{2g} \cdot y^{-6} \cdot \left(\frac{d}{y}\right)^4 \cdot \frac{v^2}{2g} \partial y$$

$$= \left[1 - \left(\frac{d}{y}\right)^4\right] \frac{v^2}{2g} - 4 \zeta d^8 \left(\frac{v^2}{2g}\right)^2 \cdot \int_d^y y^{-10} \partial y$$

$$= \left[1 - \left(\frac{d}{y}\right)^4\right] \frac{v^2}{2g} - \tfrac{4}{9} \zeta d^8 \left(\frac{v^2}{2g}\right)^2 \cdot \left(d^{-9} - y^{-9}\right).$$

$$= \frac{v^2}{2g} \left(1 - \left(\frac{d}{y}\right)^4 - \tfrac{4}{9} \zeta \frac{v^2}{2gd} \left[1 - \left(\frac{d}{y}\right)^9\right]\right).$$

Für den ganzen Strahl hat man aber $x = s$, und $\left(\frac{d}{y}\right)^4$ nahe $= 0$, weshalb nun

$$s = \left(1 - \tfrac{4}{9} \zeta \frac{v^2}{2gd}\right) \cdot \frac{v^2}{2g}, \text{ so wie umgekehrt}$$

$$\frac{v^2}{2g} = \left(1 + \tfrac{4}{9} \zeta \frac{s}{d}\right) s \text{ folgt.}$$

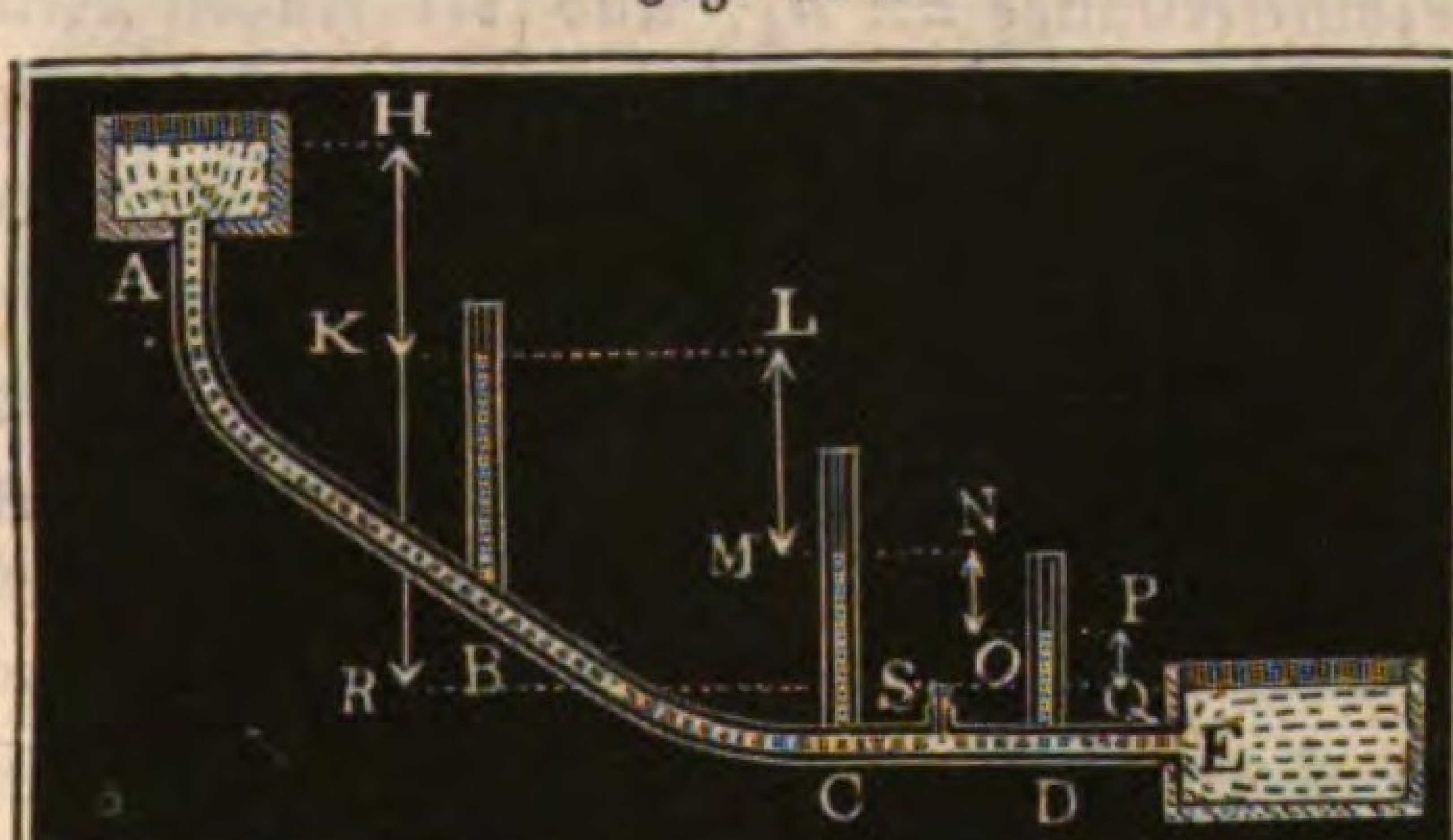
Bei den Versuchen von Mariotte war $d = \frac{1}{2}$ Zoll $= \frac{1}{24}$ Fuß, daher ist

$$\tfrac{4}{9} \zeta \cdot \frac{s}{d} = 24 \cdot \tfrac{4}{9} \zeta s = 0{,}0013\, s, \text{ d. i.}$$

$$\tfrac{4}{9} \zeta = \frac{0{,}0013}{24} = 0{,}000054, \text{ und}$$

$$\frac{v^2}{2g} = s \left(1 + 0{,}000054 \frac{s}{d}\right) \text{ zu setzen.}$$

Fig. 537.



§. 371. Die Druckverluste, welche das Wasser in einer Röhrenleitung *ABCDE*, Fig. 537, durch Verengungen, Reibung u. s. w. erleidet, kann man durch die Wassersäulen messen, welche sich in senkrecht aufgesetzten Röhren *BK*, *CM*, *DO* erhal- Piëzometer.

Piëzometer. ten, die man, wenn sie lediglich zu diesem Zwecke dienen, **Piëzometer** nennt.

Ist v die Geschwindigkeit des Wassers an der Stelle B, Fig. 537, wo ein Piëzometer einmündet, l die Länge, d die Weite des Röhrenstückes AB, h die Druckhöhe oder die Tiefe des Punktes B unter dem Wasserspiegel, ist ferner ζ_1 der Widerstandscoefficient für den Eintritt aus dem Reservoir in die Röhre, und ζ der Reibungscoefficient, so hat man für den, den Druck in B messenden Piëzometerstand

$$z = h - \left(1 + \zeta_1 + \zeta \frac{l}{d}\right)\frac{v^2}{2g}.$$

Ist die Länge eines Röhrenstückes $BC = l_1$ und das Gefälle desselben $= h_1$, so hat man den Piëzometerstand in C:

$$z_1 = h + h_1 - \left(1 + \zeta_1 + \zeta\frac{l}{d} + \zeta \frac{l_1}{d}\right)\frac{v^2}{2g},$$

und daher die Differenz der Piëzometerstände:

$z_1 - z = h_1 - \zeta \dfrac{l_1}{d} \cdot \dfrac{v^2}{2g}$, umgekehrt folgt daher die **Widerstandshöhe des Röhrenstückes** BC:

$\zeta \dfrac{l}{d} \cdot \dfrac{v^2}{2g} = h_1 + z - z_1 =$ **Gefälle des Röhrenstückes plus Differenz der Piëzometerstände.**

Man ersieht hieraus, daß die Piëzometer dazu dienen können, die Widerstände, welche das Wasser in den Röhrenleitungen zu überwinden hat, zu messen. Befindet sich in der Röhre ein besonderes Hinderniß, hat sich z. B. ein kleiner Körper in derselben festgesetzt, so wird dieses sogleich durch das Sinken des Piëzometerstandes angezeigt und die Größe des erzeugten Widerstandes ausgedrückt werden. Die Widerstände, welche durch Regulirungsapparate, wie Hähne, Schieber u. s. w., von welchen im folgenden Kapitel die Rede ist, erzeugt werden, lassen sich ebenfalls durch Piëzometerstände ausdrücken. So steht z. B. das Piëzometer in D tiefer, als das in C, nicht allein wegen der Reibung des Wassers in dem Röhrenstücke CD, sondern auch wegen der Verengung, welche der Schieber S in dieser Röhre hervorbringt. Ist bei völlig geöffnetem Schieber die Differenz NO der Piëzometerstände $= h_1$, und bei eingestelltem Schieber aber $= h_2$, so giebt die neue Differenz oder Senkung $h_2 - h_1$ die Widerstandshöhe, welche dem Durchgange des Wassers durch den Schieber entspricht. Endlich läßt sich auch aus dem Piëzometerstande die Ausflußgeschwindigkeit berechnen. Ist der Piëzometerstand $PQ = z$, die Länge des letzten Röhrenstückes $DE = l$ und die Weite desselben $= d$, so hat man:

$z = \zeta \dfrac{l}{d} \cdot \dfrac{v^2}{2g}$, und daher $v = \sqrt{\dfrac{2gz}{\zeta \dfrac{l}{d}}} = \sqrt{\dfrac{d}{l} \cdot \dfrac{2gz}{\zeta}}.$

Beispiel. Ist der Piëzometerstand $PQ = z$, Fig. 537, $^3/_4$ Fuß, und die Länge der Röhre DE, vom Piëzometer bis zur Ausmündung gemessen, = 150 Fuß, die Röhrenweite aber $3^1/_2$ Zoll, so folgt die Ausflußgeschwindigkeit Piëzometer.

$$v = 7{,}906 \sqrt{\frac{3{,}5}{150 \,.\, 12} \,.\, \frac{0{,}75}{0{,}025}} = 7{,}906 \,.\, 0{,}2415 = 1{,}91 \text{ Fuß, und die}$$

Ausflußmenge $Q = \frac{\pi}{4} \,.\, \left(\frac{3{,}5}{12}\right)^2 \,.\, 1{,}91 = 0{,}127$ Cubikfuß.

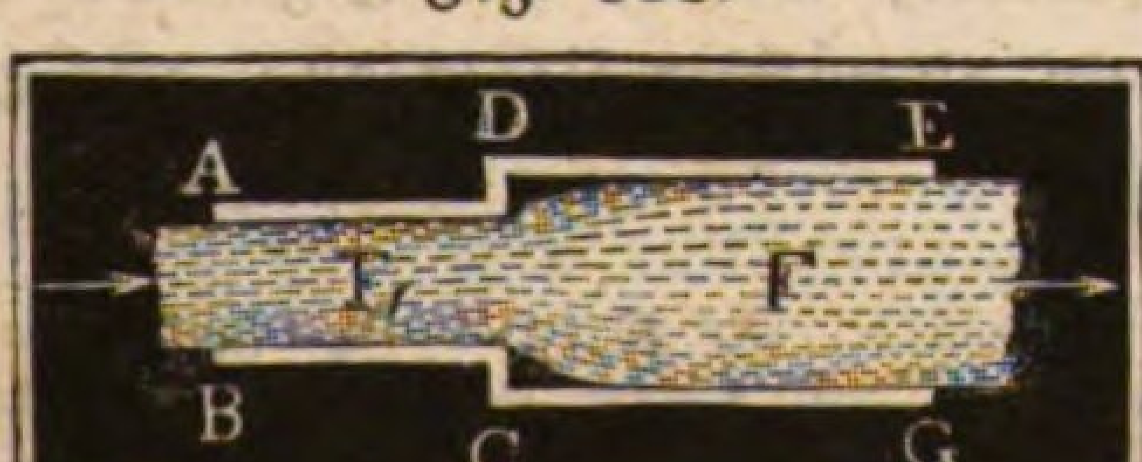
Anmerkung. Die Bewegung des Wassers in einer Röhrenleitung kann sehr leicht durch Luft gestört werden, welche sich entweder aus dem Wasser entwickelt, oder von außen eindringt. Damit keines von beiden eintrete, muß bei der Anlage der Röhrenleitung dafür gesorgt werden, daß der Druck an jeder Stelle derselben positiv bleibe, oder vielmehr den Atmosphärendruck übertreffe, also in jedem der Piëzometer eine gewisse Wassersäule stehe. Hiernach ist also stets nöthig, daß $h > \left(1 + \zeta_1 + \zeta \frac{l}{d}\right)\frac{v^2}{2g}$ sei; daß z. B. der Wasserstand in Zuflußreservoir mindestens die Geschwindigkeitshöhe des Wassers in der Röhre übertreffe. Außerdem ist zu befürchten, daß die Röhre in einem Wirbel Luft nachsauge.

Viertes Kapitel.

Von den Hindernissen des Wassers beim Durchgange durch Verengungen.

§. 372. Veränderungen in dem Querschnitte einer Röhre oder eines Plötzliche Erweiterung. anderen Ausflußreservoirs geben auch Veränderungen in der Geschwindigkeit des Wassers. Die Geschwindigkeit ist dem Querschnitte des Wasserstromes umgekehrt proportional; je weiter das Gefäß ist, je kleiner ist die Geschwindigkeit, und je enger das Gefäß, je größer die Geschwindigkeit des durchfließenden Wassers. Aendert sich der Querschnitt eines Gefäßes plötzlich, wie z. B. bei der Röhre ACE, Fig. 538, so tritt auch eine plötzliche Geschwindigkeitsveränderung ein, und hiermit ist wieder ein Verlust an lebendiger Kraft oder der entsprechenden Abnahme an Druck verbunden. Dieser Verlust läßt sich genau so berechnen wie der Arbeitsverlust beim Stoße unelastischer Körper (s. §. 275). Jedes Wasserelement, welches aus der engeren Röhre BD in die weitere Röhre DG tritt, stößt gegen die langsamer gehende Wassermasse in dieser Röhre und geht nach dem Stoße mit dieser vereinigt fort. Genau so ist es aber auch bei dem Zusammentreffen fester und unelastischer Körper, auch diese Körper gehen nach dem Stoße mit einer gemeinschaftli-

Fig. 538.



Plötzliche Erweiterung.

chen Geschwindigkeit fort. Wenn wir nun gefunden haben, daß der Arbeitsverlust beim Stoße dieser Körper $L = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} \cdot \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}$ ist, so können wir hier, da das stoßende Wasserelement G_1 unendlich klein ist gegen die gestoßene Wassermasse G_2, setzen: $L = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} G_1$, und folglich den entsprechenden Verlust an Druckhöhe: $h = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}$.

Es entsteht also durch die plötzliche Geschwindigkeitsveränderung ein Druckhöhenverlust, welcher durch die dieser Veränderung entsprechende Geschwindigkeitshöhe gemessen wird.

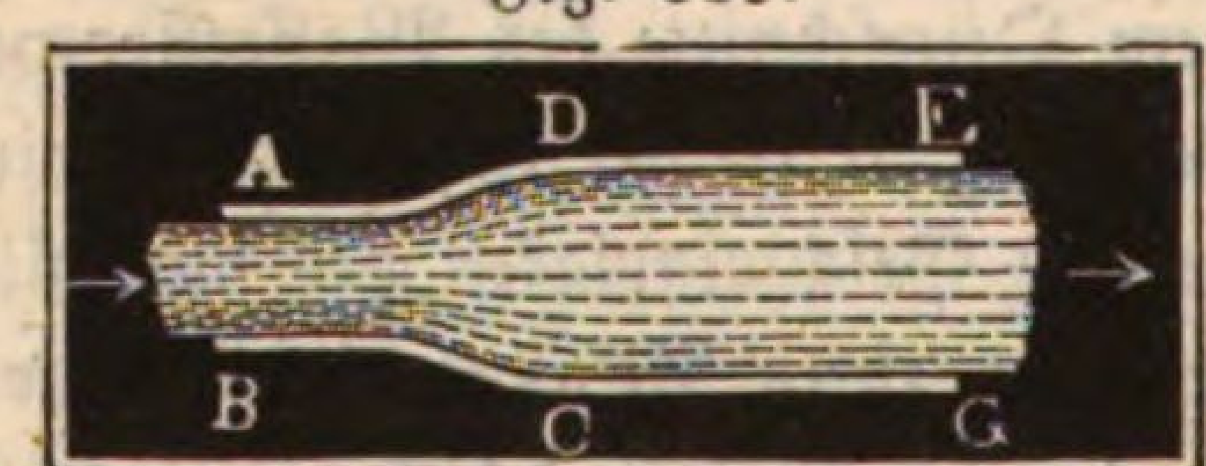
Ist nun der Querschnitt der einen Röhre AC, $= F_1$, und der Querschnitt der andern Röhre CE, $= F$, die Geschwindigkeit des Wassers in der ersten Röhre $= v_1$ und die in der andern $= v$, so hat man $v_1 = \frac{Fv}{F_1}$, daher den Druckhöhenverlust beim Uebergange aus einer Röhre in die andere

$$h_1 = \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2 \cdot \frac{v^2}{2g},$$

und den entsprechenden, schon von Borda gefundenen Widerstandscoefficienten $\zeta = \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2$.

Die hierüber angestellten Versuche des Verfassers stimmen mit der Theorie gut überein. Damit die Röhre DG vom Wasser ausgefüllt werde, ist es nöthig, daß sie nicht sehr kurz und nicht sehr viel weiter sei, als die Röhre AC. Dieser Verlust verschwindet, wenn, wie Fig. 539 repräsentirt, durch Abrundung der Kanten ein allmäliger Uebergang aus der einen Röhre in die andere herbeigeführt wird.

Fig. 539.



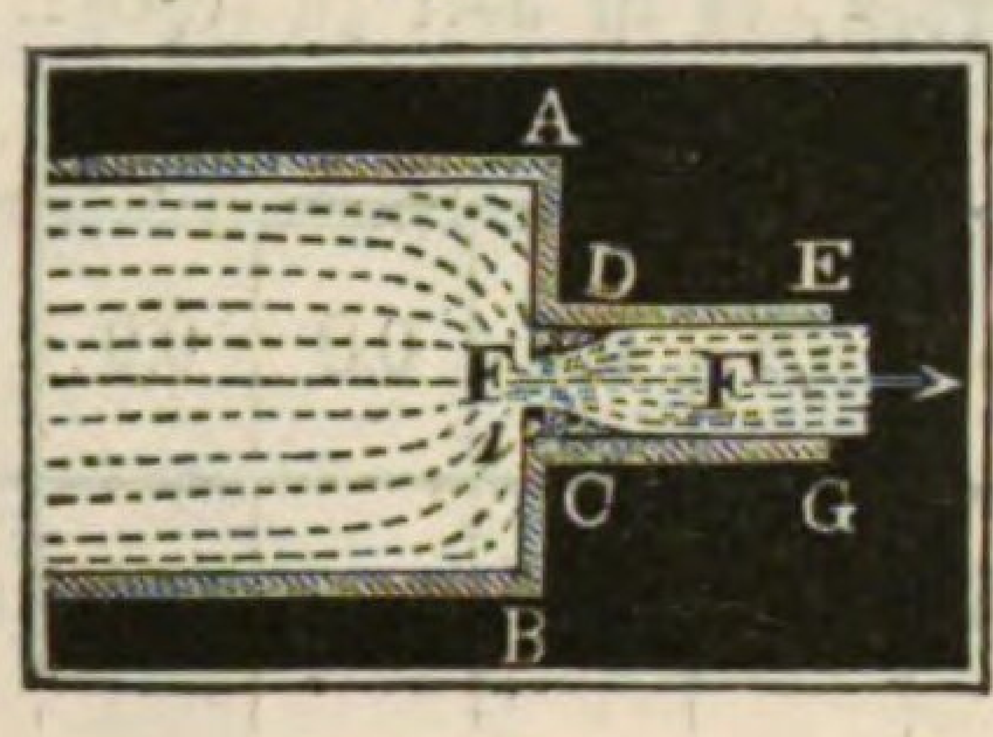
Anmerkung. Die gefundene Druckhöhe $h_1 = \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g}$ kann natürlich nicht spurlos verloren gehen, man muß vielmehr annehmen, daß die ihr entsprechende mechanische Arbeit auf die Zertheilung und die wirbelnde Bewegung der vorher ein Continuum bildenden Wassertheile verwendet wird.

Beispiel. Wenn der Durchmesser der einen Röhre in der Zusammensetzung von Fig. 538, noch einmal so groß ist, als der der andern Röhre, so ist $\frac{F}{F_1} = (2/1)^2 = 4$, daher der Widerstandscoefficient $\zeta = (4-1)^2 = 9$ und die entsprechende Widerstandshöhe für den Uebergang aus der engeren Röhre in die

weitere $= 9 \cdot \frac{v^2}{2g}$. Ist die Geschwindigkeit des Wassers in der letzteren Röhre $= 10$ Fuß, so folgt die Widerstandshöhe $= 9 \cdot 0{,}016 \cdot 10^2 = 14{,}4$ Fuß. Verengung.

§. 373. Eine plötzliche Geschwindigkeitsveränderung tritt auch dann ein, wenn das Wasser aus einem Gefäße AB, Fig. 540, in eine engere Röhre DG tritt, zumal wenn an der Eintrittsstelle CD ein Diaphragma sitzt, dessen Oeffnung noch kleiner ist, als der Querschnitt des Rohres DG. Ist der Inhalt der Verengung $= F_1$, und α der Contractionscoefficient, so hat man den Querschnitt F_2 des contrahirten Wasserstrahles $= \alpha F_1$, und ist dagegen F der Querschnitt des Rohres und v die Ausflußgeschwindigkeit, so findet man die Geschwindigkeit im contrahirten Querschnitte $F_2 : v_2 = \frac{F}{\alpha F_1} v$, daher den Druckhöhenverlust beim Uebergange aus F_2 in F oder aus v_2 in v:

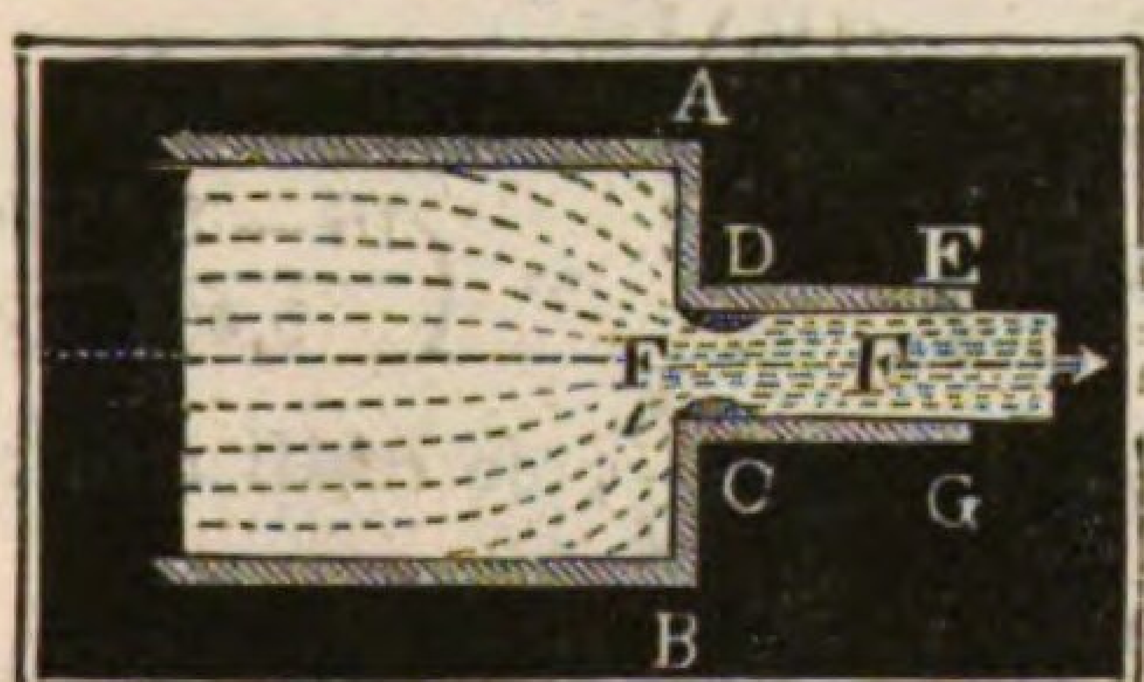
Fig. 540.



$$h = \frac{(v_2 - v)^2}{2g} = \left(\frac{F}{\alpha F_1} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g},$$ und den entsprechenden Widerstandscoefficienten: $$\zeta = \left(\frac{F}{\alpha F_1} - 1\right)^2.$$

Ohne Diaphragma erhält man eine bloße Ansatzröhre, Fig. 541, daher ist hier $F = F_1$ und $\zeta = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2$.

Fig. 541.



Nimmt man $\alpha = 0{,}64$, so erhält man $\zeta = \left(\frac{1 - 0{,}64}{0{,}64}\right)^2 = (9/16)^2 = 0{,}316$. Nun ist aber der Widerstandscoefficient für den Durchgang durch eine Mündung in der dünnen Wand ohngefähr $0{,}07$, daher hier, wo das Wasser $\frac{1}{\alpha}$mal so schnell ausfließt, als im contrahirten Querschnitte, die entsprechende Widerstandshöhe $= 0{,}07 \cdot \left(\frac{v}{\alpha}\right)^2 \cdot \frac{1}{2g} = 0{,}07 \cdot \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{v^2}{2g}$ $\frac{0{,}07}{0{,}41} \cdot \frac{v^2}{2g} = 0{,}171 \cdot \frac{v^2}{2g}$. Durch Vereinigung beider Widerstände erhält man die ganze Widerstandshöhe für den Ausfluß durch eine kurze Ansatzröhre $= 0{,}316 \frac{v^2}{2g} + 0{,}171 \frac{v^2}{2g} = 0{,}49 \cdot \frac{v^2}{2g}$, während wir oben $0{,}50 \frac{v^2}{2g}$ gefunden haben.

Verengung.

Versuche über den Ausfluß des Wassers durch eine Ansatzröhre mit verengtem Eintritte, wie Fig. 540 vorstellt, haben den Verfasser auf Folgendes geführt. Der Widerstandscoefficient für den Durchgang durch ein Diaphragma und für den Anschluß an die weitere Röhre kann durch die Formel $\zeta = \left(\frac{F}{\alpha F_1} - 1\right)^2$ ausgedrückt werden, es ist aber zu setzen:

für $\frac{F_1}{F}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
α	0,616	0,614	0,612	0,610	0,607	0,605	0,603	0,601	0,598	0,596

und folgt

ζ	231,7	50,99	19,78	9,612	5,256	3,077	1,876	1,169	0,734	0,480

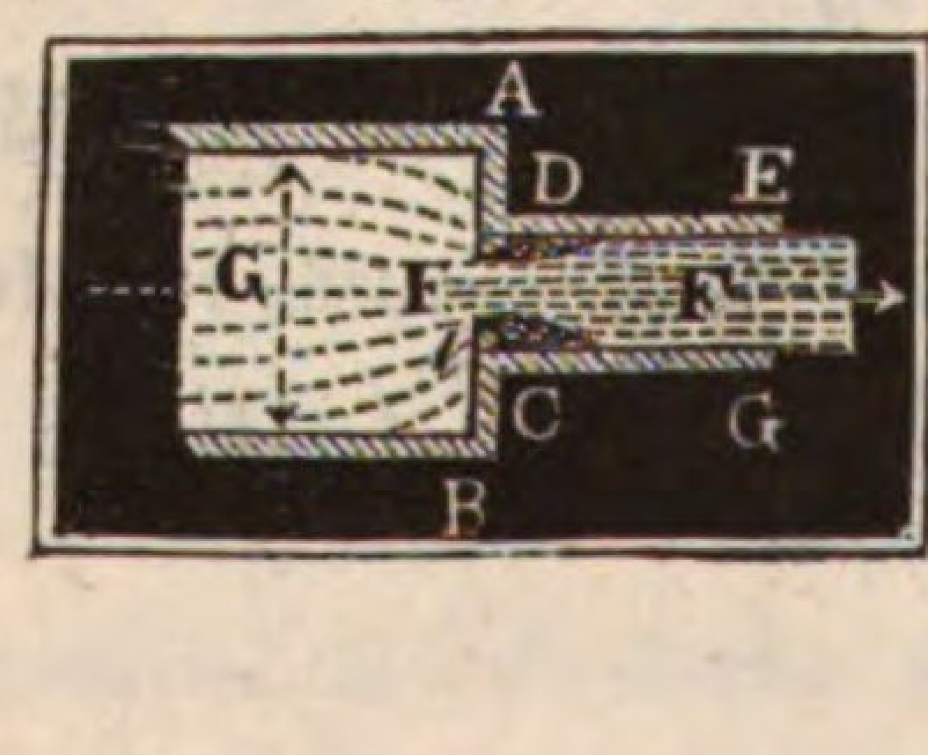
Hiernach ist z. B. in dem Falle, wenn der verengte Querschnitt halb so groß ist, als der Querschnitt der Röhre, der Widerstandscoefficient $\zeta = 5,256$, d. h. der Durchgang durch diese Verengung nimmt eine Druckhöhe in Anspruch, welche $5\frac{1}{4}$mal so groß ist, als die Geschwindigkeitshöhe.

Beispiel. Welche Ausflußmenge giebt der in Fig. 540 abgebildete Apparat, wenn die Druckhöhe $1\frac{1}{2}$ Fuß, die Weite der kreisförmigen Verengung $1\frac{1}{2}$ und die der Röhre 2 Zoll ist? Hier hat man $\frac{F_1}{F} = \left(\frac{1\frac{1}{2}}{2}\right)^2 = (\frac{3}{4})^2 = \frac{9}{16} = 0,56$, daher $\alpha = 0,606$, und $\zeta = \left(\frac{16}{9 \cdot 0,606} - 1\right)^2 = \left(\frac{16 - 5,454}{5,454}\right)^2 = \left(\frac{10,546}{5,454}\right)^2 = 3,74$. Setzt man nun $h = (1 + \zeta)\frac{v^2}{2g}$, so erhält man die Ausflußgeschwindigkeit $v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1+\zeta}} = \frac{7,906\sqrt{1,5}}{\sqrt{4,74}} = 4,45$ Fuß, und folglich das Ausflußquantum $Q = \frac{\pi d^2}{4} v = \frac{\pi}{4} \cdot 4 \cdot 12 \cdot 4,45 = 53,4 \cdot \pi = 168$ Cubikzoll.

Einfluß der unvollkommenen Contraction.

§. 374. Bei dem im letzten Paragraphen betrachteten Falle kommt das Wasser aus einem großen Gefäße, es konnte daher die Contraction als eine vollkommene angesehen werden, ist aber der Querschnitt des Gefäßes oder des an der Verengung ankommenden Wasserstromes nicht sehr groß in Ansehung auf den Querschnitt F_1, Fig. 542, der Verengung, so ist die Contraction eine unvollkommene

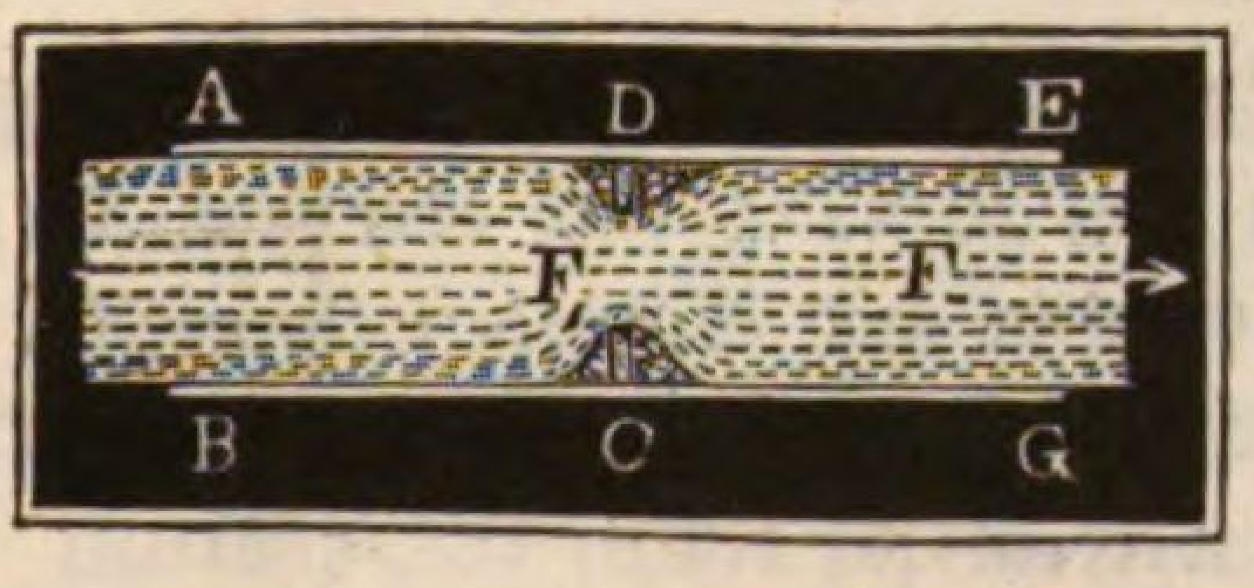
Fig. 542.



und daher auch der entsprechende Widerstandscoefficient kleiner, als in dem oben untersuchten Falle. Gelten die vorigen Bezeichnungen, so hat man auch hier die Widerstandshöhe oder die durch den Durchgang durch F_1 verzehrte Druckhöhe $h = \left(\frac{F}{\alpha F_1} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g}$, nur hat man für α veränderliche, und zwar um so größere Zahlen einzusetzen, je größer das Verhältniß $\frac{F_1}{G}$ zwischen dem Querschnitte der Verengung und dem der Zuleitungsröhre AB ist. Befindet sich das Diaphragma CD in einer gleichweiten Röhre AG, Fig. 543, so findet ganz dieselbe Bestimmung statt, nur hängt hier der Coefficient α von $\frac{F_1}{F}$ ab.

Einfluß der unvollkommenen Contraction.

Fig. 543.

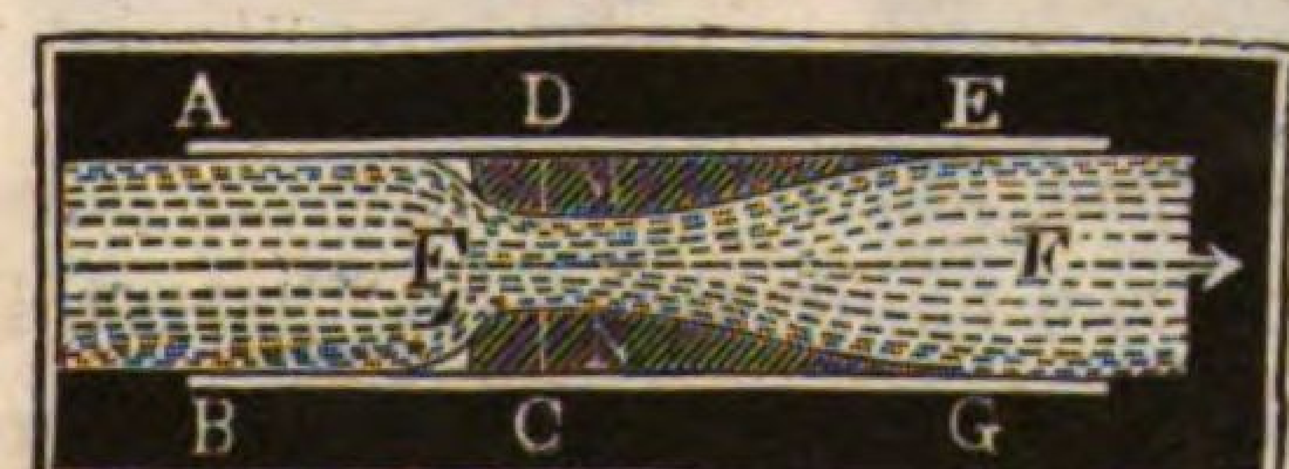


Nach den vom Verfasser hierüber angestellten Versuchen hat man in der Formel $\zeta = \left(\frac{F}{\alpha F_1} - 1\right)^2$ für die Widerstandscoefficienten zu setzen.

bei $\frac{F_1}{F}$ =	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
α	0,624	0,632	0,643	0,659	0,681	0,712	0,755	0,813	0,892	1,000
und es folgt										
ζ	225,9	47,77	17,50	7,801	3,753	1,796	0,797	0,290	0,060	0,000

Diese Verluste werden vermindert, wenn man durch Abrundung der Kanten die Contraction vermindert oder aufhebt, und sie lassen sich fast ganz beseitigen, wenn man, wie Fig. 544 repräsentirt, ein sich allmälig erweiterndes Rohr MN, einsetzt.

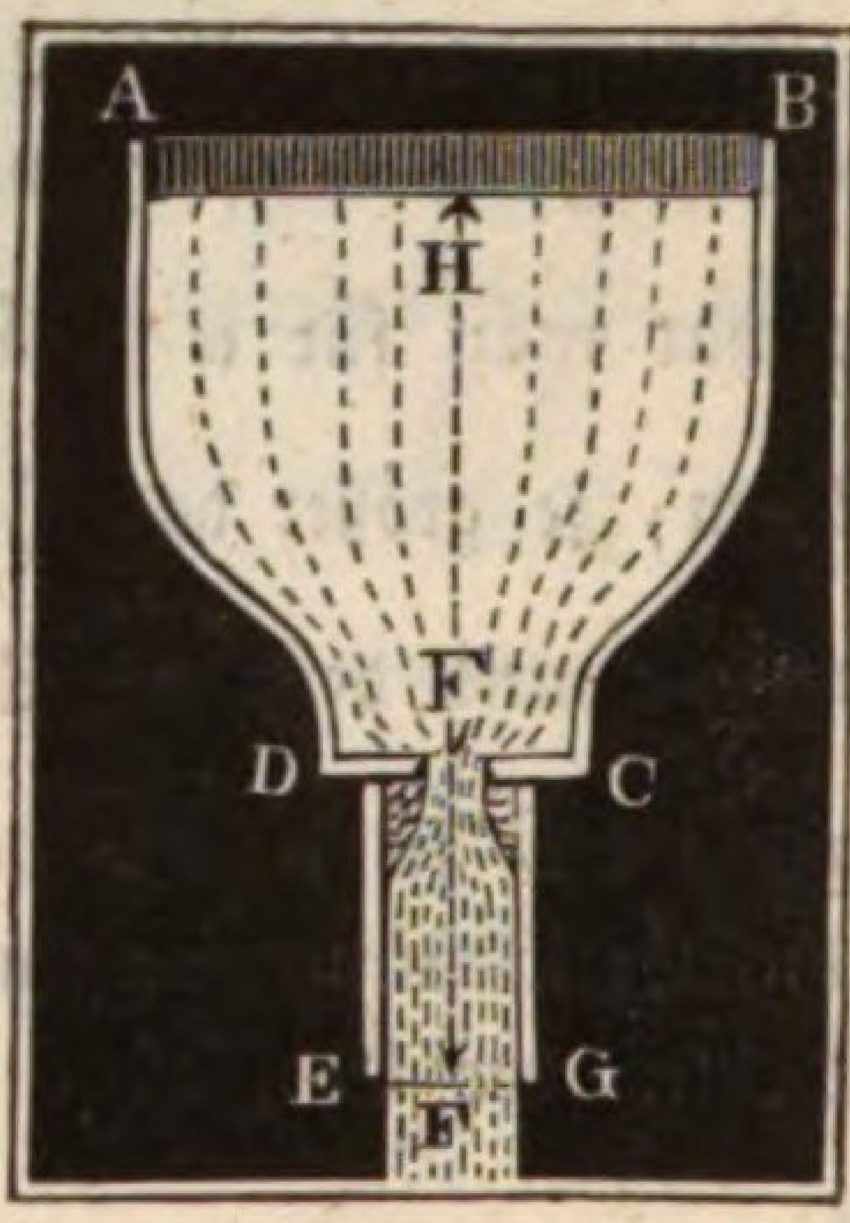
Fig. 544.



Beispiel. Welche Druckhöhe wird erfordert, damit der in Fig. 545 auf folgender Seite abgebildete Apparat in der Minute 8 Cubikfuß Wasser liefere? Ist die Weite des Diaphragma $F_1 = 1\frac{1}{2}$, die Weite der Ausflußröhre DG = 2 Zoll und die untere Weite der Zuflußröhre AC = 3 Zoll, so hat man $\frac{F_1}{G} = \left(\frac{1\frac{1}{2}}{3}\right)^2 = \frac{1}{4}$, daher $\alpha = 0{,}637$, ferner $\frac{F}{F_1} = \left(\frac{2}{1\frac{1}{2}}\right)^2 = (4/3)^2 = 16/9$,

Einfluß der unvollkommenen Contraction.

Fig. 545.



und den Widerstandscoefficienten

$$\zeta = \left(\frac{16}{9 \, . \, 0{,}637} - 1\right)^2 = \left(\frac{10{,}267}{5{,}733}\right)^2 = 3{,}207.$$

Die Ausflußgeschwindigkeit folgt nun

$$v = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \, . \, 8}{60 \, . \, \pi \, (1/_8)^2} = \frac{19{,}2}{\pi}$$
$$= 6{,}112 \text{ Fuß},$$

daher die in Frage stehende Druckhöhe

$$h = (1+\zeta)\frac{v^2}{2g} = 4{,}207 \, . \, 0{,}016 \, . \, 6{,}112^2$$
$$= 2{,}51 \text{ Fuß}.$$

Knieröhren.

§. 375. Besondere Hindernisse stellen sich der Bewegung des Wassers in Röhren entgegen, wenn dieselben gekrümmt sind oder gar Kniee bilden. Diese Widerstände lassen sich nicht mit Sicherheit theoretisch bestimmen, und mußten daher, wie so viele andere Ausflußverhältnisse auf dem Wege der Erfahrung untersucht werden.

Bildet eine Röhre ACB, Fig. 546, ein Knie, so trennt sich der Strahl in Folge der Centrifugalkraft von der innern Fläche des zweiten Röhrenstückes; es hört, wenn dieses Stück kurz ist, der volle Ausfuß auf, und es fällt deshalb auch die Ausflußmenge kleiner aus, als bei einer

Fig. 546.

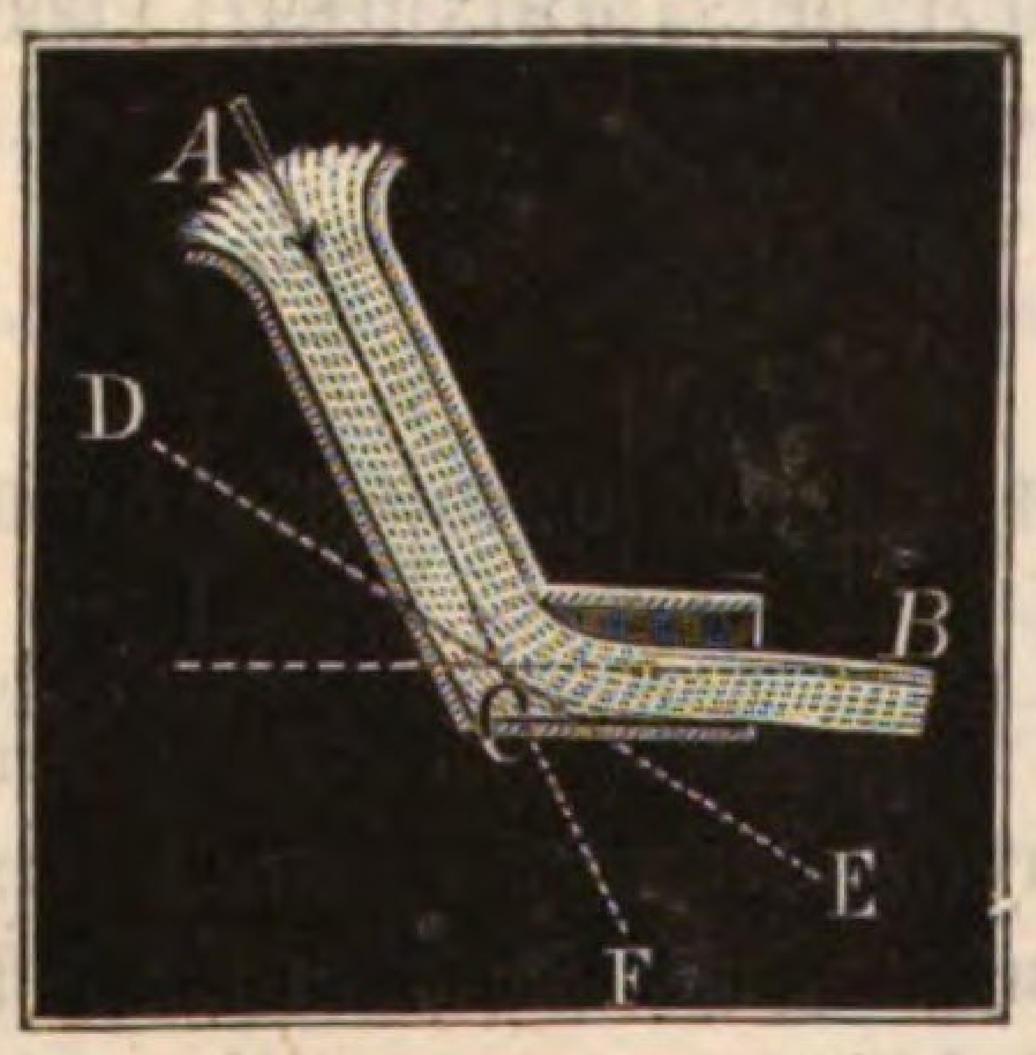
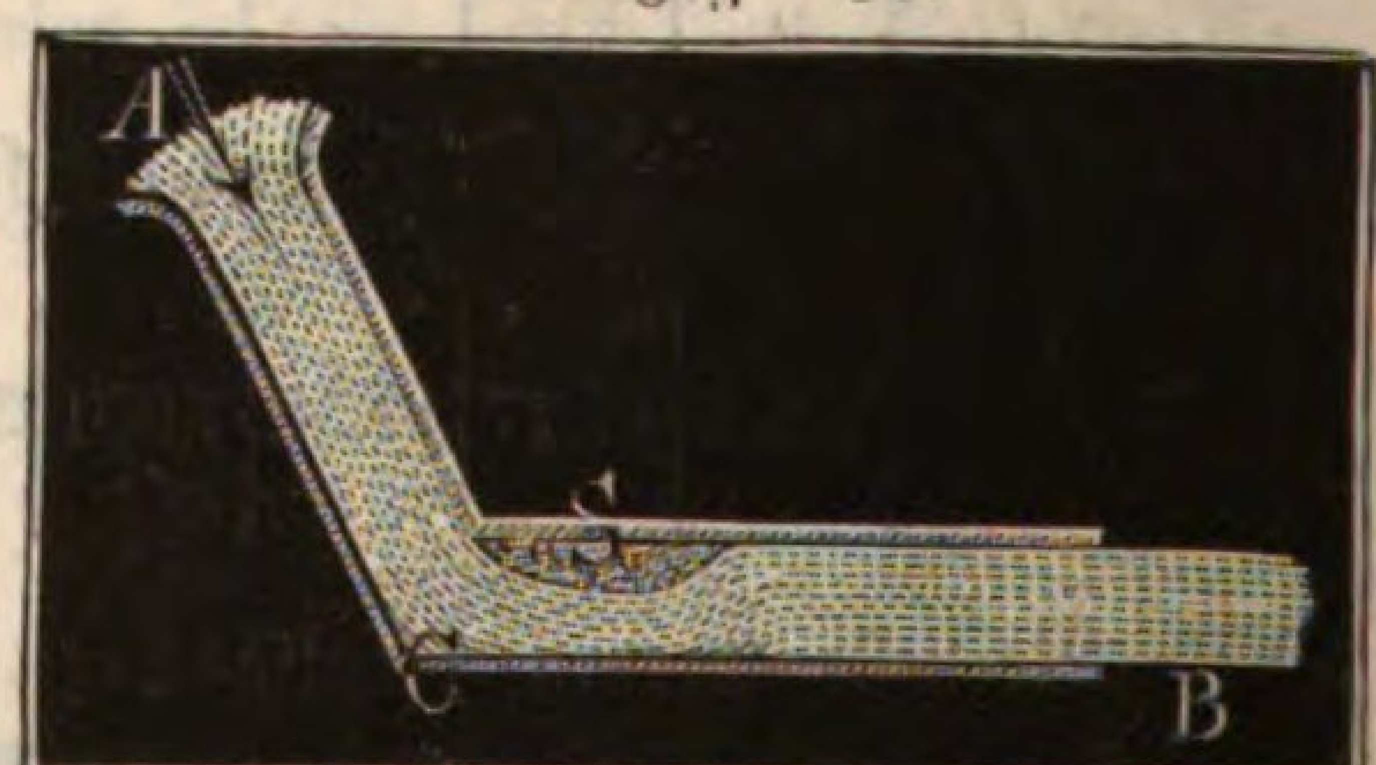


Fig. 57.



gleich langen geraden Röhre. Ist aber das äußere Stück CB der Knieröhre ACB, Fig. 547, länger, so bildet sich hinter dem Knie C ein Wirbel S, und es tritt bei wieder gefülltem Querschnitte eine verminderte Ausflußgeschwindigkeit v ein. Diese Verminderung der Ausflußgeschwindigkeit ist genau so zu beurtheilen, wie der Widerstand, welchen Verengungen in Röhren bewirken. Ist F der Querschnitt der Röhre und F_1 der Querschnitt des contrahirten Strahles bei S, so hat man den Contractionscoefficienten desselben: $\alpha = \frac{F_1}{F}$,

und daher den entsprechenden Widerstandscoefficienten: Knieröhren.

$$\zeta = \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2 = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2.$$

Der Contractionscoefficient α und folglich auch der entsprechende Widerstandscoefficient ζ, hängt von dem Bricol- oder halben Ablenkungswinkel $\delta = ACD = BCE = \frac{1}{2} BCF$, Fig. 546, ab, und es ist nach den Versuchen, welche der Verfasser in großer Anzahl hierüber angestellt hat:

$$\zeta = 0{,}9457 \, sin. \delta^2 + 2{,}047 \, sin. \delta^4$$

zu setzen.

Folgende kleine Tabelle enthält eine Reihe von nach dieser Formel berechneten Widerstandscoefficienten für verschiedene Bricolwinkel:

δ^0	10	20	30	40	45	50	55	60	65	70
ζ	0,046	0,139	0,364	0,740	0,984	1,260	1,556	1,861	2,158	2,431

Man ersieht hieraus, daß durch die Knieröhren der lebendigen Kraft des Wassers in Röhren bedeutende Verluste erwachsen. Ist z. B. das Knie ein rechtwinkeliges, also $\delta = 45^0$, so hat man hiernach den durch dasselbe herbeigeführten Druckhöhenverlust:

$$h = \zeta \cdot \frac{v^2}{2g} = 0{,}984 \cdot \frac{v^2}{2g},$$

also ziemlich gleich der Geschwindigkeitshöhe.

Stoßen an ein Knie ACB, Fig. 548, noch andere Kniee ohne längere Zwischenröhre, wie z. B. aus Fig. 549 und Fig. 550 zu ersehen ist, so

Fig. 548.



Fig. 549.

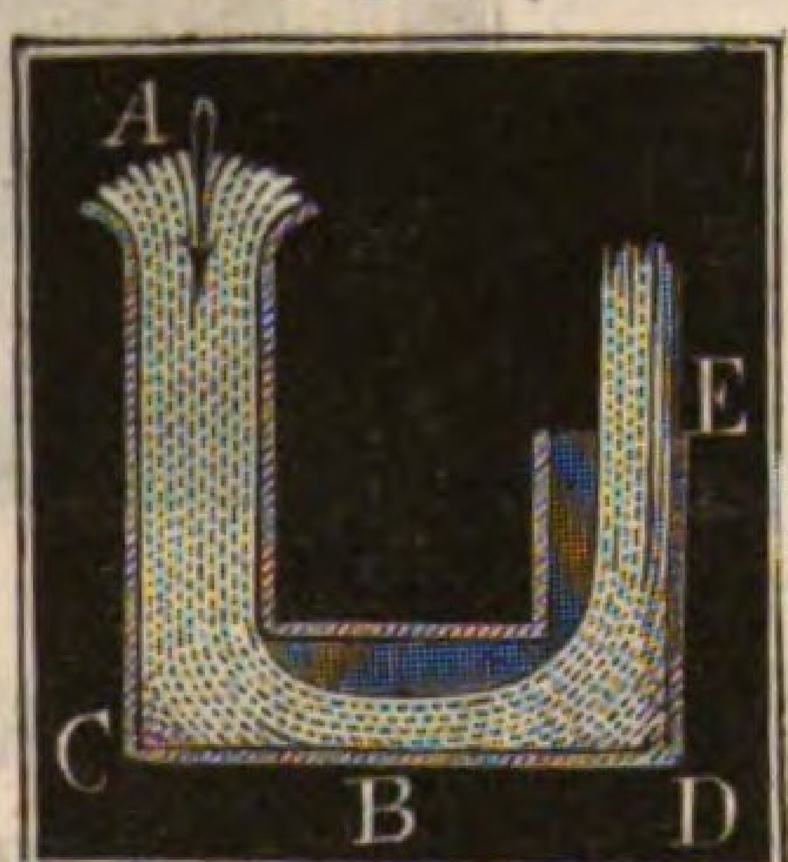
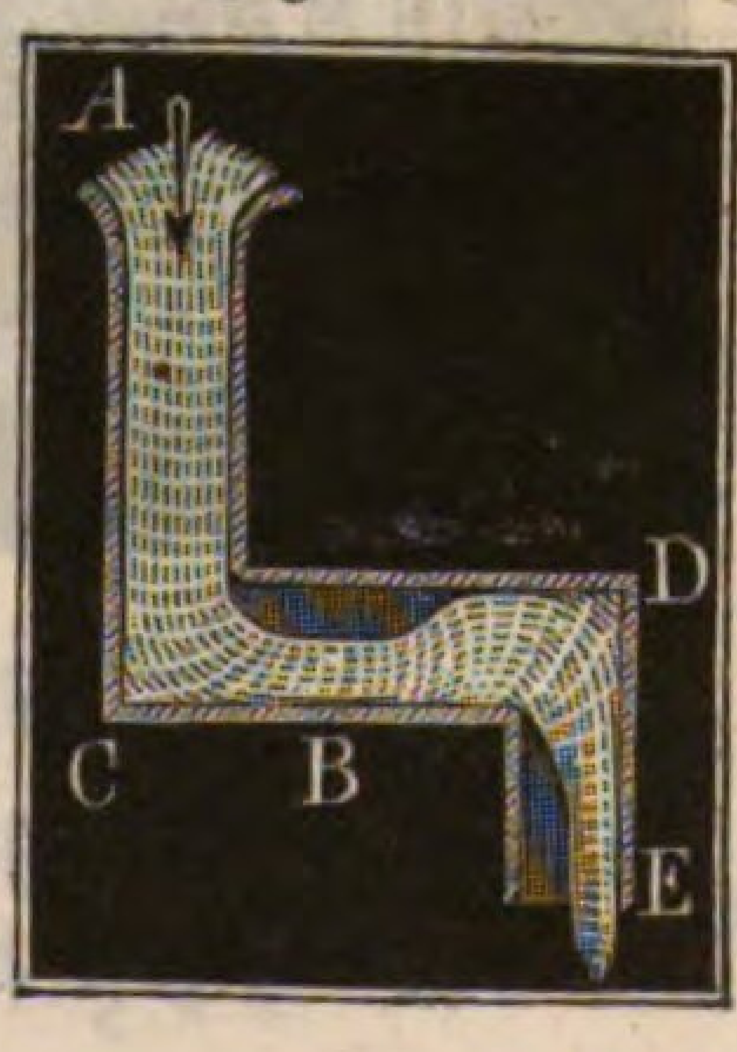


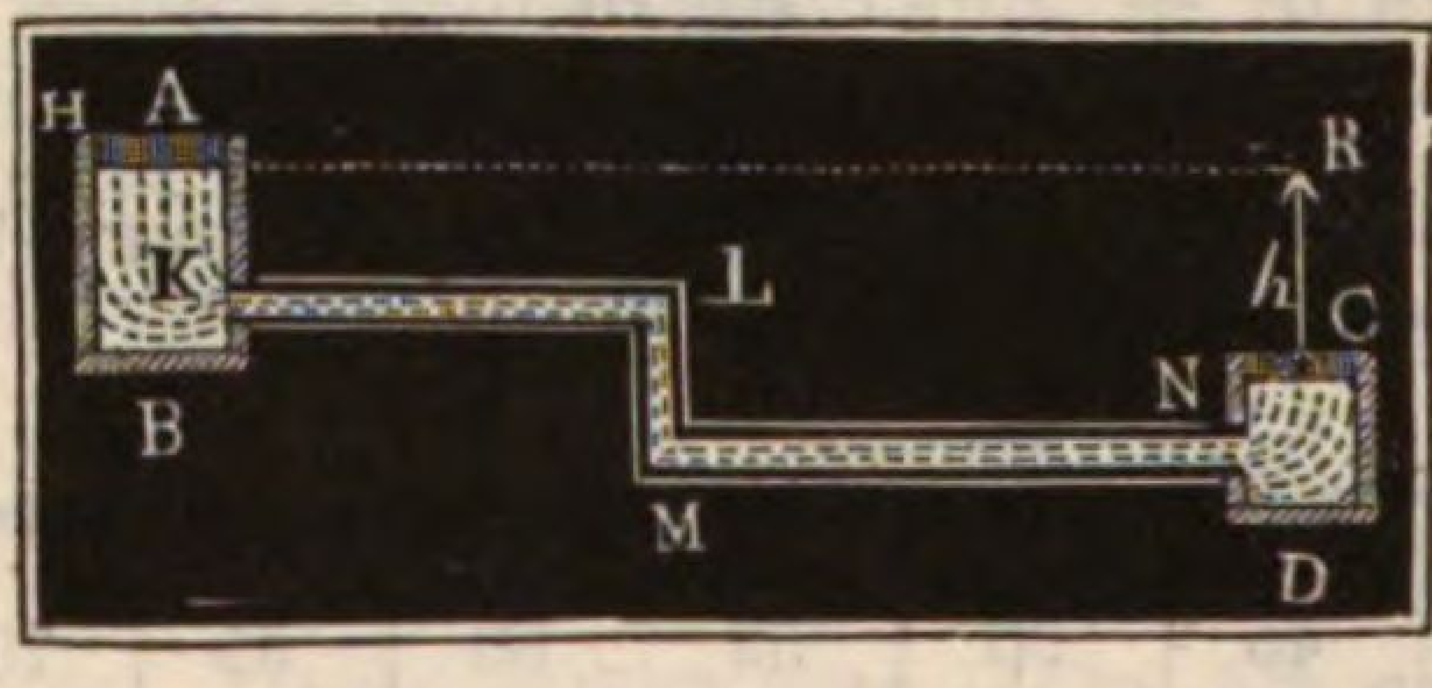
Fig. 550.



treten ganz besondere, jedoch leicht erklärliche Ausflußverhältnisse ein. Das zweite Knie BDE, Fig. 549, welches den Strahl nach derselben Seite hin ablenkt, wie das erste ACB, bringt keine weitere Contraction

Knieröhren. des Strahles hervor, es ist daher auch bei vollem Ausflusse hier ζ nicht größer als für ein einfaches Knie *ACB*. Lenkt aber das Knie *BDE*, Fig. 550, den Strahl auf die entgegengesetzte Seite, so ist die Contraction eine doppelte, und daher auch der Widerstandscoefficient doppelt so groß als bei einfachem Knie. Wird endlich *BDE* so an *ACB* gesetzt, daß *DE* rechtwinkelig auf *ACBD* zu stehen kommt, so stellt sich ζ ohngefähr $1^1/_2$ mal so groß aus als bei dem Knie *ABC* allein.

Fig. 551.



Beispiel. Wenn eine Röhrenleitung *BLN*, Fig. 551, von 150 Fuß Länge und 5 Zoll Weite, welche in der Minute 25 Cubikfuß Wasser liefern soll, zwei rechtwinkelige Kniee enthält, so hat man die nöthige Druckhöhe

$$h = (1,505 + 8,712 + 2 \cdot 0,984) \cdot \frac{v^2}{2g}$$
$$= 12,185 \cdot 0,1494 = 1,82 \text{ Fuß}.$$

(Vergl. Beispiel 1 zu §. 367.)

Kropfröhren. §. 376. **Gekrümmte Röhren** geben unter übrigens gleichen Verhältnissen viel kleinere Widerstände als unabgerundete Knieröhren. Auch sie veranlassen in Folge der Centrifugalkraft des Wassers eine partielle Contraction des Wasserstrahles *ABD*, Fig. 552, so daß, wenn sich an die krumme Röhre keine längere gerade Röhre anschließt, der Querschnitt F_1 des Strahles bei seinem Austritte kleiner ist als der Querschnitt F der Röhre.

Fig. 552.

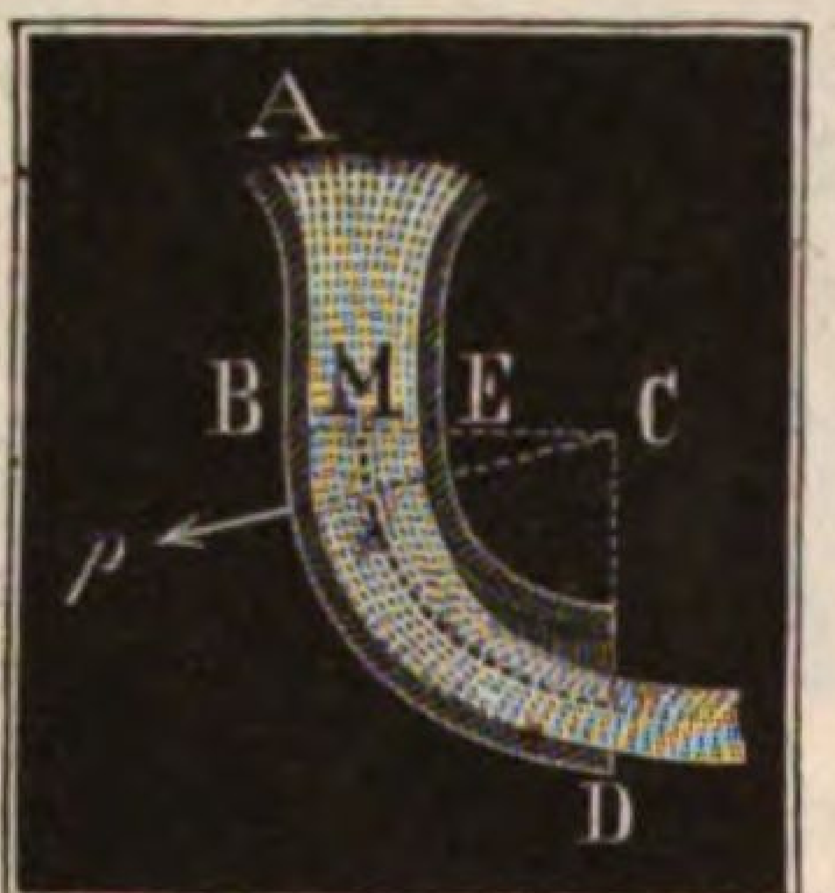
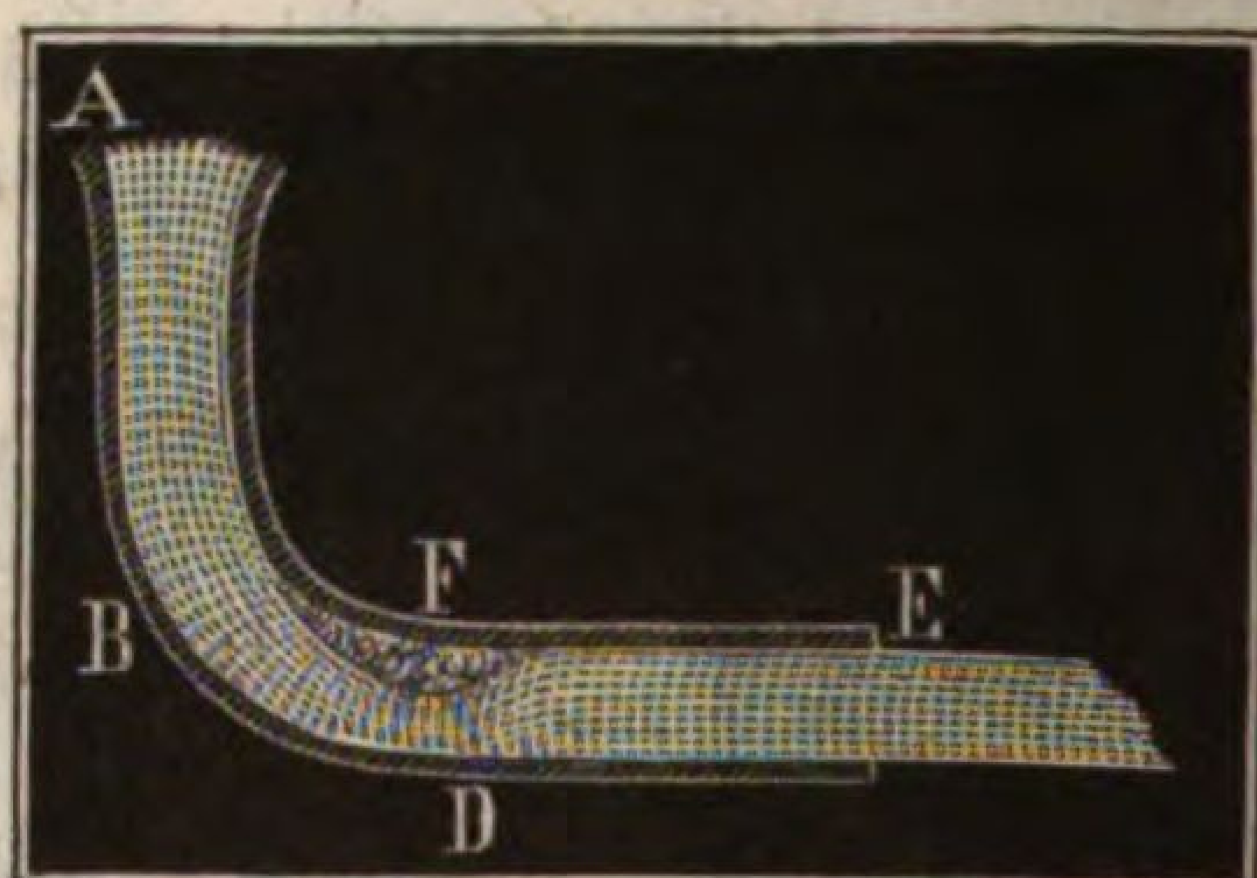


Fig. 553.



Endigt sich aber der Kropf *ABD*, Fig. 553, in einer längeren geraden Röhre *BE*, so bildet sich wieder ein Wirbel *S* und es findet auf Unkosten der lebendigen Kraft des Wassers wieder ein voller Ausfluß des Wassers statt. Ist der Contractionscoefficient $\frac{F_1}{F} = \alpha$, so haben wir auch den Coefficienten des Krümmungswiderstandes $\zeta = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2$.

Der Contractionscoefficient α hängt von dem Verhältnisse $\frac{a}{r}$ der hal- Kropfröhren.
ben Röhrenweite $BM = EM = a$, und dem Krümmungshalbmesser $CM = r$ der Röhrenaxe ab und läßt sich annähernd auf folgende Weise theoretisch bestimmen. Ist v die Geschwindigkeit des Wassers beim Eintritt in den Kropf und v_1 die des zusammengezogenen Wasserstrahles, so hat man $v_1 F_1 = v F$, daher $v_1 = \frac{F}{F_1} v$, und demnach die den Druck in BE messende Druckhöhe $h = \frac{v_1^2 - v^2}{2g} = \left[\left(\frac{F}{F_1}\right)^2 - 1\right] \frac{v^2}{2g}$. Diese Höhe mit 1 und γ multiplicirt, ergiebt sich der Druck des Wasserstrahles bei E auf die Flächeneinheit nach allen Richtungen hin:

$$p = h\gamma = \left[\left(\frac{F}{F_1}\right)^2 - 1\right] \frac{v^2}{2g} \gamma = \left[\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 - 1\right] \frac{v^2}{2g} \gamma.$$

Da nun die Centrifugalkraft des Wassers an der convexen Seite dem Drucke p entgegenwirkt, so ist es möglich, daß sie denselben hier ganz aufheben kann. In diesem Falle wird aber auch die äußere Luft eindringen und sich der Strahl ganz von der convexen Seite losziehen, wie aus den Figuren 554 und 555 zu ersehen ist. Die Centrifugalkraft eines Wasser-

Fig. 554.

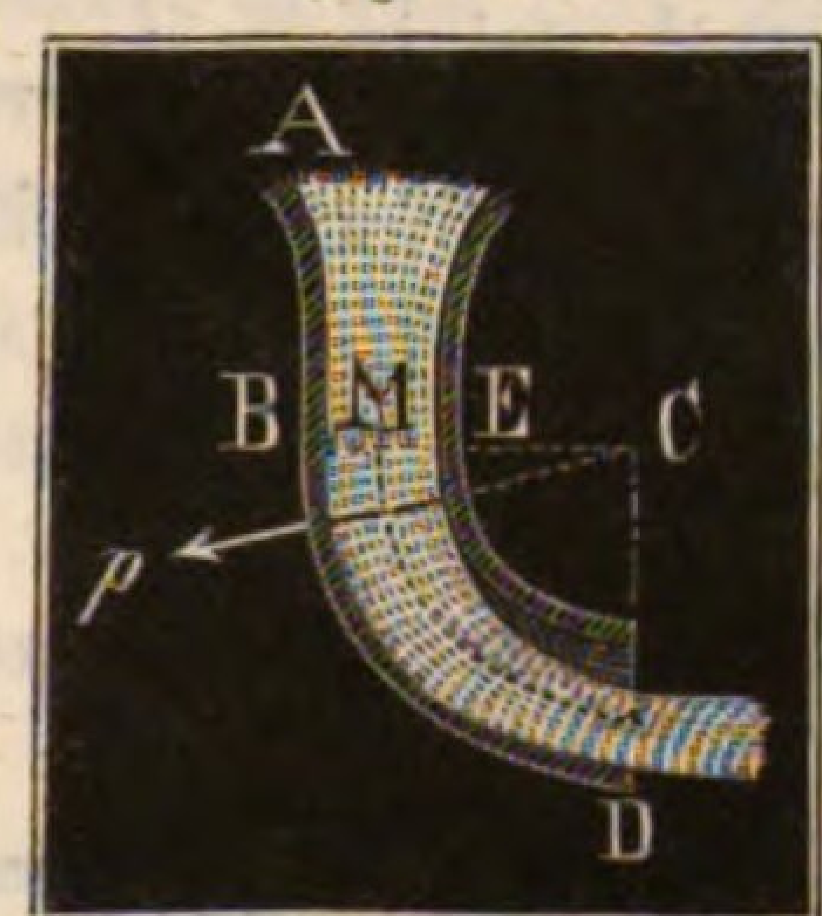
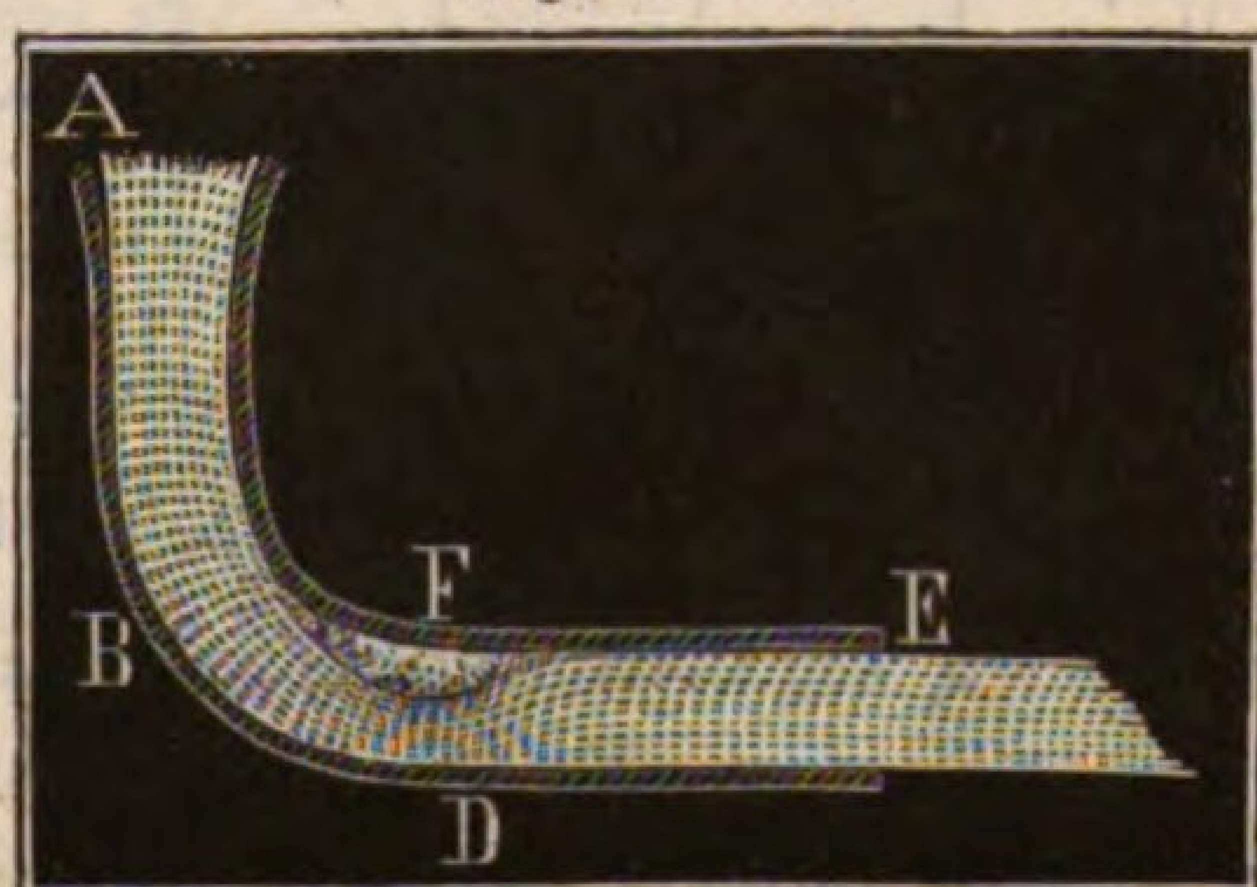


Fig. 555.



prismas von der Länge $BE = 2a$ und dem Querschnitte 1 ist bei dem Krümmungshalbmesser $CM = r$, $q = \frac{v^2}{gr} \cdot 2a\gamma$, setzt man daher $p = q$, so folgt die Bedingung des Losreißens: $\frac{1}{\alpha^2} - 1 = \frac{4a}{r}$, daher der Contractionscoefficient $\alpha = \sqrt{\frac{r}{r + 4a}}$, und der Widerstandscoefficient bei vollem Ausflusse:

$$\xi = \left(\sqrt{\frac{r + 4a}{r}} - 1\right)^2.$$

Kropfröhren. Da bei dieser Entwicklung nur eine mittlere Geschwindigkeit und ein mittlerer Krümmungshalbmesser zu Grunde gelegt wurde, so kann sie natürlich auch nur auf eine annähernde Bestimmung von α und ζ führen.

Aus den Versuchen des Verfassers und aus einigen Beobachtungsresultaten Du Buats hat aber der Verfasser für den Widerstandscoefficienten beim Durchgange des Wassers durch Kröpfe folgende empirische Formeln abgeleitet:

1) für Kröpfe mit kreisförmigem Querschnitte:

$$\zeta = 0{,}131 + 1{,}847 \left(\frac{a}{r}\right)^{7/2};$$

2) für Kropfröhren mit rectangulären Querschnitten:

$$\zeta = 0{,}124 + 3{,}104 \left(\frac{a}{r}\right)^{7/2}.$$

Nach diesen Formeln sind folgende Tabellen berechnet worden:

Tabelle I.

Coefficienten des Krümmungswiderstandes bei Röhren mit kreisförmigen Querschnitten.

$\frac{a}{r}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
ζ	0,131	0,138	0,158	0,206	0,294	0,440	0,661	0,977	1,408	1,978

Tabelle II.

Coefficienten des Krümmungswiderstandes bei Röhren mit rectangulären Querschnitten.

$\frac{a}{r}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
ζ	0,124	0,135	0,180	0,250	0,398	0,643	1,015	1,546	2,271	3,228

Hiernach sieht man, daß bei einer runden Röhre, deren Krümmungshalbmesser 2mal so groß ist, als der Röhrenhalbmesser, der Widerstandscoefficient = 0,294, und bei einer Röhre, deren Krümmungshalbmesser mindestens 10mal so groß ist, als der Halbmesser des Querschnittes, dieser Coefficient = 0,131 ausfällt.

Um die Contraction des Wassers in einer krummen Röhre *ABD*, Fig. 556 a. f. S., zu verhindern, ist der Querschnitt der Röhre allmälig

so zu verengern, daß der Querschnitt $DH = F_1$ der Ausmündung zum Querschnitte $BE = F$ der Einmündung im Verhältnisse $\alpha = \frac{1}{\sqrt{\zeta + 1}}$ zu stehen kommt. Kropfröhren.

Stößt an den Kropf BD, Fig. 554, noch ein anderer an, welcher den Strahl nach derselben Seite noch weiter ablenkt, bildet z. B. die Röhrenaxe einen Halbkreis wie BDE, Fig. 557, so ändert sich die Contraction

Fig. 556.

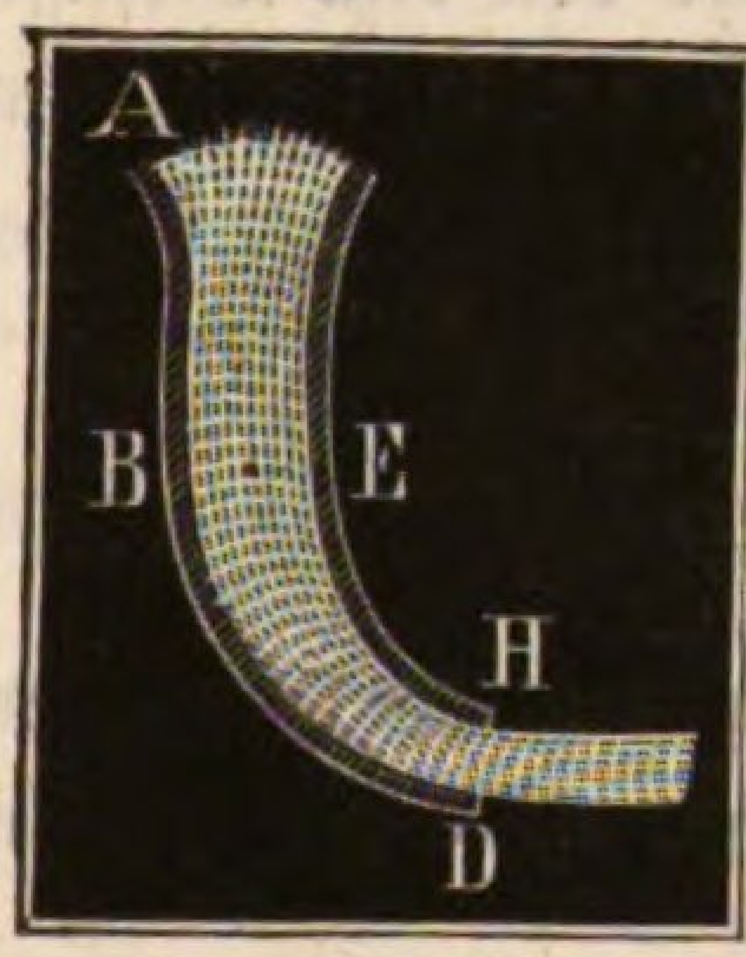


Fig. 557.

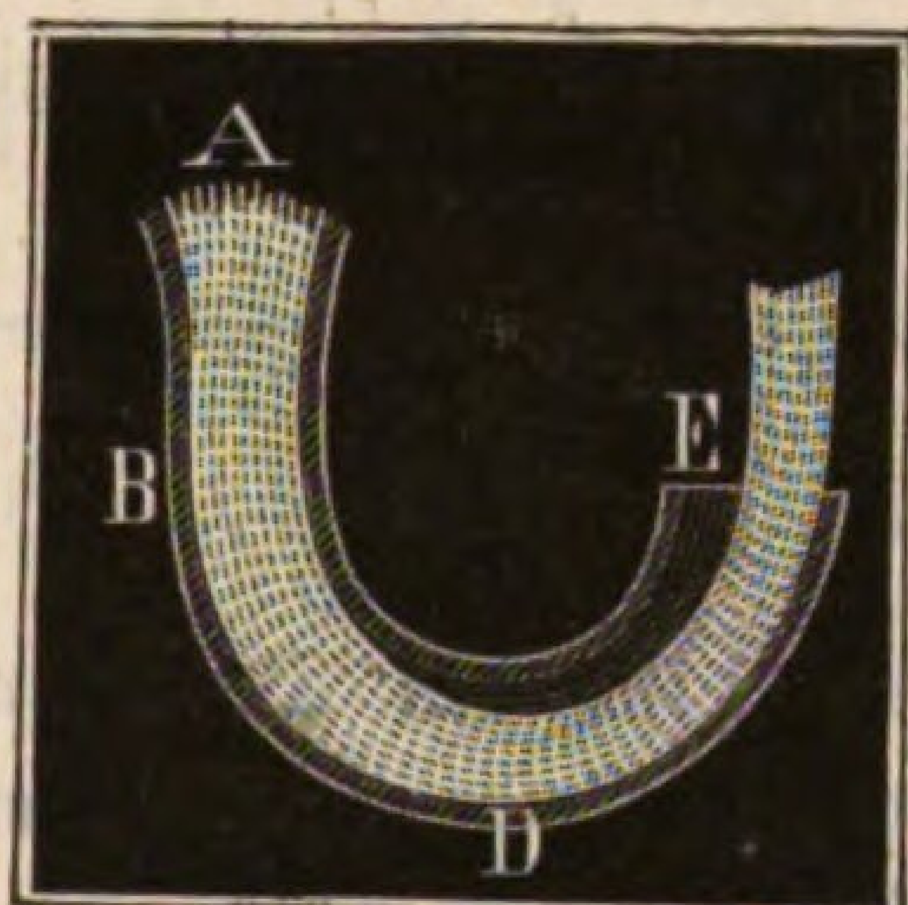
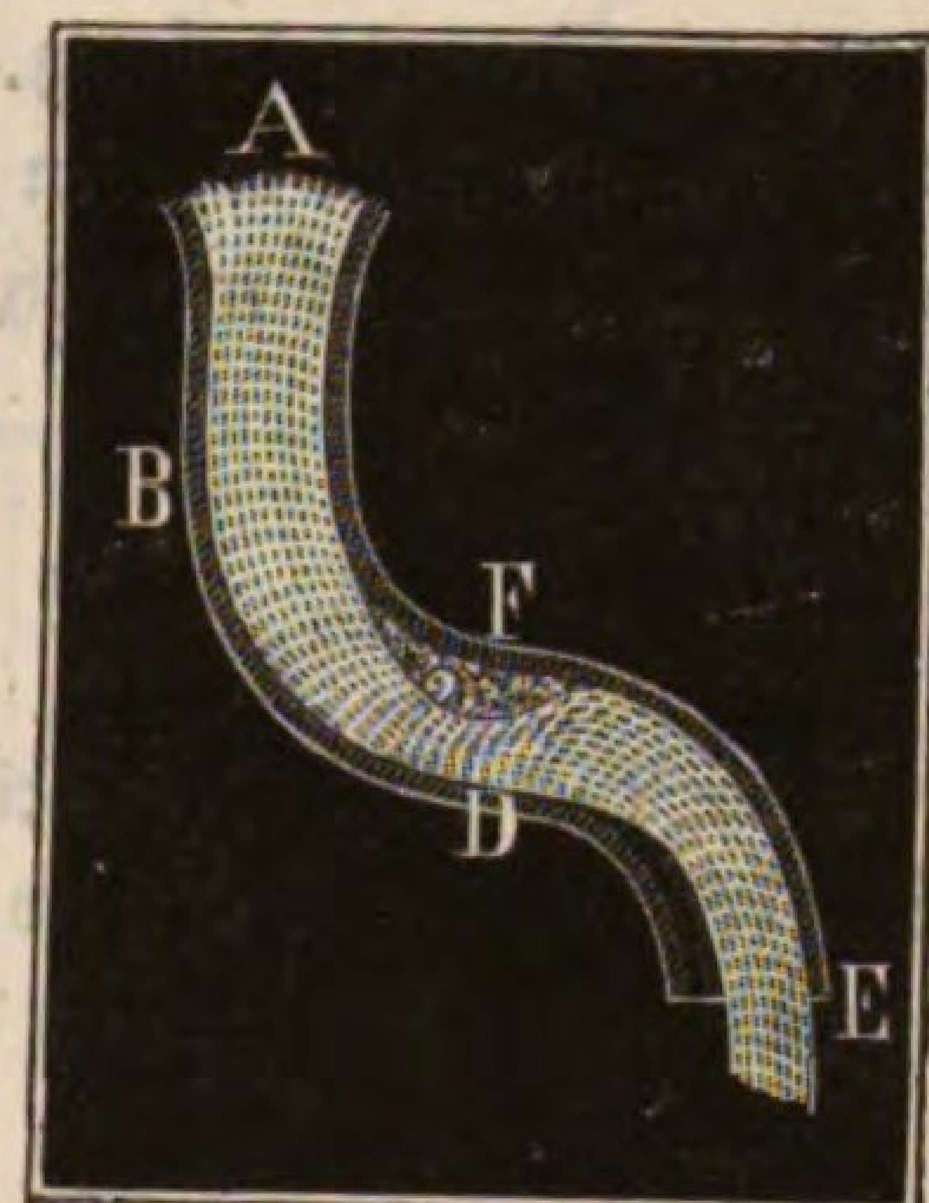


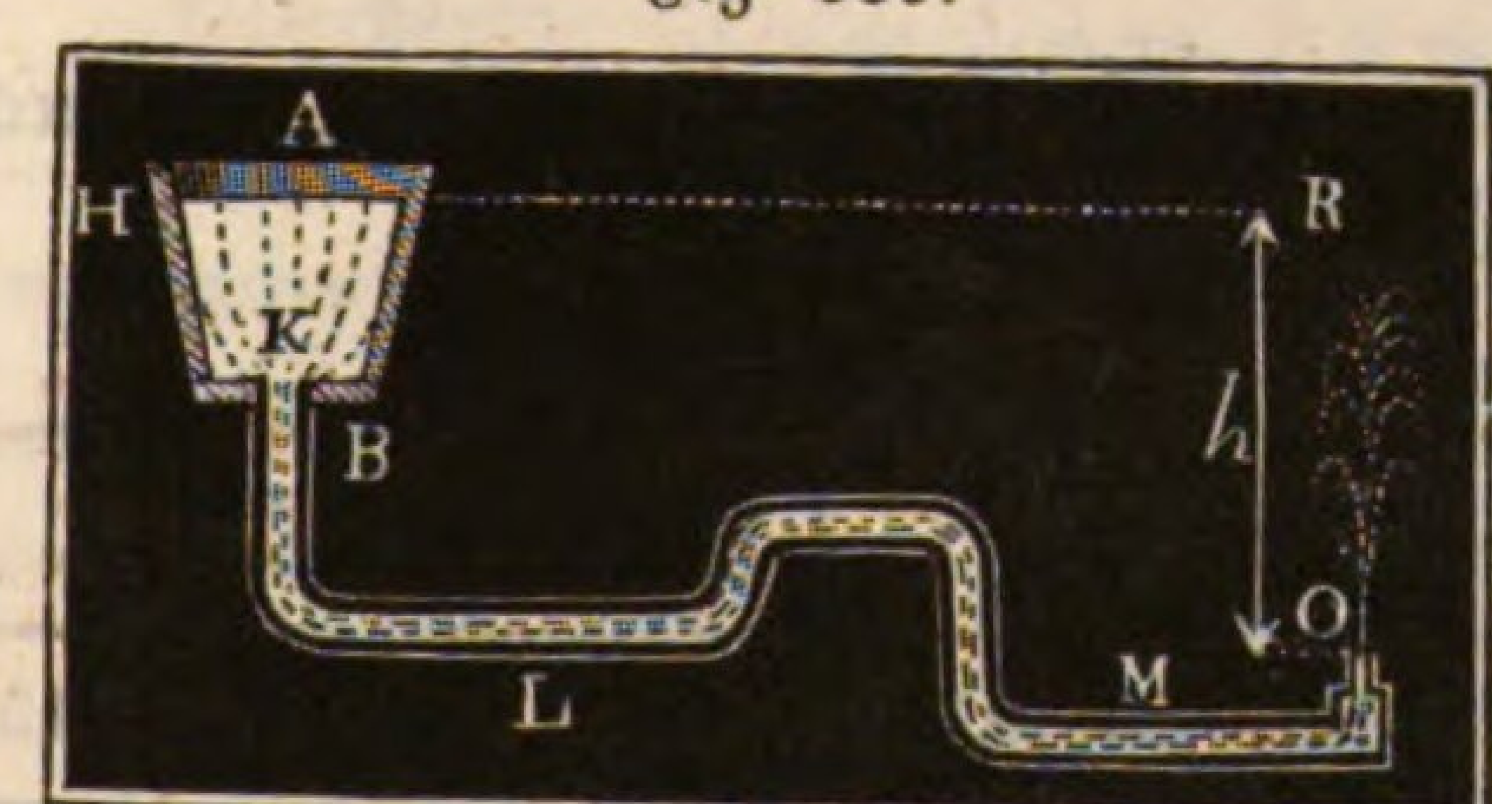
Fig. 558.



nicht, es behält also auch α und ζ nahe denselben Werth wie bei der Röhre in Fig. 554, welche nur einen Quadranten einnimmt; schließt sich dagegen ein Kropf DE, Fig. 558, an, welcher nach der entgegengesetzten Seite ablenkt, so bildet sich vor diesem ein Wirbel S und es tritt in demselben eine zweite Zusammenziehung des Strahles ein, wodurch der Widerstand (ζ) nahe verdoppelt wird.

Beispiel. Wenn die Röhrenleitung BLM, Fig. 559, im zweiten Beispiele des §. 367 noch fünf Kröpfe zu je 90° enthält, und der Kürmmungshalbmesser eines jeden 2 Zoll beträgt, so hat man $\frac{a}{r} = \frac{1}{2}$ und nach der ersten der obigen Tabellen der entsprechende Widerstandscoefficient $\zeta = 0{,}294$; folglich für alle 5 Kröpfe $5\zeta = 1{,}47$, und daher die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers statt

Fig. 559.



$$v = \frac{17{,}678}{\sqrt{7{,}582}} = 6{,}42 \text{ Fuß},$$

$$v = \frac{17{,}678}{\sqrt{7{,}582 + 1{,}47}} = \frac{17{,}678}{\sqrt{9{,}052}} = 5{,}876 \text{ Fuß},$$

und es ist nun die Ausflußmenge pro Secunde:

$$Q = 0{,}7854 \cdot \tfrac{1}{36} \cdot 5{,}876 = 0{,}1282 \text{ Cub.-Fuß} = 221 \text{ Cub.-Zoll}.$$

Schieber, Hähne, Klappen.

§. 377. Um den Ausfluß des Wassers aus Röhren und Gefäßen zu reguliren, werden **Schieber, Hähne, Klappen** und **Ventile** angewendet, wodurch sich Verengungen erzeugen lassen, welche dem Durchgange des Wassers Widerstände entgegensetzen, die sich auf ähnliche Weise wie die in den letzten Paragraphen abgehandelten Verluste bestimmen lassen. Da aber hier das Wasser noch besondere Richtungsänderungen, Zertheilungen u. s. w. erleidet, so lassen sich die Coefficienten α und ζ nicht unmittelbar bestimmen, sondern es war zu deren Ermittelung die Ausführung besonderer Versuche nöthig. Diese Versuche sind aber von dem Verfasser ebenfalls angestellt worden *), und die Hauptergebnisse derselben mögen in folgenden Tabellen mitgetheilt werden.

Tabelle I.

Die Widerstandscoefficienten für den Durchgang des Wassers durch **Schieber** oder **Schubventile** (franz. tiroirs; engl. slide-valves) im **parallelepipedischen Rohre**.

Querschnittsverhältniß $\frac{F_1}{F}$	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
Widerstandscoefficient ζ	0,00	0,09	0,39	0,95	2,08	4,02	8,12	17,8	44,5	193

Tabelle II.

Die Widerstandscoefficienten für den Durchgang des Wassers durch **Schieber im cylindrischen Rohre**.

Stellhöhe s	0	1/8	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8	7/8
Querschnittsverhältniß	1,000	0,948	0,856	0,740	0,609	0,466	0,315	0,159
Widerstandscoefficient ζ	0,00	0,07	0,26	0,81	2,06	5,52	17,0	97,8

*) Versuche über den Ausfluß des Wassers durch Schieber, Hähne, Klappen und Ventile, angestellt und berechnet von Jul. **Weisbach**, oder unter dem Titel »Untersuchungen im Gebiete der Mechanik und Hydraulik« u. s. w. Leipzig 1842.

Tabelle III.

Die Widerstandscoefficienten für den Durchgang des Wassers durch einen **Hahn** (franz. robinet; engl. cock) im **parallelepipedischen Rohre**. Schieber, Hähne, Klappen.

Stellwinkel.	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	$66^{3}/_{4}$
Querschnittsverhältniß.	0,926	0,849	0,769	0,687	0,604	0,520	0,436	0,352	0,269	0,188	0,110	0
Widerstandscoefficient.	0,05	0,31	0,88	1,84	3,45	6,15	11,2	20,7	41,0	95,3	275	∞

Tabelle IV.

Die Widerstandscoefficienten für den Durchgang des Wassers durch einen **Hahn** im **cylindrischen Rohre**.

Stellwinkel.	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°
Querschnittsverhältniß.	0,926	0,850	0,772	0,692	0,613	0,535	0,458
Widerstandscoefficient.	0,05	0,29	0,75	1,56	3,10	5,47	9,68

Stellwinkel.	40°	45°	50°	55°	60°	65°	$82^{1}/_{8}$°
Querschnittsverhältniß.	0,385	0,315	0,250	0,190	0,137	0,091	0
Widerstandscoefficient.	17,3	31,2	52,6	106	206	486	∞

Tabelle V.

Schieber, Hähne, Klappen.

Die Widerstandscoefficienten für den Durchgang des Wassers durch Drehklappen oder Drosselventile (franz. valves; engl. throttle-valves) im parallelepipedischen Rohre.

Stellwinkel.	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°
Querschnitts-verhältniß.	0,913	0,826	0,741	0,658	0,577	0,500	0,426
Widerstands-coefficient.	0,28	0,45	0,77	1,34	2,16	3,54	5,72

Stellwinkel.	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	90°
Querschnitts-verhältniß.	0,357	0,293	0,234	0,181	0,134	0,094	0,060	0
Widerstands-coefficient.	9,27	15,07	24,9	42,7	77,4	158	368	∞

Tabelle VI.

Die Widerstandscoefficienten für den Durchgang des Wassers durch Drehklappen im cylindrischen Rohre.

Stellwinkel.	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°
Querschnitts-verhältniß.	0,913	0,826	0,741	0,658	0,577	0,500	0,426
Widerstands-coefficient.	0,24	0,52	0,90	1,54	2,51	3,91	6,22

Stellwinkel.	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	90°
Querschnitts-verhältniß.	0,357	0,293	0,234	0,181	0,134	0,094	0,060	0
Widerstands-coefficient.	10,8	18,7	32,6	58,8	118	256	751	∞

§. 378. Mit Hülfe der in den vorstehenden Tabellen aufgeführten Widerstandscoefficienten kann man nicht nur den einer gewissen Schieber-, Hahn- oder Klappenstellung entsprechenden Druckhöhenverlust angeben, sondern auch bestimmen, welche Stellung diesen Apparaten zu geben ist, damit die Ausflußgeschwindigkeit oder der Widerstand ein gewisser werde. Allerdings wird aber eine solche Bestimmung um so sicherer, je mehr diese regulirenden Vorrichtungen den bei den Versuchen angewendeten gleichen. Uebrigens gelten die in den Tabellen angegebenen Zahlenwerthe nur für den Fall, wenn das Wasser nach dem Durchgange durch die mittels dieser Apparate hervorgebrachten Verengungen das Rohr wieder ausfüllt. Damit dieser volle Ausfluß bei kleinen Verengungen noch eintrete, muß das Rohr eine beträchtliche Länge haben. Die Querschnitte der parallelepipedischen Röhren waren 5 Centim. breit und $2^1/_2$ Cent. hoch, die Querschnitte von den cylindrischen Röhren hatten aber eine Weite von 4 Centimetern. Bei dem Schieber, Fig. 560, entsteht eine einfache Verengung, deren Querschnitt bei dem einen Rohre ein bloßes Rechteck F_1, F. 561, bei dem zweiten aber ein Mondchen F_1, Fig. 562, bildet. Bei den Hähnen, Fig. 563, stellen sich zwei Verengungen und auch zwei Richtungsabänderungen heraus, deshalb sind auch die Widerstände sehr groß. Die Querschnitte der größten Verengungen haben ganz eigenthümliche Gestalten. Bei den Drehklappen, Fig. 564, theilt sich der Strom in zwei Theile, wovon jeder durch eine Verengung hindurchgeht. Die Querschnitte dieser Verengungen sind bei der Drehklappe im parallelepipedischen Rohre rectangulär und im cylindrischen mondförmig. — Zur Anwendung der oben mitgetheilten Tabellen wird durch folgende Beispiele hinreichende Anleitung gegeben werden. Schieber, Hähne, Klappen.

Fig. 560.

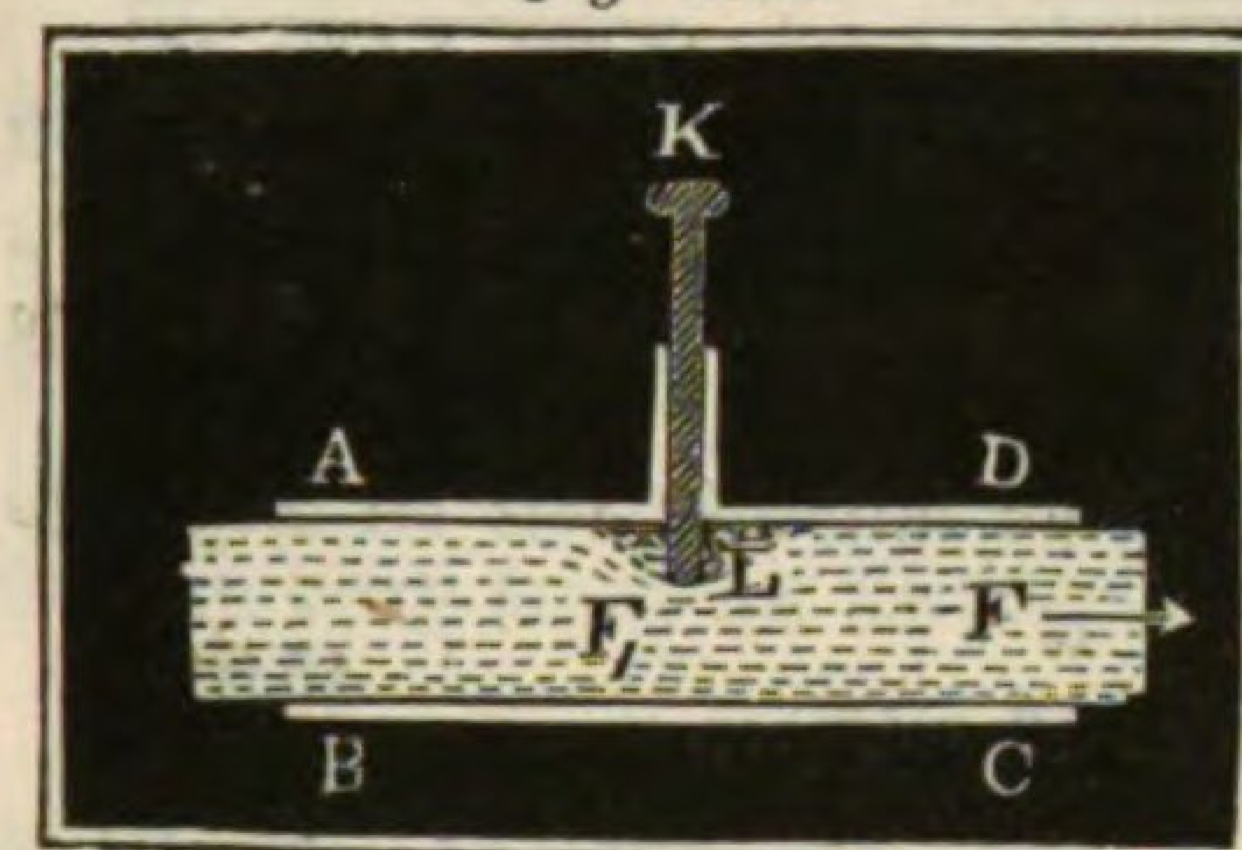


Fig. 561.



Fig. 562.

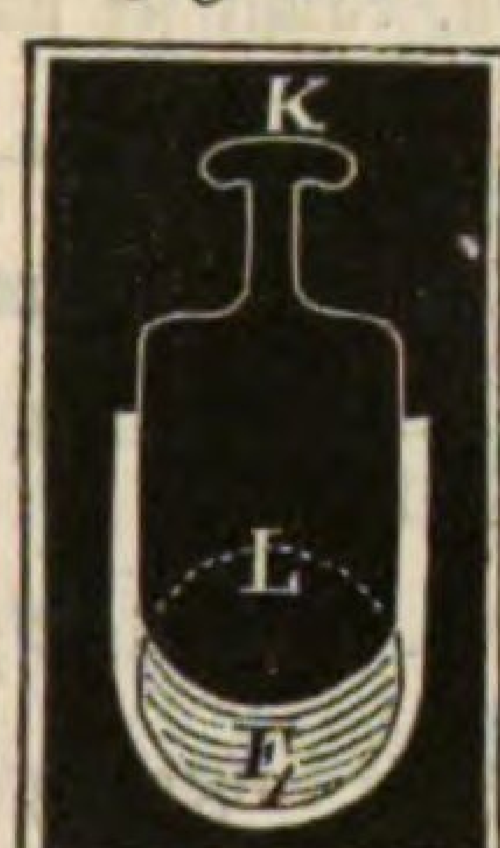


Fig. 563.

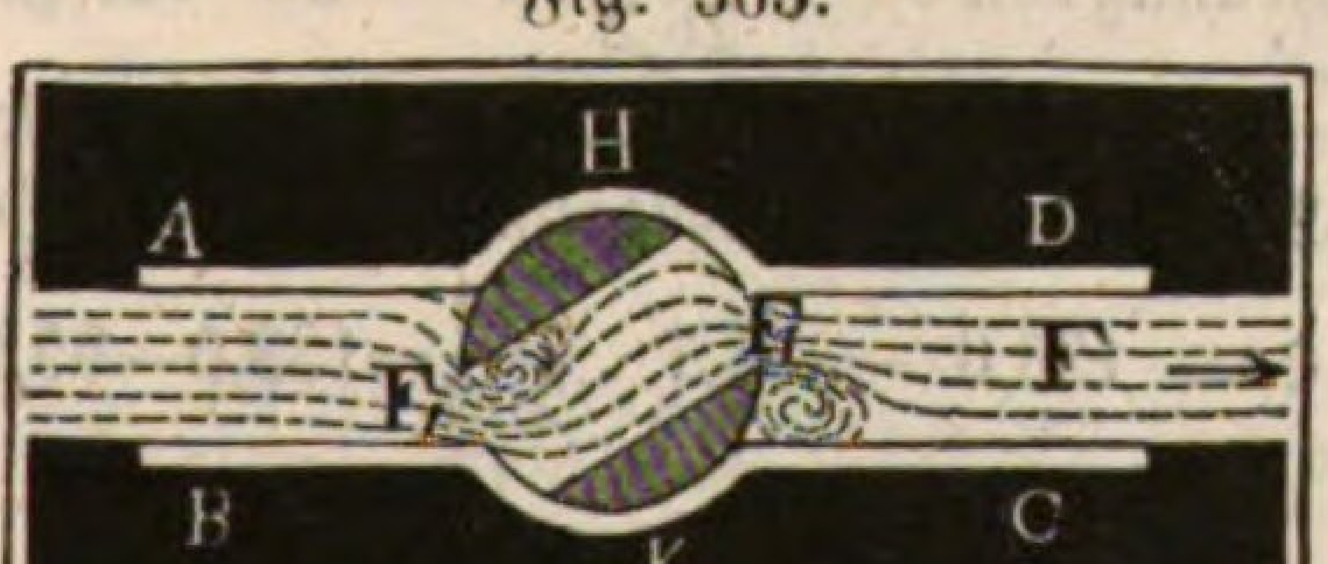


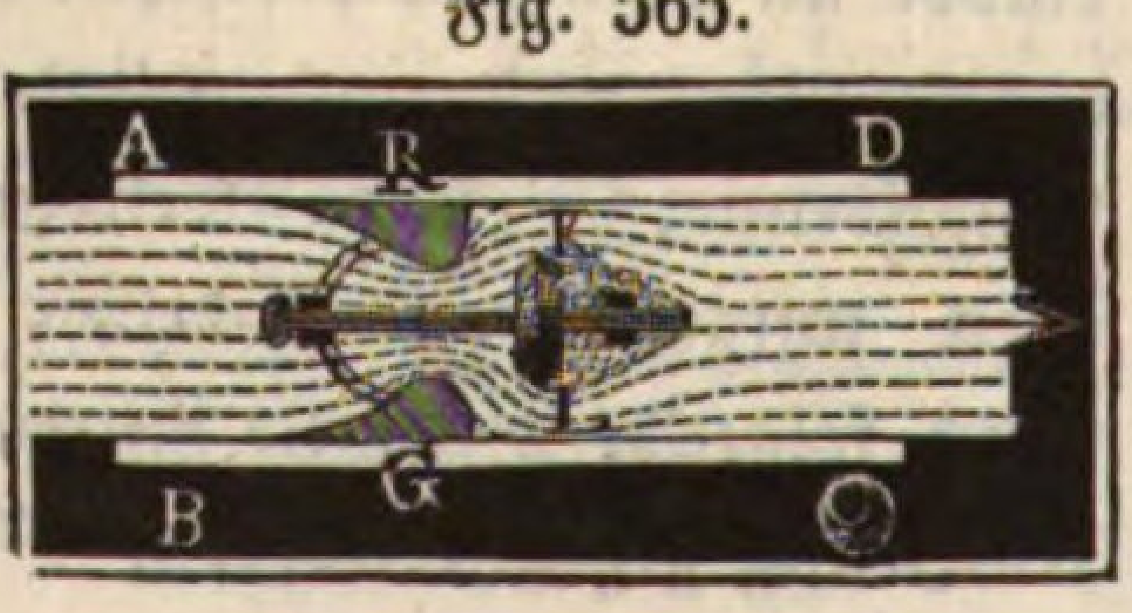
Fig. 564.



Schieber, Hähne, Klappen. **Beispiele.** 1) Wenn in einer cylindrischen Röhrenleitung von 3 Zoll Weite und 500 Fuß Länge ein Schubventil angebracht ist, und dieses $\frac{3}{8}$ der ganzen Höhe gezogen wird, also $\frac{5}{8}$ derselben verschließt, welche Wassermenge liefert dieselbe unter einem Drucke von 4 Fuß? Der Widerstandscoefficient ζ für den Eintritt in die Röhre läßt sich nach dem Früheren 0,505, und der Widerstandscoefficient ζ_1 für den Schieber nach Tabelle II., $= 5{,}52$ setzen, es folgt daher für die Ausflußgeschwindigkeit $v = \frac{7{,}906 \,.\, \sqrt{4}}{\sqrt{1{,}505 + 5{,}52 + \zeta_2 \frac{l}{d}}} = \frac{7{,}906 \,.\, 2}{\sqrt{7{,}025 + 500 \,.\, 4\zeta_2}}$ $= \frac{15{,}812}{\sqrt{7{,}025 + 2000\,\zeta_2}}$. Setzen wir den Reibungscoefficienten $\zeta_2 = 0{,}025$, so erhalten wir $v = \frac{15{,}812}{\sqrt{57{,}025}} = 2{,}09$ Fuß. Nun entspricht aber der Geschwindigkeit $v = 2{,}1$ Fuß genauer $\zeta_2 = 0{,}026$, daher ist richtiger $v = \frac{15{,}812}{\sqrt{59{,}025}}$ $= 2{,}06$ Fuß und die Ausflußmenge pro Secunde $= \frac{\pi}{4} \,.\, 9 \,.\, 12 \,.\, 2{,}06 = 55{,}62 \,.\, \pi$ $= 175$ Cubikzoll. 2) Eine Röhrenleitung von 4 Zoll Weite liefert bei einer Druckhöhe von 5 Fuß in der Minute 10 Cubikfuß Wasser, welche Stellung hat man dem angebrachten Drosselventile zu geben, damit sie nachher nur 8 Cubikfuß liefert? Die Geschwindigkeit ist anfangs $= \frac{10 \,.\, 4}{60 \,.\, \pi \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{6}{\pi} = 1{,}91$ Fuß, und nach der Klappenstellung $\frac{8}{10} \,.\, 1{,}91 = 1{,}528$ Fuß. Der Ausflußcoefficient für den ersten Fall des Ausflusses ist $\frac{v}{\sqrt{2gh}} = \frac{1{,}91}{7{,}906\sqrt{5}} = 0{,}108$, daher der Widerstandscoefficient $= \frac{1}{\mu^2} - 1 = \frac{1}{0{,}108^2} - 1 = 84{,}7$; der Ausflußcoefficient für den zweiten Fall ist $= \frac{8}{10} \,.\, 0{,}108 = 0{,}0864$, daher der Widerstandscoefficient $= \frac{1}{0{,}0864^2} - 1 = 133{,}0$, und demnach der Coefficient für den vom Drosselventile zu erzeugenden Widerstand : $\zeta = 133{,}0 - 84{,}7 = 48{,}3$. Nun giebt aber nach Tabelle VI. der Stellwinkel $\alpha = 50^0$, $\zeta = 32{,}6$ und der Stellwinkel $\delta = 55^0$, $\zeta = 58{,}8$; es läßt sich daher annehmen, daß bei einer Stellung von $50^0 + \frac{15{,}7}{26{,}2} \,.\, 5^0 = 53^0$ das gewünschte Ausflußquantum erhalten werde. Berücksichtigt man noch, daß bei dem Geschwindigkeitswechsel von 1,91 Fuß auf 1,528 Fuß der Reibungscoefficient von 0.0266 in 0,0281 übergeht, so ist noch genauer $\zeta = 133{,}0 - 84{,}7 \,.\, \frac{281}{266} = 133{,}0 - 89{,}5$ $= 43{,}5$, und sonach der Stellwinkel $= 50^0 + \frac{10{,}9}{26{,}2} \,.\, 5^0 = 52^0$.

Ventile.

Fig. 565.



§. 379. Von besonderer Wichtigkeit ist die Kenntniß der durch **Ventile** (franz. soupapes; engl. valves) hervorgebrachten Widerstände. Auch über diese sind vom Verfasser Versuche angestellt wor-

Fig. 566.



den. Am häufigsten kommen die sogenannten Kegel- und nächstdem die Klappenventile, wie in den Figuren 565 (vorig. S.) und 566 abgebildet sind, zur Anwendung. Bei beiden geht das Wasser durch die von einem Ringe RG gebildete Apertur; das Kegelventil KL hat einen Stiel, womit es in einer Führung liegt, die ihm nur einen Ausschub in der Axenrichtung gestattet; das Klappenventil KL oder die Ventilklappe hingegen öffnet sich drehend wie eine Thüre. Man sieht leicht ein, daß bei beiden Apparaten dem Wasser nicht nur durch den Ventilring, sondern auch durch die Ventilplatte ein Hinderniß entgegengesetzt wird. Ventile.

Bei dem Kegelventile, womit die Versuche angestellt wurden, war das Verhältniß zwischen der Apertur im Ventilringe zum Querschnitte der ganzen Röhre: 0,356, und dagegen das Verhältniß zwischen der Ringfläche um das geöffnete Ventil herum zu dem Röhrenquerschnitte = 0,406; es läßt sich daher im Mittel $\frac{F_1}{F} = 0{,}381$ setzen. Indem man den Ausfluß bei verschiedenen Ventilstellungen beobachtete, ergab sich, daß der Widerstandscoefficient zwar abnahm, wenn der Ventilschub größer wurde, daß aber diese Abnahme schon höchst unbedeutend ausfiel, wenn der Ventilschub die halbe Weite der Apertur übertraf. Seine Größe war für diesen Stand = 11, also die Widerstandshöhe oder der Druckhöhenverlust $= 11 \cdot \frac{v^2}{2g}$, wenn v die Geschwindigkeit des Wassers in der vollen Röhre bezeichnet. Diese Zahl kann man auch benutzen, um die anderen Querschnittsverhältnissen entsprechenden Widerstandscoefficienten zu bestimmen. Setzen wir allgemein $\zeta = \left(\frac{F}{\alpha F_1} - 1\right)^2$, so erhalten wir für den beobachteten Fall $\frac{F_1}{F} = 0{,}381$, $\zeta = 11$, und $11 = \left(\frac{1}{0{,}381\,\alpha} - 1\right)^2$,

daher $\alpha = \frac{1}{0{,}381\,(1 + \sqrt{11})} = \frac{1}{4{,}317 \,.\, 0{,}381} = 0{,}608$ und endlich allgemein $\zeta = \left(\frac{F}{0{,}608\,F_1} - 1\right)^2 = \left(1{,}645 \,.\, \frac{F}{F_1} - 1\right)^2$. Ist z. B. der Querschnitt der Apertur die Hälfte von dem der Röhre, so fällt hiernach der Widerstandscoefficient $= (1{,}645 \,.\, 2 - 1)^2 = 2{,}29^2 = 5{,}24$ aus.

Bei dem Klappenventile war das Querschnittsverhältniß zwischen der Apertur und der Röhre, d. i. $\frac{F_1}{F}$, $= 0{,}535$, wie aber die Widerstands-

Ventile. coefficienten mit der Größe der Eröffnung abnehmen, führt folgende Tabelle vor Augen.

Tabelle der Widerstandscoefficienten für die Ventilklappe.

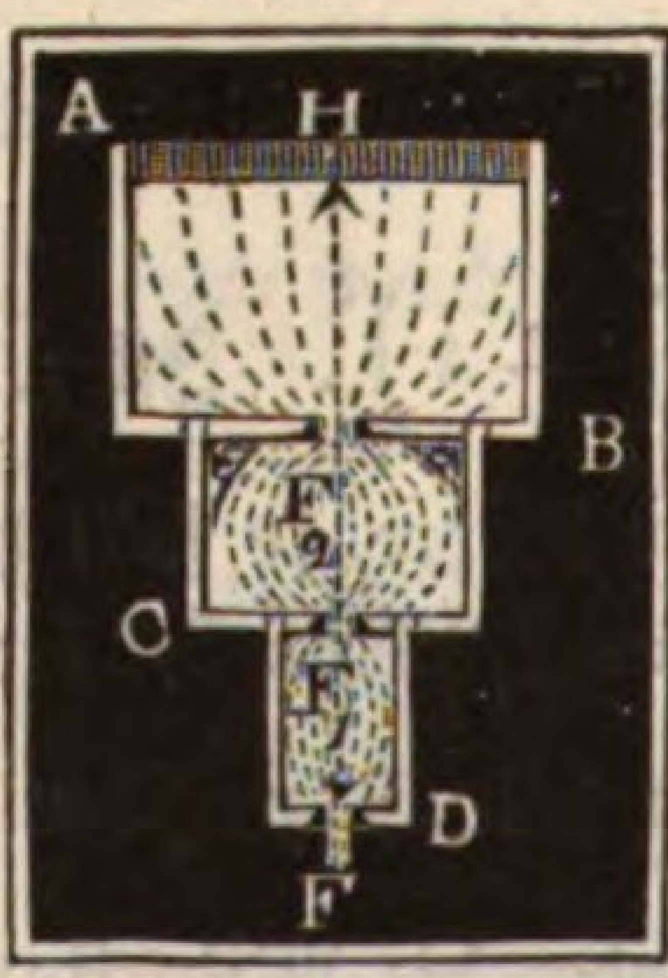
Oeffnungswinkel.	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°
Widerstandscoefficient.	90	62	42	30	20	14	9,5	6,6	4,6	3,2	2,3	1,7

Mit Hülfe dieser Tabelle lassen sich die Widerstandscoefficienten für Klappen auch dann noch annähernd berechnen, wenn das Querschnittsverhältniß ein anderes sein sollte. Es ist derselbe Weg zu betreten, welchen man bei den Kegelventilen verfolgt hat.

Beispiel. Eine Druckpumpe liefert bei jedem Niedergange des Kolbens in 4 Secunden 5 Cubikfuß Wasser, die Weite des Steigrohres, worin das kegelförmige Steigventil sitzt, beträgt 6 Zoll, die Apertur des Ventilringes $3\frac{1}{2}$ Zoll und der größte Ventildurchmesser $4\frac{1}{2}$ Zoll, welchen Widerstand hat das Wasser beim Durchgang durch das Ventil zu überwinden? Das Querschnittsverhältniß für die Apertur ist $\left(\frac{3,5}{6}\right)^2 = (\frac{7}{12})^2 = 0,34$ und das Verhältniß der ringförmigen Verengung zum Querschnitte des Rohres ist $= 1 - \left(\frac{4,5}{6}\right)^2 = 1 - (\frac{3}{4})^2 = 0,44$, daher das mittlere Querschnittsverhältniß $= \frac{0,34 + 0,44}{2} = 0,39$ und der entsprechende Widerstandscoefficient $= \left(\frac{1,645}{0,39} - 1\right)^2 = 3,22^2 = 10,4$. Die Geschwindigkeit des Wassers ist $v = \frac{5}{4 . \frac{\pi}{4} . (\frac{1}{2})^2} = \frac{20}{\pi} = 6,37$ Fuß, die Geschwindigkeitshöhe $= 0,649$ Fuß, und folglich die Widerstandshöhe $= 10,4 . 0,649 = 6,75$ Fuß. Die in der Secunde gehobene Wassermenge wiegt $\frac{5}{4} . 66 = 82,5$ Pfd.; daher ist die mechanische Arbeit, welche der Durchgang des Wassers durch das Ventil in eben dieser Zeit consumirt $= 6,75 . 82,5 = 557$ Fußpf.

Zusammengesetzte Gefäße.

Fig. 567.



§. 380. Die vorstehenden Lehren über den Widerstand des Wassers beim Durchgang desselben durch Verengungen finden ihre Anwendung auch noch bei dem Ausflusse durch zusammengesetzte Gefäße. Der in Fig. 567 abgebildete Apparat AD ist durch zwei, die Mündungen F_1 und F_2 enthaltende Scheidewände abgetheilt und bildet deshalb drei communicirende Gefäße. Wären die Scheidewände nicht vorhanden und die Kanten bei den Uebergängen aus einem Gefäße in das andere abgerundet, so hätte man, wie bei

einem einfachen Gefäße, die Ausflußgeschwindigkeit durch F: Zusammengesetzte Gefäße.

$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1+\zeta}}$, insofern h die Tiefe FH unter dem Wasserspiegel und ζ den Widerstandscoefficienten für den Durchgang durch die Ausflußöffnung F bezeichnen.

Da aber nach dem Durchgange des Wassers durch die Mündungen F_1 und F_2 die Querschnitte αF_1 und αF_2 plötzlich in die Querschnitte G und G_1 der Gefäße CD und BC übergehen, und nach §. 373 die daraus erwachsenden Widerstände

$$\zeta_1 \frac{v_1^2}{2g} = \left(\frac{G}{\alpha F_1} - 1\right)^2 \left(\frac{\alpha F}{G}\right)^2 \frac{v^2}{2g} = \left(\frac{F}{F_1} - \frac{\alpha F}{G}\right)^2 \cdot \frac{v^2}{2g} \text{ und}$$

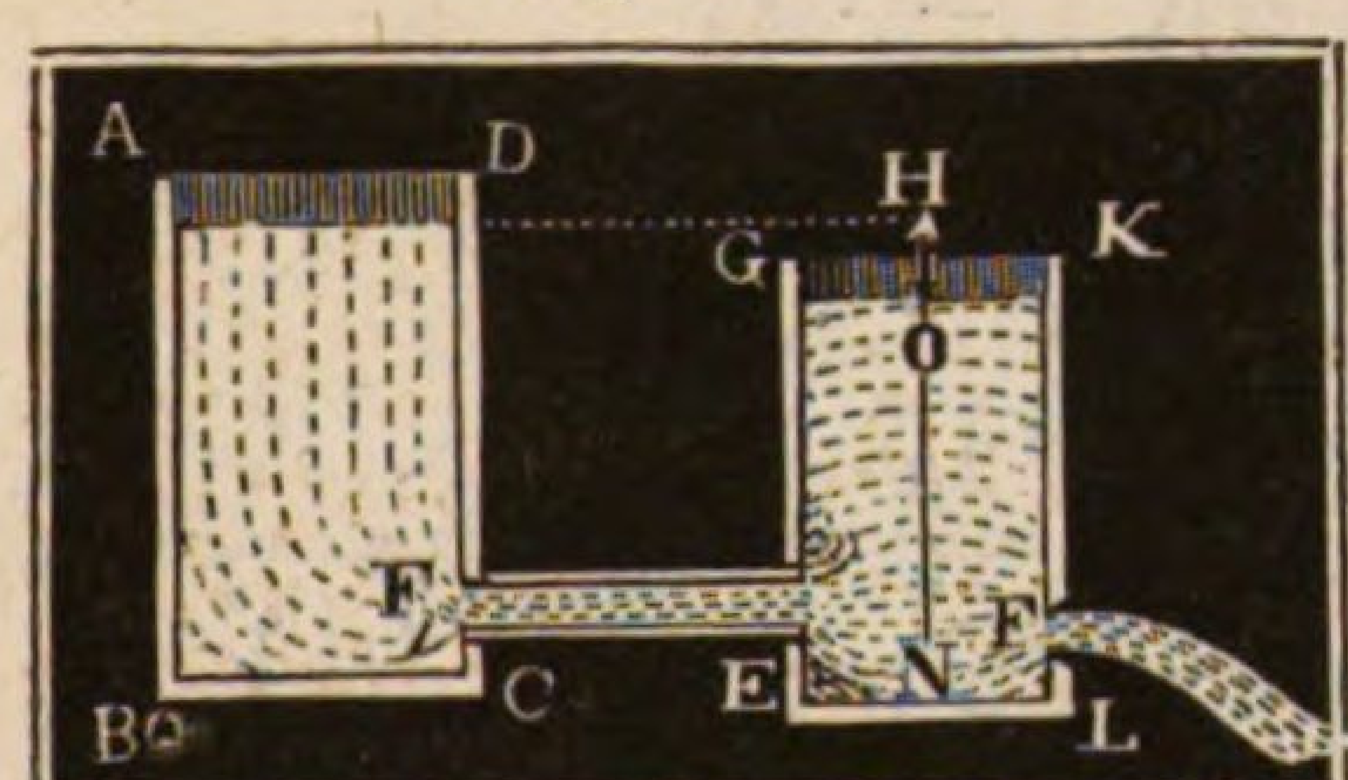
$$\zeta_2 \frac{v_2^2}{2g} = \left(\frac{G_1}{\alpha F_2} - 1\right)^2 \left(\frac{\alpha F}{G_1}\right)^2 \frac{v^2}{2g} = \left(\frac{F}{F_2} - \frac{\alpha F}{G_1}\right)^2 \frac{v^2}{2g}$$

betragen, so hat man

$$(1+\zeta)\frac{v^2}{2g} + \zeta_1 \frac{v_1^2}{2g} + \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g} = \left[1 + \zeta + \left(\frac{F}{F_1} - \frac{\alpha F}{G}\right)^2 + \left(\frac{F}{F_2} - \frac{\alpha F}{G_1}\right)^2\right] \frac{v^2}{2g}$$

und daher $v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 + \zeta + \left(\frac{F}{F_1} - \frac{\alpha F}{G}\right)^2 + \left(\frac{F}{F_2} - \frac{\alpha F}{G_1}\right)^2}}$ zu setzen.

Fig. 568.



Bei dem zusammengesetzten Ausflußapparate, welchen Fig. 568 repräsentirt, findet ganz dasselbe Verhältniß statt, nur ist vielleicht noch die Reibung des Wassers in dem Communicationsrohre CE zu berücksichtigen. Ist l die Länge und d die Weite dieses Rohres, ζ_1 aber der Reibungscoefficient, und v_1 die Geschwindigkeit des Wassers in demselben, so hat man die Höhe, welche das Wasser beim Uebergange von AC nach GL verliert: $h_1 = \left[1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + \zeta_1 \frac{l}{d}\right] \frac{v_1^2}{2g}$, oder, da die Geschwindigkeit $v_1 = \frac{\alpha F}{F_1} v$ zu setzen ist,

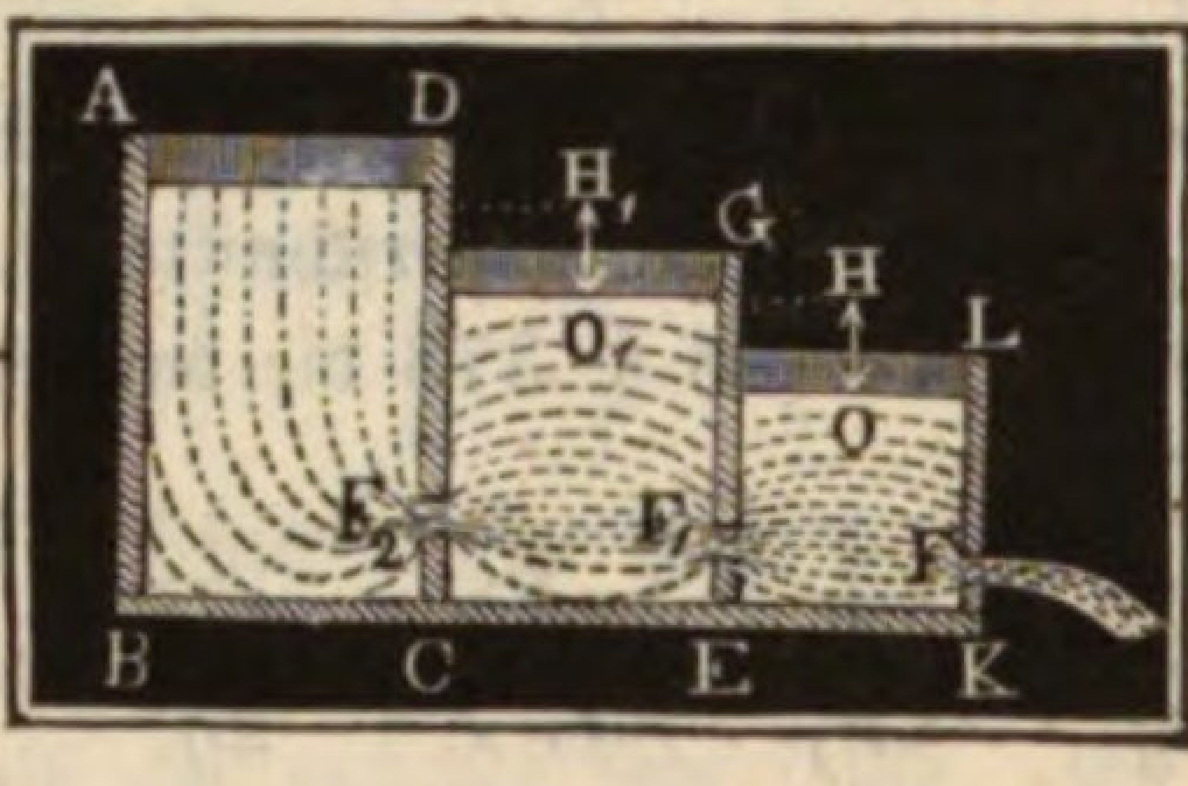
$$h_1 = \left[1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + \zeta_1 \frac{l}{d}\right] \left(\frac{\alpha F}{F_1}\right)^2 \frac{v^2}{2g}.$$

Zieht man nun diese Höhe von der ganzen Druckhöhe h ab, so bleibt die Druckhöhe im zweiten Gefäße $h_2 = h - h_1$ und daher die Ausflußgeschwindigkeit

Zusammengesetzte Gefäße.

$$v = \frac{\sqrt{2gh_2}}{\sqrt{1+\zeta}} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1+\zeta+\left[1+\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^2+\zeta_1\frac{l}{d}\right]\left(\frac{\alpha F}{F_1}\right)^2}}.$$

Fig. 569.



Diese Bestimmung wird bei dem Apparate, welchen Fig. 569 repräsentirt, sehr einfach, weil man die Querschnitte G, G_1 G_2 der Gefäße unendlich groß setzen kann in Ansehung der Mündungsquerschnitte F, F_1, F_2. Es ist daher die erste Niveaudifferenz OH oder Widerstandshöhe für den Durchgang durch F_1, $h_1 = \frac{1}{2g}\left(\frac{v_1}{\alpha_1}\right)^2 = \left(\frac{\alpha F}{\alpha_1 F_1}\right)^2 \cdot \frac{v^2}{2g}$, und ebenso die zweite Niveaudifferenz O_1H_1 oder die Widerstandshöhe für den Durchgang durch $F_2, h_2 = \left(\frac{\alpha F}{\alpha_2 F_2}\right)^2 \cdot \frac{v^2}{2g}$, wofern nur α, α_1 und α_2 die Contractionscoefficienten für die Mündungen F, F_1 und F_2 bezeichnen.

Hiernach folgt $v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1+\left(\frac{\alpha F}{\alpha_1 F_1}\right)^2+\left(\frac{\alpha F}{\alpha_2 F_2}\right)^2}}$ und das Ausflußquantum $Q = \frac{\alpha F\sqrt{2gh}}{\sqrt{1+\left(\frac{\alpha F}{\alpha_1 F_1}\right)^2+\left(\frac{\alpha F}{\alpha_2 F_2}\right)^2}}$

$$= \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\alpha F}\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha_1 F_1}\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha_2 F_2}\right)^2}}.$$

Es ist leicht zu ermessen, daß zusammengesetzte Ausflußbehälter weniger Wasser liefern, als einfache unter übrigens gleichen Verhältnissen.

Beispiel. Wenn bei dem Apparate in Fig. 568 die totale Druckhöhe oder die Tiefe des Mittelpunktes der Mündung F unter dem Wasserspiegel des ersten Gefäßes = 6 Fuß beträgt, die Mündung 8 Zoll breit und 4 Zoll hoch, der die beiden Reservoirs verbindende Lutten aber 10 Fuß lang, 12 Zoll breit und 6 Zoll hoch ist, welches Ausflußquantum wird dieses Reservoir geben? Die mittlere Weite des Lutten ist $= \frac{4 \cdot 1 \cdot 0{,}5}{2 \cdot 1{,}5} = \frac{2}{3}$ Fuß, daher $\frac{l}{d} = \frac{3 \cdot 10}{2} = 15$, setzen wir nun noch den Reibungscoefficienten $\zeta_1 = 0{,}025$, so folgt $\zeta_1 \cdot \frac{l}{d} = 0{,}025 \cdot 15 = 0{,}375$; hierzu den Widerstandscoefficienten 0,505 für den Eintritt in prismatische Röhren gesetzt, erhält man $1 + \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^2 + \zeta_1\frac{l}{d} = 1 + 0{,}505 + 0{,}375$

$= 1{,}88$. Da $\frac{\alpha F}{F_1} = \frac{0{,}64 . 8 . 4}{12 . 6} = 0{,}2845$, so folgt der Widerstandscoefficient Zusammengesetzte Gefäße.
für den ganzen Lutten $= 1{,}88 . 0{,}2845^2 = 0{,}152$, und den Widerstandscoefficient für den Durchgang durch $F_1 = 0{,}07$ gesetzt, erhält man die Ausflußgeschwindigkeit $v = \frac{7{,}906\sqrt{6}}{\sqrt{1{,}07 + 0{,}152}} = \frac{7{,}906\sqrt{6}}{\sqrt{1{,}222}} = 17{,}52$ Fuß. Der contrahirte Querschnitt ist $0{,}64 . 1 . \frac{1}{2} = 0{,}32$ Quadratfuß, daher das Ausflußquantum $Q = 0{,}32 . 17{,}52 = 5{,}61$ Cubikfuß.

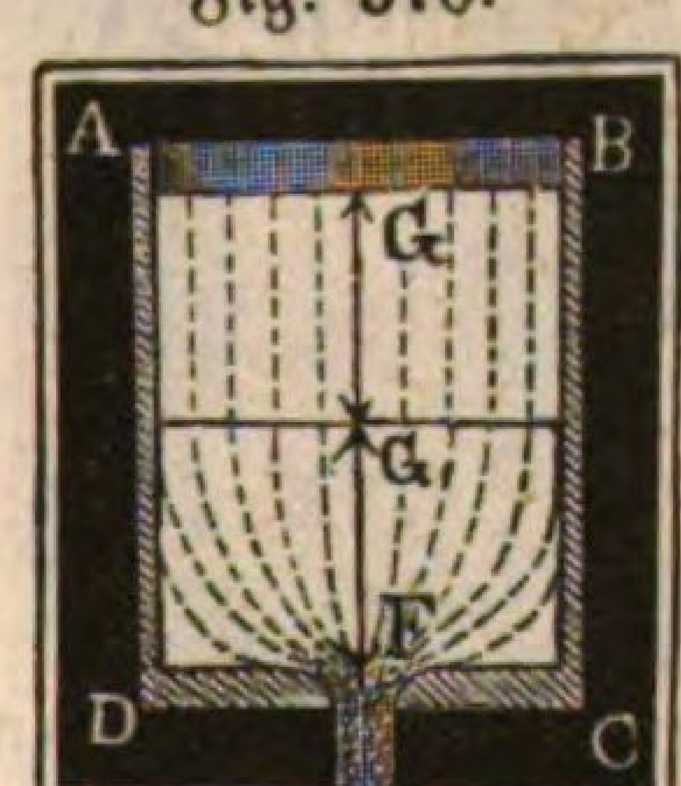
Fünftes Kapitel.

Von dem Ausflusse des Wassers unter veränderlichem Drucke.

§. 381. Erhält ein Gefäß, aus welchem das Wasser durch eine Seiten- Prismatische Gefäße.
oder Bodenöffnung ausfließt, von einer anderen Seite her keinen Zufluß, so tritt ein allmäliges Sinken des Wasserspiegels und endlich Ausleerung des Gefäßes ein. Wenn ferner die Zuflußmenge Q größer oder kleiner ist, als das Ausflußquantum $\mu F\sqrt{2gh}$, so steigt oder sinkt der Wasserspiegel, bis die Druckhöhe $h = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{\mu F}\right)^2$ wird, und nach diesem bleiben Druckhöhe und Ausflußgeschwindigkeit unveränderlich. Unsere Aufgabe ist nun, zu ermitteln, in welcher Abhängigkeit die Zeit, das Steigen und Sinken des Wassers und das Sichleeren von Gefäßen bei gegebener Form und Größe zu einander stehen.

Den einfachsten Fall bietet der Ausfluß aus einem prismatischen Gefäße dar, wenn derselbe durch eine Oeffnung im Boden erfolgt, und wenn dabei kein Zufluß von oben statt hat. Ist x die veränderliche Druckhöhe FG_1, F der Inhalt der Mündung und G der Querschnitt des Gefäßes AC, Fig. 570, so hat man die theoretische Ausflußgeschwindigkeit $v = \sqrt{2gx}$, die theoretische Geschwindigkeit des sinkenden Wasserspiegels $= \frac{F}{G}v = \frac{F}{G}\sqrt{2gx}$, und die effective $v_1 = \frac{\mu F}{G}\sqrt{2gx}$. Anfänglich ist $x = FG = h$, und am Ende des Ausflusses $x = 0$, also die Anfangsgeschwindigkeit ist $c = \frac{\mu F}{G}\sqrt{2gh}$ und die Endgeschwindigkeit $c_1 = 0$. Man ersieht aus

Fig. 570.



Prismatische Gefäße.

der Formel $v_1 = \sqrt{2\left(\frac{\mu F}{G}\right)^2 gx}$, daß die Bewegung des Wasserspiegels gleichförmig verzögert und daß das Verzögerungsmaaß $p = \left(\frac{\mu F}{G}\right)^2 g$ ist; wir wissen daher auch (§. 14.), daß diese Geschwindigkeit = Null wird und mithin der Ausfluß beendigt ist, nach der Zeit

$$t = \frac{v_1}{p} = \frac{\mu F}{G}\sqrt{2gh} : \left(\frac{\mu F}{G}\right)^2 g = \frac{G}{\mu F}\sqrt{\frac{2gh}{g^2}}, \text{ d. i. } t = \frac{2G\sqrt{h}}{\mu F\sqrt{2g}}.$$

Auch kann man $t = \frac{2Gh}{\mu F\sqrt{2gh}} = \frac{2Gh}{Q}$ setzen, und diesemnach annehmen, daß zum Ausflusse der Wassermenge Gh durch die Bodenöffnung F bei einer von h bis 0 abnehmenden Druckhöhe doppelt soviel Zeit nothwendig ist, als bei unveränderlicher Druckhöhe.

Da der Ausflußcoefficient μ nicht ganz constant ist, sondern bei Abnahme des Druckes größer wird, so muß man bei Berechnungen dieser Art einen mittleren Werth dieses Coefficienten einführen.

Beispiel. In welcher Zeit leert sich ein parallelepipedischer Kasten von 14 Quadratfuß Querschnitt durch eine runde Bodenöffnung von 2 Zoll Weite, wenn die anfängliche Druckhöhe 4 Fuß beträgt? Theoretisch wäre die Ausflußzeit $t = \frac{2 \,.\, 14\sqrt{4}}{7{,}906 \,.\, \frac{\pi}{4}\cdot(1/6)^2} = \frac{2 \,.\, 14 \,.\, 144 \,.\, 2}{7{,}906 \,.\, \pi} = \frac{8064}{7{,}906 \,.\, \pi} = 324'',7 = 5$ M. 24,7 Sec.
Am Ende der halben Ausflußzeit ist die Druckhöhe $= (1/2)^2 \cdot h = 1/4 \,.\, 4 = 1$ Fuß; nun ist der Ausflußcoefficient, welcher der Druckhöhe = 1 Fuß entspricht, für eine Mündung in der dünnen Wand = 0,613, daher läßt sich die effective Ausflußzeit $= \frac{324'',7}{0{,}613} = 529'',6 = 8$ Minuten 49,6 Secunden setzen.

Communicirende Gefäße.

§. 382. Da bei einer anfänglichen Druckhöhe h_1 die Ausflußzeit $t_1 = \frac{2G\sqrt{h_1}}{\mu F\sqrt{2g}}$ und bei einer anfänglichen Druckhöhe h_2 diese Zeit $t_2 = \frac{2G\sqrt{h_2}}{\mu F \,.\, \sqrt{2g}}$ ist, so folgt durch Subtraction die Zeit, innerhalb welcher die Druckhöhe aus h_1 in h_2 übergeht, oder der Wasserspiegel um $h_1 - h_2$ sinkt:

$$t = \frac{2G}{\mu F \,.\, \sqrt{2g}}(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}), \text{ oder für Fußmaaß:}$$

$$t = 0{,}253\,\frac{G}{\mu F}(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}).$$

Umgekehrt ist die einer gegebenen Ausflußzeit entsprechende Senkung $s = h_1 - h_2$ des Wasserspiegels gegeben durch die Formel:

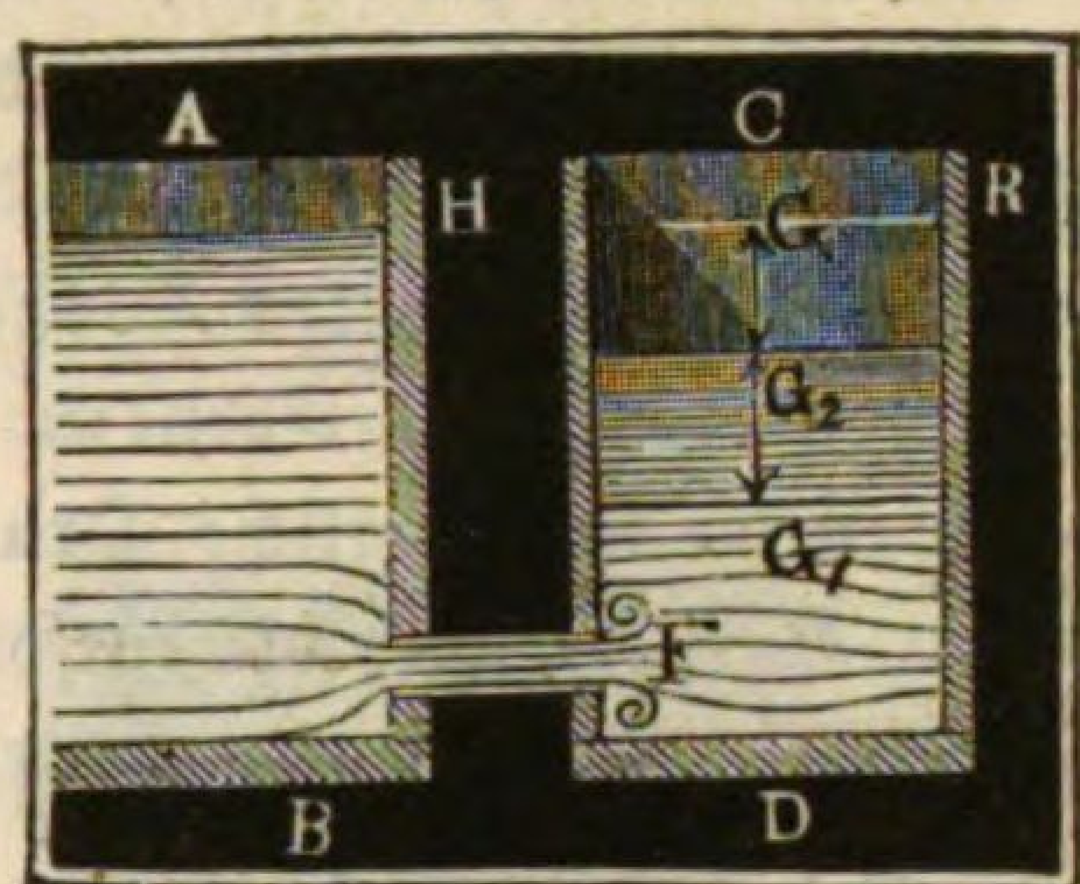
Communicirende Gefäße.

$$h_2 = \left(\sqrt{h_1} - \frac{\mu\sqrt{2g}\,.\,F}{2G}\,t\right)^2, \text{ oder}$$

$$s = \frac{\mu\sqrt{2g}\,.\,Ft}{G}\left(\sqrt{h_1} + \frac{\mu\sqrt{2g}}{4G}\,.\,t\right).$$

Dieselben Formeln finden auch dann noch ihre Anwendung, wenn ein Gefäß *CD*, Fig. 571, durch ein anderes Gefäß *AB*, in welchem das Wasser einen unveränderlichen Stand hat, gefüllt wird. Ist der Querschnitt der Communicationsröhre oder der Mündung $= F$, der Querschnitt des zu füllenden Gefäßes $= G$, und der anfängliche Niveauabstand GG_1 beider Wasserspiegel $= h$, so hat man, da hier der Wasserspiegel G_1 im zweiten Gefäße gleichförmig verzögert steigt, ebenfalls die Zeit zum Füllen oder die Zeit, innerhalb welcher der zweite Wasserspiegel in das Niveau *HR* des ersten kommt:

Fig. 571.



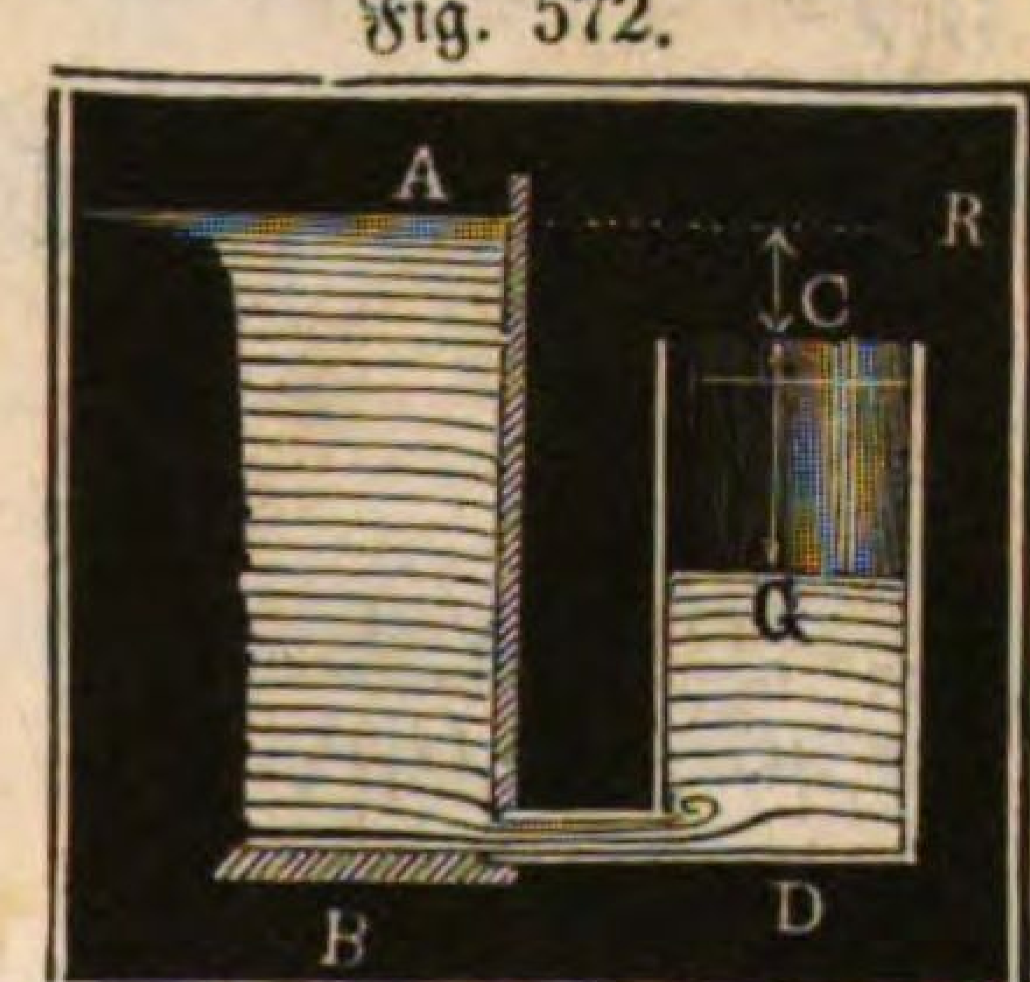
$$t = \frac{2G\sqrt{h}}{\mu F\,.\,\sqrt{2g}},$$

und ebenso die Zeit, in welcher der Niveauabstand h_1 in h_2 übergeht, also der Wasserspiegel um $GG_1 = s = h_1 - h_2$ steigt:

$$t = \frac{2G}{\mu F\,.\sqrt{2g}}\,(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}).$$

Beispiele. 1) Um wie viel sinkt der Wasserspiegel in dem Gefäße des letzten Beispieles binnen 2 Minuten? Es ist $h_1 = 4$, $t = 2\,.\,60 = 120$, $\frac{F}{G} = \frac{\pi}{14\,.\,144}$, und nimmt man noch $\mu = 0{,}605$, so folgt $h_2 = \left(\sqrt{h_1} - \mu\cdot\sqrt{2g}\cdot\frac{Ft}{2G}\right)^2$ $= \left(2 - \frac{0{,}605\,.\,7{,}906\,.\,\pi\,.\,120}{2\,.\,14\,.\,144}\right)^2 = \left(2 - 0{,}605\,.\,7{,}906\,.\,\frac{5\,.\,\pi}{168}\right)^2 = 1{,}5523^2$ $= 2{,}412$ Fuß, und die gesuchte Senkung $s = 4 - 2{,}412 = 1{,}589$ Fuß.

Fig. 572.



2) Welche Zeit braucht das Wasser, um in der 18 Zoll weiten Röhre *CD*, Fig. 572, überzulaufen, wenn es mit einem Gefäße *AB* durch eine kurze, $1\frac{1}{2}$ Zoll weite Röhre communicirt, und der steigende Wasserspiegel *G* anfänglich 6 Fuß unter dem unveränderlichen Wasserspiegel *A* und $4\frac{1}{2}$ Fuß unter dem Kopfe *C* der Röhre steht? Es ist in

$$t = \frac{2G}{\mu\sqrt{2g}\,.\,F}\,(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}),$$

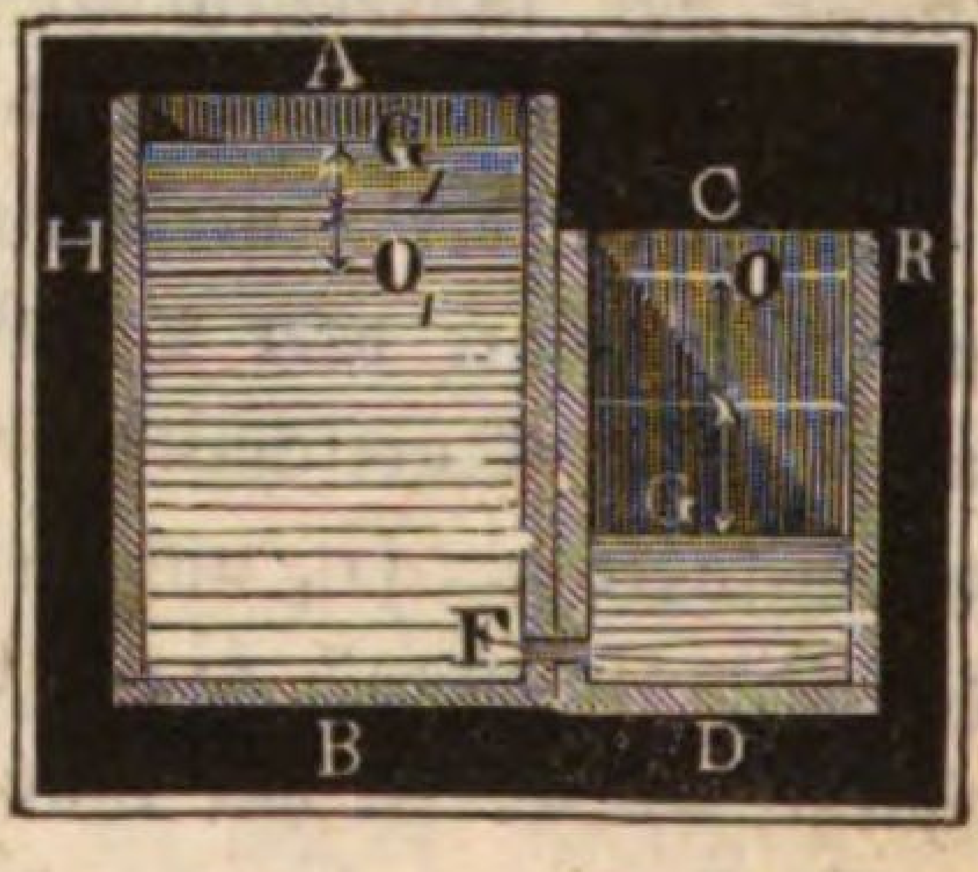
$h_1 = 6$, $h_2 = 6 - 4{,}5 = 1.5$, $\frac{G}{F} = \left(\frac{18}{1{,}5}\right)^2 = 144$ und $\mu = 0{,}81$ zu setzen, weshalb folgt

$$t = \frac{2\,.\,144}{0{,}81\,.\,7{,}906}\,(\sqrt{6} - \sqrt{1{,}5}) = \frac{288\,.\,1{,}2248}{0{,}81\,.\,7{,}906} = 55{,}1 \text{ Sec.}$$

Communicirende Gefäße.

§. 383. Wenn das erste Gefäß AB, Fig. 573, aus welchem das Wasser in das andere läuft, keinen Zufluß hat, und sein Querschnitt G_1 auch nicht als unendlich groß angesehen werden kann in Hinsicht auf den Querschnitt G des folgenden Gefäßes CD, so hat man die Bestimmung zu modificiren. Ist der veränderliche Abstand G_1O_1 des ersten Wasserspiegels von dem Niveau HR, in welchem beide Wasserspiegel bei Beendigung des Ausflusses stehen, $= x$ und der Abstand GO des zweiten Wasserspiegels von eben dieser Ebene $= y$, so hat man die veränderliche Druckhöhe $= x + y$ und die entsprechende Ausflußgeschwindigkeit $v = \sqrt{2g(x+y)}$, oder, da das Wasserquantum $G_1 x = G y$ ist, $v = \sqrt{2g\left(1 + \frac{G}{G_1}\right)y}$. Die Geschwindigkeit, mit welcher der Wasserspiegel im zweiten Gefäße steigt, ist nun

Fig. 573.



$v_1 = \frac{\mu F}{G} v = \frac{\mu F}{G} \sqrt{2g\left(1 + \frac{G}{G_1}\right) . y}$, folglich die Retardation

$p = \left(\frac{\mu F}{G}\right)^2 \left(1 + \frac{G}{G_1}\right) g$ und die Ausflußzeit

$$t = \frac{\mu F}{G}\sqrt{2g\left(1 + \frac{G}{G_1}\right)y} : \left(\frac{\mu F}{G}\right)^2 \left(1 + \frac{G}{G_1}\right) g$$

$$= \frac{2 G \sqrt{y}}{\mu F \sqrt{2g\left(1 + \frac{G}{G_1}\right)}}.$$

Führen wir statt x und y den anfänglichen Niveauabstand h ein, setzen wir also $x + y = h$, oder $\left(1 + \frac{G}{G_1}\right) y = h$, so bekommen wir $y = \frac{h}{1 + \frac{G}{G_1}}$, und die Zeit, binnen welcher die beiden Wasserspiegel in ein Niveau kommen:

$$t = \frac{2 G \sqrt{h}}{\mu F \left(1 + \frac{G}{G_1}\right)\sqrt{2g}} = \frac{2 G G_1 \sqrt{h}}{\mu F (G + G_1)\sqrt{2g}}.$$

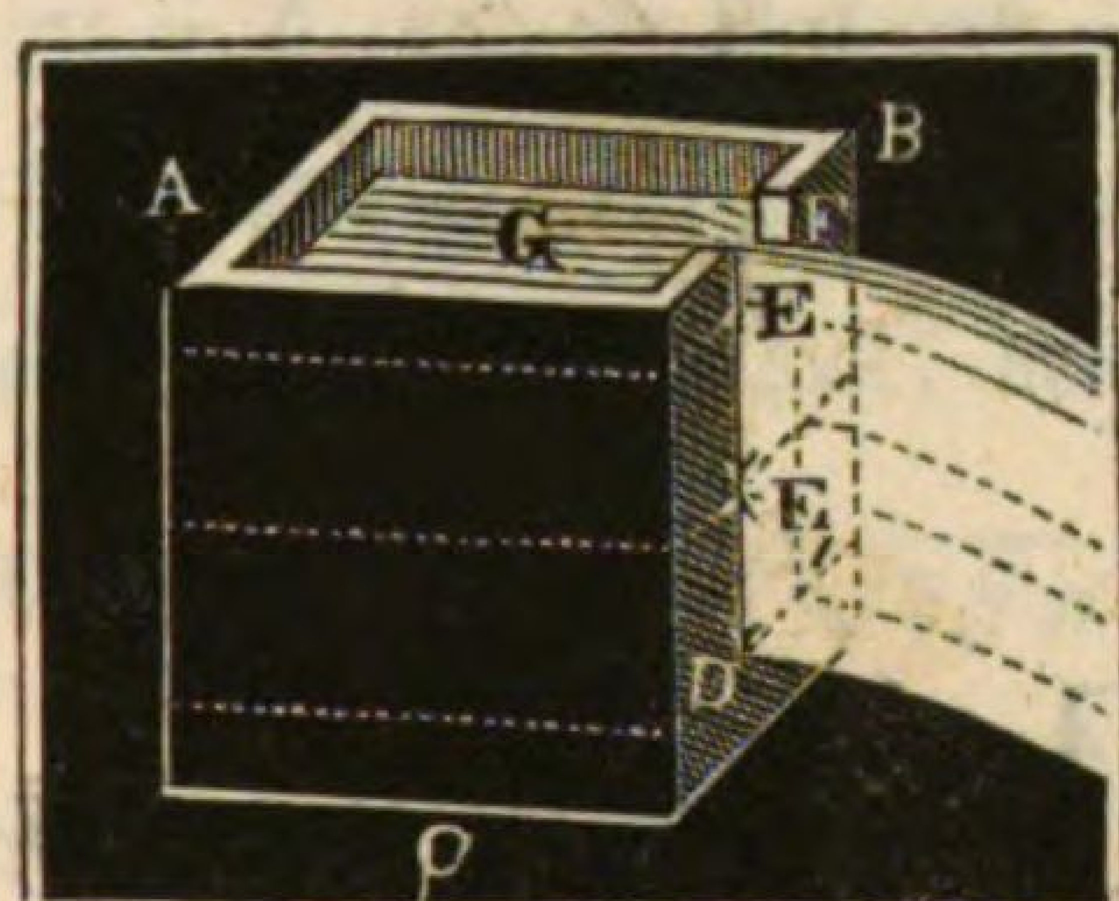
Die Zeit, innerhalb welcher der Niveauabstand von h auf h_1 sinkt, ist dagegen: $$t = \frac{2 G G_1 (\sqrt{h} - \sqrt{h_1})}{\mu \sqrt{2g}\, F\, (G + G_1)}.$$

Beispiel. Wenn der Querschnitt G_1 des Kastens, aus welchem das Wasser zufließt, 10 Quadratfuß und der Querschnitt G des Kastens, welcher das Wasser aufnimmt, 4 Quadratfuß mißt, wenn ferner der anfängliche Niveauabstand h der beiden Wasserspiegel 3 Fuß beträgt und die cylindrische Communicationsröhre 1 Zoll Weite hat, so ist die Zeit, in welcher das Wasser in beiden Gefäßen auf gleiches Niveau kommt: Communicirende Gefäße.

$$t = \frac{2 \,.\, 10 \,.\, 4 \,.\, \sqrt{3}}{0{,}82 \,.\, 7{,}906 \,.\, \frac{\pi}{4} \,.\, \frac{14}{144}} = \frac{320 \,.\, 72 \,.\, \sqrt{3}}{0{,}82 \,.\, 7{,}906 \,.\, 7\,\pi} = 280 \text{ Sec.}$$

§. 384. Fließt das Wasser durch einen Wandeinschnitt oder Ueberfall DE aus einem prismatischen Gefäße ABC, Fig. 574, welches keinen Zufluß erhält, so ist die Ausflußzeit auf folgende Weise zu ermitteln. Bezeichnen wir den Querschnitt des Gefäßes durch G, die Breite EF des Einschnittes durch b und die Höhe DE durch h, und theilen wir die ganze Ausflußmündung durch Horizontalen in lauter schmale Streifen, jeden von der Breite b und Höhe $\frac{h}{n}$. Bei constantem Drucke ist die Ausflußmenge auf die Secunde bezogen, $Q = \frac{2}{3}\mu b \sqrt{2gh^3}$, dividiren wir diese in den Inhalt $\frac{Gh}{n}$ einer Wasserschicht, so erhalten wir die entsprechende Ausflußzeit $\tau = \frac{Gh}{\frac{2}{3}\mu n b \sqrt{2gh^3}}$, wofür wir $\frac{3\,Gh}{2\,\mu n b \sqrt{2g}} \,.\, h^{-\frac{3}{2}}$ schreiben wollen. Wandeinschnitt.

Fig. 574.



Um nun die Ausflußzeit t für ein Wasserquantum $G\,(h - h_1)$ zu erhalten, oder um die Zeit zu bestimmen, innerhalb welcher der Wasserstand über der Schwelle von $DE = h$ auf $DE_1 = h_1$ herabsinkt, setzen wir $h_1 = \frac{m}{n}h$, lassen also h_1 aus m Theilen bestehen, führen nun in der letzten Gleichung statt $h^{-\frac{3}{2}}$, successiv

$$\left(\frac{m}{n}h\right)^{-\frac{3}{2}}, \left(\frac{m+1}{n}h\right)^{-\frac{3}{2}}, \left(\frac{m+2}{n}h\right)^{-\frac{3}{2}} \cdots \left(\frac{nh}{n}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

ein, und addiren endlich die erhaltenen Ergebnisse. Auf diesem Wege bekommen wir die gesuchte Zeit:

Wandeinschnitt.

$$t = \frac{3Gh}{2\mu n b\sqrt{2g}}\left[\left(\frac{mh}{n}\right)^{-3/2} + \left(\frac{m+1}{n}h\right)^{-3/2} + \dots + \left(\frac{nh}{n}\right)^{-3/2}\right]$$

$$= \frac{3Gh}{2\mu n b\sqrt{2g}} \cdot \frac{h^{-3/2}}{n^{-3/2}}\left(m^{-3/2} + (m+1)^{-3/2} + \dots + n^{-3/2}\right)$$

$$= \frac{3Gh^{-1/2}}{2\mu n^{-1/2} b\sqrt{2g}}\Big[\left(1^{-3/2} + 2^{-3/2} + 3^{-3/2} + \dots + n^{-3/2}\right)$$

$$- \left(1^{-3/2} + 2^{-3/2} + 3^{-3/2} + \dots m^{-3/2}\right)\Big],$$

oder nach dem »Ingenieur«, Arithmetik §. 28.:

$$t = \frac{3Gh^{-1/2}}{2\mu n^{-1/2} b\sqrt{2g}}\left(\frac{n^{-3/2+1}}{-3/2+1} - \frac{m^{-3/2+1}}{-3/2+1}\right)$$

$$= \frac{3Gn^{1/2}}{2\mu b\sqrt{2gh}} \cdot 2\left(m^{-1/2} - n^{-1/2}\right)$$

$$= \frac{3G}{\mu b\sqrt{2gh}}\left[\left(\frac{m}{n}\right)^{-1/2} - 1\right]$$

$$= \frac{3G}{\mu b\sqrt{2g}}\left[\left(\frac{m}{n}h\right)^{-1/2} - h^{-1/2}\right] = \frac{3G}{\mu b\sqrt{2g}}\left(\frac{1}{\sqrt{h_1}} - \frac{1}{\sqrt{h}}\right).$$

Setzt man $h_1 = 0$, so erhält man $\frac{1}{\sqrt{h_1}}$ und also auch $t = \infty$; damit also das Wasser bis zur Schwelle abläuft, ist eine unendliche Zeit nothwendig.

Beispiel. Wenn das Wasser durch einen Wandeinschnitt von 8 Zoll Breite aus einem Reservoir von 110 Fuß Länge und 40 Fuß Breite ausfließt, welche Zeit braucht es, um aus dem Wasserstande von 15 Zoll in den Wasserstand von 6 Zoll überzugehen? Es ist

$$t = \frac{3 \,.\, 110 \,.\, 40}{\mu \,.\, 2/3 \,.\, 7{,}906}\left(\frac{1}{\sqrt{0{,}5}} - \frac{1}{\sqrt{1{,}25}}\right) = \frac{19800}{\mu \,.\, 7{,}906}\left(\sqrt{2} - \sqrt{4/5}\right)$$

$$= \frac{19800}{7{,}906\,\mu}(1{,}4142 - 0{,}8944) = \frac{19800 \,.\, 0{,}5198}{7{,}906\,\mu} = \frac{1302}{\mu} \text{ Sec.}$$

Nimmt man den Ausflußcoefficienten $\mu = 0{,}60$, so folgt die effective Ausflußzeit $t = \frac{1302}{0{,}6} = 2170$ Sec. $= 36$ Min. 10 Sec.

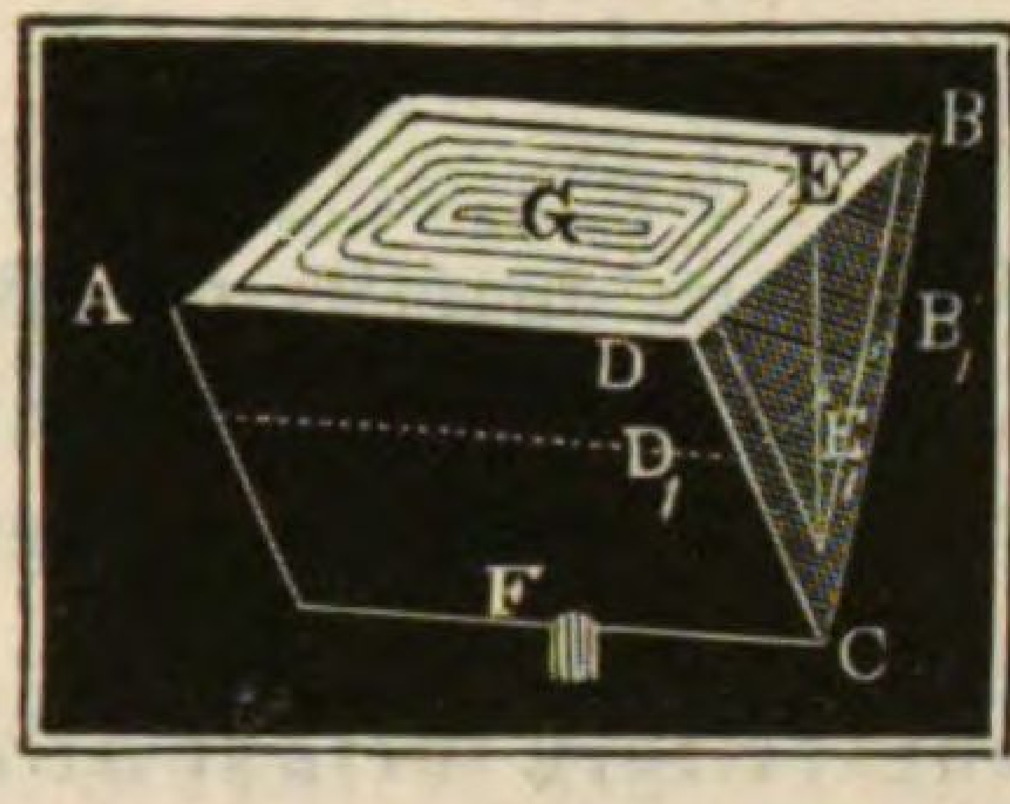
Anmerkung. Für eine rectanguläre Seitenöffnung läßt sich annähernd setzen:

$$t = \frac{2G}{\mu F\sqrt{2g}}\left[\left(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}\right) - \frac{a^2}{288}\left(\sqrt{h_1^{-3}} - \sqrt{h_2^{-3}}\right)\right],$$

und es bezeichnen F und G die Querschnitte der Oeffnung und des Gefäßes, a die Oeffnungshöhe, h_1 die Druckhöhe am Anfange, h_2 aber die am Ende des Ausflusses. Wird $h_2 = \frac{a}{2}$, so geht die Oeffnung in einen Wandeinschnitt über und es ist nun die Formel für diesen anzuwenden.

§. 385. Bildet das Ausflußgefäß ABF, Fig. 575, ein horizontales, **dreiseitiges Prisma**, so findet man die Ausflußzeit auf folgende Weise. Keil- und pyramidenförmige Gefäße.

Fig. 575.



Theilen wir die Höhe $CE = h$ in n gleiche Theile und legen wir durch die Theilpunkte Horizontalebenen, so zerlegen wir das ganze Wasserquantum in lauter gleich dicke Schichten von gleicher Länge $AD = l$ und von nach unten zu abnehmenden Breiten. Ist die Breite DB der oberen Schicht $= b$, so hat man die Breite $D_1 B_1$ einer anderen Schicht, welche um $CE_1 = x$ über der in der unteren Kante liegenden Mündung F steht, $y = \frac{x}{h} b$, und ihr Volumen $= yl \,.\, \frac{h}{n} = \frac{b\,l\,x}{n}$. Nun ist aber die Ausflußmenge auf die Zeiteinheit bezogen: $Q = \mu F \sqrt{2gx}$, daher folgt denn die kleine Zeit, innerhalb welcher der Wasserspiegel um $\frac{h}{n}$ sinkt, $\tau = \frac{bl}{n} x : \mu F \sqrt{2gx} = \frac{bl}{n\mu F\sqrt{2g}} . x^{1/2}$. Da endlich die Summe aller $x^{1/2}$ von $x = \frac{h}{n}$ bis $x = \frac{nh}{n}$ genommen,

$= \left(\frac{h}{n}\right)^{1/2} . \frac{n^{3/2}}{3/2} = 2/3\ nh^{1/2}$ ist, so hat man die Zeit zum Ausflusse des ganzen Wasserprisma's:

$$t = \frac{b\,l}{n\mu F\sqrt{2g}} . \,2/3\, n h^{1/2} = 2/3\ \frac{b\,l}{\mu F\sqrt{2g}} . h^{1/2} = 4/3\ \frac{1/2\, b\, l\, h}{\mu F \sqrt{2\,g\,h}}$$

$= 4/3 \,.\, \frac{V}{\mu\ F\ c}$, wenn V das ganze Wasserquantum und c die anfängliche Ausflußgeschwindigkeit ist. Es braucht also hier das Wasser um $1/3$ mehr Zeit, als wenn die Ausflußgeschwindigkeit unveränderlich c wäre.

Bildet das Gefäß ABF, Fig. 576, ein aufrechtstehendes **Paraboloid**,

Fig. 576.



so hat man für das Verhältniß zwischen den Halbmessern $KM = y$ und $CD = b$, $\frac{y}{b} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{h}}$, und daher das Verhältniß des Horizontalschnittes G_1 durch K zur Grundfläche $ADB = G$:

$\frac{G_1}{G} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{h}$, folglich $G_1 = \frac{Gx}{h}$ und den Inhalt einer Wasserschicht $= G_1 \,.\, \frac{h}{n} = \frac{Gx}{n}$. Die vollständige

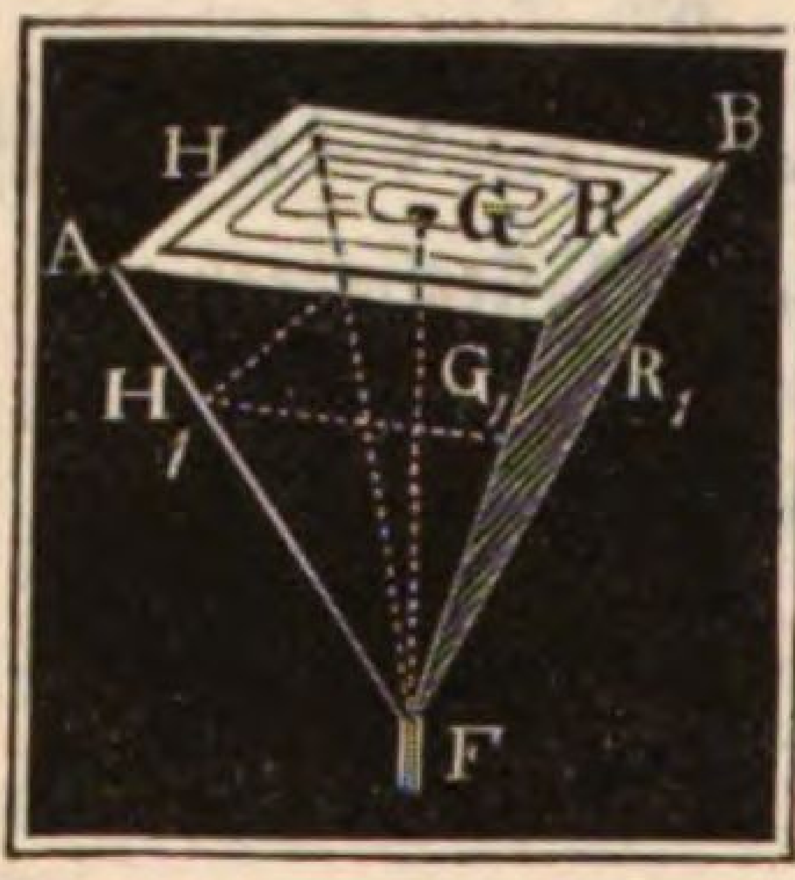
Keil- und pyramidenförmige Gefäße.

Uebereinstimmung dieses Ausdruckes mit dem für das dreiseitige Prisma gefundenen gestattet daher auch hier $t = \frac{4}{3} \cdot \frac{\frac{1}{2} G h}{\mu F \sqrt{2 g h}}$ zu setzen, oder, da hier $V = \frac{1}{2} Gh$ ist (§. 118), auch $t = \frac{4}{3} \cdot \frac{V}{\mu F c}$.

Diese Formel läßt sich in vielen anderen Fällen zur angenäherten Bestimmung der Ausflußzeit namentlich auf das Ausleeren von Teichen anwenden. Sie gilt überhaupt auch in allen den Fällen, wenn die Horizontalschnitte wie die Abstände von dem Boden wachsen.

Hat man es endlich mit einem pyramidenförmigen Gefäße ABF, Fig. 577, zu thun, so ist $G_1 : G = x^2 : h^2$, und daher $G_1 = \frac{G x^2}{h^2}$

Fig. 577.



ferner der Inhalt der Schicht $H_1 R_1$, $\frac{G_1 h}{n}$, $= \frac{G x^2}{n h}$, und die Zeit zu ihrem Ausflusse:

$$\tau = \frac{G x^2}{n h} : \mu F \sqrt{2 g x} = \frac{G}{n \mu F h \sqrt{2 g}} . x^{3/2}.$$

Da aber die Summe aller $x^{3/2}$ von $x = \frac{h}{n}$ bis $x = \frac{nh}{n}$ genommen, $= \left(\frac{h}{n}\right)^{3/2} . \frac{n^{5/2}}{5/2}$ $= \frac{2}{5} n h^{3/2}$ ist, so folgt die Zeit zum Leeren der ganzen Pyramide:

$$t = \frac{G}{n \mu F h \sqrt{2 g}} . \frac{2}{5} n h^{3/2} = \frac{2}{5} . \frac{G h^{1/2}}{\mu F \sqrt{2 g}} = \frac{6}{5} . \frac{\frac{1}{3} G h}{\mu F \sqrt{2 g h}},$$

oder $\frac{1}{3} Gh = V$ gesetzt: $t = \frac{6}{5} . \frac{V}{\mu F c}$.

Da bei diesem Ausflusse die anfängliche Ausflußgeschwindigkeit von c allmälig bis Null abnimmt, so ist die Ausflußzeit $\frac{1}{5}$ größer, als wenn die Geschwindigkeit unveränderlich $= c$ bliebe.

Beispiel. In welcher Zeit wird sich ein Teich, dessen Wasserspiegel 765000 Quadratfuß Inhalt hat, leeren, wenn das in der tiefsten Stelle einmündende Fischgerinne 15 Fuß unter dem Wasserspiegel steht und eine Röhre von 15 Zoll Weite und 50 Fuß Länge bildet? Theoretisch ist die Ausflußzeit $t = \frac{4}{3} . \frac{V}{F \sqrt{2 g h}}$

$$= \frac{4}{3} . \frac{1}{2} . \frac{765000 . 15}{\frac{\pi}{4} . \left(\frac{5}{4}\right)^2 . 7{,}906 \sqrt{15}} = \frac{19584000}{\pi . 7{,}906 \sqrt{15}} = 203586 \text{ Sec.}$$

Nun ist aber der Widerstandscoefficient für den Eintritt in das etwa um 45° abgeschrägte Gerinne: $\zeta = 0{,}505 + 0{,}327$ (s. §. 360) $= 0{,}832$, und der Rei-

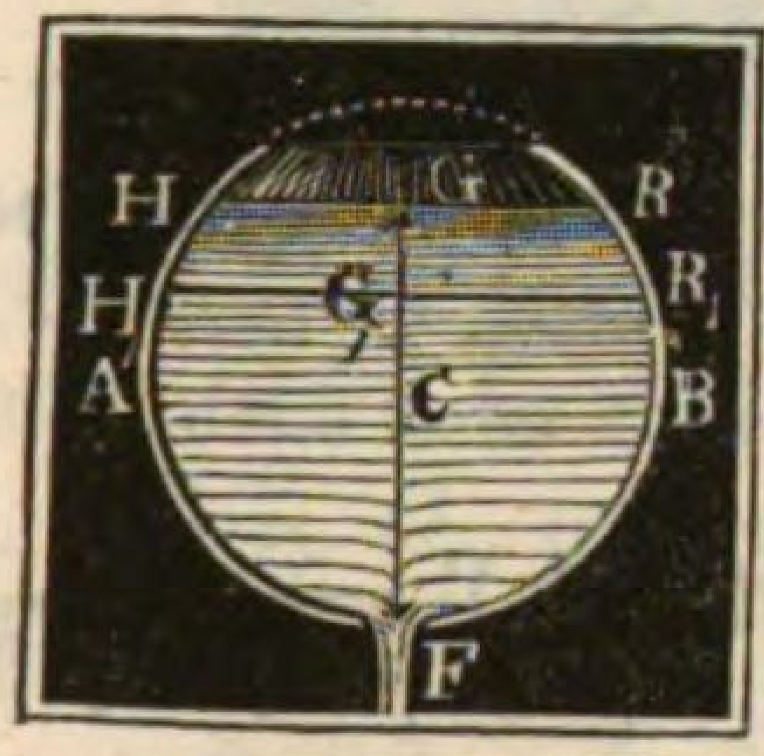
bungswiderstand für das Gerinne $= 0{,}025 \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} = 0{,}025 \cdot \frac{50}{5/4} \cdot \frac{v^2}{2g}$ $= \frac{v^2}{2g}$; es folgt daher der vollständige Ausflußcoefficient für das Teichgerinne: $\mu = \frac{1}{\sqrt{1+0{,}832+1}} = \frac{1}{\sqrt{2{,}832}} = 0{,}594$ und die in Frage stehende Ausflußzeit: $t = 203586 : 0{,}594 = 342670$ Sec. = 95 Stund. 11 Min.

Keil- und pyramidenförmige Gefäße.

Kugel- und obelisken-förmige Gefäße.

§. 386. Mit Hülfe der im letzten §. aufgefundenen Formeln kann man nun auch die Ausflußzeiten für viele andere Gefäße, z. B. für kugel-, ponton-, pyramidenförmige u. s. w. finden. Für das Leeren eines gefüllten Kugelsegmentes AB, Fig. 578, erhält man

Fig. 578.



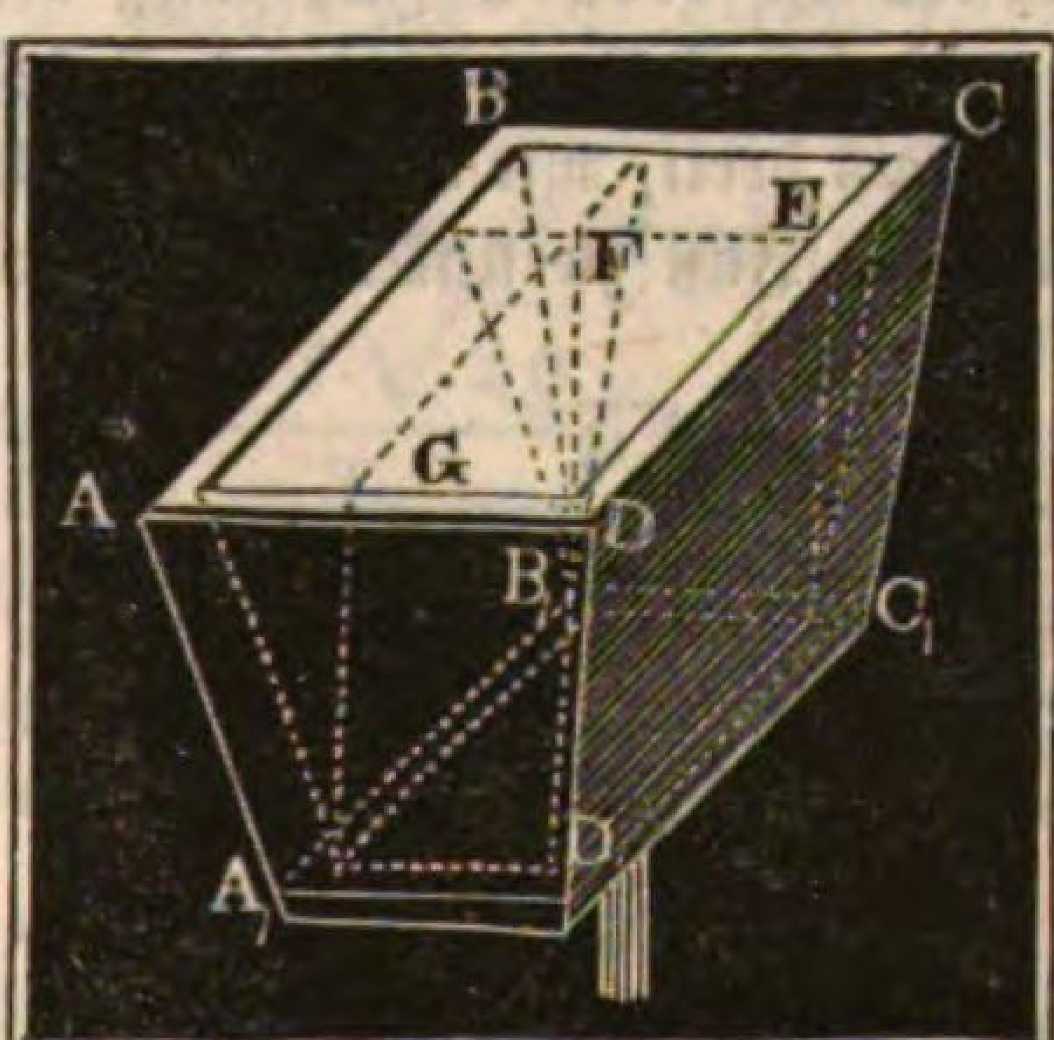
$$t = \frac{4}{3} \frac{\pi r h^2}{\mu F \sqrt{2gh}} - \frac{2}{5} \cdot \frac{\pi h^3}{\mu F \sqrt{2gh}}$$

$$= \frac{2}{15}\pi \frac{(10r - 3h) h^{3/2}}{\mu F \sqrt{2g}},$$ also für das Leeren einer vollen Kugel, wo $h = 2r$,

$$t = \frac{16 \pi r^2 \sqrt{2r}}{15 \mu F \sqrt{2g}},$$ und für das einer halben Kugel, wo $h = r$, $t = \frac{14 \pi r^2 \sqrt{r}}{15 \mu F \sqrt{2g}}$.

Es ist nämlich hier die der Tiefe $FG_1 = x$ entsprechende Horizontalschicht $H_1R_1 = G_1 = \pi x (2r - x) \cdot \frac{h}{n} = \frac{2\pi r h x}{n} - \frac{\pi h x^2}{n}$, also $\tau = \frac{2\pi r h}{n \mu F \sqrt{2g}} \cdot x^{1/2} - \frac{\pi h}{n \mu F \sqrt{2g}} \cdot x^{3/2}$; da der erste Theil dieses Ausdruckes mit der Formel für das Leeren des prismatischen und der zweite Theil für das Leeren des pyramidalen Gefäßes übereinstimmt, wenn man nur das eine Mal $2\pi r h$ statt bl und das zweite Mal πh^2 statt G setzt, so erhält man mit Hülfe der Differenz für die im vorigen Paragraphen gefundenen Ausleerungszeiten eines prismatischen und eines pyramidalen Gefäßes: $t = \frac{2}{3} \cdot \frac{blh}{\mu F \sqrt{2gh}}$ und $t = \frac{2}{5} \cdot \frac{Gh}{\mu F \sqrt{2gh}}$ auch die Ausleerungszeit des Kugelsegmentes.

Fig. 579.



Für das obelisk- oder pontonförmige Gefäß ACD_1, Fig. 579, lassen sich, da dasselbe aus einem Parallelepipede, aus zwei Prismen und einer Pyramide zusam-

Kugel- und obeliskenförmige Gefäße.

mengesetzt ist, die obigen Formeln ebenfalls anwenden. Ist b die obere Breite AD, b_1 die untere Breite A_1D_1, ferner l die obere Länge AB und l_1 die untere Länge A_1B_1, und ist endlich h die Höhe des Gefäßes, so hat man für die Fläche des Wasserspiegels AC, $bl = b_1l_1 + b_1(l-l_1) + l_1(b-b_1) + (l-l_1)(b-b_1)$, und davon gehört b_1l_1 dem Parallelepipede A_1C_1EG, $b_1(l-l_1) + l_1(b-b_1)$ den beiden Prismen CFB_1C_1 und AFB_1A_1 und $(l-l_1)(b-b_1)$ der Pyramide BFB_1 an. Nun ist aber die Ausflußzeit für das Parallelepiped mit der Basis b_1l_1: $t_1 = \frac{2b_1l_1\sqrt{h}}{\mu F\sqrt{2g}}$, ferner die Ausflußzeit für die beiden dreiseitigen Prismen $t_2 = \frac{2}{3}\,\frac{[b_1(l-l_1) + l_1(b-b_1)]\sqrt{h}}{\mu F\sqrt{2g}}$, und endlich die für die Pyramide $t_3 = \frac{2}{5}\,\frac{(l-l_1)(b-b_1)\sqrt{h}}{\mu F\sqrt{2g}}$; es folgt daher die Ausflußzeit für das ganze Gefäß: $t = t_1 + t_2 + t_3$

$$= [30b_1l_1 + 10b_1(l-l_1) + 10l_1(b-b_1) + 6(l-l_1)(b-b_1)]\,\frac{\sqrt{h}}{15\,\mu F\sqrt{2g}}$$

$$= [3bl + 8b_1l_1 + 2(bl_1 + b_1l)]\,\frac{2\sqrt{h}}{15\,\mu F\sqrt{2g}}.$$

Ist $\frac{b_1}{l_1} = \frac{b}{l}$, so hat man es mit einer abgekürzten Pyramide zu thun. Setzen wir für diese die Grundfläche $bl = G$ und die Grundfläche $b_1l_1 = G_1$, so erhalten wir:

$$t = (3G + 8G_1 + 4\sqrt{GG_1})\,\frac{2\sqrt{h}}{15\,\mu F\sqrt{2g}}.$$

Uebrigens ist leicht zu ermessen, daß diese Formel auch für jede drei- oder vielseitige Pyramide gilt.

Beispiel. Ein obeliskenförmiger Wasserkasten ist oben 5 Fuß lang und 3 Fuß breit, und 4 Fuß tiefer, nämlich im Niveau der 1 Zoll weiten und 3 Zoll langen horizontalen Ansatzröhre, 4 Fuß lang und 2 Fuß breit, wie viel Zeit braucht das den Kasten anfangs ganz füllende Wasser, um $2\frac{1}{2}$ Fuß zu sinken? Die Zeit zum Leeren ist, $\mu = 0{,}815$ angenommen:

$$t = [8.4.2 + 3.5.3 + 2(3.4 + 5.2)]\,\frac{2\sqrt{4}}{15\,.\,0{,}815\,.\,\frac{\pi}{4}\,.\left(\frac{1}{12}\right)^2.\,7{,}906}$$

$$= \frac{153\,.\,4\,.\,4\,.\,144}{15\,.\,0{,}815\,.\,7{,}906\,.\,\pi} = 153\,.\,\frac{2304}{12{,}225\,.\,7{,}906\,\pi} = 153\,.\,7{,}588 = 1161 \text{ Sec.}$$

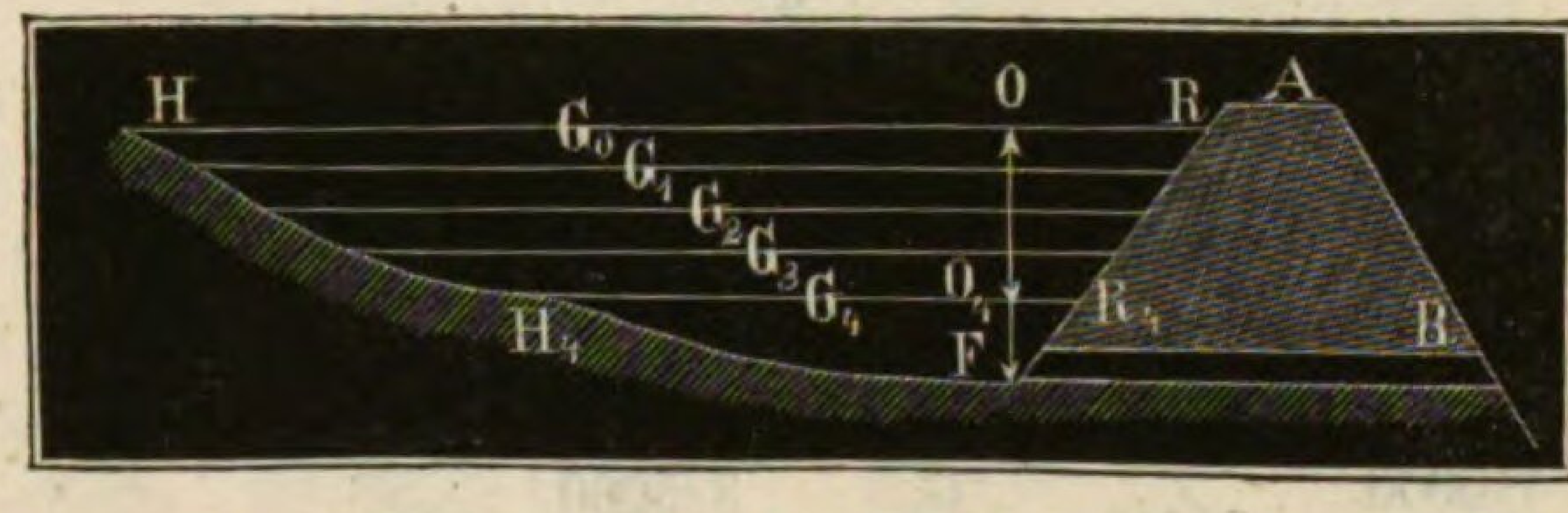
Im Niveau $4 - 2\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$ Fuß über der Röhre ist $l = l_1 + \frac{3}{8} = 4\frac{3}{8}$ und $b = b_1 + \frac{3}{8} = 2\frac{3}{8}$ Fuß, daher die Zeit zum Leeren, wenn das Gefäß nur bis zu diesem Niveau gefüllt ist,

$$t_1 = [8.4.2+3.{}^{35}/_8 . {}^{19}/_8 + 2(2.{}^{35}/_8 + 4.{}^{19}/_8)] . \frac{1152\sqrt{1,5}}{15.0,815.7906\,\pi}$$

$= 131,672 . 4,6465 = 612$ Sec. Die Differenz der gefundenen Zeiten giebt die Zeit, innerhalb welcher der anfänglich bis zum Kopfe des Gefäßes reichende Wasserspiegel um $2^1/_2$ Fuß sinkt.

§. 387. Ist die Ausflußzeit für ein **ungesetzmäßig geformtes** Gefäß *HFR*, Fig. 580, zu finden, so hat man eine Annäherungsmethode, z. B. Ungesetzmäßige Gefäße.

Fig. 580.



die **Simpson'sche** Regel, anzuwenden. Hat man die ganze Wassermasse in vier gleich hohe Schichten getheilt, und die den Horizontalschnitten G_0, G_1, G_2, G_3, G_4 entsprechenden Druckhöhen durch h_0, h_1, h_2, h_3, h_4 bezeichnet, so ergiebt sich die Ausflußzeit durch die **Simpson'sche** Regel:

$$t = \frac{h_0 - h_4}{12\mu F\sqrt{2g}}\left(\frac{G_0}{\sqrt{h_0}} + \frac{4G_1}{\sqrt{h_1}} + \frac{2G_2}{\sqrt{h_2}} + \frac{4G_3}{\sqrt{h_3}} + \frac{G_4}{\sqrt{h_4}}\right).$$

Bei Annahme von 6 Schichten erhält man:

$$t = \frac{h_0 - h_6}{18\mu F\sqrt{2g}}\left(\frac{G_0}{\sqrt{h_0}} + \frac{4G_1}{\sqrt{h_1}} + \frac{2G_2}{\sqrt{h_2}} + \frac{4G_3}{\sqrt{h_3}} + \frac{2G_4}{\sqrt{h_4}} + \frac{4G_5}{\sqrt{h_5}} + \frac{G_6}{\sqrt{h_6}}\right).$$

Das Ausflußquantum ist im ersten Falle:

$$Q = \frac{h_0 - h_4}{12}(G_0 + 4G_1 + 2G_2 + 4G_3 + G_4), \text{ im zweiten:}$$

$$Q = \frac{h_0 - h_6}{18}(G_0 + 4G_1 + 2G_2 + 4G_3 + 2G_4 + 4G_5 + G_6).$$

Ist die Gestalt und Größe des Ausflußgefäßes nicht bekannt, so kann man durch die in gleichen Zeitintervallen beobachteten Wasserstände die Ausflußmenge gleichwohl berechnen. Ist t dieses Zeitintervall, so hat man bei Boden- und Seitenöffnungen:

$$Q = \frac{\mu F t\sqrt{2g}}{3}(\sqrt{h_0} + 4\sqrt{h_1} + 2\sqrt{h_2} + 4\sqrt{h_3} + \sqrt{h_4}),$$

und für Ueberfälle oder Wandeinschnitte

$$Q = {}^2/_9\mu b t\sqrt{2g}(\sqrt{h^3_0} + 4\sqrt{h^3_1} + 2\sqrt{h^3_2} + 4\sqrt{h^3_3} + \sqrt{h^3_4}).$$

Beispiel. In welcher Zeit sinkt der Wasserspiegel eines Teiches um 6 Fuß, wenn das Teichgerinne einen halben Cylinder von 18 Zoll Weite, 9 Zoll Tiefe und 60 Fuß Länge bildet, und die Wasserspiegel folgende Inhalte haben:

Ungesetzmäßige Gefäße.

G_0, bei 20 Fuß Druckhöhe = 600000 Quadratfuß.
G_1, » 18,5 » » = 495000 »
G_2, » 17,0 » » = 410000 »
G_3, » 15,5 » » = 325000 »
G_4, » 14,0 » » = 265000 »

Es ist $F = \frac{\pi}{8} \cdot (3/2)^2 = \frac{9\pi}{32} = 0,8836$ Quadratfuß. Setzen wir, wie im Beispiel zu §. 385, den Widerstandscoefficienten für den Eintritt = 0,832, und den für die Reibung $= 0,025 \cdot \frac{l}{d} = 0,025 \cdot 60 \cdot 1,091 = 1,6356$, so ist der Ausflußcoefficient $\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,832 + 1,6365}} = \frac{1}{\sqrt{3,4685}} = 0,537$, und $\mu F \sqrt{2g} = 0,537 \cdot 0,8836 \cdot 7,906 = 3,7518$. Nun hat man

$$\frac{G_0}{\sqrt{h_0}} = \frac{600000}{\sqrt{20}} = 134170,\ \frac{G_1}{\sqrt{h_1}} = \frac{495000}{\sqrt{18,5}} = 115090,$$

$$\frac{G_2}{\sqrt{h_2}} = \frac{410000}{\sqrt{17}} = 99440,\ \frac{G_3}{\sqrt{h_3}} = \frac{325000}{\sqrt{15,5}} = 82550,$$

$\frac{G_4}{\sqrt{h_4}} = \frac{265000}{\sqrt{14}} = 70830$, daher folgt die Ausflußzeit:

$$t = \frac{6}{12 \cdot 3,7518}(134170 + 4 \cdot 115090 + 2 \cdot 99440 + 4 \cdot 82550 + 70830)$$
$$= \frac{1194440}{7,5036} = 159190 \text{ Sec.} = 44 \text{ Stunden } 13 \text{ Minuten.}$$

Das Ausflußquantum ist:

$$Q = 6/12 \cdot (600000 + 4 \cdot 495000 + 2 \cdot 410000 + 4 \cdot 325000 + 265000)$$
$$= \frac{4965000}{2} = 2482500 \text{ Cubikfuß.}$$

Zu- und Abfluß.

§. 388. Erhält das Gefäß während des Ausflusses von unten noch Zufluß von oben, so wird die Bestimmung der Zeit, innerhalb welcher der Wasserspiegel auf eine gewisse Höhe steigt oder sinkt, viel verwickelter, so daß man sich meist mit einer angenäherten Bestimmung begnügen muß. Ist das Zuflußquantum pr. Sec. $Q_1 > \mu F \sqrt{2gh}$, so findet ein Steigen und ist $Q_1 < \mu F \sqrt{2gh}$, so findet ein Sinken des Wasserspiegels statt. Uebrigens tritt hier alle Mal Beharrungszustand ein, wenn die Druckhöhe auf $k = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q_1}{\mu F}\right)^2$ angewachsen oder herabgesunken ist. Die Zeit τ, innerhalb welcher die veränderliche Druckhöhe x um die kleine Größe ξ wächst, ist bestimmt durch die Gleichung $G_1 \xi = Q_1 \tau - \mu F \sqrt{2gx} \cdot \tau$, und dagegen die Zeit, innerhalb welcher der Wasserspiegel um ξ sinkt, durch

$$G_1 \xi = \mu F \sqrt{2gx} \cdot \tau - Q_1 \tau.$$

Man hat daher im ersten Falle $\tau = \frac{G_1 \xi}{Q_1 - \mu F \sqrt{2gx}}$ und im zweiten

$\tau = \frac{G_1 \xi}{\mu F \sqrt{2 g x} - Q_1}$. Durch Anwendung der Simpson'schen Regel erhält man so die Ausflußzeit, innerhalb welcher der Wasserspiegel sinkend aus G_0 in G_1, G_2. . . und die Druckhöhe aus h_0 in h_1, h_2. . . übergeht: Zu- und Abfluß.

$$t = \frac{h_0 - h_4}{12} \left[\frac{G_0}{\mu F \sqrt{2 g h_0} - Q_1} + \frac{4 G_1}{\mu F \sqrt{2 g h_1} - Q_1} + \frac{2 G_2}{\mu F \sqrt{2 g h_2} - Q_1} + \frac{4 G_3}{\mu F \sqrt{2 g h_3} - Q_1} + \frac{G_4}{\mu F \sqrt{2 g h_4} - Q_1} \right]$$

oder einfacher, wenn man $\frac{Q_1}{\mu F \sqrt{2 g}}$ durch $\sqrt{k}$ bezeichnet,

$$t = \frac{h_0 - h_4}{12 \mu F \sqrt{2 g}} \left[\frac{G_0}{\sqrt{h_0} - \sqrt{k}} + \frac{4 G_1}{\sqrt{h_1} - \sqrt{k}} + \frac{2 G_2}{\sqrt{h_2} - \sqrt{k}} + \frac{4 G_3}{\sqrt{h_3} - \sqrt{k}} + \frac{G_4}{\sqrt{h_4} - \sqrt{k}} \right].$$

Ist das Gefäß prismatisch und hat es den unveränderlichen Querschnitt G, so hat man

$$t = \frac{2 G}{\mu F \sqrt{2 g}} \left[\sqrt{h} - \sqrt{h_1} + \sqrt{k} \, . \, log. nat. \left(\frac{\sqrt{h} - \sqrt{k}}{\sqrt{h_1} - \sqrt{k}} \right) \right],$$

die Zeit, innerhalb welcher die Druckhöhe aus h in h_1 übergeht. Da für $h_1 = k$, $\frac{\sqrt{h} - \sqrt{k}}{\sqrt{h_1} - \sqrt{h}} = \frac{\sqrt{h} - \sqrt{k}}{0} = \infty$ wird, so folgt, daß der Beharrungszustand erst unendlich spät eintritt.

Bei einem Wandeinschnitte stellt sich folgende Formel heraus:

$$t = \frac{G k}{3 Q_1} \left[log. nat. \frac{(\sqrt{h} - \sqrt{k})^2 \, (h_1 + \sqrt{h_1 k} + k)}{(\sqrt{h_1} - \sqrt{k})^2 \, (h + \sqrt{h\, k} + k)} + \sqrt{12} \, . \, arc \left(tang. = \frac{(\sqrt{h} - \sqrt{h_1}) \sqrt{12 k}}{3 k + (2 \sqrt{h} + \sqrt{k}) (2 \sqrt{h_1} + \sqrt{k})} \right) \right],$$

wo $k = \left(\frac{Q_1}{{}^2/_3 \mu b \sqrt{2 g}} \right)^{2/3}$, *log. nat.* den natürlichen Logarithmen und *arc* (*tang.* $= y$) den der Tangente y entsprechenden Kreisbogen bezeichnet. Je nachdem $k \lesseqgtr h$, oder das zufließende Wasserquantum $Q_1 \gtreqless {}^2/_3 \mu b \sqrt{2 g h^3}$ ist, findet ein Steigen oder ein Fallen des Wasserspiegels statt. Der Beharrungszustand tritt ein, wenn $h_1 = k$ ist, die entsprechende Zeit t fällt aber ∞ aus.

Zu- und Abfluß. **Beispiel.** In welcher Zeit steigt das Wasser in einem 12 Fuß langen und 6 Fuß breiten parallelepipedischen Kasten von Null auf 2 Fuß Höhe über der Schwelle eines ½ Fuß beiten Wandeinschnittes, wenn in der Secunde 5 Cubikfuß Wasser zufließen? Man hat hier $h = 0$, daher einfacher

$$t = \frac{Gk}{3Q_1}\left[log.\,nat.\frac{h_1 + \sqrt{h_1 k} + k}{(\sqrt{h_1} - \sqrt{k})^2} + \sqrt{12}\; arc\left(tang. = \frac{-\sqrt{3h_1}}{2\sqrt{k} + \sqrt{h_1}}\right)\right].$$

Nun ist $G = 12.6 = 72$, $Q_1 = 5$, $h_1 = 2$, $b = \frac{1}{2}$ und $\mu = 0{,}6$,

$k = \left(\frac{5}{\frac{2}{3}\,.\,0{,}6\,.\,\frac{1}{2}\,.\,7{,}906}\right)^{\frac{2}{3}} = 2{,}1544$, daher folgt die gesuchte Zeit

$$t = \frac{72.2{,}1544}{3\,.\,5}\left[log.\,nat.\frac{4{,}1544 + \sqrt{4{,}3088}}{(1{,}4142 - 1{,}4678)^2} - \sqrt{12}\,arc\left(tang. = \frac{\sqrt{6}}{1{,}4142 + 2{,}9357}\right)\right]$$

$$= 10{,}341\left[log.\,nat.\,\frac{6{,}2302}{0{,}002873} - \sqrt{12}\,.\,arc\left(tang. = \frac{\sqrt{6}}{4{,}3499}\right)\right]$$

$$= 10{,}341\;(7{,}682 - 1{,}778) = 10{,}341\;.\;5{,}90 = 61 \text{ Secunden.}$$

Schleusen. §. 389. Eine sehr nützliche Anwendung der eben abgehandelten Lehren läßt sich auf das **Füllen** und **Leeren** der **Schleusen** (franz. écluses; engl. sluices) machen. Man unterscheidet zweierlei Schleusen (Schifffahrtsschleusen), nämlich einfache und doppelte. Die einfache Schleuse, Fig. 581, besteht aus einer Kammer B, welche durch das Oberthor HF vom Oberwasser A und durch das Unterthor RS vom Unterwasser C getrennt wird. Die doppelte Schleuse, Fig. 582, hingegen besteht aus zwei Kammern, mit dem Oberthore KL, Mittelthore HF und Unterthore RS.

Fig. 581.

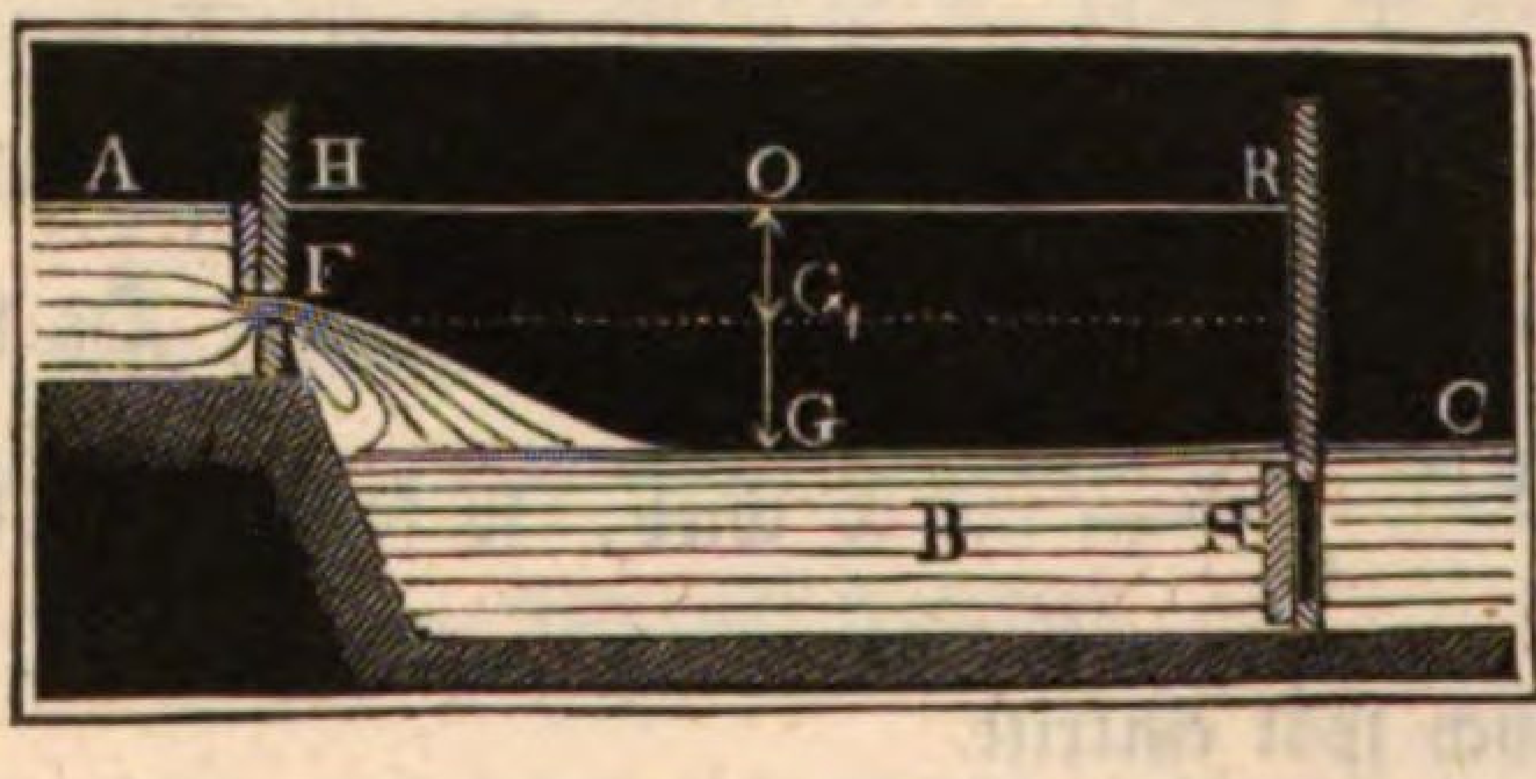
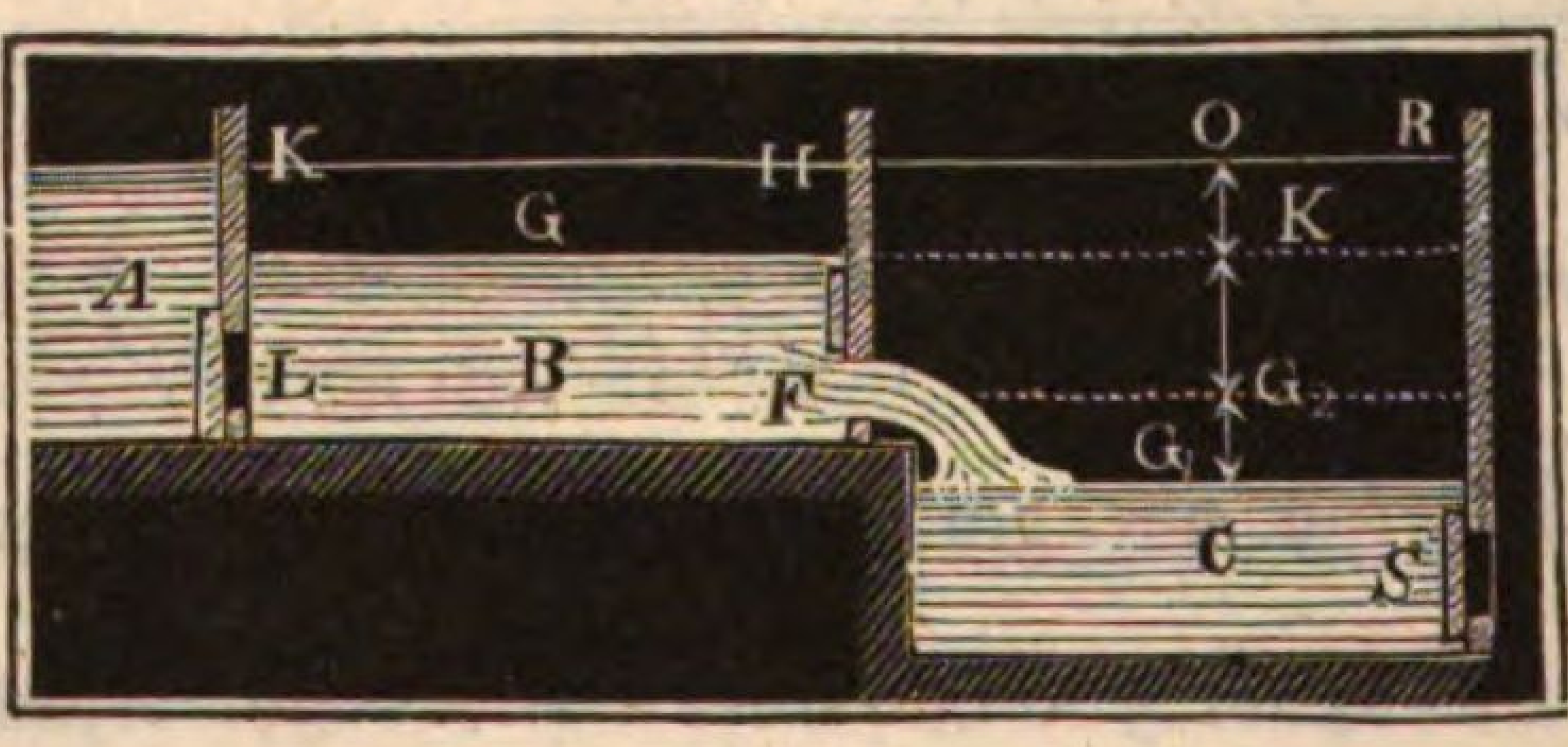


Fig. 582.



Setzen wir den mittleren horizontalen Querschnitt einer einfachen Schleusenkammer $= G$, den Abstand der Mitte der Schutzöffnung im Oberthore von der Oberfläche HR des Oberwassers $= h_1$ und von der des Unterwassers $= h_2$, und endlich den Inhalt der Schutzöffnung $= F$, so erhalten wir die Zeit des Füllens bis zur Mitte der Mündung:

$t_1 = \frac{G h_2}{\mu F \sqrt{2 g h_1}}$ und die Zeit zum Füllen des übrigen Raumes, wo ein

allmäliges Abnehmen der Druckhöhe statt hat, $t_2 = \frac{2 G h_1}{\mu F \sqrt{2 g h_1}}$; es ist folglich die Zeit zum Füllen der einfachen Schleuse Schleusen.

$$t = t_1 + t_2 = \frac{(h_2 + 2 h_1) G}{\mu F \sqrt{2 g h_1}}.$$

Befindet sich die Mündung im Unterthor ganz unter Wasser, so nimmt beim Leeren die Druckhöhe allmälig von $h_1 + h_2$ bis Null ab, es ist daher die Zeit des Leerens oder Ablassens: $t = \frac{2 G \sqrt{h_1 + h_2}}{\mu F \sqrt{2 g}}$.

Steht hingegen ein Theil der Mündung aus dem Unterwasser hervor, so hat man zwei Ausflußmengen, eine über und eine unter Wasser ausfließend, zu berücksichtigen. Setzen wir die Höhe des Theiles der Mündung über dem Wasser $= a_1$ und die Höhe des Theiles unter dem Wasser $= a_2$, die Breite der Mündung aber $= b$, so erhält man die Ausflußzeit durch den Ausdruck:

$$t = \frac{2 G (h_1 + h_2)}{\mu b \sqrt{2 g} \left(a_1 \sqrt{h_1 + h_2 - \frac{a_1}{2}} + a_2 \sqrt{h_1 + h_2}\right)}.$$

Bei den doppelten Schleusen nimmt die Druckhöhe in der vom Oberwasser abgeschlossenen Kammer während des Ausflusses in die zweite Kammer immer mehr und mehr ab. Ist G der horizontale Querschnitt der ersten Kammer und sinkt die anfängliche Druckhöhe h_1 in dieser Kammer auf x herab, während das Wasser in der zweiten Kammer bis zur Mitte der Schutz- oder Ausflußöffnung steigt, so hat man die entsprechende Zeit $t_1 = \frac{2 G}{\mu F \sqrt{2 g}} (\sqrt{h_1} - \sqrt{x})$. Nun ist aber Wasserquantum $G (h_1 - x) = G_1 h_2$, daher $x = h_1 - \frac{G_1}{G} h_2$ und

$$t_1 = \frac{2 G}{\mu F \sqrt{2 g}} \left(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_1 - \frac{G_1 h_2}{G}}\right) = \frac{2 \sqrt{G}}{\mu F \sqrt{2 g}} (\sqrt{G h_1} - \sqrt{G h_1 - G_1 h_2}).$$

Die Zeit, in welcher das Wasser in der zweiten Kammer so hoch steigt, als in der ersten Kammer, nach welcher also das Wasser in beiden in einerlei Niveau kommt, bestimmt sich nach §. 383:

$$t_2 = \frac{2 G G_1 \sqrt{x}}{\mu F (G + G_1) \sqrt{2 g}} = \frac{2 G_1 \sqrt{G} \sqrt{G h_1 - G_1 h_2}}{\mu F (G + G_1) \sqrt{2 g}},$$

und die ganze Füllungszeit:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{2 \sqrt{G}}{\mu F \sqrt{2 g}} \left(\sqrt{G h_1} - \frac{G}{G + G_1} \sqrt{G h_1 - G_1 h_2}\right).$$

Schleusen. **Beispiel.** Welche Zeit ist zum Füllen und Ablassen folgender einfachen Schleusenkammer nöthig? Mittlere Schleusenlänge = 200 Fuß, mittlere Breite = 24 Fuß, also $G = 200 \cdot 24 = 4800$ Quadratfuß, Abstand des Mittelpunktes der Schutzöffnung im Oberthore von beiden Wasserspiegeln 5 Fuß, Breite beider Oeffnungen $2\frac{1}{2}$ Fuß, Höhe der Oeffnung im Oberthore 4 Fuß, und Höhe der Oeffnung im Unterthore (ganz unter Wasser) 5 Fuß. Setzen wir in

$t = \frac{(2h_1 + h_2)G}{\mu F\sqrt{2gh_1}}$, $h_1 = 5$, $h_2 = 5$, $G = 4800$, $\mu = 0{,}615$, $F = 4 \cdot 2\frac{1}{2} = 10$ und $\sqrt{2g} = 7{,}906$, so bekommen wir die Zeit zum Füllen:

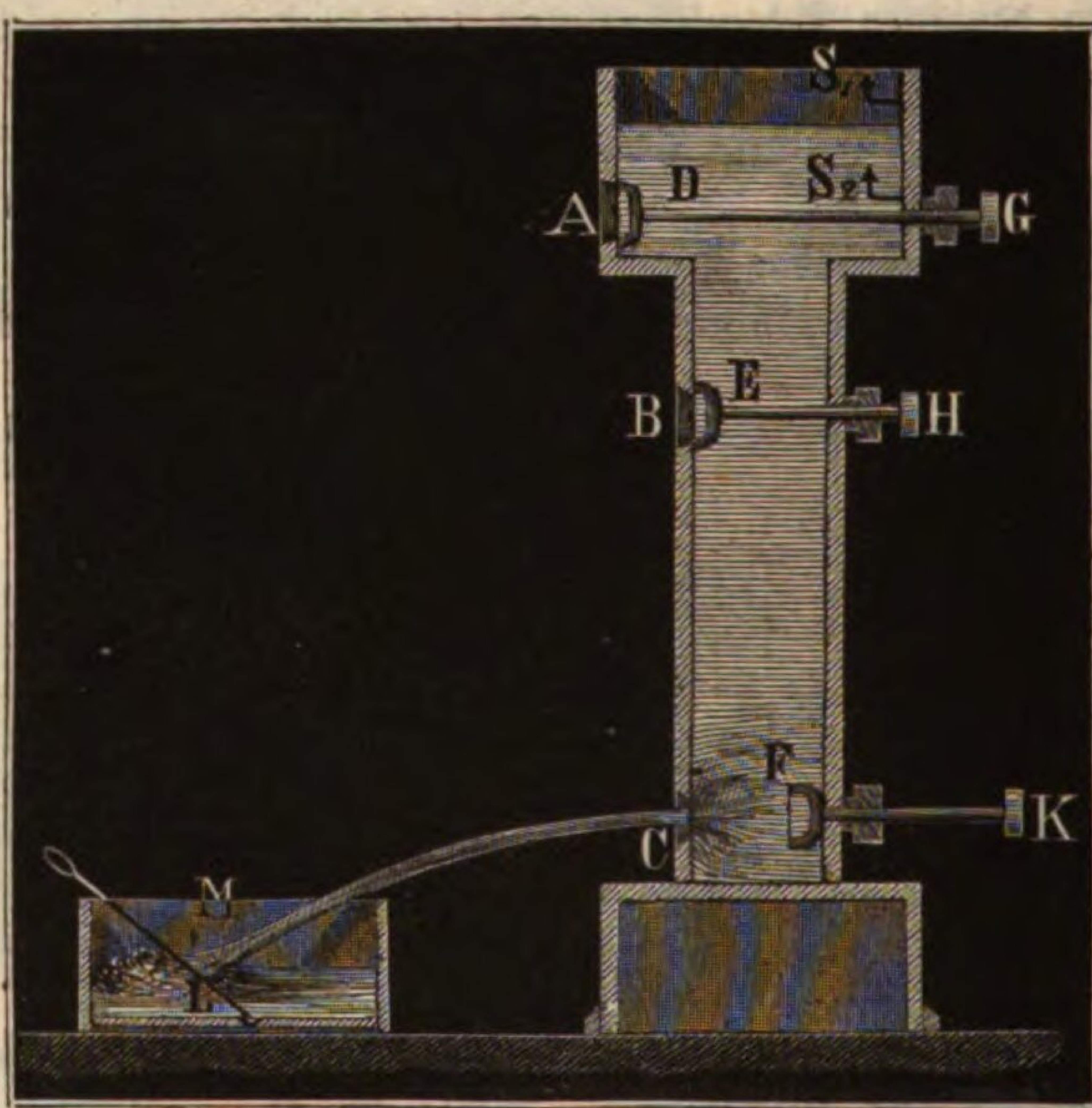
$$t = \frac{3 \cdot 5 \cdot 4800}{6{,}15 \cdot 7{,}906\sqrt{5}} = \frac{14400}{1{,}23 \cdot 7{,}906\sqrt{5}} = 662 \text{ Sec.} = 11 \text{ Min. } 2 \text{ Sec.}$$

Setzen wir in der Formel $t = \frac{2G\sqrt{h_1 + h_2}}{\mu F\sqrt{2g}}$, $G = 4800$, $h_1 + h_2 = 10$, $F = 5 \cdot 2\frac{1}{2} = 12{,}5$, so erhalten wir die Zeit zum Leeren der Schleuse:

$$t = \frac{2 \cdot 4800\sqrt{10}}{0{,}615 \cdot 12{,}5 \cdot 7{,}906} = 500 \text{ Sec.} = 8 \text{ Min. } 20 \text{ Sec.}$$

Hydraulischer Versuchsapparat. §. 390. Durch einen in Fig. 583 abgebildeten **hydraulischen Versuchsapparat** kann man nicht allein durch mehr als 100 Versuche die wichtigsten Erscheinungen des Ausflusses vor Augen führen, sondern auch die hauptsächlichsten Gesetze derselben in Zahlen nachweisen. Dieser

Fig. 583.



Apparat besteht in einem Ausflußgefäße mit drei Mündungen A, B, C, deren Abstände von dem mittleren Wasserspiegel HR um Höhen abstehen,

welche gegen einander in dem Verhältnisse wie 1 zu 4 zu 9 zu einander stehen. In diese Mündungen lassen sich die verschiedenartigsten Mundstücke und Röhren einsetzen, und damit dies ohne Störung durch das Wasser geschehen könne, hat man besondere Verschließungsklappen D, E, F, deren Stiele G, H, K durch Stopfbüchsen in der Rückwand des Apparates hindurchgehen, angebracht. In dem oberen und weiteren Theile des Apparates befinden sich noch zwei zugespitzte und nach oben gerichtete Haken S_1 und S_2, welche als Anhaltepunkte bei den Versuchen dienen, indem der Durchgang des sinkenden Wasserspiegels durch diese Spitzen den Anfang und das Ende eines jeden Versuches bestimmt. Das ausfließende Wasser wird in einem Gefäße M aufgefangen, das vor dem folgenden Versuche auf das Ausflußreservoir gesetzt wird und durch ein mit einem Stöpsel versehenes Loch L seinen Inhalt in das Reservoir zurückführt. Hydraulischer Versuchsapparat.

Um mit Hülfe dieses Apparates die Ausflußcoefficienten μ verschiedener Mundstücke und Röhren zu finden, hat man mittels einer guten Secundenuhr die Zeit t zu beobachten, innerhalb welcher während des Ausflusses der Wasserspiegel von der einen Spitze bis zur anderen sinkt, oder die Druckhöhe h_1 in die Druckhöhe h_2 übergeht; ist dann noch F der Querschnitt der Ausflußmündung und G der Inhalt des sinkenden Wasserspiegels, so hat man den Ausflußcoefficienten (s. §. 382):

$$\mu = \frac{2G\,(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2})}{F\,t\,\sqrt{2g}},$$

und die entsprechende mittlere Druckhöhe:

$$h = \left(\frac{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}}{2}\right)^2.$$

Zu diesem Apparate gehört noch eine Sammlung von Mundstücken und Röhren, nämlich quadratische, rectanguläre, kreisförmige und trianguläre Mündungen in dünnem Blech, mit oder ohne innerer Einfassung, kurze cylindrische und conische Röhren, längere gerade Röhren von verschiedenen Weiten, Kropf- und Knieröhren u. s. w., welche sich in die verschiedenen Ausflußlöcher A, B, C einsetzen lassen. Mittels dieses so ausgerüsteten Apparates kann man in wenig Stunden fast alle Erscheinungen und Gesetze des Ausflusses vor Augen führen; man kann an demselben nicht nur die vollkommene und unvollkommene, die vollständige und unvollständige, sondern auch die verschiedenen Grade der Contraction der Wasserstrahlen studiren, ferner die Reibungs-, Knie- und Krümmungswiderstände in Röhren, so wie auch den positiven und negativen Druck des Wassers, durch Springen und Ansaugen u. s. w kennen lernen. Immer wird man auf recht leidliche, zum Theil aber auch auf überraschend gute Uebereinstimmungen mit den mitgetheilten Erfahrungsgrößen

Hydraulischer Versuchsapparat.

(μ, φ, α, ζ) stoßen. Bei unserem Apparate ist $G = 0{,}080$ Quadratmeter, die gewöhnliche Mündungs- und Röhrenweite ohngefähr 1 Centimeter, und für die untere Mündung $h_1 = 0{,}81$ und $h_2 = 0{,}69$ Meter. (Eine ausführliche Beschreibung dieses Apparates ist im polytechnischen Centralblatte Nr. 4, 1848, enthalten.)

Ein Beispiel, wie gut die Beobachtungen an diesem Apparate mit den bekannten Versuchen im Großen übereinstimmen, ist Folgendes. Für eine kurze cylindrische Ansatzröhre im unteren Loche wurde $t = 33$, für eine längere Glasröhre mit dem Längenverhältnisse $\frac{l}{d} = 124$ aber $t = 56$ Secunden gefunden; hieraus berechnet sich für die eine $\mu_1 = 0{,}815$ und $\zeta_1 = \frac{1}{\mu_1^2} - 1 = 0{,}504$, und für die andere $\mu_2 = 0{,}480$ und $\zeta_2 = \frac{1}{\mu_1^2} - 1 = 3{,}332$, es folgt hiernach $\zeta_2 - \zeta_1 = 3{,}332 - 0{,}504 = 2{,}828$, und daher der Reibungscoefficient der Röhre:

$$\zeta = \frac{d}{l}(\zeta_2 - \zeta_1) = \frac{2{,}828}{124} = 0{,}0228.$$

Nach der Tabelle in §. 366 ist aber für die mittlere Geschwindigkeit $v = 1{,}84$ Meter, mit welcher das Wasser aus der Röhre ausfloß, $\zeta = 0{,}0215$, also die Uebereinstimmung eine ganz gute. Bei diesen Versuchen läßt sich auch auf das Ueberzeugendste nachweisen, daß die Ausflußgeschwindigkeit durch Röhren nicht von der Neigung derselben, sondern nur von der Druckhöhe der Ausmündung abhängt. Es fällt z. B. die Ausflußzeit gleich groß aus, die lange Röhre mag im mittleren oder im unteren Loche stecken, wenn nur die Ausmündung derselben gleich tief unter dem Wasserspiegel im Reservoir steht.

Schlußanmerkung. Die Literatur über den Ausfluß des Wassers und über die Bewegung des Wassers in Röhren wird am vollständigsten mitgetheilt in der allgemeinen Maschinenencyclopädie, Band 1, Art. Ausfluß. Von den neueren Schriften ist hier nur anzuführen: Gerstner, Handbuch der Mechanik, Band 2, Prag 1832; ferner D'Aubuisson's Traité d'Hydraulique à l'usage des Ingénieurs. II. édit. 1840. Die erste Ausgabe ist auch deutsch erschienen. Eytelwein's Handbuch der Mechanik fester Körper und der Hydraulik, dritte Auflage, 1842; ferner Scheffler's Principien der Hydrostatik und Hydraulik, Braunschweig 1847. Wegen ihrer praktischen Haltung behalten die älteren hydraulischen Schriften von Bossut und Du Buat immer einen gewissen Werth.

Sechstes Kapitel.

Von dem Ausflusse der Luft aus Gefäßen und Röhren.

§. 391. Die verdichtete Luft fließt nicht genau nach dem Gesetze aus Gefäßen wie das Wasser, weil mit dem Ausflusse derselben eine Ausdehnung verbunden ist, die sich beim Ausflusse des Wassers nicht vorfindet. Um aber ein solches Gesetz für die Luft und andere Gasarten aufzufinden, setzen wir die Arbeit $Q\gamma \frac{v^2}{2g}$, welche ein Luftquantum Q von der Dichtigkeit γ in Anspruch nimmt, um aus der Ruhe in die Geschwindigkeit v überzugehen, gleich der in §. 330 gefundenen Arbeit $Qp\, Log. nat. \left(\frac{p_1}{p}\right)$, welche dasselbe Luftquantum verrichtet, wenn es aus der größeren Pressung p_1 in die kleinere Pressung p übergeht. Ist also p_1 die Expansivkraft der in einem Gefäße eingeschlossenen Luft, v die Ausflußgeschwindigkeit derselben, p die Spannung der Luft außerhalb des Gefäßes, und γ die Dichtigkeit derselben, so läßt sich setzen: Ausfluß der ruhigen Luft.

$Q\gamma \cdot \frac{v^2}{2g} = Qp\, Log.\, nat. \left(\frac{p_1}{p}\right)$, also die Geschwindigkeitshöhe

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{p}{\gamma} Log. nat. \left(\frac{p_1}{p}\right) = 2{,}3026\, \frac{p}{p}\, Log. \left(\frac{p_1}{p}\right),$$

und die Geschwindigkeit selbst

$$v = \sqrt{2\, g\, \frac{p}{\gamma}\, Log.\, nat. \left(\frac{p_1}{p}\right)}.$$

Nur dann, wenn die Spannungen p und p_1 wenig von einander verschieden sind, wenn $p_1 - p < \frac{1}{10} p$ ist, läßt sich

$Log.\ nat. \left(\frac{p_1}{p}\right) = Log. nat. \left(1 + \frac{p_1 - p}{p}\right) = \frac{p_1 - p}{p}$, und daher

$v = \sqrt{2\, g \left(\frac{p_1 - p}{\gamma}\right)}$ setzen. Nun ist aber die Höhe einer äußeren Luftsäule, welche durch ihr Gewicht dem Drucke $p_1 - p$ das Gleichgewicht hält (s. §. 327), $h = \frac{p_1 - p}{\gamma}$; es läßt sich daher die Ausflußgeschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$ setzen, und man erhält hierdurch eine vollständige Ueber-

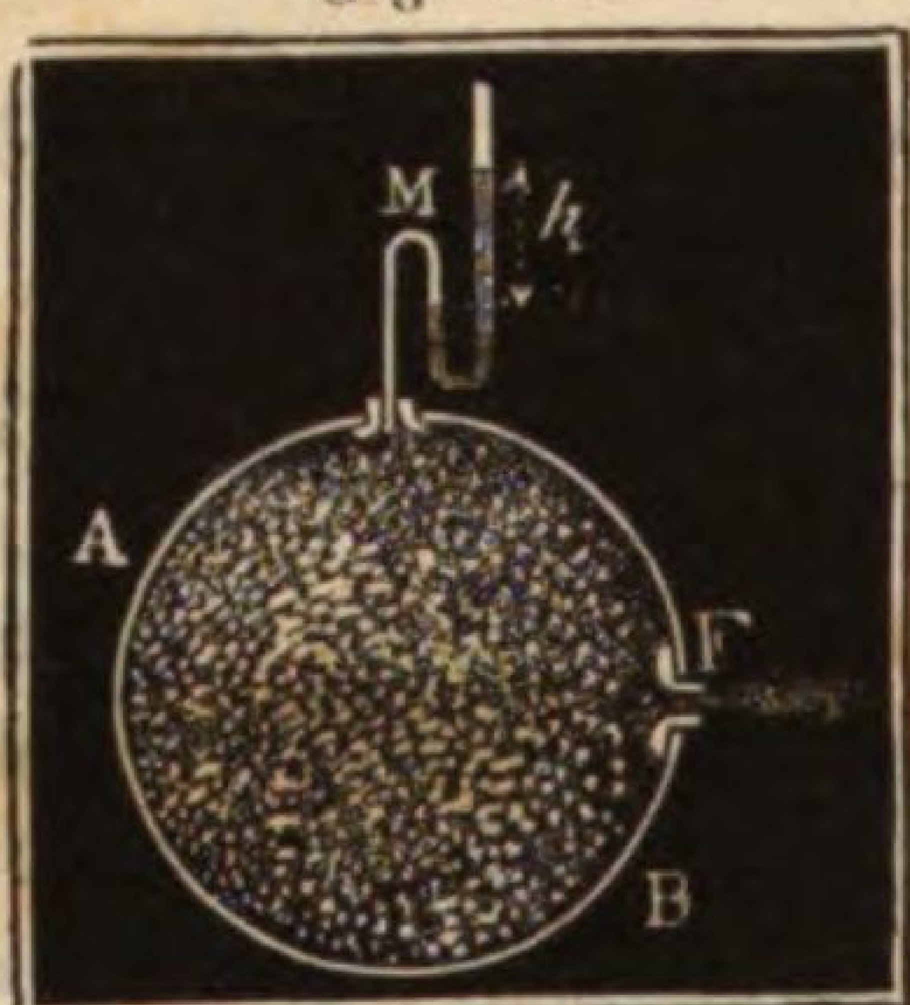
Ausfluß der ruhigen Luft.

einstimmig mit dem Ausflusse des Wassers. Bei höheren Pressungen reicht allerdings diese Formel nicht mehr aus, hier ist mindestens $Log.\,nat.\left(\frac{p_1}{p}\right) = \frac{p_1 - p}{p} - \frac{1}{2}\left(\frac{p_1 - p}{p}\right)^2$ zu setzen, weshalb man denn auch schon weit genauer $v = \sqrt{2g\left(\frac{p_1 - p}{\gamma} - \frac{1}{2}\,\frac{(p_1 - p)^2}{p\gamma}\right)}$ $= \sqrt{2g\left(1 - \frac{p_1 - p}{2p}\right)h}$, oder, wenn man den Luftbarometerstand der äußeren Luft $= b$, also $p = b\gamma$ setzt,

$$v = \sqrt{2g\left(1 - \frac{h}{2b}\right)h} = \left(1 - \frac{h}{4b}\right)\sqrt{2gh}$$ hat.

Ist die Ausflußöffnung F des Gefäßes AB, Fig. 584, immer genau und glatt abgerundet, so fließen die Luftelemente in parallelen Linien aus und es ist daher die durch die Oeffnung in jeder Secunde ausfließende und unter dem äußeren Barometerstande gemessene Luftmenge:

Fig. 584.



$$Q = Fv = F\left(1 - \frac{h}{4b}\right)\sqrt{2gh},$$

oder genauer

$$= F\sqrt{2\,g\,b\;Log.\,nat.\left(\frac{b+h}{b}\right)}.$$

§. 392. Die im vorigen §. gefundenen Formeln lassen sich nicht unmittelbar zur Anwendung bringen, da man weder den inneren noch den äußeren Druck durch die Längen $b + h$ und b von Luftsäulen zu messen vermag. In der Regel mißt man diese Drücke vielmehr durch Quecksilber- oder Wassersäulen. Was nun den Quotienten $\frac{p_1}{p} = \frac{b+h}{b}$ anlangt, so ist es allerdings einerlei, ob man b und h in Luft-, Wasser- oder Quecksilbersäulen ausdrückt, weil jede Reduction von b und h den Bruch $\frac{b+h}{b}$ unverändert läßt, allein der Quotient $\frac{p}{\gamma} = b$ ist noch von der Temperatur der ausströmenden Luft abhängig und auch bei verschiedenen Luftarten verschieden. Für atmosphärische Luft hat man (s. §. 333), wenn man unter p den Druck der Luft auf 1 Quadratcentimeter, unter γ das Gewicht eines Cubikmeters Luft, und unter t die Temperatur der Luft versteht, $\frac{p}{\gamma} = \frac{1 + 0{,}00367\,.\,t}{1{,}2572}$, dagegen für Wasserdampf

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{1 + 0{,}00367\,t}{0{,}7857}$$

Setzt man diese Werthe in der Hauptformel für v ein, so erhält man für atmosphärische Luft: Ausfluß der ruhigen Luft.

$$v = 395 \sqrt{(1 + 0{,}00367 \,.\, t)\, Log.\, nat. \left(\frac{b+h}{b}\right)}\ \text{Meter,}$$

oder bei kleinen $\frac{h}{b}$,

$$v = 395 \sqrt{(1 + 0{,}00367 \,.\, t)\frac{h}{b}}\ \text{Meter, u. für Wasserdämpfe:}$$

$$v = 500{,}6 \sqrt{(1 + 0{,}00367 \,.\, t)\, Log.\, nat. \left(\frac{b+h}{b}\right)}\ \text{Meter.}$$

Die unter dem äußeren Drucke zu messende theoretische Ausflußmenge ist $Q = Fv$, will man aber dieselbe unter dem inneren Drucke messen, so hat man zu setzen $Q_1 p_1 = Qp$, daher folgt $Q_1 = \frac{p}{p_1}\ Q = \frac{bQ}{b+h}$. Auf Null Grad Wärme zurückgeführt, stellt sich endlich das Ausflußquantum $Q_2 = \frac{Q}{1 + 0{,}00367 \,.\, t}$, also für atmosphärische Luft

$$Q_2 = 395 F \sqrt{\frac{Log.\, nat.\, (b+h) - Log.\, nat.\, b}{1 + 0{,}00367 \,.\, t}}\ \text{Cubikmeter heraus.}$$

Sollen bei verschiedenen Temperaturen aus verschiedenen Mündungen F und F_1 bei gleicher Spannung gleiche Luftmassen ausströmen, so muß hiernach sein: $\frac{F_1}{F} = \sqrt{\frac{1 + 0{,}00367\, t_1}{1 + 0{,}00367\, t}}$. Ist z. B. $t = 0$ und $t_1 = 150^0$, so hat man $F_1 = \sqrt{1{,}5505}\,.\, F = 1{,}245\, F$. Wenn man also bei einem Eisenhohofen mit erhitzter Luft von 150^0 Wärme schmelzen will, so muß man Düsen anwenden, welche um ein Viertel mehr Querschnitt in der Ausmündung haben, als bei Anwendung von kalter Luft.

Für das preuß. Fußmaaß hat man bei Luft

$$v = 1258 \,.\, \sqrt{(1 + 0{,}00367\, t)\, Log.\, nat. \left(\frac{b+h}{b}\right)},\ \text{und bei Dampf}$$

$$v = 1595 \,.\, \sqrt{(1 + 0{,}00367\, t)\, Log.\, nat. \left(\frac{b+h}{b}\right)}.$$

Beispiel. In einem großen Behälter ist Luft von 120^0 Wärme eingeschlossen, welcher ein Quecksilbermanometerstand von 5 Zoll entspricht, während der äußere Barometerstand 27,2 Zoll beträgt, welche Windmenge wird aus demselben durch eine $1\frac{1}{2}$ Zoll weite runde Mündung ausströmen? Es ist $Log.\, nat. \left(\frac{b+h}{b}\right) = Log.\, nat. \left(\frac{32{,}2}{27{,}2}\right) = Log.\, nat.\ 322 - Log.\, nat.\ 272$ $= 5{,}77455 - 5{,}60580 = 0{,}16875$, daher die Ausflußgeschwindigkeit

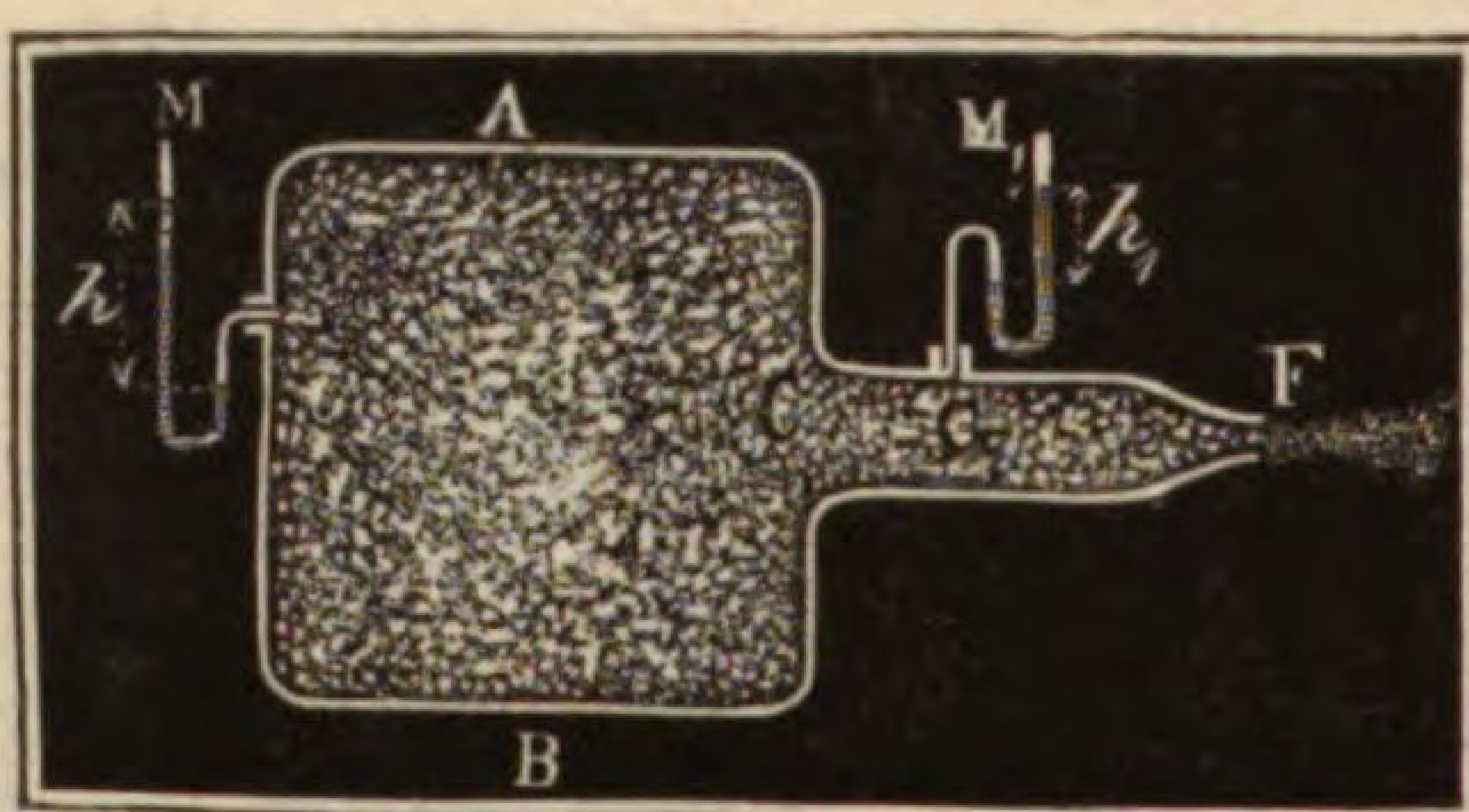
Ausfluß der ruhigen Luft.

$v = 1258 \,.\, \sqrt{(1 + 0{,}00367 \,.\, 120) \,.\, 0{,}16875} = 1258 \,.\, \sqrt{1{,}4404 \,.\, 0{,}16875}$ $= 620{,}2$ Fuß. Nun ist aber der Inhalt der Mündung $= \frac{\pi}{4} (1/8)^2 = \frac{\pi}{256}$ $= 0{,}01227$ Quadratfuß, daher folgt die Ausflußmenge $Q = 0{,}01227 \,.\, 620{,}2$ $= 7{,}61$ Cubikfuß. Unter dem inneren Drucke gemessen, ist dieselbe $= \frac{272}{322} \,.\, 7{,}61 = 6{,}43$ Cubikfuß, und auf den mittleren Barometerstand von 28 Zoll und auf 0° Wärme reducirt, ist das Ausflußquantum $= 7{,}61 \,.\, \frac{272}{280} \,.\, \frac{1}{1{,}4404} = 5{,}13$ Cubikfuß.

Ausfluß der bewegten Luft.

§. 393. Die gefundenen Ausflußformeln setzen voraus, daß die Pressung p_1 oder der Manometerstand h an einer Stelle gemessen worden sei, wo die Luft in Ruhe befindlich ist, oder eine sehr schwache Bewegung hat,

Fig. 585.



mißt man aber p_1 oder h_1 an einem Orte, wo die Luft in Bewegung ist, communicirt z. B. das Manometer M_1 mit der in einer Leitungsröhre CF, Fig. 585 befindlichen Luft, so hat man auch noch die lebendige Kraft der ankommenden Luft zu berücksichtigen. Ist nun c die Geschwindigkeit der vor der Manometermündung vorbeigehenden Luft, so hat man demnach zu setzen: $Q\gamma . \frac{v^2}{2g} = Q\gamma . \frac{c^2}{2g} + Qp \; Log.\, nat. \left(\frac{p_1}{p}\right)$, oder, da wenn F der Querschnitt der Mündung und G der der Röhre oder des an der Manometermündung vorbeigehenden Stromes bezeichnet, nach dem Mariotte'schen Gesetze $\frac{Gc}{Fv} = \frac{p}{p_1}$, oder $G c p_1 = F v p$,

also $c = \frac{F}{G} \,.\, \frac{p}{p_1} \, v$ ist, $Q\gamma \left[1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2 \left(\frac{p}{p_1}\right)^2\right] \frac{v^2}{2g}$ $= Qp \; Log.\, nat. \left(\frac{p_1}{p}\right)$, und die in Frage stehende Ausflußgeschwindigkeit

$$v = \frac{\sqrt{2g \frac{p}{\gamma} Log.\, nat. \left(\frac{p_1}{p}\right)}}{\sqrt{1 - \left(\frac{Fp}{Gp_1}\right)^2}}.$$

Es stellt sich also auch hier, genau wie beim Ausflusse des Wassers aus Gefäßen, die Ausflußgeschwindigkeit um so größer heraus, je größer das Verhältniß $\frac{F}{G}$ zwischen dem Querschnitte der Mündung und dem der Röhre oder des

ankommenden Luftstromes ist. Man ersieht auch hieraus, daß unter übrigens gleichen Verhältnissen der Manometerstand p_1 um so kleiner ausfällt, je enger die Leitungsröhre oder je größer die Geschwindigkeit der durch sie fortgeführten Luft ist. Ausfluß der bewegten Luft.

Beispiel. 1) Ein auf einer $3^1/_2$ Zoll weiten Windleitung sitzendes Quecksilbermanometer steht auf $2^1/_2$ Zoll, während der Wind vom conisch zulaufenden Ende derselben durch eine runde 2 Zoll weite Mündung ausströmt, mit welcher Geschwindigkeit findet dieses Ausströmen statt? Ist der äußere Barometerstand $27^1/_2$ Zoll, so hat man $\frac{p_1}{p} = \frac{27^1/_2 + 2^1/_2}{27^1/_2} = \frac{30}{27,5} = {}^{12}/_{11}$ und $\frac{Fp}{Gp_1} = \left(\frac{2}{3,5}\right)^2 \cdot \frac{11}{12} = \frac{16 \,.\, 11}{49 \,.\, 12} = \frac{44}{147}$; es ist daher die theoretische Ausflußgeschwindigkeit bei 10^0 Windtemperatur:

$$v = \frac{1258 \,.\, \sqrt{1,0367 \; Log.\ nat.\ ({}^{12}/_{11})}}{\sqrt{1 - ({}^{44}/_{147})^2}} = \frac{1258\sqrt{1,0367 \,.\, 0,087}}{\sqrt{0,9104}} = 396 \text{ Fuß}.$$

2) Die Spannung p_2 im Windregulator, wo der Wind ohne Bewegung ist, ergiebt sich durch die Formel $Log.\ nat. \left(\frac{p_2}{p}\right) = \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{\gamma}{p}$, oder $Log.\ nat.\ p_2$

$$= Log.\ nat.\ p + \frac{Log.\ nat.\left(\frac{p_1}{p}\right)}{1 - \left(\frac{Fp}{Gp_1}\right)^2},$$ also in dem vorliegenden Falle

$$= Log.\ nat.\ 27,5 + \frac{0.087}{0,9104} = 3,3142 + 0,0965 = 3,4107.$$ Hieraus folgt $p_2 = 30,3$ Zoll.

§. 394. Wenn ein Windreservoir keinen Zufluß erhält, während durch eine Mündung in demselben ununterbrochenes Ausströmen statt hat, so nimmt die Dichtigkeit und Spannung allmälig ab, und es fällt daher auch die Ausflußgeschwindigkeit während des Ausflusses immer kleiner und kleiner aus. In welchem Verhältnisse nun diese Abnahme zur Zeit und zur Ausflußmenge in derselben steht, läßt sich auf folgende Weise ermitteln. Ausfluß unter abnehmendem Drucke.

Es sei das Volumen des Reservoirs V, der anfängliche Manometerstand $= h_0$, und der Manometerstand am Ende einer gewissen Zeit t, $= h_n$, der äußere Barometerstand aber $= b$. Dann ist das auf den äußeren Druck reducirte Luft- oder Windquantum im Reservoir anfangs $= \frac{V(b+h_0)}{b}$ und am Ende der Zeit t, $= \frac{V(b+h_n)}{b}$, und folglich das innerhalb der Zeit t ausgeflossene und unter dem äußeren Drucke gemessene Windquantum:

$$V_n = \frac{V(b+h_0)}{b} - \frac{V(b+h_n)}{b} = \frac{V(h_0 - h_n)}{b};$$ umgekehrt ist aber der dem Ausflußquantum V_n entsprechende Manometerstand

$$h_n = h_0 - \frac{V_n}{V} \,.\, b.$$

Ausfluß unter abnehmendem Drucke.

Nehmen wir vier Intervalle an, setzen wir den anfänglichen Manometerstand h_0, den am Ende der Zeit $t = h_4$, und setzen wir

$h_1 = h_0 - \frac{h_0 - h_4}{4}$, $h_2 = h_0 - 2/4\,(h_0 - h_4)$ und

$h_3 = h_0 - 3/4\,(h_0 - h_4)$, so erhalten wir mittels der Simpson'schen Regel die Zeit

$$t = \frac{V\,(h_0 - h_4)}{12\,Fb\sqrt{2g\frac{p}{\gamma}}}\left(\frac{1}{\sqrt{Log.nat.\left(\frac{b+h_0}{b}\right)}} + \frac{4}{\sqrt{Log.nat.\left(\frac{b+h_1}{b}\right)}}\right.$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{Log.nat.\left(\frac{b+h_2}{b}\right)}} + \frac{4}{\sqrt{Log.nat.\left(\frac{b+h_3}{b}\right)}}$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{Log.nat.\left(\frac{b+h_4}{b}\right)}}\right).$$

Bei mäßigen Pressungen oder Manometerständen läßt sich

$$Log.nat\left(\frac{b+h}{b}\right) = \frac{h}{b}\left(1 - \frac{h}{2b}\right),$$

$$\text{folglich } \sqrt{Log.nat.\left(\frac{b+h}{b}\right)} = \left(1 - \frac{h}{4b}\right)\sqrt{\frac{h}{b}}$$

und $\frac{1}{\sqrt{Log.nat.\left(\frac{b+h}{b}\right)}} = \left(1 + \frac{h}{4b}\right)\sqrt{\frac{b}{h}}$ setzen.

Nehmen wir nun n Intervalle an, setzen wir also die Ausflußmenge für ein Intervall: $\frac{V_1}{n} = \frac{V(h_0 - h_n)}{nb}$, so bekommen wir das entsprechende

$$\text{Zeitelement } \tau = \frac{V(h_0 - h_n)}{nb} : F\sqrt{2g\frac{p}{\gamma}Log.nat.\left(\frac{b+h}{b}\right)}$$

$$= \frac{V(h_0 - h_n)}{nb}\,\frac{\left(1 + \frac{h}{4b}\right)\sqrt{\frac{b}{h}}}{F\sqrt{2g\frac{p}{\gamma}}}$$

$$= \frac{V\,(h_0 - h_n)\left(h^{-1/2} + \frac{h^{1/2}}{4b}\right)}{n.F\sqrt{2gb\frac{p}{\gamma}}}.$$

Setzen wir nun statt h; h_0, h_1, h_2 .... h_n ein, so erhalten wir die

Summe aller $\left(\frac{h_0-h_n}{n}\right)h^{-1/2} = 2(h_0^{1/2}-h_n^{1/2}) = 2\,(\sqrt{h_0}-\sqrt{h_n}\,)$ Ausfluß unter abnehmendem Drucke.

und die Summe aller $\left(\frac{h_0-h_n}{n}\right)h^{1/2} = {}^2/_3\,(h_0^{3/2}-h_n^{3/2})$

$= {}^2/_3\,(\sqrt{h_0^3}-\sqrt{h_n^3}\,)$, weshalb die Summe aller Zeittheilchen oder die ganze Zeit, innerhalb welcher h_n in h_0 übergeht, und die Windmenge $V_n = \frac{V\,(h_0-h_n\,)}{b}$ ausströmt,

$$t = \frac{2V}{F\sqrt{2gb\frac{p}{\gamma}}}\left[(\sqrt{h_0}-\sqrt{h_n}\,)+\frac{1}{12b}(\sqrt{h_0^3}-\sqrt{h_n^3}\,)\right], \text{ oder}$$

$$= \frac{2V}{F\sqrt{2gb\frac{p}{\gamma}}}(\sqrt{h_0}-\sqrt{h_n})\left(1+\frac{h_0+\sqrt{h_0h_n}+h_n}{12b}\right), \text{ annähernd}$$

$$= \frac{2V}{F\sqrt{2gb\frac{p}{\gamma}}}(\sqrt{h_0}-\sqrt{h_n})\left(1+\frac{h_0+h_n}{8b}\right).$$

Beispiel. Der 50 Fuß lange und 5 Fuß weite cylindrische Windregulator eines Gebläses ist mit Wind angefüllt, dessen Manometerstand $h = 10$ Zoll und Thermometerstand 6^0 beträgt. Wenn nun ein Ausströmen des Windes in einem Raume, dessen Barometerstand 27 Zoll ist, durch eine 1 Zoll weite runde Mündung stattfindet, so entsteht die Frage, in welcher Zeit der Manometerstand auf 7 Zoll herabsinkt, und welches die entsprechende Ausflußmenge ist? Das Volumen des Kessels ist $= \frac{\pi}{4} \,.\, 5^2 \,.\, 50 = 1250 \,.\, \frac{\pi}{4} = 981{,}75$ Cubikfuß, daher die unter dem äußeren Drucke gemessene Ausflußmenge $V_1 = \left(\frac{h_0-h_n}{b}\right)V = \left(\frac{10-7}{27}\right).\,981{,}75$ $= 109{,}08$ Cubikfuß. Nun ist $\sqrt{2g\,\frac{p}{\gamma}} = 1258\sqrt{1+0{,}00367\,.\,t}$ $= 1258\,\sqrt{1{,}02202} = 1272$, und $F = \frac{\pi}{4}\,({}^1/_{12})^2 = \frac{\pi}{576} = 0{,}005454$ Quadratfuß, daher folgt die in Frage stehende Ausflußzeit

$$t = \frac{2.981{,}75}{0{,}005454\,.\,1272}\left(\sqrt{\frac{10}{27}}-\sqrt{\frac{7}{27}}\right).\left(1+\frac{10+7}{8\,.\,27}\right)$$

$$= \frac{1963{,}5}{5{,}454\,.\,1{,}272}\,.\,0{,}0994\,.\,1{,}079 = 30{,}3 \text{ Secunden.}$$

§. 395. Die Contractionserscheinungen, welche wir beim Ausflusse des Wassers aus Gefäßen kennen gelernt haben, finden sich auch beim Ausströmen der Luft aus Gefäßen vor. Ist die Ausflußöffnung in einer dünnen Wand ausgeschnitten, so hat der durch sie gehende Luft- oder Windstrahl einen kleineren Querschnitt, als die Mündung selbst, und es ist deshalb auch die Ausflußmenge kleiner als das Product Fv aus Querschnitt Ausflußcoefficienten.

Ausfluß-coefficienten. F der Mündung und theoretische Geschwindigkeit v. Setzen wir wieder das Verhältniß $\frac{F_1}{F}$ des Querschnittes F_1 vom Strahle zu dem der Mündung F, $= \mu$, so haben wir auch wie beim Wasser die effective Ausflußmenge $Q_1 = \mu Q = F_1 v = \mu F v = \mu F \sqrt{2g \frac{p}{\gamma} Log. nat. \left(\frac{p_1}{p}\right)}$. Nach des Verfassers Berechnungen der Koch'schen Versuche ist bei Manometerständen von $\frac{1}{200}$ bis $\frac{1}{5}$ Atmosphäre im Mittel $\mu = 0,58$ zu setzen.

Ebenso ist auch das effective Ausflußquantum beim Ausströmen der Luft durch kurze cylindrische Ansatzröhren kleiner als das theoretisch bestimmte, man hat also auch hier das letztere durch eine Erfahrungszahl, den Ausflußcoefficienten μ, zu multipliciren, um das erstere zu erhalten; nur ist hier μ nicht das Querschnittsverhältniß $\frac{F_1}{F}$, sondern das Verhältniß $\frac{v_1}{v}$ der effectiven Ausflußgeschwindigkeit v_1 zur theoretischen v. Die Koch'schen Versuche geben bei den oben angegebenen Pressungen für das Ausströmen durch cylindrische Ansatzröhren, welche höchstens 6mal so lang als weit sind, im Mittel $\mu = 0,74$.

Conisch convergente Ansatzröhren, ähnlich wie Düsen bei Gebläsen, geben noch größere Ausflußcoefficienten; nach den Koch'schen Versuchen giebt eine Röhre von 6^0 Seitenconvergenz, wenn sie 5mal so lang als im Mittel weit ist, den mittleren Ausflußcoefficienten $\mu = 0,85$.

Hiernach ist für den Ausfluß der Luft durch Mündungen in der dünnen Wand die effective Ausflußmenge, gemessen unter dem äußeren Drucke:

$Q_1 = 729,6\, F\left(1 - \frac{h}{4b}\right)\sqrt{(1 + 0,00367\, t)\, \frac{h}{b}}$ Cubikfuß, für den Ausfluß durch kurze cylindrische Ansatzröhren:

$Q_1 = 931\, F\left(1 - \frac{h}{4b}\right)\sqrt{(1 + 0,00367\, t)\, \frac{h}{b}}$ Cubikfuß, und für den durch die conische Ansatzröhre von 6^0 Convergenz:

$$Q_1 = 1069\, F\left(1 - \frac{h}{4b}\right)\sqrt{1 + 0,00367\, t)\, \frac{h}{b}} \text{ Cubikfuß.}$$

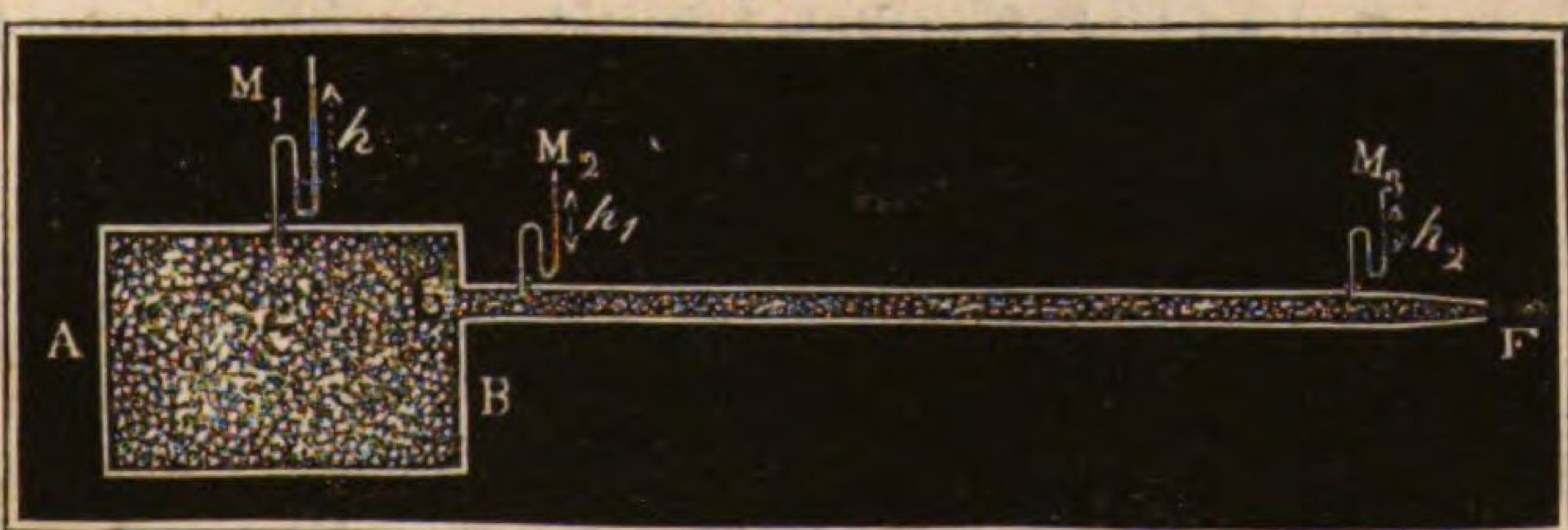
Beispiel. Wenn bei einem Gebläse die Mündungen der beiden conischen Düsen zusammen 3 Quadratzoll Inhalt haben, wenn ferner der Manometerstand 3 Zoll, der äußere Barometerstand aber $27\frac{1}{2}$ Zoll und die Temperatur des Windes 15^0 beträgt, so ist das Ausflußquantum

$$Q_1 = 1069 \cdot \tfrac{3}{144} \left(1 - \frac{3}{4 \cdot 27,5}\right)\sqrt{(1 + 0,00367 \cdot 15)\frac{3}{27,5}}$$
$$= 22,27 \cdot \frac{107}{110}\sqrt{1,055 \cdot \tfrac{6}{55}} = 21,66\sqrt{0,1151} = 7,34 \text{ Cubikfuß.}$$

Anmerkung. Versuche über den Ausfluß der Luft sind angestellt worden von Young, Schmidt, Lagerhjelm, Koch, D'Aubuisson, Buff, und in neuester Zeit von Pecqueur, Saint-Venant und Wantzel. In Betreff der Versuche von Young und Schmidt ist nachzusehen in Gilbert's Annalen Band 22, 1801, und Band 6, 1820, und in Poggendorff's Annalen, Band 2, 1824, in Betreff derjenigen von Koch und Buff aber in den Studien des göttingschen Vereines bergmännischer Freunde, Bd. 1, 1824; Bd. 3, 1833; Bd. 4, 1837 und Bd. 5, 1838; ferner in Poggendorff's Annalen, Bd. 27, 1836 und Bd. 40, 1837. Die Lagerhjelm'schen Versuche werden behandelt in dem schwedischen Werke Hydrauliska Försök af Lagerhjelm, Forselles och Kallstenius, 1 Delen, Stockholm 1818. Die Versuche D'Aubuisson's lernt man kennen in den Annales des Mines, Tome 11, 1825, Tome 13, 1826, Tome 34, 1827, dann aber auch in D'Aubuisson's Traité d'Hydraulique. Von den neuesten in Frankreich angestellten Versuchen handelt Poncelet in einer Note sur les expériences de M. Pecqueur relatives à l'écoulement de l'air dans les tubes etc. der Comptes rendus und hiervon im Auszuge das polytechnischen Centralblatt, Band 6, 1845. Aus diesen Versuchen folgert Poncelet, daß die Luft bei ihrem Ausflusse denselben Gesetzen folge, wie das Wasser. Die meisten dieser Versuche sind mit sehr engen Mündungen angestellt worden, weshalb sie wohl schwerlich den Ansprüchen der Praxis Genüge leisten. Am meisten Beachtung verdienen die Versuche von D'Aubuisson und Koch, und nächstdem vielleicht die noch von Pecqueur, und am ausgedehntesten sind die von Koch. Leider findet aber unter den Ergebnissen aller dieser Versuche nicht die erwünschte Uebereinstimmung statt, namentlich weichen auch die von D'Aubuisson gefundenen Ausflußcoefficienten von denen, welche sich aus den Koch'schen berechnen lassen, bedeutend ab. Die Gründe, weswegen ich den Koch'schen Coefficienten am meisten Zutrauen schenke, sind besonders in der Allgemeinen Maschinenencyclopädie, Artikel »Ausfluß« und dann auch in einem hiermit verwandten Aufsatze des Verfassers in Poggendorff's Annalen, Bd. 51, 1840, auseinandergesetzt worden. Einige Versuche des Verfassers über den Ausfluß der Luft theilt Herr Bornemann in der Zeitschrift »der Ingenieur« mit. Ausfluß-coefficienten.

§. 396. Bewegt sich die Luft durch eine lange Röhre CF, Fig. 586, so hat sie einen Reibungswiderstand wie das Wasser zu überwinden, auch Ausfluß durch Röhren.

Fig. 586.



läßt sich dieser Widerstand durch die Höhe einer Luftsäule messen, die der Ausdruck $h_n = \zeta \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}$, worin genau, wie bei den Wasserleitungen, v die Geschwindigkeit, l die Länge, d die Weite der Röhre und ζ den

Ausfluß durch Röhren.

durch Versuche zu bestimmenden Widerstandscoefficienten bezeichnen, angiebt. Vielfältige Versuche von Girard, D'Aubuisson, Buff und Pecqueur führen auf den mittleren Werth $\zeta = 0{,}024$. Es ist also hiernach der durch die Reibung der Luft in den Röhren erzeugte Widerstand durch die Höhe $h_n = 0{,}024 \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}$ einer Luft- oder durch die Höhe $h_n = 0{,}0000023 \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}$ einer Quecksilbersäule zu messen, und es wird der Manometerstand am Ende einer Windleitung um die letzte Höhe tiefer sein als am Anfange der Leitung.

Steht am Ende einer Windleitung von der Weite d ein Manometer auf h_2, während der Wind durch eine Oeffnung von der Weite d_1 ausströmt, so ist nach dem Früheren die Ausflußgeschwindigkeit

$$v = \frac{\sqrt{2g\frac{p}{\gamma} Log.\,nat.\left(\frac{b+h_2}{b}\right)}}{\sqrt{1-\left(\frac{b}{b+h_2}\right)^2\left(\frac{d_1}{d}\right)^4}},$$ ist aber h_1 der Manometerstand am Anfange der Leitung, so hat man

$$\frac{p}{\gamma} Log.\,nat.\left(\frac{b+h_1}{b}\right) = \left[1-\left(\frac{b}{b+h_1}\right)^2\left(\frac{d_1}{d}\right)^4 + 0{,}024\frac{l}{d}\left(\frac{d_1}{d}\right)^4\right]\frac{v^2}{2g},$$

weil die Geschwindigkeit in der Röhre $= \frac{d_1^2}{d^2} v$ ist; daher folgt in diesem Falle

$$v = \frac{\sqrt{2g\frac{p}{\gamma} Log.\,nat.\left(\frac{b+h_1}{b}\right)}}{\sqrt{1+\left[0{,}024\frac{l}{d}-\left(\frac{b}{b+h_1}\right)^2\right]\left(\frac{d_1}{d}\right)^4}}.$$

Wird endlich der Manometerstand h im Reservoir am Anfange der Leitung gemessen, wo die Luft in Ruhe befindlich angenommen werden kann, so hat man

$$v = \frac{\sqrt{2g\frac{p}{\gamma} Log.\,nat.\left(\frac{b+h}{b}\right)}}{\sqrt{1+0{,}024\frac{l d_1^4}{d^5}}}.$$

Nehmen wir noch mit auf die Widerstände beim Ein- und Austritt Rücksicht, und setzen wir den Widerstandscoefficienten für den Eintritt in die Leitung $= \zeta_1$, den für den Austritt oder für das Mundstück am Ende derselben aber $= \zeta_2$, so erhalten wir

$$\frac{p}{\gamma} Log.\,nat.\left(\frac{b+h}{b}\right) = \left[1+\zeta_2+\left(\zeta_1+\zeta\frac{l}{d}\right)\left(\frac{d_1}{d}\right)^4\right]\frac{v^2}{2g},$$

Ausfluß durch Röhren

und daher umgekehrt, $v = \sqrt{\dfrac{2g\dfrac{p}{\gamma}\,Log.nat.\left(\dfrac{b+h}{b}\right)}{1+\zeta_2+\left(\zeta_1+\zeta\dfrac{l}{d}\right)\left(\dfrac{d_1}{d}\right)^4}}$

$$= 1258\sqrt{\frac{(1+0{,}00367\,t)\,Log.\,nat.\,\left(\dfrac{b+h}{b}\right)}{1+\zeta_2+\left(\zeta_1+0{,}024\,\dfrac{l}{d}\right)\left(\dfrac{d_1}{d}\right)^4}}\ \text{Fuß.}$$

Je nachdem der Einmündungspunkt um s tiefer oder höher liegt, als der Ausmündungspunkt, hat man unter der Wurzelgröße im Nenner noch $\pm s$ zu addiren. Uebrigens können noch andere Hindernisse in der Röhre, wie Krümmungen, Verengungen und Erweiterungen u. s. w. vorkommen. Ueber diese Hindernisse liegen genügende Erfahrungen zwar nicht vor, allein es läßt sich doch mit großer Wahrscheinlichkeit annehmen, daß diese Widerstände nicht bedeutend anders ausfallen, als beim Wasser, weil auch die Ausflußcoefficienten und der Reibungscoefficient bei der Luft und beim Wasser ziemlich dieselben sind. So lange also neue ausführliche Versuche hierüber nicht angestellt worden sind, kann man von den für das Wasser gefundenen Widerstandscoefficienten bei Untersuchungen über die Bewegung und den Ausfluß der Luft mit ziemlicher Sicherheit Gebrauch machen.

Beispiel. In dem Regulator am Kopfe einer 320 Fuß langen und 4 Zoll weiten Windleitung steht das Quecksilbermanometer auf 3,1 Zoll, während der äußere Barometerstand 27,2 Zoll beträgt, es ist ferner die Mündungsweite des conisch zusammengezogenen Endes der Leitung 2 Zoll und die Temperatur des Windes 20°, welches Windquantum liefert diese Leitung? Es ist
$(1+0{,}00367\,t)\,Log.\,nat.\left(\dfrac{b+h}{b}\right) = (1+0{,}00367\,.\,20)\,Log.\,nat.\left(\dfrac{30{,}3}{27{,}2}\right)$
$= 1{,}0734\,(5{,}7137 - 5{,}6058) = 0{,}1158$, setzen wir ferner $\zeta_1 = 0{,}83$ und
$\zeta_2 = \dfrac{1}{\mu^2} - 1 = \dfrac{1}{0{,}85^2} - 1 = 0{,}384$, so erhalten wir $1+\zeta_2+\left(\zeta_1+0{,}024\dfrac{l}{d}\right)\left(\dfrac{d_1}{d}\right)^4$
$= 1{,}384 + \left(0{,}83+0{,}024\,.\,\dfrac{320}{1/3}\right)\left(\dfrac{2}{4}\right)^4 = 1{,}384 + 23{,}87\,.\,\dfrac{1}{16} = 2{,}876$, daher die Ausflußgeschwindigkeit $v = 1285\sqrt{\dfrac{0{,}1158}{2{,}876}} = 257{,}8$ Fuß, und die Ausflußmenge $Q = \dfrac{\pi d_1^2}{4}\,v = \dfrac{\pi}{4}\,.\,\dfrac{257{,}8}{36} = 5{,}61$ Cubikfuß.

Siebentes Kapitel.

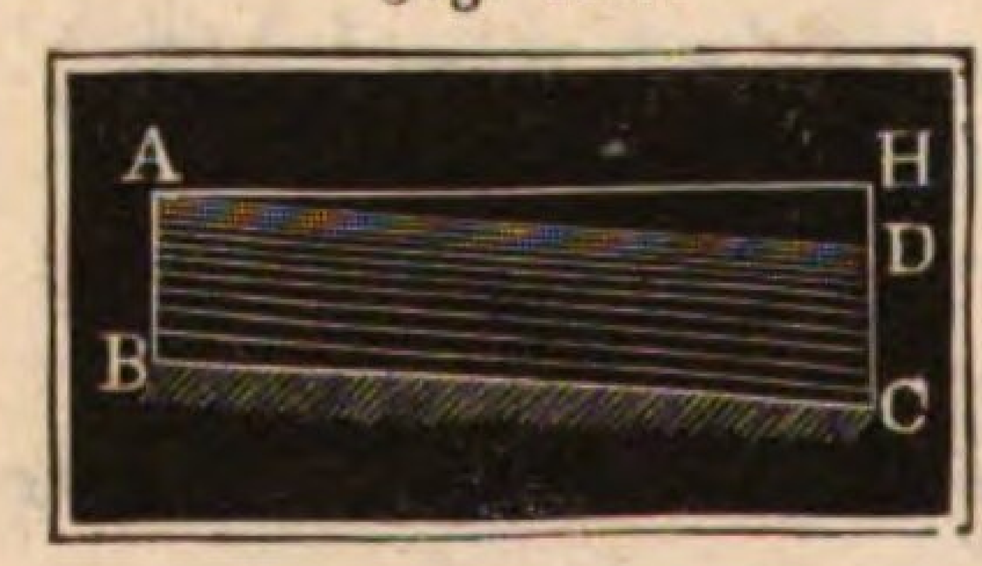
Von der Bewegung des Wassers in Kanälen und Flüssen.

Fließende Wasser.

§. 397. Die Lehre von der Bewegung des Wassers in Kanälen und Flüssen macht den zweiten Haupttheil der Hydraulik aus. Das Wasser fließt entweder in einem natürlichen oder in einem künstlichen Bette (franz. lit; engl. bed). Im ersten Falle bildet es Ströme, Flüsse, Bäche, im zweiten Kanäle, Gräben und Gerinne. Bei der Theorie der Bewegung der fließenden Wasser kommt auf diesen Unterschied nichts, oder nur wenig an.

Das Flußbette besteht aus dem Grundbette oder der Sohle (franz. font du lit; engl. bottom of the channel), und aus den beiden Ufern (franz. bords; engl. shores). Durch eine Ebene winkelrecht gegen die Bewegungsrichtung des fließenden Wassers ergiebt sich der Querschnitt (franz. section; engl. perpendicular-section) desselben. Der Umfang desselben ist das Quer- oder Breitenprofil, welches wieder aus dem Wasser- und dem Luftprofile besteht. Eine Vertikalebene in der Richtung des fließenden Wassers giebt den Längendurchschnitt und das Längenprofil (franz. profil; engl. profile) desselben. Unter Abhang (franz. pente; engl. declivity, slope) eines fließenden Wassers versteht man den Neigungswinkel seiner Oberfläche gegen den Horizont. Um diesen auf eine bestimmte Länge eines fließenden Wassers anzugeben, dient das Gefälle (franz. chute; engl fall), welches der Vertikalabstand der beiden Endpunkte im Wasserspiegel einer bestimmten Flußstrecke ist. Rösche ist das Gefälle für die Längenerstreckung $= 1$. Für die Flußstrecke $AD = l$, Fig. 587, ist BC das Grundbette, $DH = h$, das Gefälle und der Winkel $DAH = \delta$, der Abhang; die Rösche aber ist $\sin. \delta = \frac{h}{l}$.

Fig. 587.



Anmerkung. Das Gefälle der Bäche und Flüsse ist sehr verschieden. So hat z. B. die Elbe auf eine deutsche Meile Erstreckung von Hohenelbe bis Podiebrad 57 Fuß, von da bis Leitmeritz 9 Fuß, von da bis Mühlberg im Mittel 5,8 und von da bis Magdeburg 2,5 Fuß Gefälle. Gebirgsbäche haben auf die Meile ein Gefälle von 40 bis 400 Fuß. Näheres hierüber siehe: »Vergleichende hydrographische Tabellen u. s. w von Stranz«. Kanäle oder andere künstliche Wasserleitungen erhalten viel kleinere Gefälle. Hier ist die Rösche meistens unter 0,001, oft 0,0001 und noch kleiner. Mehr hierüber im zweiten Theile.

Verschiedene Geschwindigkeiten eines Querprofiles.

§. 398. Die Geschwindigkeit des Wassers in einem und demselben Querprofile ist an verschiedenen Stellen sehr verschieden. Die Adhäsion des Wassers an dem Bette und der Zusammenhang der Wassertheile unter einander bewirken, daß die den Bettwänden näher liegenden Wassertheile in ihrer Bewegung mehr aufgehalten werden und daher langsamer fließen, als die entfernteren. Aus diesem Grunde nimmt denn die Geschwindigkeit von der Oberfläche nach dem Bette zu ab, und es ist dieselbe am Boden und nahe den Ufern am kleinsten. Die größte Geschwindigkeit befindet sich bei geraden Flußstrecken meist in der Mitte oder an derjenigen Stelle in der freien Oberfläche des Wassers, wo es die größte Tiefe hat. Man nennt diejenige Stelle, wo das Wasser die größte Geschwindigkeit hat, den **Stromstrich** und die tiefste Stelle im Bette die **Stromrinne**. Bei Krümmungen ist der Stromstrich in der Regel nahe dem concaven Ufer.

Die **mittlere Geschwindigkeit** des Wassers innerhalb eines Querprofiles ist nach §. 335

$$c = \frac{Q}{F} = \frac{\text{Wasserquantum pr. Sec.}}{\text{Inhalt des Querschnittes}}.$$

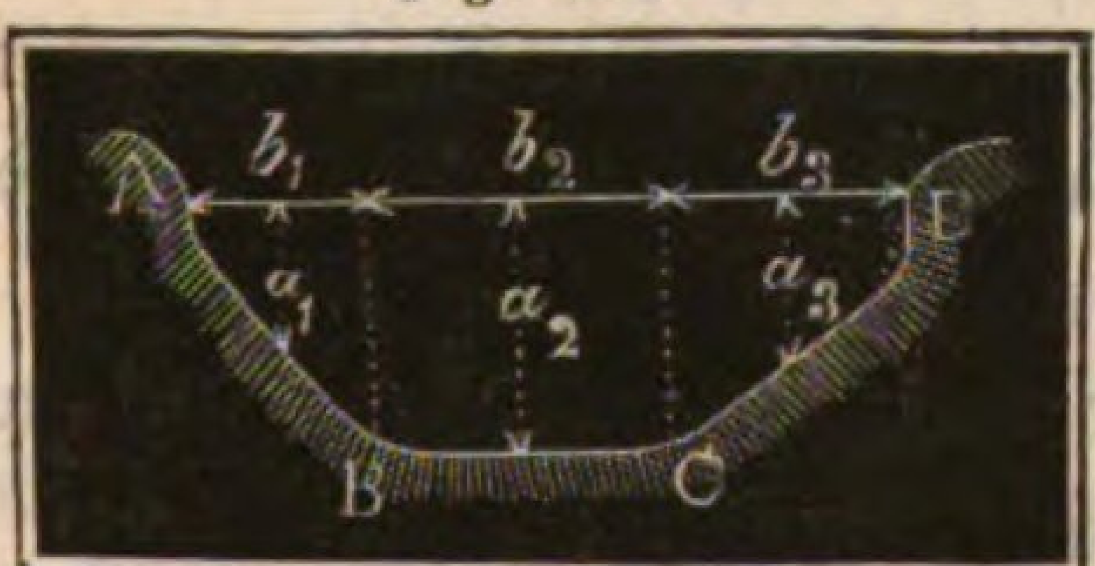
Außerdem läßt sich die mittlere Geschwindigkeit auch noch aus den Geschwindigkeiten c_1, c_2, c_3 u. s. w. der einzelnen Theile des Querprofiles und aus den Inhalten F_1, F_2, F_3 u. s. w. der letzteren berechnen. Es ist nämlich $Q = F_1 c_1 + F_2 c_2 + F_3 c_3 + \ldots$, und daher auch

$$c = \frac{F_1 c_1 + F_2 c_2 + \ldots}{F_1 + F_2 + \ldots}.$$

Außer der mittleren Geschwindigkeit führt man auch die **mittlere Wassertiefe**, also diejenige Tiefe a ein, welche ein Querprofil an allen Stellen haben müßte, damit es ebenso viel Inhalt erhielte, als es bei den veränderlichen Tiefen a_1, a_2, a_3 u. s. w. wirklich hat. Es ist also hiernach

$$a = \frac{F}{b} = \frac{\text{Inhalt des Querschnittes}}{\text{Breite des Querschnittes}}.$$

Fig. 588.



Sind die einzelnen Breitentheilen b_1, b_2, b_3 u. s. w. entsprechenden mittleren Tiefen a_1, a_2, a_3 u. s. w., Fig. 588, so hat man $F = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots$, und daher auch $a = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots}{b_1 + b_2 + \ldots}$.

Endlich ist auch $c = \frac{a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2 + \ldots}{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots}$, und bei gleicher Größe der Theile b_1, b_2 u. s. w., $c = \frac{a_1 c_1 + a_2 c_2 + \ldots}{a_1 + a_2 + \ldots}$.

Ein Fluß oder Bach ist im **Beharrungszustande** (franz. perma-

Verschiedene Geschwindigkeiten eines Querprofiles.

nence; engl. permanency), wenn durch jeden seiner Querschnitte in gleicher Zeit eine gleiche Wassermenge fließt, wenn also Q oder das Product Fc aus dem Inhalte des Querprofiles und aus der mittleren Geschwindigkeit auf die ganze Flußstrecke eine unveränderliche Zahl ist. Hieraus folgt nun das einfache Gesetz: bei der permanenten Bewegung des Wassers verhalten sich die mittleren Geschwindigkeiten innerhalb zweier Querprofile umgekehrt wie die Inhalte dieser Profile.

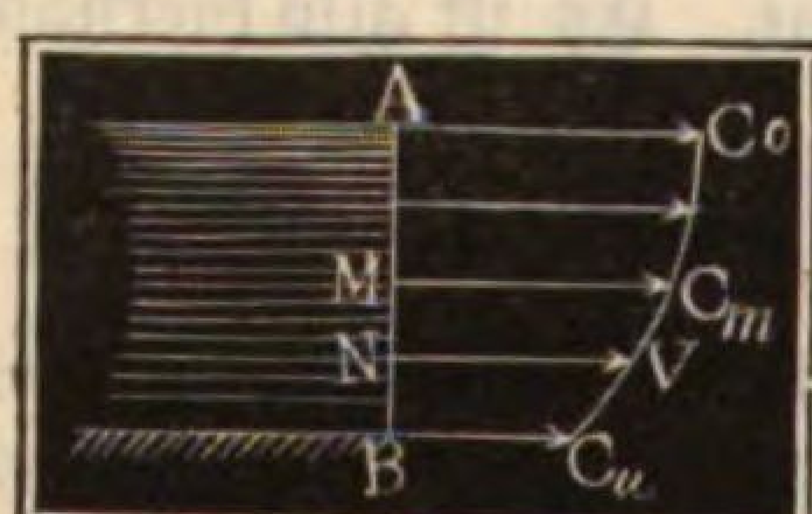
Beispiele. 1) An dem Querprofile *ABCD*, Fig. 588, eines Kanales hat man gefunden:
Breitentheile: . . . . $b_1 = 3,1$ Fß. $b_2 = 5,4$ Fß. $b_3 = 4,3$ Fß.
mittlere Tiefen: . . . . $a_1 = 2,5$ » $a_2 = 4,5$ » $a_3 = 3,0$ »
entsprechende mittlere Geschwindigkeiten: $c_1 = 2,9$ » $c_2 = 3,7$ » $c_3 = 3,2$ »
daher läßt sich setzen der Inhalt dieses Profiles $F = 3,1 . 2,5 + 5,4 . 4,5 + 4,3 . 3,0 = 44,95$ Quadratfuß, ferner die Wassermenge
$Q = 3,1 . 2,5 . 2 9 + 5,4 . 4,5 . 3,7 + 4,3 . 3,0 . 3,2 = 153,665$ Cubikfuß, und die mittlere Geschwindigkeit $c = \frac{Q}{F} = \frac{153,665}{44,95} = 3,419$ Fuß.
2) Wenn ein Graben 4,5 Cubikfuß Wasser mit einer mittleren Geschwindigkeit c von 2 Fuß fortführen soll, so hat man ihm ein Querprofil von $\frac{4,5}{2} = 2,25$ Quadratfuß Inhalt zu geben. 3) Wenn ein und derselbe Fluß an einer Stelle bei 560 Fuß Breite und 9 Fuß mittlerer Tiefe eine mittlere Geschwindigkeit von $2\frac{1}{4}$ Fuß hat, so wird er an einer Stelle bei 320 Fuß Breite und 7,5 Fuß mittlerer Tiefe die mittlere Geschwindigkeit

$$c = \frac{560 \,.\, 9}{320 \,.\, 7,5} \,.\, 2,25 = \frac{567}{120} = 4,725 \text{ Fuß haben.}$$

Mittlere Geschwindigkeit.

§. 399. Wenn man die Wassertiefe an irgend einer Stelle eines fließenden Wassers in gleiche Theile theilt, und die entsprechenden Geschwindigkeiten als Ordinaten aufträgt, so erhält man eine sogenannte Stromgeschwindigkeitsscala. *AB*, Fig. 589. Obwohl es als ausgemacht anzusehen ist, daß das Gesetz dieser Scala oder der Geschwindigkeitsveränderung durch irgend eine Curve, wie z. B. nach Gerstner durch eine Ellipse u. s. w., ausgedrückt wird, so läßt sich doch auch ohne einen großen Fehler befürchten zu müssen, eine gerade Linie substituiren, oder annehmen, daß die Geschwindigkeit nach der Tiefe gleichmäßig abnehme, weil die Abnahme der Geschwindigkeit nach unten immer nur eine kleine ist. Aus den Versuchen von Ximenes, Brünnings und Funk ergiebt sich, daß die mittlere Geschwindigkeit in einem Perpendikel $c_m = 0,915\ c_0$ ist, wenn c_0 die Geschwindigkeit an der Oberfläche oder die Maximalgeschwindigkeit bezeichnet. Es nimmt also hiernach die Geschwindigkeit von oben bis zur Mitte

Fig. 589.



M um $c_0 - c_m = (1 - 0{,}915)\, c_0 = 0{,}085\, c_0$ ab, und es läßt sich folglich die Geschwindigkeit unten oder am Fußpunkte des Perpendikels $c_u = c_0 - 2 \,.\, 0{,}085\, c_0 = (1 - 0{,}170)\, c_0 = 0{,}83\, c_0$ setzen. Ist nun die ganze Tiefe $= a$, so hat man, bei Annahme einer der geraden Linie entsprechenden Geschwindigkeitsscala für eine Tiefe $AN = x$ unter dem Wasser die entsprechende Geschwindigkeit Mittlere Geschwindigkeit.

$$v = c_0 - (c_0 - c_u)\,\frac{x}{a} = \left(1 - 0{,}17\,\frac{x}{a}\right) c_0.$$

Sind nun noch $c_0, c_1, c_2, \ldots$ die Oberflächengeschwindigkeiten eines ganzen Querprofiles von nicht sehr veränderlicher Tiefe, so hat man die entsprechenden Geschwindigkeiten in der mittleren Tiefe: $0{,}915\, c_0$, $0{,}915 c_1$, $0{,}915\, c_2$, und daher die mittlere Geschwindigkeit im ganzen Querprofile $c = 0{,}915\,\frac{(c_0 + c_1 + c_2 + \ldots c_n)}{n}$. Nehmen wir endlich an, daß die Geschwindigkeit vom Stromstriche aus nach den Ufern zu ebenso abnehme wie nach der Tiefe zu, so können wir wieder die mittlere Oberflächengeschwindigkeit $\frac{c_0 + c_1 + \ldots + c_n}{n} = 0{,}915\, c_0$ setzen, und erhalten so die mittlere Geschwindigkeit im ganzen Querprofile:

$$c = 0{,}915 \,.\, 0{,}915 \,.\, c_0 = 0{,}837 \,.\, c_0,$$

d. i. 83 bis 84 Procent der Maximal- oder Stromstrichgeschwindigkeit.

Prony leitet aus den allerdings nur in kleinen Gräben angestellten Versuchen Du Buat's und für diese Fälle vielleicht noch genauer

$$c_m = \left(\frac{2{,}372 + c_0}{3{,}153 + c_0}\right) c_0 \text{ Meter} = \left(\frac{7{,}50 + c_0}{9{,}97 + c_0}\right) c_0 \text{ Fuß ab.}$$

Für mittlere Geschwindigkeiten von 3 Fuß folgt hiernach $c_m = 0{,}81\, c_0$.

Beispiel. Wenn im Stromstriche eines Wassers die Geschwindigkeit des Wassers 4 Fuß und die Tiefe 6 Fuß ist, so hat man die mittlere Geschwindigkeit im entsprechenden Perpendikel $c_m = 0{,}915 \,.\, 4 = 3{,}66$ Fuß, und die am Boden $= 0{,}83 \,.\, 4 = 3{,}32$ Fuß; ferner die Geschwindigkeit 2 Fuß unter der Oberfläche $v = (1 - 0{,}17 \,.\, 2/6) \,.\, 4 = (1 - 0{,}057) \,.\, 4 = 3{,}772$ Fuß, endlich die mittlere Geschwindigkeit im ganzen Querprofile, $c = 0{,}837 \,.\, 4 = 3{,}348$ Fuß, und nach Prony $c = \frac{11{,}50}{13{,}97} \,.\, 4 = \frac{46}{13{,}97} = 3{,}29$ Fuß.

Anmerkung. Ueber diesen und über die nächstfolgenden Gegenstände wird ausführlich gehandelt in der allgemeinen Maschinenencyclopädie, Artikel »Bewegung des Wassers«. Neue Versuche und neue Ansichten hierüber findet man in folgender Schrift: Lahmeyer, Erfahrungsresultate über die Bewegung des Wassers in Flußbetten und Kanälen, Braunschweig, 1845. Nach Baumgarten's Beobachtungen (s. polytechnisches Centralblatt, Nr. 14, 1849) giebt diese Formel bei größeren Geschwindigkeiten zu große Werthe, und es ist für solche

$$c_m = \left(\frac{2{,}372 + c_0}{3{,}153 + c_0}\right) . \; 0{,}8\, c_0 \text{ Meter zu setzen.}$$

Vortheilhafteste Querprofile

§. 400. Der Widerstand, welchen das Bette der Bewegung des Wassers in Folge der Adhäsion, Klebrigkeit oder Reibung entgegensetzt, wächst mit der Berührungsfläche zwischen dem Bette und dem Wasser und also auch mit dem Umfange p des Wasserprofiles oder im Bette liegenden Theiles vom Querprofile. Da aber durch ein Querprofil um so mehr Wasserfäden hindurchgehen, je größer der Inhalt eines solchen ist, so wächst der Widerstand eines Wasserfadens auch umgekehrt wie der Inhalt und daher im Ganzen wie der Quotient $\frac{p}{F}$ aus dem Umfange des Wasserprofiles und dem Inhalte des ganzen Querprofiles.

Damit nun der Reibungswiderstand eines fließenden Wassers möglichst klein ausfalle, hat man dem Querprofile diejenige Gestalt zu geben, bei welcher $\frac{p}{F}$ möglichst klein ist, bei welcher also der Umfang p bei gegebenem Inhalte ein Minimum, oder der Inhalt bei gegebenem Umfange ein Maximum werde. Bei ringsumschlossenen Wasserleitungen, wie z. B. bei Röhren, ist p der ganze Umfang der vom Querprofile gebildeten Figur. Nun hat aber unter allen Figuren von gleicher Seitenzahl allemal die regelmäßige, und unter allen regelmäßigen Figuren wieder diejenige, deren Seitenzahl die größere ist, bei gleichem Inhalte den kleinsten Umfang, daher fällt denn auch bei ringsumschlossenen Wasserleitungen der Reibungswiderstand um so kleiner aus, je mehr ihr Querprofil einer regelmäßigen Figur sich nähert, und je größer die Seitenzahl derselben ist, und es ist der Kreis, als eine regelmäßige Figur von unendlich vielen Seiten, in diesem Falle das dem kleinsten Reibungswiderstande entsprechende Querprofil. Bei den oben offenen Wasserleitungen ist das Verhältniß ein anderes, weil die obere Seite des Querprofiles frei oder vielmehr nur mit Luft in Berührung ist, die, so lange sie sich in Ruhe befindet, dem Wasser keinen oder nur einen sehr kleinen Widerstand entgegensetzt. Wir müssen also auch bei Beurtheilung dieses Reibungswiderstandes in dem Quotienten $\frac{p}{F}$ die obere Seite oder das sogenannte Luftprofil außer Acht lassen. Bei Anwendung von Kanälen, Gräben und Gerinnen kommen in der Regel nur rectanguläre und trapezoidale Querprofile vor. Eine durch den Mittelpunkt M des Quadrates AC gehende Horizontale EF, Fig. 590, theilt sowohl den Inhalt als auch den Umfang in zwei gleiche Theile, daher bleibt denn das, was für das Quadrat gilt, auch für diese Hälfte richtig, und es entspricht sonach unter allen rectangulären Querprofilen das halbe

Fig. 590.

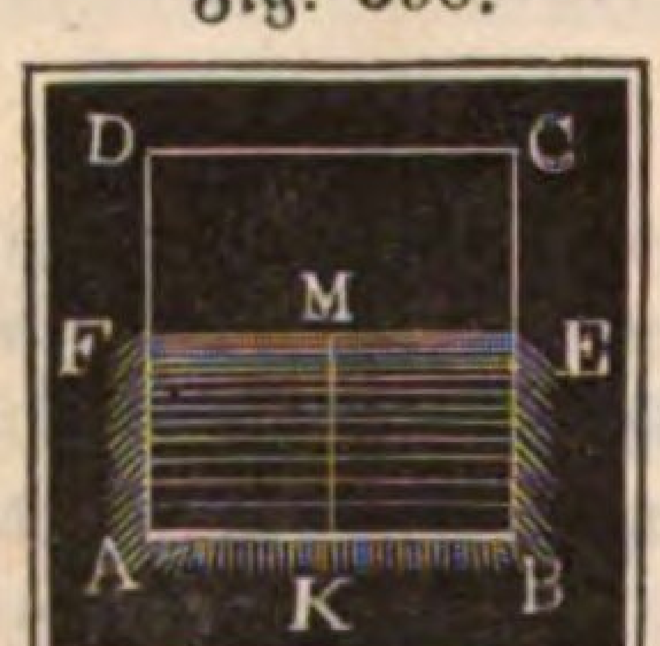
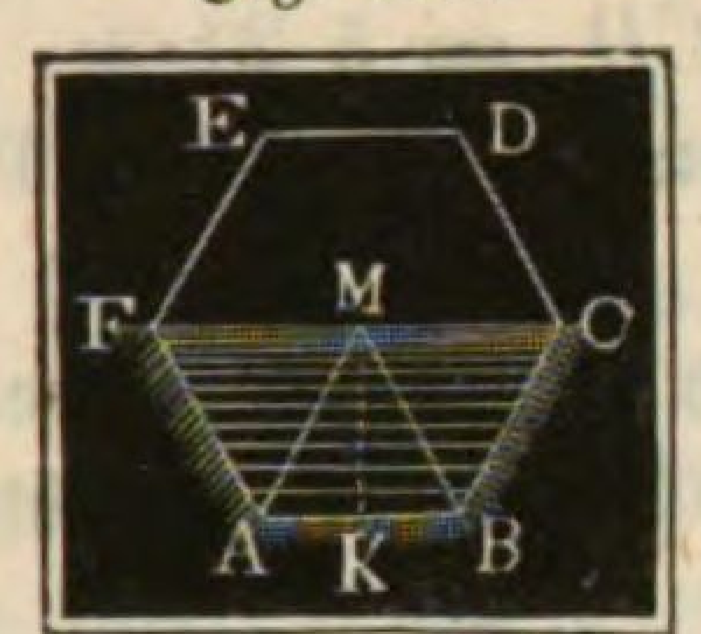


Fig. 591.



Quadrat AE, oder dasjenige, welches doppelt so breit als hoch ist, dem kleinsten Reibungswiderstande. Ebenso wird das regelmäßige Sechseck ACE, Fig. 591, durch eine Horizontale CF in zwei gleiche Trapeze zertheilt, wovon jedes, wie das ganze Sechseck, den größten relativen Inhalt hat, und es ist folglich unter allen trapezoidalen Querprofilen das halbe regelmäßige Sechseck oder das Trapez $ABCF$ mit Böschungswinkeln $AFM = BCM$, von 60^0 dasjenige, bei dessen Anwendung der kleinste Reibungswiderstand eintritt. — Vortheilhafteste Querprofile.

Fig. 592.

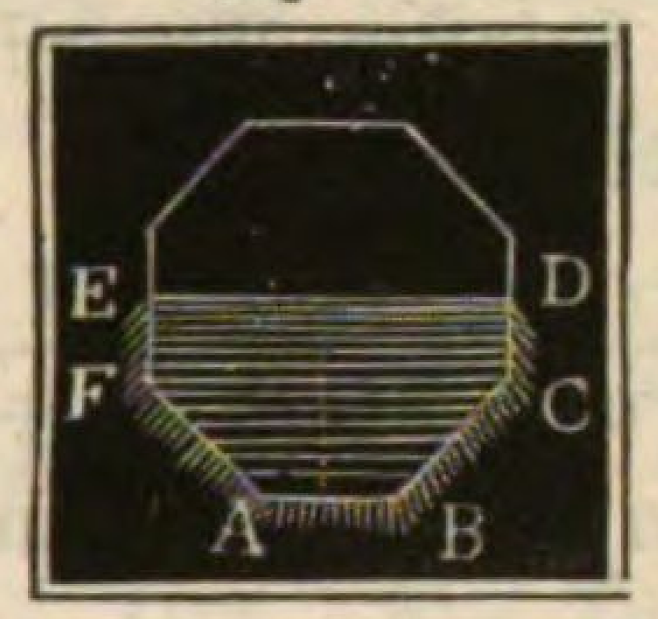
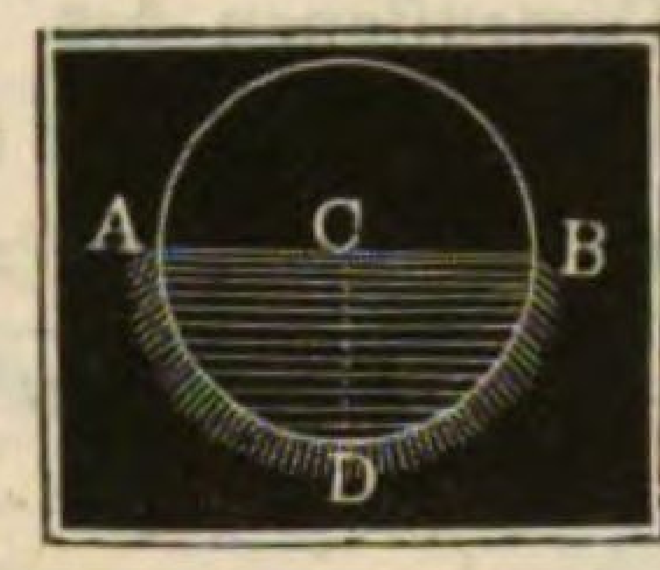


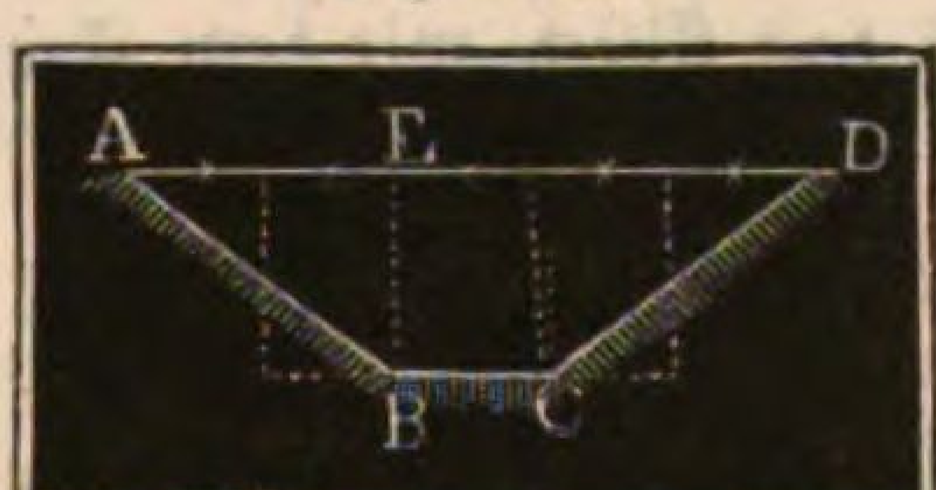
Fig. 593.



Ebenso liefern das halbe regelmäßige Achteck ADE, Fig. 592, das halbe regelmäßige Zehneck u. s. w. und endlich der Halbkreis ADB, Fig. 593, unter gegebenen Umständen die vortheilhaftesten Querprofile für Kanäle. Das trapezoidale oder halbe regelmäßige Sechseck giebt noch einen kleinern Widerstand als das halbe Quadrat oder Rechteck mit dem Seitenverhältniß 1 : 2, weil das Sechseck einen kleineren relativen Umfang hat als das Quadrat. Das halbe regelmäßige Zehneck giebt eine noch kleinere Reibung, und dem Halbkreise entspricht allerdings das Minimum der Reibung. Nach dem Halbkreise und nach dem Rechtecke werden nur die Profile von Gerinnen aus Holz, Stein oder Eisen gebildet, nach Trapezen hingegen construirt man die Querprofile von ausgegrabenen und gemauerten Kanälen. Andere Formen werden wegen Schwierigkeiten in der Ausführung nicht leicht angewendet.

§. 401. In den Fällen, wenn Kanäle nicht ausgemauert, sondern in der lockeren Erde oder in Sand ausgegraben werden, ist der Böschungswinkel von 60^0 zu groß oder die relative Böschung $cotg.\ 60^0 = 0{,}57735$ zu klein, weil die Ufer noch nicht hinreichende Stabilität erhalten; man wird daher genöthigt, trapezoidale Querprofile anzuwenden, bei welchen die Neigung der Seiten gegen die Basis noch kleiner als 60^0, vielleicht gar nur 45^0 und noch kleiner ist. Bei einem trapezoidalen Querprofile $ABCD$, Fig. 594, welches mit dem halben Quadrate gleichen Umfang und Inhalt hat, ist die relative Böschung $= \frac{4}{3}$ und der Böschungswinkel gar nur $36^0, 52'$. Theilt man

Fig. 594.



Vortheilhafteste Querprofile.

die Höhe BE in drei gleiche Theile, so hat die Basis BC deren 2, die Parallele AD, 10, und jede der Seiten $AB = CD$, $= 5$ Theile. In vielen Fällen macht man die Böschung $= 2$, deren Winkel $26^0, 34'$ beträgt, und zuweilen macht man sie noch größer.

Fig. 595.



Jedenfalls läßt sich der Böschungswinkel $BAE = \vartheta$, Fig. 595, oder die Böschung $n = \frac{AE}{BE} = cotang.\ \vartheta$ als eine gegebene und von der Natur des Erdreiches, worin der Kanal ausgegraben wird, abhängige Größe ansehen, und es sind daher nur noch die Dimensionen des den kleinsten Widerstand gebenden Querprofiles zu bestimmen. Setzen wir die untere Breite $BC = b$, die Tiefe $BE = a$ und die Böschung $= n$, so erhalten wir für den Umfang $AB + BC + CD = p = b + 2\sqrt{a^2 + n^2 a^2} = b + 2a\sqrt{1 + n^2}$, für den Inhalt $F = ab + naa = a\,(b + na)$, und daher umgekehrt $b = \frac{F}{a} - na$, und das Verhältniß

$$\frac{p}{F} = \frac{1}{a} + \frac{a}{F}\,(2\sqrt{n^2 + 1} - n).$$

Setzt man statt a, $a + x$, wo x eine kleine Zahl bezeichnet, so läßt sich $\frac{p}{F} = \frac{1}{a + x} + \frac{(a + x)}{F}\,(2\sqrt{n^2 + 1} - n)$

$$= \frac{1}{a}\left(1 - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2}\right) + \frac{a + x}{F}\,(2\sqrt{n^2 + 1} - n)$$

$$= \frac{1}{a} + \frac{a}{F}(2\sqrt{n^2 + 1} - n) + \left(\frac{\sqrt{n^2 + 1} - n}{F} - \frac{1}{a^2}\right)x + \frac{x^2}{a^3}$$ setzen.

Damit nun dieser Werth nicht allein für einen positiven, sondern auch für einen negativen Werth von x größer ausfalle, als der erste $\frac{1}{a} + \frac{a}{F}(2\sqrt{n^2 + 1} - n)$, ist nöthig, daß das Glied mit dem Factor x verschwinde, damit also $\frac{p}{F}$ zum Minimum werde, muß sein:

$$\frac{2\sqrt{n^2 + 1} - n}{F} - \frac{1}{a^2} = 0, \text{ d. i. } a^2 = \frac{F}{2\sqrt{n^2 + 1} - n}, \text{ oder}$$

da $n = cotang.\ \vartheta$ und $\sqrt{n^2 + 1} = \frac{1}{sin.\ \vartheta}$ ist, $a^2 = \frac{F\ sin.\ \vartheta}{2 - cos.\ \vartheta}$.

Hiernach ist also die einem gegebenen Böschungswinkel ϑ und einem

gegebenen Inhalte entsprechende zweckmäßigste Form des Querprofiles bestimmt durch $a = \sqrt{\frac{F \sin. \vartheta}{2 - \cos. \vartheta}}$ und $b = \frac{F}{a} - a \ cotang. \ \vartheta$. Vortheilhafteste Querprofile.

Beispiel. Welche Dimensionen sind dem Querprofile eines Kanales zu geben, dessen Ufer 40° Böschung erhalten sollen, und der bestimmt ist, bei einer mittleren Geschwindigkeit von 3 Fuß ein Wasserquantum Q von 75 Cubikfuß fortzuführen? Es ist $F = \frac{Q}{c} = \frac{75}{3} = 25$ Quadratfuß, daher die Tiefe $a = \sqrt{\frac{25 \sin. 40^0}{2 - \cos. 40^0}} = 5 \sqrt{\frac{0,64279}{1,23396}} = 3,609$ Fuß, die untere Breite $b = \frac{25}{3,609} - 3,609 \ cotang. \ 40^0 = 6,927 - 4,301 = 2,626$ Fuß, die Böschung oder Ausladung der Ufer $= 3,609 \ . \ cotang. \ 40^0 = 4,301$, die obere Breite $= 6,927 + 4,301 = 11,228$ Fuß, der Umfang $p = b + \frac{2a}{sin. \ \vartheta}$ $= 2,626 + \frac{7,218}{sin. \ 40^0} = 13,855$ Fuß, und das den Reibungswiderstand bestimmende Verhältniß $\frac{p}{F} = \frac{13,855}{25} = 0,5542$.

§. 402. Die Dimensionen der, verschiedenen Böschungswinkeln und einem gegebenen Querschnitte entsprechenden, zweckmäßigsten Querprofile giebt folgende Tabelle an.

Böschungswinkel ϑ.	Relative Böschung.	Dimensionen der Querprofile.				Quotient $\frac{p}{F}$
		Tiefe a	Untere Breite b	Absolute Böschung $n a$	Obere Breite $b + 2 n a$	
90°	0	$0,707 \sqrt{F}$	$1,414 \sqrt{F}$	0	$1,414 \sqrt{F}$	$\frac{2,828}{\sqrt{F}}$
60°	0,577	$0,760 \sqrt{F}$	$0,877 \sqrt{F}$	$0,439 \sqrt{F}$	$1,755 \sqrt{F}$	$\frac{2,632}{\sqrt{F}}$
45°	1,000	$0,740 \sqrt{F}$	$0,613 \sqrt{F}$	$0,740 \sqrt{F}$	$2,092 \sqrt{F}$	$\frac{2,704}{\sqrt{F}}$
40°	1,192	$0,722 \sqrt{F}$	$0,525 \sqrt{F}$	$0,860 \sqrt{F}$	$2,246 \sqrt{F}$	$\frac{2,771}{\sqrt{F}}$
36°,52′	1,333	$0,707 \sqrt{F}$	$0,471 \sqrt{F}$	$0,943 \sqrt{F}$	$2,357 \sqrt{F}$	$\frac{2,828}{\sqrt{F}}$
35°	1,402	$0,697 \sqrt{F}$	$0,439 \sqrt{F}$	$0,995 \sqrt{F}$	$2,430 \sqrt{F}$	$\frac{2,870}{\sqrt{F}}$
30°	1,732	$0,664 \sqrt{F}$	$0,356 \sqrt{F}$	$1,150 \sqrt{F}$	$2,656 \sqrt{F}$	$\frac{3,012}{\sqrt{F}}$
26°,34	2,000	$0,636 \sqrt{F}$	$0,300 \sqrt{F}$	$1,272 \sqrt{F}$	$2,844 \sqrt{F}$	$\frac{3,144}{\sqrt{F}}$
Halbkreis.		$0,798 \sqrt{F}$			$1,596 \sqrt{F}$	$\frac{2,507}{\sqrt{F}}$

Vortheilhafteste Querprofile.

Man ersieht aus dieser Tafel, daß allerdings beim Halbkreise der Quotient $\frac{p}{F}$ am kleinsten, nämlich $= \frac{2,507}{\sqrt{F}}$ ist, daß er beim halben Sechseck größer, beim halben Quadrate und beim Trapeze von $36^0, 52'$ Böschung aber noch größer ist u. s. w.

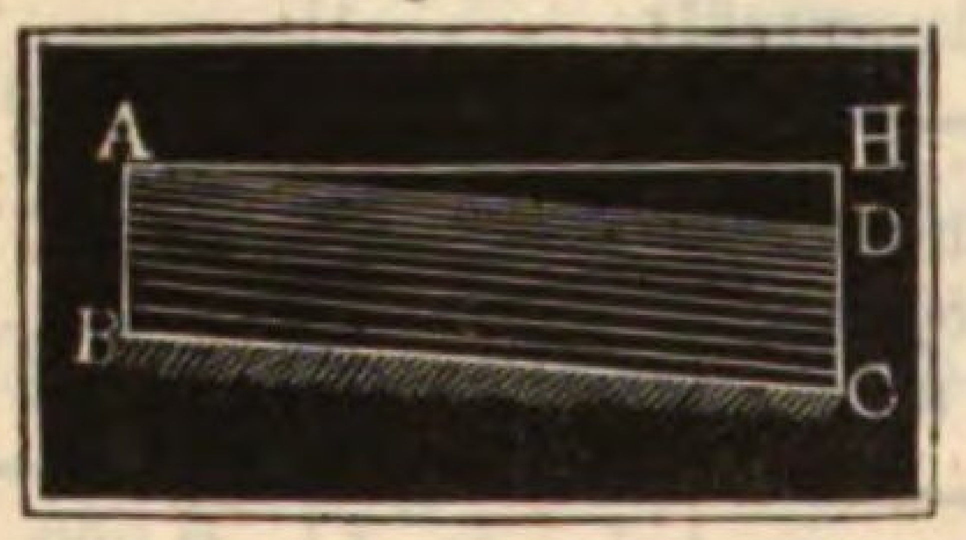
Beispiel. Welche Dimensionen sind einem Querprofile zu geben, das bei 40 Quadratfuß Inhalt eine Ufer-Böschung von 35° hat? Nach der vorstehenden Tafel ist die Tiefe $a = 0,697 \sqrt{40} = 4,408$, die untere Breite $= 0,439 \sqrt{40} = 2,777$ Fuß, die absolute Böschung $= 0,995 \sqrt{40} = 6,293$ Fuß, die obere Breite $= 15,363$, und der Quotient $\frac{p}{F} = \frac{2,870}{\sqrt{40}} = 0,4538$.

Gleichförmige Bewegung.

§. 403. Die Bewegung des Wassers in Betten ist auf einer gewissen Strecke entweder gleichförmig oder ungleichförmig; gleichförmig, wenn die mittlere Geschwindigkeit in allen Querschnitten dieser Strecke sich gleichbleibt, und also auch die Inhalte der Querschnitte gleich sind; ungleichförmig hingegen, wenn die mittleren Geschwindigkeiten und also auch die Inhalte der Querschnitte sich verändern. Zunächst ist von der gleichförmigen Bewegung die Rede.

Bei der gleichförmigen Bewegung des Wassers auf einer Strecke $AD = l$, Fig. 596, wird das ganze Gefälle $HD = h$ nur auf die Ueberwindung der Reibung des Wassers im Bette verwendet, weil das Wasser mit derselben Geschwindigkeit fortfließt, mit welcher es zuströmt, also eine Geschwindigkeitshöhe weder gebunden noch frei wird. Messen wir nun diese Reibung durch die Höhe jener Wassersäule, so können wir folglich das Gefälle dieser Höhe gleichsetzen. Die Reibungswiderstandshöhe wächst aber mit dem Quotienten $\frac{p}{F}$, mit l und mit dem Quadrate der mittleren Geschwindigkeit c (§. 364), daher gilt denn die Formel

Fig. 596.



1) $h = \zeta \cdot \frac{lp}{F} \cdot \frac{c^2}{2g}$, worin ζ eine Erfahrungszahl ausdrückt und der Coefficient des Reibungswiderstandes zu nennen ist.

Durch Umkehrung folgt

$$2)\ c = \sqrt{\frac{F}{\zeta \cdot lp} \cdot 2gh.}$$

Es kommt also bei der Bestimmung des Gefälles aus der Länge, dem Querprofile und der Geschwindigkeit, sowie umgekehrt bei der Ermittelung der Geschwindigkeit aus dem Gefälle, der Länge und dem Querprofile auf die Kenntniß des Reibungscoefficienten ζ an. Nach den Eytelwein'-

schen Berechnungen der 91 Beobachtungen von **Du Buat**, **Brünings**, Funk und **Woltmann** ist $\zeta = 0{,}007565$ und daher Gleichförmige Bewegung.

$$h = 0{,}007565 \cdot \frac{lp}{F} \cdot \frac{c^2}{2g}.$$

Setzt man statt $g = 9{,}809$ Meter oder 31,25 Fuß ein, so erhält man für Metermaaß

$$h = 0{,}0003856 \, \frac{lp}{F} \, . \, c^2 \text{ und } c = 50{,}9 \sqrt{\frac{Fh}{pl}},$$

dagegen für das Fußmaaß

$$h = 0{,}00012103 \, \frac{lp}{F} \, . \, c^2 \text{ und } c = 90{,}9 \sqrt{\frac{Fh}{pl}}.$$

Bei Röhrenleitungen ist $\frac{lp}{F} = \frac{\pi l d}{\frac{1}{4}\pi d^2} = \frac{4l}{d}$, daher giebt diese Formel für Röhren $h = 0{,}03026 \, \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}$, während wir richtiger (§. 366) für diese bei mittleren Geschwindigkeiten, $h = 0{,}025 \, \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}$ gefunden haben. Es ist also, wie zu erwarten stand, die Reibung in Flußbetten größer, als in metallenen Röhrenleitungen.

Beispiele. 1) Welches Gefälle ist einem Kanale von der Länge $l = 2600$ Fuß, unterer Breite $b = 3$ Fuß, oberer Breite $b_1 = 7$ Fuß, und Tiefe $a = 3$ Fuß zu geben, wenn er ein Wasserquantum von 40 Cubikfuß pr. Sec. fortführen soll? Es ist $p = 3 + 2\sqrt{2^2 + 3^2} = 10{,}211$, $F = \frac{(7+3)\,3}{2} = 15$, und $c = {}^{40}/_{15}$ $= {}^{8}/_{3}$, daher das gesuchte Gefälle

$$h = 0{,}000121 \, . \, \frac{2600 \, . \, 10{,}211}{15} \, . \, ({}^{8}/_{3})^2 = \frac{0{,}3146 \, . \, 10{,}211 \, . \, 64}{15 \, . \, 9} = 1{,}52 \text{ Fuß}.$$

2) Welches Wasserquantum liefert ein Kanal von 5800 Fuß Länge bei 3 Fuß Gefälle, 5 Fuß Tiefe, 4 Fuß unterer und 12 Fuß oberer Breite? Hier ist

$$\frac{p}{F} = \frac{4 + 2\sqrt{5^2 + 4^2}}{5 \, . \, 8} = \frac{16{,}806}{40} = 0{,}42015, \text{ daher die Geschwindigkeit}$$

$$c = 90{,}9 \sqrt{\frac{3}{0{,}42015 \, . \, 5800}} = \frac{90{,}9}{\sqrt{0{,}14005 \, . \, 5800}} = \frac{90{,}9}{\sqrt{812{,}29}} = \frac{90{,}9}{28{,}5}$$

$= 3{,}19$ Fuß, und das Wasserquantum $Q = Fc = 40 \, . \, 3{,}19 = 127{,}6$ Cubikfuß.

§. 404. Auch bei Flüssen, Bächen u. s. w. zeigt sich der Widerstandscoefficient, wofür wir im vorigen Paragraphen den mittleren Werth 0,007565 angegeben haben, nicht constant, sondern, wie bei Röhren bei kleinen Geschwindigkeiten etwas zu- und bei großen etwas abnehmend. Man hat also zu setzen: Reibungscoefficienten.

$$\zeta = \zeta_1 \left(1 + \frac{\alpha}{c}\right) \text{ oder } \zeta_1 \left(1 + \frac{\alpha}{\sqrt{c}}\right) \text{ oder dergl.}$$

Der Verfasser der schon in §. 399 angeführten Schrift, findet aus 255

Reibungscoefficienten. zum großen Theil von ihm angestellten Versuchen für das preuß. Maaß $\zeta = 0{,}007409\left(1 + \frac{0{,}1865}{c}\right)$, und es folgt hiernach für das Metermaaß $\zeta = 0{,}007409\left(1 + \frac{0{,}05853}{c}\right)$.

Man sieht, daß diese Formeln bei einer Geschwindigkeit $c = 8\frac{1}{2}$ Fuß den oben angegebenen mittleren Widerstandscoefficienten $\zeta = 0{,}007565$ wiedergeben. Zu Erleichterung der Rechnung dient folgende für das Metermaaß zunächst brauchbare Tabelle der Widerstandscoefficienten.

Geschwindigkeit c	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	Meter.
Widerstandscoefficient $\zeta = 0{,}0$	1175	0958	0885	0849	0828	0813	0803	0795	0789	

Geschwindigkeit c	1	1,2	1,5	2	3	Meter.
Widerstandscoefficient $\zeta = 0{,}00$	784	777	771	763	755	

Für das preuß. Fußmaaß gilt folgende Tabelle.

Geschwindigkeit c	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	$1\frac{1}{2}$	2	3	5	10 Fuß.
Widerstandscoefficient $\zeta = 0{,}0$	1202	1096	1017	0971	0938	0914	0894	0879	0833	0810	0787	0769	0755

Diese Tabellen finden eine unmittelbare Anwendung in allen den Fällen, wenn die Geschwindigkeit c gegeben ist und das Gefälle gesucht wird, und wenn die Formel Nro. 1 des vorigen Paragraphen in Anwendung kommt. Ist aber die Geschwindigkeit c unbekannt und die zu suchende Größe, so gestattet diese Tabelle nur dann eine unmittelbare Anwendung, wenn man schon einen Näherungswerth von c hat. Am einfachsten geht man zu Werke, wenn man erst annähernd c durch die Formel

$c = 50{,}9\sqrt{\frac{Fh}{pl}}$ bestimmt, dann hieraus mittels der Tabelle, ζ er=

mittelt, und den so erhaltenen Werth in der Formel Reibungscoefficienten.

$\frac{c^2}{2g} = \frac{h}{\zeta} \cdot \frac{F}{lp}$ oder $c = \sqrt{\frac{\zeta F}{lp} \cdot 2gh}$ einsetzt.

Aus der Geschwindigkeit c folgt dann auch noch das Wasserquantum mittels der Formel $Q = Fc$.

Ist endlich das Wasserquantum und Gefälle gegeben und, wie es bei Anlegung von Kanälen oft vorkommt, das Querprofil zu bestimmen, so setze man $\frac{p}{F} = \frac{m}{\sqrt{F}}$ (s. Tabelle §. 402) und $c = \frac{Q}{F}$ in die Formel

$h = 0{,}007565 \frac{lp}{F} \cdot \frac{c^2}{2g}$, schreibe also $h = 0{,}007565 \frac{mlQ^2}{2gF^{5/2}}$, und

bestimme hiernach $F = \left(0{,}007565 \frac{mlQ^2}{2gh}\right)^{2/5}$, d. i. für Metermaaß,

$F = 0{,}0431 \left(\frac{mlQ^2}{h}\right)^{2/5}$ oder für Fußmaaß, $F = 0{,}0271 \left(\frac{mlQ^2}{h}\right)^{2/5}$.

Hieraus folgt nun annähernd $c = \frac{Q}{F}$; nimmt man diesem Werth entsprechend, ζ aus einer der Tabellen, so läßt sich $F = \left(\zeta \cdot \frac{mlQ^2}{2gh}\right)^{2/5}$, genauer berechnen, und es ergeben sich hieraus auch schärfere Werthe für $c = \frac{Q}{F}$, $p = m\sqrt{F}$, sowie für a, b u. s. w.

Beispiele. 1) Welches Gefälle erfordert ein Kanal von 1500 Fuß Länge, 2 Fuß unterer, 8 Fuß oberer Breite und 4 Fuß Tiefe, zur Fortleitung einer Wassermenge von 70 Cubikfuß pr. Sec.? Es ist $p = 2 + 2\sqrt{4^2 + 3^2} = 12$, $F = 5 \cdot 4 = 20$, $c = {}^{70}/_{20} = 3{,}5$, daher $\zeta = 0{,}00784$ und $h = 0{,}00784 \cdot \frac{1500 \cdot 12}{20} \cdot \frac{3{,}5^2}{2g} = 7{,}056 \cdot 0{,}196 = 1{,}38$ Fuß. 2) Welche Wassermenge liefert ein Bach von 40 Fuß Breite, $4\frac{1}{2}$ Fuß mittlerer Tiefe und 46 Fuß Wasserprofil, wenn er auf einer Länge von 750 Fuß, 10 Zoll Gefälle hat? Es ist ohngefähr $c = 90{,}9 \cdot \sqrt{\frac{40 \cdot 4{,}5 \cdot 10}{46 \cdot 750 \cdot 12}} = \frac{90{,}9}{\sqrt{230}} = 6$ Fuß, und hiernach $\zeta = 0{,}00765$ zu nehmen. Man erhält daher genauer $\frac{c^2}{2g} = \frac{Fh}{\zeta lp}$ $= \frac{4{,}5 \cdot 40 \cdot 10}{0{,}00765 \cdot 46 \cdot 750 \cdot 12} = \frac{1}{1{,}7595} = 0{,}5683$ und $c = 5{,}96$ Fuß. Die entsprechende Wassermenge ist endlich $Q = 4{,}5 \cdot 40 \cdot 5{,}96 = 10{,}73$ Cubikfuß. 3) Man will einen Graben von 3650 Fuß Länge anlegen, welcher bei einem Totalgefälle von 1 Fuß eine Wassermenge von 12 Cubikfuß pr. Sec. fortführt. Welche Dimensionen sind dem Querprofile zu geben, wenn es die Form eines halben regelmäßigen Sechseckes erhalten soll? Hier ist $m = 2{,}632$ (s. Tabelle §. 402), daher annähernd $F = 0{,}0271\,(2{,}632 \cdot 3650 \cdot 144)^{2/5} = 7{,}75$ Quadratfuß und $c = \frac{12}{7{,}75} = 1{,}548$ Fuß. Hiernach ist $\zeta = 0{,}0083$ und daher

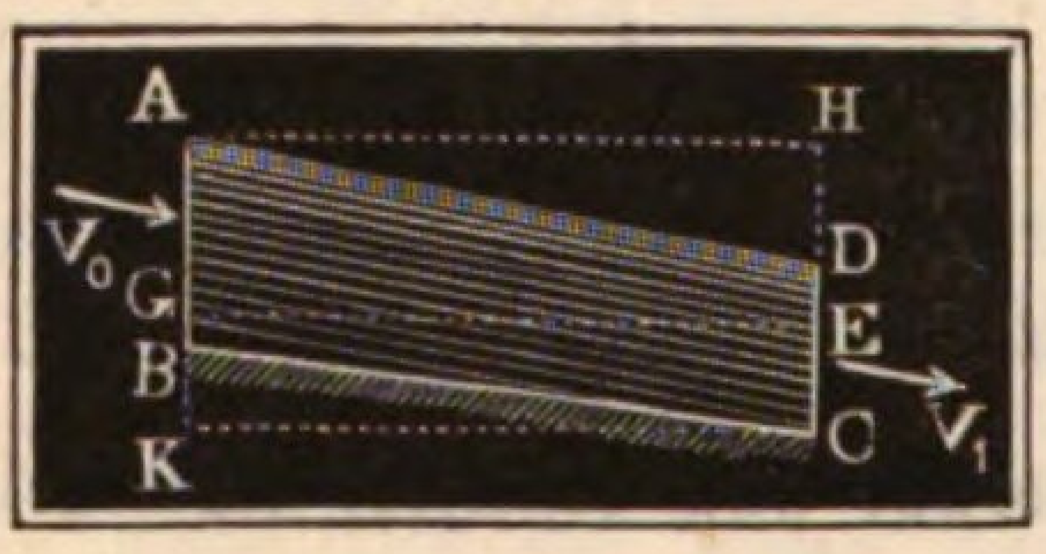
$F = \left(0{,}0083 \cdot 2{,}632 \cdot \frac{3650 \cdot 144}{62{,}5}\right)^{2/5} = 8{,}22$ Quadratfuß zu nehmen. Es ist zu setzen: die Tiefe $a = 0{,}760\sqrt{F} = 2{,}18$ Fuß, die untere Breite $= 0{,}877\sqrt{F} = 2{,}51$, und die obere Breite $= 2 \cdot 2{,}51 = 5{,}02$ Fuß.

Anmerkung. Eine Tabelle zur Abkürzung dieser Rechnungen theilt der »Ingenieur« Seite 478 und 479 mit.

Ungleichförmige Bewegung.

§. 405. Die Theorie der **ungleichförmigen Bewegung** des Wassers in Flußbetten läßt sich insofern auf die Theorie der gleichförmigen Bewegung zurückführen, als man den Reibungswiderstand auf einer kurzen Flußstrecke als constant und die entsprechende Höhe ebenfalls $= \zeta \cdot \frac{lp}{F} \cdot \frac{v^2}{2g}$ setzen kann. Außerdem ist aber noch auf die der Geschwindigkeitsveränderung entsprechende lebendige Kraft des Wassers Rücksicht zu nehmen.

Fig. 597.



Es sei $ABCD$, Fig. 597, eine kurze Flußstrecke, von der Länge $AD = l$, dem Gefälle $DH = h$, und es sei v_0 die Geschwindigkeit des ankommenden, v_1 die des fortgehenden Wassers. Wenden wir die Regeln des Ausflusses auf ein Element D im Wasserspiegel an, so erhalten wir für dessen Geschwindigkeit v_1, $\frac{v_1^2}{2g} = h + \frac{v_0^2}{2g}$; was aber ein Element E unter Wasser betrifft, so hat dasselbe zwar von der einen Seite her eine größere Druckhöhe $AG = EH$, allein da das Unterwasser mit der Druckhöhe DE entgegenwirkt, so bleibt für dasselbe ebenfalls nur das Gefälle $DH = EH - ED$ als Bewegung erzeugende Druckhöhe übrig, und es gilt also auch für dieses und für jedes andere Element die Formel

$h = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2g}$, und nimmt man hierzu noch den Reibungswiderstand, so erhält man $h = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2g} + \zeta \cdot \frac{lp}{F} \cdot \frac{v^2}{2g}$, worin p, F und v Mittelwerthe des Wasserprofiles, Querschnittes und der Geschwindigkeit sind. Ist F_0 der Inhalt des oberen und F_1 der des unteren Querprofiles, so läßt sich setzen: $F = \frac{F_0 + F_1}{2}$ und $Q = F_0 v_0 = F_1 v_1$, weshalb nun

$\frac{v_1^2 - v_0^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left[\left(\frac{Q}{F_1}\right)^2 - \left(\frac{Q}{F_0}\right)^2\right] = \left(\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2}\right)\frac{Q^2}{2g}$, und

$\frac{v^2}{F} = \frac{v_0^2 + v_1^2}{F_0 + F_1} = \left(\frac{1}{F_0^2} + \frac{1}{F_1^2}\right)\frac{Q^2}{F_0 + F_1}$ folgt und sich ergiebt

1) $h = \left[\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2} + \zeta \frac{lp}{F_0+F_1}\left(\frac{1}{F_0^2} + \frac{1}{F_1^2}\right)\right]\frac{Q^2}{2g}$, so wie

Ungleichförmige Bewegung.

2) $Q = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2} + \zeta \frac{lp}{F_0+F_1}\left(\frac{1}{F_0^2} + \frac{1}{F_1^2}\right)}}$.

Mit Hülfe der Formel 1) läßt sich aus dem Wasserquantum, der Länge und den Querschnitten einer Fluß- oder Kanalstrecke das entsprechende Gefälle h berechnen, mit Hülfe der Formel 2) aber umgekehrt aus dem Gefälle, der Länge und den Querschnitten das Wasserquantum. Um mehr Genauigkeit zu erzielen, kann man die Rechnung für mehrere kurze Flußstrecken durchführen und zuletzt das arithmetische Mittel nehmen. Ist nur das Totalgefälle bekannt, so setze man gleich dieses statt h in die letzte Formel, führe statt $\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2}$, $\frac{1}{F_n^2} - \frac{1}{F_0^2}$, wo F_n den Inhalt des letzten Querprofiles bezeichnet, und statt $\zeta \,.\, \frac{lp}{F_0+F_1}\left(\frac{1}{F_0^2} + \frac{1}{F_1^2}\right)$ die Summe aller ähnlichen Werthe der einzelnen Flußstrecken ein.

Beispiel. Ein Bach hat auf einer Strecke von 300 Fuß Länge 9,6 Zoll Gefälle, der mittlere Umfang seines Wasserprofiles ist 40 Fuß, der Inhalt des oberen Querprofiles ist 70, der des unteren 60 Quadratfuß. Welche Wassermenge liefert dieser Bach?

Es ist $Q = \frac{7{,}906\sqrt{0{,}8}}{\sqrt{\frac{1}{60^2} - \frac{1}{70^2} + 0{,}007565 \,.\, \frac{300 \,.\, 40}{130}\left(\frac{1}{60^2} + \frac{1}{70^2}\right)}}$

$= \frac{7{,}071}{\sqrt{0{,}0000731 + 0{,}0003365}} = \frac{7{,}071}{\sqrt{0{,}0004096}} = 349$ Cubikfuß. Die mittlere Geschwindigkeit ist $\frac{2\,Q}{F_0 + F} = \frac{698}{130} = 5{,}37$ Fuß, daher ist richtiger $\zeta = 0{,}00768$ statt 0,007565 zu setzen, und es folgt nun schärfer

$Q = \frac{7{,}071}{\sqrt{0{,}0000731 + 0{,}0003364}} = 349$ Cubikfuß. Wenn derselbe Bach bei demselben Wasserstande auf einer anderen Strecke von 450 Fuß Länge 11 Zoll Gefälle hat, und wenn auf dieser Strecke sein oberes Querprofil 50 und sein unteres 60 Quadratfuß beträgt, der mittlere Profilumfang aber 36 Fuß mißt, so hat man

$Q = \frac{7{,}906\sqrt{0{,}9167}}{\sqrt{\frac{1}{60^2} - \frac{1}{50^2} + 0{,}00768 \,.\, \frac{450 \,.\, 36}{110}\left(\frac{1}{60^2} + \frac{1}{50^2}\right)}}$

$= 7{,}906\sqrt{\frac{0{,}9167}{-0{,}0001222 + 0{,}0007549}} = 301$ Cubikfuß.

Aus beiden Werthen folgt der mittlere $Q = \frac{349 + 301}{2} = 325$ Cubikfuß.

§. 406. Um eine Formel für die Wassertiefe zu erhalten, setzen wir die obere Tiefe $= a_0$ und die untere $= a_1$, ferner den Abhang des Grundbettes

Ungleichförmige Bewegung.

$= \alpha$, folglich das Gefälle des Grundbettes $= l\, sin.\, \alpha$. Dann erhalten wir das Wassergefälle $h = a_0 - a_1 + l\, sin.\, \alpha$ und es folgt nun die Gleichung

$$a_0 - a_1 - \left(\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2}\right)\frac{Q^2}{2g} = \left[\zeta \frac{p}{F_0 + F_1}\left(\frac{1}{F_0^2} + \frac{1}{F_1^2}\right)\frac{Q^2}{2g} - sin.\, \alpha\right] l,$$

daher $$l = \frac{a_0 - a_1 - \left(\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2}\right)\frac{Q^2}{2g}}{\zeta \frac{p}{F_0 + F_1}\left(\frac{1}{F_0^2} + \frac{1}{F_1^2}\right)\frac{Q^2}{2g} - sin.\, \alpha}.$$

Mit Hülfe dieser Formel kann man die Strecke l bestimmen, welche einer gegebenen Veränderung $a_0 - a_1$ der Wassertiefe entspricht. Ist aber die umgekehrte Aufgabe zu lösen, so hat man den Weg der Näherung zu betreten, indem man erst die angenommenen Senkungen $a_0 - a_1$ und $a_1 - a_2$ entsprechenden Entfernungen l_1 und l_2 bestimmt, und hieraus durch eine Proportion die der gegebenen Entfernung l entsprechende Senkung berechnet (s. »Ingenieur«, Arithmetik, §. 16, V.).

Die Formel ist noch einer Vereinfachung fähig, wenn die Breite b des fließenden Wassers constant ist, oder als constant angesehen werden kann. Wir setzen in diesem Falle

$$\left(\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2}\right)\frac{Q^2}{2g} = \frac{F_0^2 - F_1^2}{F_0^2 F_1^2} \cdot \frac{Q^2}{2g} = \frac{(F_0 - F_1)(F_0 + F_1)}{F_1^2} \cdot \frac{v_0^2}{2g}$$

$$= \frac{(a_0 - a_1)(a_0 + a_1)}{a_1^2} \cdot \frac{v_0^2}{2g} \text{ annähernd} = 2\,\frac{(a_0 - a_1)}{a_0} \cdot \frac{v_0^2}{2g},$$

und ebenso

$$\frac{p}{F_0 + F_1}\left(\frac{1}{F_0^2} + \frac{1}{F_1^2}\right)\frac{Q^2}{2g} = \frac{p\,(F_0^2 + F_1^2)}{(F_0 + F_1)\,F_1^2} \cdot \frac{v_0^2}{2g} \text{ annähernd}$$

$$= \frac{p}{a_0 b} \cdot \frac{v_0^2}{2g}, \text{ daher } l = \frac{(a_0 - a_1)\left(1 - \frac{2}{a_0} \cdot \frac{v_0^2}{2g}\right)}{\zeta \cdot \frac{p}{a_0 b} \cdot \frac{v_0^2}{2g} - sin.\, \alpha}, \text{ und folglich}$$

$$\frac{a_0 - a_1}{l} = \frac{\zeta \cdot \frac{p}{a_0 b} \cdot \frac{v_0^2}{2g} - sin.\, \alpha}{1 - \frac{2}{a_0} \cdot \frac{v_0^2}{2g}}.$$

Mit Hülfe dieser Formel läßt sich direct die einer gegebenen Strecke l entsprechende Veränderung $(a_0 - a_1)$ der Wassertiefe berechnen.

Beispiel. Man will in einem horizontalen Graben von 5 Fuß Breite und 800 Fuß Länge eine Wassermenge von 20 Cubikfuß fortführen und dieselbe 2 Fuß hoch eintreten lassen, welche Höhe wird das Wasser am Ende des Kanales haben? Theilen wir die ganze Länge in zwei gleiche Theile und bestimmen nach der letzten Formel das Gefälle für jeden dieser Theile.

Allemal ist $sin.\ \alpha = 0,\ l = \frac{800}{2} = 400$, und $b = 5$; für den ersten Theil aber ist $v_0 = \frac{20}{2\ .\ 5} = 2$, daher $\zeta = 0{,}00810$, ferner $a_0 = 2$; da nun $p = 8\frac{1}{2}$, — Ungleichförmige Bewegung.

so folgt $a_0 - a_1 = \left(\frac{0{,}00810\ .\ \frac{8{,}5}{10}\ .\ \frac{4}{2g}}{1 - \frac{2}{2}\ .\ \frac{4}{2g}}\right)\ .\ 400 = \frac{0{,}1762}{0{,}936} = 0{,}188$ Fuß.

Nun ist für die zweite Hälfte $a_1 = 2 - 0{,}188 = 1{,}812$ ferner p_1 etwa $= 8{,}2$, $v_1 = \frac{20}{9{,}106} = 2{,}207$, und die Senkung des zweiten Theiles

$$a_1 - a_2 = \left(\frac{0{,}00810\ .\ \frac{8{,}2}{9{,}106}\ .\ \frac{2{,}207^2}{2g}}{1 - \frac{2}{1{,}812}\ .\ \frac{2{,}207^2}{2g}}\right)\ .\ 400 = \frac{0{,}2285}{0{,}914} = 0{,}250 \text{ Fuß},$$

daher folgt die ganze Senkung $= 0{,}188 + 0{,}250 = 0{,}438$ und die Wassertiefe am unteren Ende $= 2 - 0{,}438 = 1{,}562$ Fuß $= 18\frac{3}{4}$ Zoll.

§. 407. Wenn Flüsse oder Kanäle ihren Wasserstand ändern, so treten auch Geschwindigkeitsveränderungen und Veränderungen in den Wassermengen ein. Einem höheren Wasserstande entspricht nicht nur ein größerer Querschnitt, sondern auch eine größere Geschwindigkeit, und daher aus doppelten Gründen ein größeres Wasserquantum, und ebenso giebt eine Abnahme der Wassertiefe eine Verminderung im Querschnitt und in der Geschwindigkeit, und daher auch eine Abnahme der Wassermenge in zweifacher Beziehung. Ist die anfängliche Tiefe $= a$, und die spätere Tiefe $= a_1$, die obere Breite des Kanales aber $= b$, so läßt sich die Vergrößerung des Querschnittes $= b\,(a_1 - a)$ und daher der Querschnitt nach der Anschwellung $a_1 - a$, $F_1 = F + b\,(a_1 - a)$ setzen, auch folgt hiernach — Anschwellungen.

$$\frac{F_1}{F} = 1 + \frac{b\,(a_1 - a)}{F}, \text{und } \sqrt{\frac{F_1}{F}} \text{ annähernd } = 1 + \frac{b\,(a_1 - a)}{2F}.$$

Ist ferner p der anfängliche, p_1 der spätere Umfang des Wasserprofiles, ϑ aber der Böschungswinkel der Ufer, so läßt sich setzen

$$p_1 = p + \frac{2\,(a_1 - a)}{sin.\ \vartheta}, \text{ daher } \frac{p_1}{p} = 1 + \frac{2\,(a_1 - a)}{p\ sin.\ \vartheta} \text{ und}$$

$$\sqrt{\frac{p_1}{p}} = 1 + \frac{a_1 - a}{p\ sin.\ \vartheta}, \text{ sowie} \sqrt{\frac{p}{p_1}} = 1 - \frac{a_1 - a}{p\ sin.\ \vartheta}.$$

Nun ist aber die Geschwindigkeit beim ersten Wasserstande

$$c = 90{,}9 \sqrt{\frac{Fh}{pl}} \text{ und beim zweiten } c_1 = 90{,}9 \sqrt{\frac{F_1}{p_1} . \frac{h}{l}}, \text{ es läßt}$$

sich daher $\frac{c_1}{c} = \sqrt{\frac{F_1}{F}} \cdot \sqrt{\frac{p}{p_1}} = \left(1 + \frac{b\,(a_1 - a)}{2F}\right)\left(1 - \frac{a_1 - a}{p\,sin.\vartheta}\right)$

Anschwellungen. $= 1 + (a_1 - a)\left(\frac{b}{2F} - \frac{1}{p \sin. \vartheta}\right)$, also die relative Geschwindigkeitsveränderung

$$1)\ \frac{c_1 - c}{c} = (a_1 - a)\left(\frac{b}{2F} - \frac{1}{p \sin. \vartheta}\right) \text{ setzen.}$$

Dagegen folgt das Verhältniß der Wassermengen

$$\frac{Q_1}{Q} = \frac{F_1 c_1}{F c} = \left(1 + \frac{b(a_1 - a)}{F}\right)\left[1 + (a_1 - a)\left(\frac{b}{2F} - \frac{1}{p \sin. \vartheta}\right)\right]$$

$$= 1 + (a_1 - a)\left(\frac{3b}{2F} - \frac{1}{p \sin. \vartheta}\right)$$

und der relative Wassermengenzuwachs:

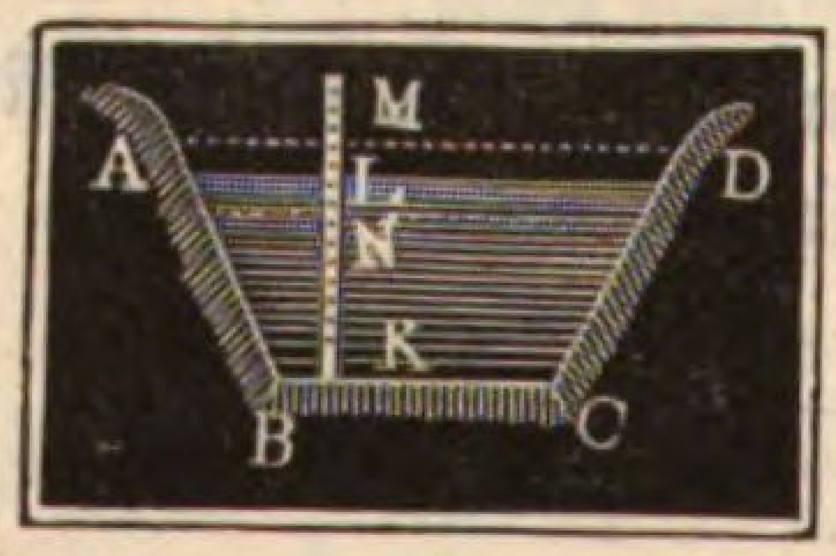
$$2)\ \frac{Q_1 - Q}{Q} = (a_1 - a)\left(\frac{3b}{2F} - \frac{1}{p \sin. \vartheta}\right).$$

Weniger genau, aber in vielen Fällen, namentlich bei breiten Kanälen mit wenig Böschung genügend, ist $F = ab$ zu setzen und $\frac{1}{p \sin. \vartheta}$ zu vernachlässigen, weswegen einfacher $\frac{c_1 - c}{c} = \frac{1}{2}\, \frac{a_1 - a}{a}$ und $\frac{Q_1 - Q}{Q} = \frac{3}{2} \cdot \frac{a_1 - a}{a}$ folgt.

Hiernach ist also die **relative Geschwindigkeitsveränderung halb so groß, und die relative Veränderung im Wasserquantum gleich $\frac{3}{2}$mal so groß, als die relative Veränderung im Wasserstande.**

Beispiele. 1) Wenn der Wasserstand um $\frac{1}{10}$ seiner anfänglichen Größe zunimmt, so wird die Geschwindigkeit um $\frac{1}{20}$ und das Wasserquantum um $\frac{3}{20}$ seines anfänglichen Werthes größer. 2) Wenn die Tiefe um 8 Procent abnimmt, so vermindert sich die Geschwindigkeit um 4 Procent, und das Wasserquantum um 12 Procent. 3) Mit Hülfe der genaueren Formel

Fig. 598.



$$\frac{Q_1 - Q}{Q} = (a_1 - a)\left(\frac{3b}{2F} - \frac{1}{p \sin. \vartheta}\right)$$

läßt sich eine Wasserstandsscala *KM*, Fig. 598, construiren, woran man die jeder Wassertiefe *KL* entsprechende Wassermenge eines Kanales ablesen kann, wenn man nur einmal das Wasserquantum für eine gewisse mittlere Tiefe kennt. Ist $b = 9$ Fuß, $b_1 = 3$, $a = 3$ und $\vartheta = 45^\circ$, so hat man

$F = \frac{(9 + 3)\,3}{2} = 18$ Quadratfuß, $p = 3 + 2 \cdot 3\sqrt{2} = 11{,}485$,

und $\sin. \vartheta = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}707$, daher

$\frac{Q_1 - Q}{Q} = \left(\frac{3 \cdot 9}{2 \cdot 18} - \frac{1}{11{,}485 \cdot 0{,}707}\right)(a_1 - a) = (0{,}750 - 0{,}123)\,(a_1 - a)$ $= 0{,}627\,(a_1 - a)$. Ist das dem mittleren Wasserstande entsprechende Wasserquantum $Q = 40$ Cubikfuß, so hat man $Q_1 = 40 + 40 \cdot 0{,}627\,(a_1 - a) = 40 + \frac{a_1 - a}{0{,}04}$.

Ist $a_1 - a = 0{,}04$ Fuß $=$ 5,76 Linien, so folgt $Q_1 = 41$; ist $a_1 - a = 0{,}08$ Fuß $=$ 11,52 Linien, so hat man $Q_1 = 42$ Cubikfuß; ist ferner $a_1 - a = -\ 0{,}04$, so folgt $Q_1 = 39$ Cubikfuß u. s. w. Es giebt also eine Scala, deren Intervalle $LM = LN =$ 5,76 Linien betragen, die Wassermenge bis auf einen Cubikfuß genau an. Natürlich wird die Genauigkeit um so kleiner, je mehr sich der Wasserstand von dem mittleren entfernt. Anschwellungen.

Anmerkung. Ueber die Zu- und Abführung des Wassers in Kanälen sowie über die Wehre und Teiche wird im zweiten Theile gehandelt.

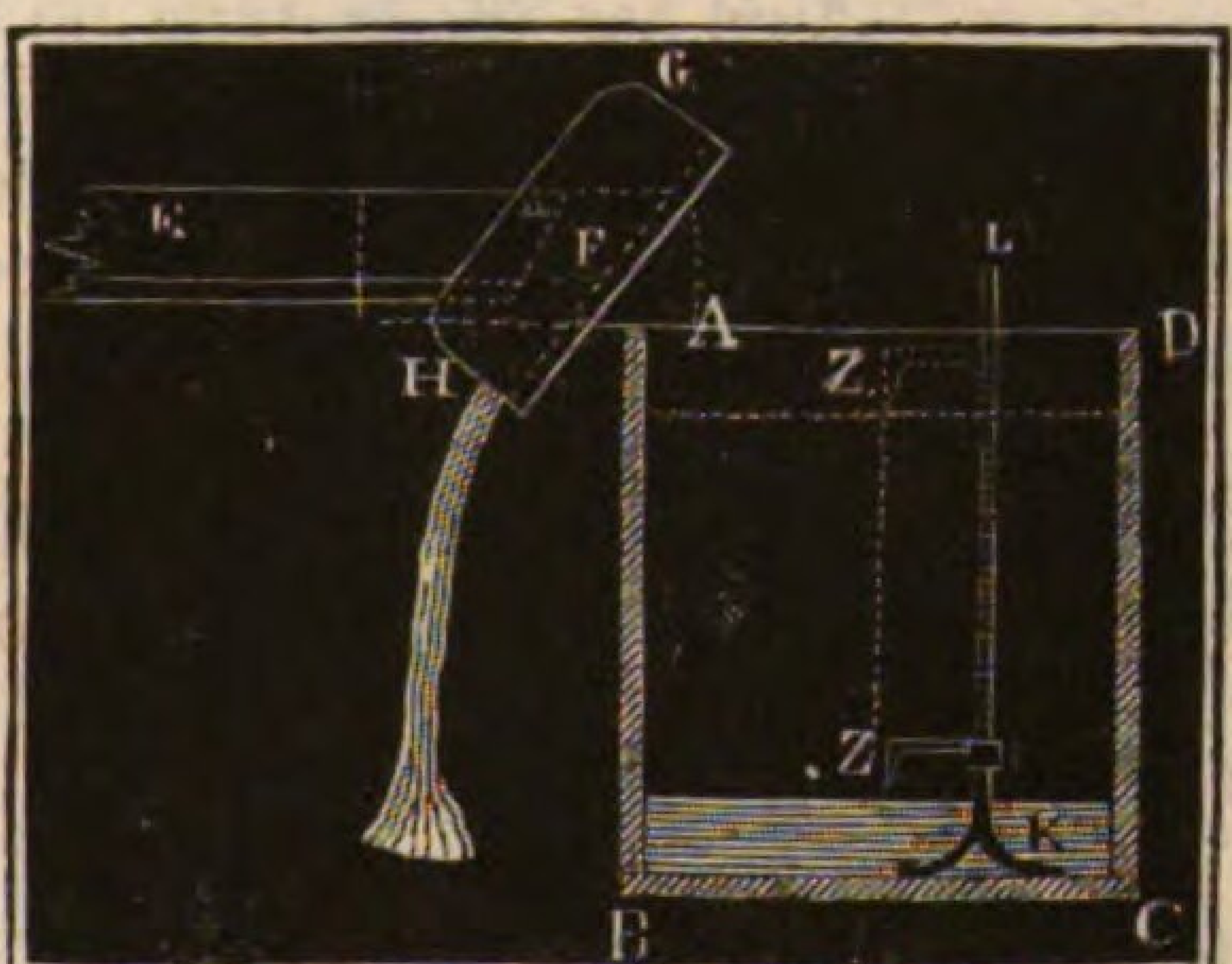
Schlußanmerkung. Ausführlich über die Bewegung des Wassers in Kanälen und Flüssen handelt der Verfasser in der allgemeinen Encyclopädie, Bd. II., Artikel »Bewegung des Wassers in Kanälen und Flüssen«; auch wird daselbst eine vollständige Literatur über diesen Gegenstand mitgetheilt.

Achtes Kapitel.

Hydrometrie oder Lehre vom Wassermessen.

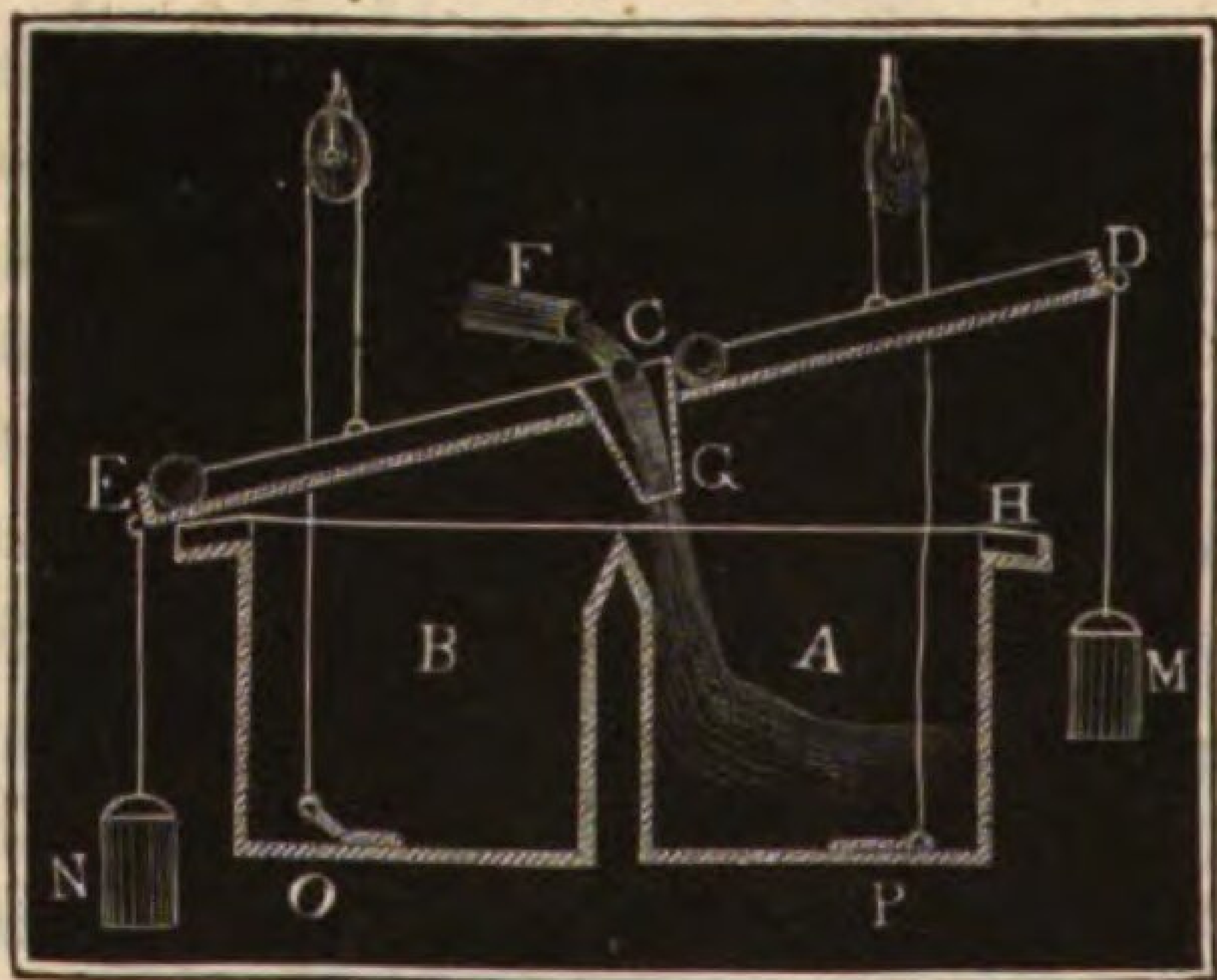
§. 408. Das Wasserquantum, welches ein fließendes Wasser innerhalb einer gewissen Zeit liefert, wird entweder durch Aichmaaße, oder durch Ausflußapparate oder durch Hydrometer gefunden. Das einfachste Wassermessen besteht allerdings in dem Aichen (franz. jaugeage; engl. gauging), d. i. in der Anwendung eines Aichgefäßes, doch ist dieses nur bei kleineren Wassermengen, wie sie etwa in Röhren oder kleinen Bächen und Gräben zugeführt werden, anwendbar. Das Aichgefäß wird meist aus Brettern zusammengesetzt, und bekommt deshalb eine parallelepipedische Form; um seine Haltbarkeit zu erhöhen, wird es wohl noch mit eisernen Reifen umgeben. Wie der genaue Inhalt dieses Gefäßes zu ermitteln ist, wird im »Ingenieur« angezeigt. Das Wasser wird diesem Gefäße durch ein Gerinne EF, Fig. 599, zugeführt, an dessen Ende sich eine Doppelklappe GH befindet, durch welche man das Wasser nach Belieben neben dem Gefäße AC oder in dasselbe ausfließen lassen kann. Um die Höhe des Wasserkörpers im Gefäße recht genau zu erhalten, wendet man wohl noch eine Wasserstandsscala KL an. Wenn man vor der Messung die Zeigerspitze Z bis auf die Aichen.

Fig. 599.



Aichen. Oberfläche des schon im Gefäße befindlichen und wenn auch vielleicht nur den Boden bedeckenden Wassers herabgelassen und den Wasserstand an der Scala abgelesen hat, so erhält man die Höhe ZZ_1 des geaichten Wassers, durch Subtraction dieses Wasserstandes von demjenigen Stande, welchen die Scala anzeigt, wenn man die Zeigerspitze Z_1 am Ende der Beobachtung mit dem Wasserspiegel in Berührung gebracht hat. Vor der Messung ist natürlich die Klappe so zu stellen, daß das Wasser vor dem Kasten ausfließt. Hat man sich überzeugt, daß der Zufluß im Gerinne in Beharrung übergegangen ist, und hat man an der in der Hand befindlichen Uhr einen Zeitpunkt beobachtet, so dreht man die Klappe um, damit das Wasser in das Aichgefäß fließt; und ist nachher das Gefäß ganz oder zum Theil gefüllt, so liest man auf der Uhr einen zweiten Zeitpunkt ab und bringt die Klappe wieder in die erste Stellung. Aus dem mittleren Querschnitte F des Gefäßes und der Höhe $ZZ_1 = a$ des Wasserkörpers ergiebt sich das ganze Wasserquantum $= Fa$, und hieraus wieder mittels der durch die Differenz der beobachteten Zeiten gegebenen Füllungszeit t das Wasserquantum pr. Sec. $Q = \frac{Fa}{t}$.

Fig. 600.



Anmerkung. Um ein veränderliches Zuflußwasserquantum zu jeder Tageszeit angeben zu können, kann man den in Fig. 600, abgebildeten Cubicir-Apparat, wie er vorzüglich auf Salinen vorkommt, anwenden. Hier giebt es zwei Aichgefäße A und B, die sich abwechselnd füllen und leeren, und das durch eine Röhre F zugeführte Wasser geht durch eine kurze Röhre CG, welche mit einem um C drehbaren Hebel DE fest verbunden ist. Hat sich das eine Gefäß, z. B. A, gefüllt, so fließt das Wasser durch ein kleines Gerinne H in das Eimerchen M, dieses zieht nun den Hebel auf der einen Seite nieder, und es kommt die Röhre CG in eine Lage, wodurch das Wasser nach B geleitet wird. Das Aufziehen der Klappen O und P erfolgt durch über Rollen weggehende Schnüre, deren Enden mit dem Hebel verbunden sind, und wird vorzüglich durch eiserne Kugeln unterstützt, die dem Niedergehen des Hebels den letzten Impuls ertheilen. Die Eimer M und N enthalten noch kleine Ausflußöffnungen, damit sie sich nach jedesmaligem Kippen leeren können. Uebrigens ist noch ein Zählapparat angebracht, an welchem die Zahl der Spiele zu jeder Zeit abgelesen werden kann. Andere Apparate dieser Art von Brown beschreibt Dingler's polyt. Journ. Bd. 115.

Ausflußregulatoren §. 409. Sehr häufig werden kleinere und mittlere Wassermengen mit Hülfe ihres Ausflusses durch eine bestimmte Mündung und unter einem

bekannten Drucke gefunden. Aus dem Inhalte F der Mündung, aus der Druckhöhe h und mit Hülfe eines Ausflußcoefficienten μ, ergiebt sich die Wassermenge pr. Sec. $Q = \mu F \sqrt{2gh}$. Am besten eignen sich hierzu die Poncelet'schen Mündungen, weil für diese bei sehr verschiedenen Druckhöhen die Ausflußcoefficienten mit großer Genauigkeit bekannt sind (§. 349); doch sind dieselben nur bei gewissen mittleren Wassermengen anwendbar. Der Verfasser bedient sich bei seinen Wassermessungen vier solcher Mündungen, eine von 5, eine von 10, eine von 15 und eine von 20 Centimeter Höhe, alle aber von 20 Centimeter Weite. Diese Mündungen sind in Messingtafeln ausgeschnitten, welche auf hölzerne Rahmen AC, Fig. 601, befestigt sind, die man mittelst vier starker eisernen Schrauben auf jeder Wand befestigen kann. In vielen Fällen muß man sich freilich größerer Mündungen bedienen, für welche die Ausflußcoefficienten nicht so sicher bestimmt sind, ja oft lassen sich nur Ueberfälle anbringen, welche meist noch weniger Genauigkeit gewähren. Jedenfalls gilt aber die Regel, daß man bei dem Ausflusse so viel wie möglich vollständige und vollkommene Contraction zu erzielen suchen und deshalb der Mündung, wenn sie in einer dickeren Wand befindlich ist, nach außen eine Abschrägung ertheilen muß. Welche Correctionen bei unvollkommener und partieller Contraction anzubringen sind, ist in den Paragraphen 354, 355 u. s. w. hinreichend auseinandergesetzt worden. Um das Wasser eines Gerinnes zu messen, hat man das Mündungsstück einzusetzen und den Moment abzuwarten, wann der Wasserstand in Beharrung gekommen ist. Zu Messung der Druckhöhe kann man sich der festen Wasserstandsscala mit Zeiger, Fig. 599, oder der beweglichen Wasserstandsscala EF, Fig. 603, bedienen. Will man den Ausfluß unmittelbar an Schutzöffnungen beobachten, so ist es gut, vorher ein Paar messingene Schützenstandsscalen BC und DE, Fig. 602, nebst ihren Zeigern F und G auf die Führung und auf das Schutzbrett A zu befestigen, um die Oeffnungshöhe sicherer ablesen zu können. Uebrigens ist es meist besser zu dem Zwecke der Wassermessung, gleich ein neues Schutzbrett nebst einer Führung mit der erforderlichen Abschrägung nach außen einzusetzen. Ausflußregulatoren.

Fig. 601.

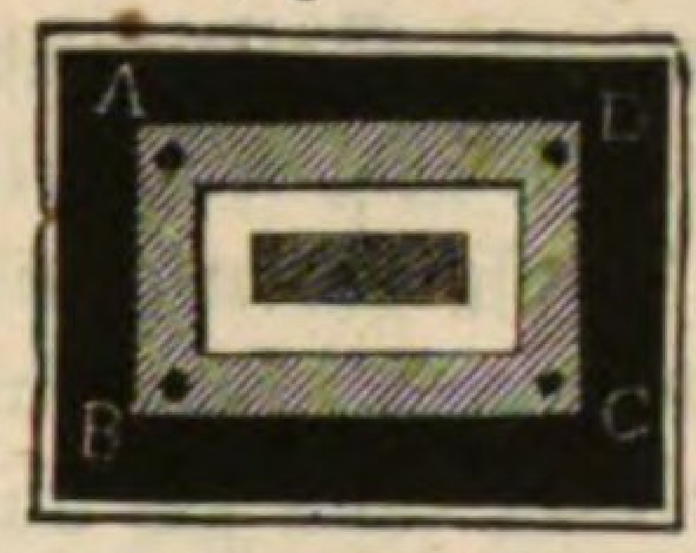


Fig. 602.

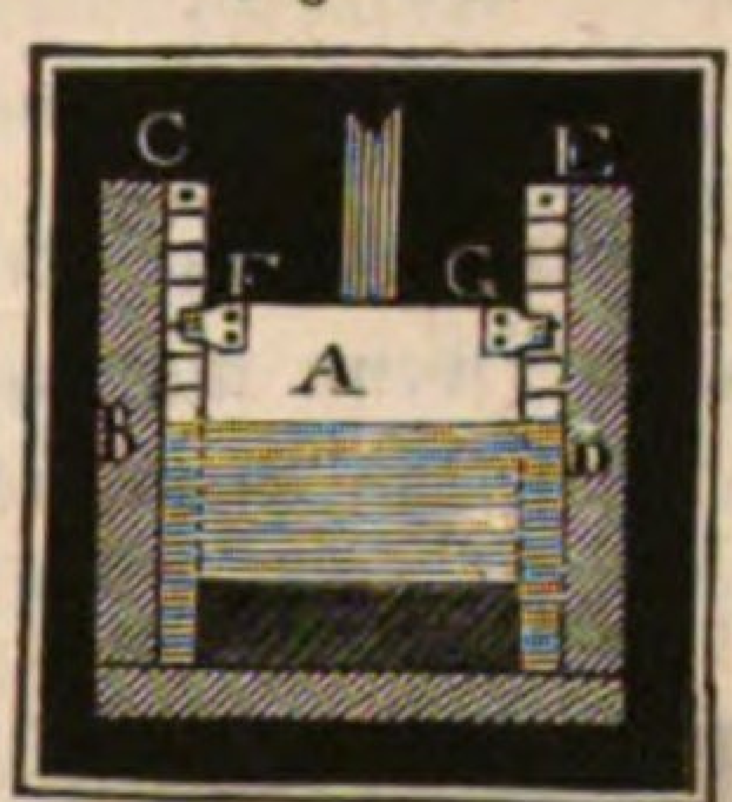
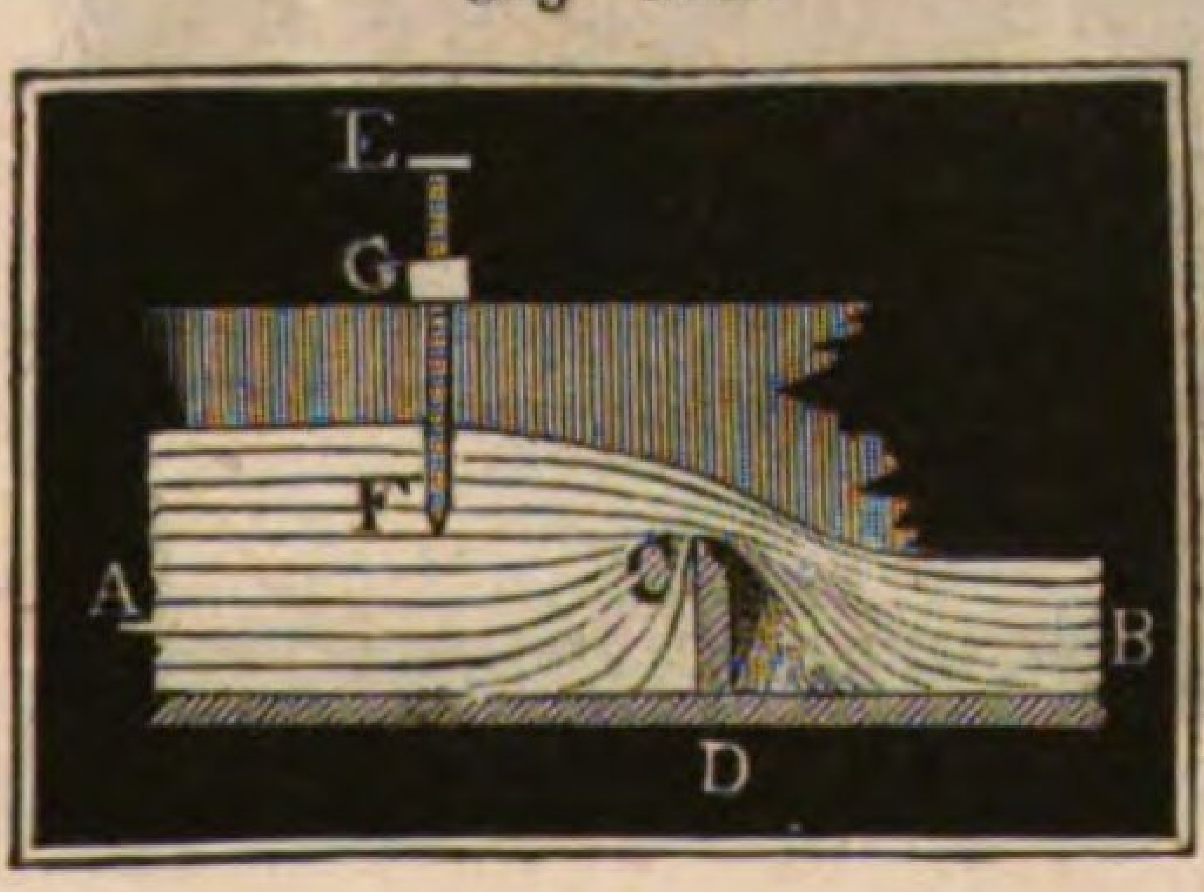


Fig. 603

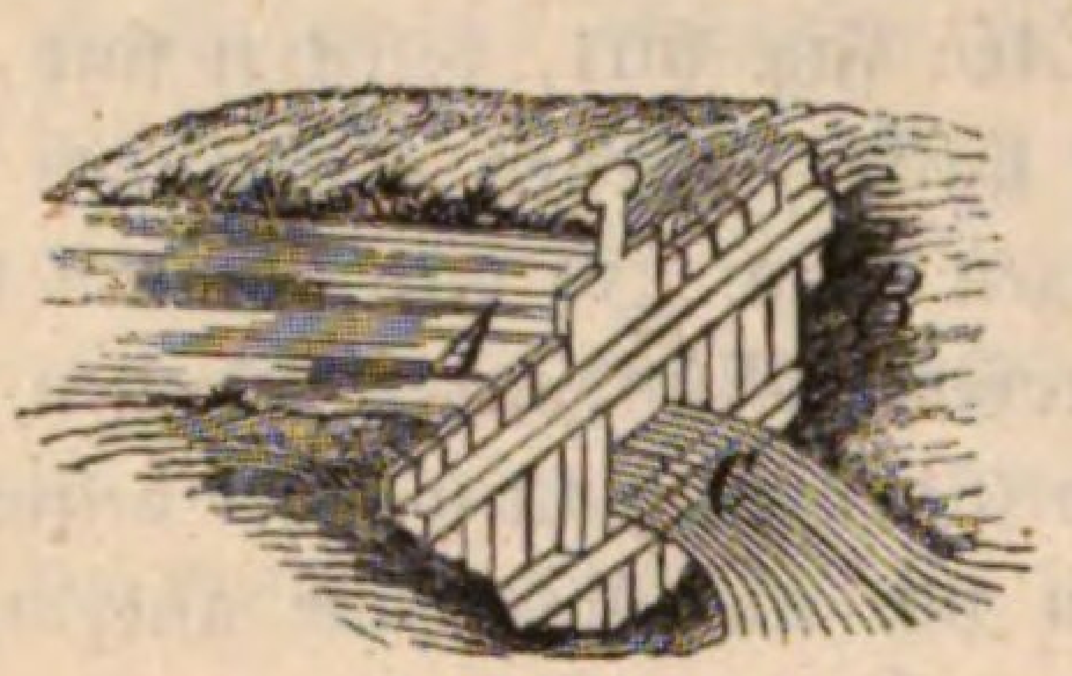


Das einfachste Mittel, das Wasser in einem Gerinne zu messen, besteht

Ausfluß-regulatoren.

allerdings in dem Einsetzen eines an der oberen Kante abgeschrägten Brettes *CD*, Fig. 603, und in der Ausmessung des sich dadurch gebildeten Ueberfalles. Ist der Graben oder das Gerinne lang und wenig ansteigend, so dauert es allerdings ziemlich lange, ehe der Beharrungszustand eintritt, und es ist deshalb gut, hier vor der Messung noch ein zweites Brett einzusetzen, welches den Ausfluß des Wassers auf eine längere Zeit verhindert, um das Steigen des Wassers auf die dem Beharrungszustande entsprechende Höhe zu beschleunigen.

Fig. 604.



Um das Wasserquantum eines Baches zu messen, kann man denselben durch einen aus Pfählen und Brettern bestehenden Einbau *AB*, Fig. 604, eindämmen und das Wasser *C* durch eine in demselben angebrachte Oeffnung abfließen lassen, oder man kann sich auch eines einfachen Ueberfalles oder Ueberfallwehres (hiervon im zweiten Theile) bedienen.

Anmerkung. Das einfachste Mittel, um die Druckhöhe zu bestimmen, ist, den Stand des Zeigers zu beobachten, wenn dessen Spitze erstens die Oberfläche des im Beharrungszustande abfließenden Wassers und zweitens den Spiegel des stillstehenden und nur bis Schwelle *C* aufgestauten Wassers berührt. Die Differenz dieser beiden Scalenstände ist die Druckhöhe oder der Stand des Wassers über der Schwelle. Bei Beobachtung des letzten Zeigerstandes ist die Capillarität nicht außer Acht zu lassen, vermöge welcher der Wasserspiegel noch um 1,37 Linien über der Schwelle stehen kann, ehe der Abfluß des Wassers über derselben beginnt oder aufhört. (Siehe 322)

§. 410. Sehr einfach wird auch das Wasser in einem rectangulären Kanale oder Gerinne *AB*, Fig. 605 und 606, gemessen, wenn man ein unten abgeschrägtes Brett *CD* so einsetzt, daß unter demselben eine Aus-

Fig. 605.

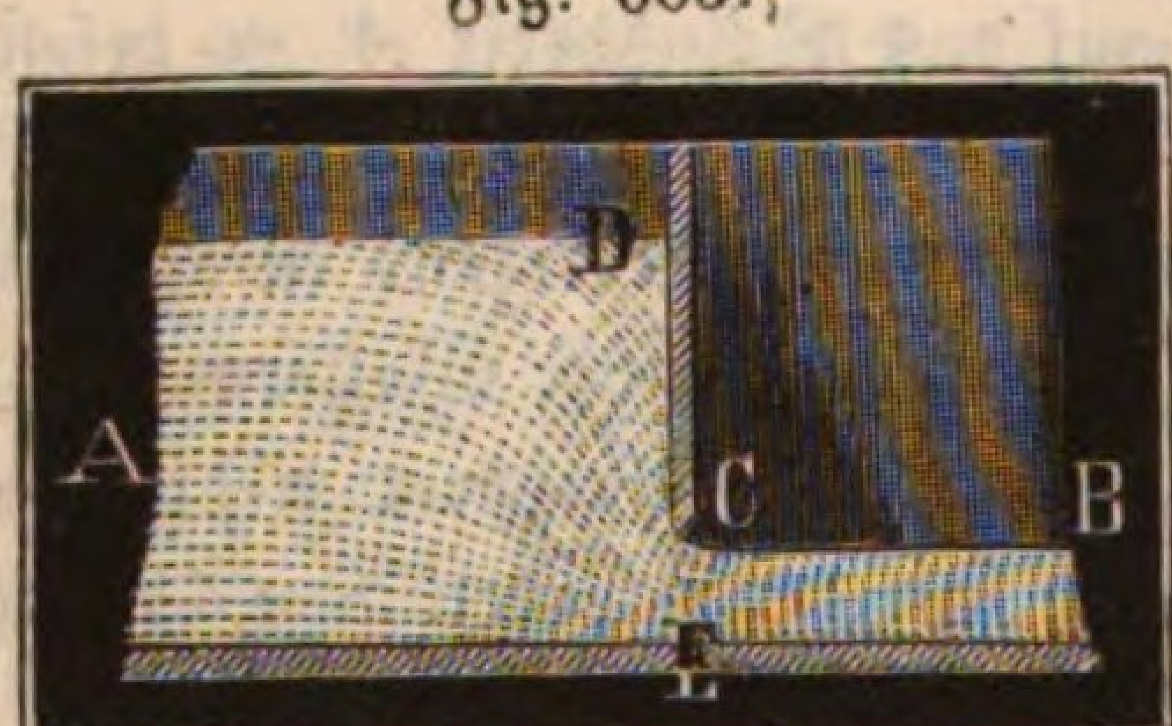
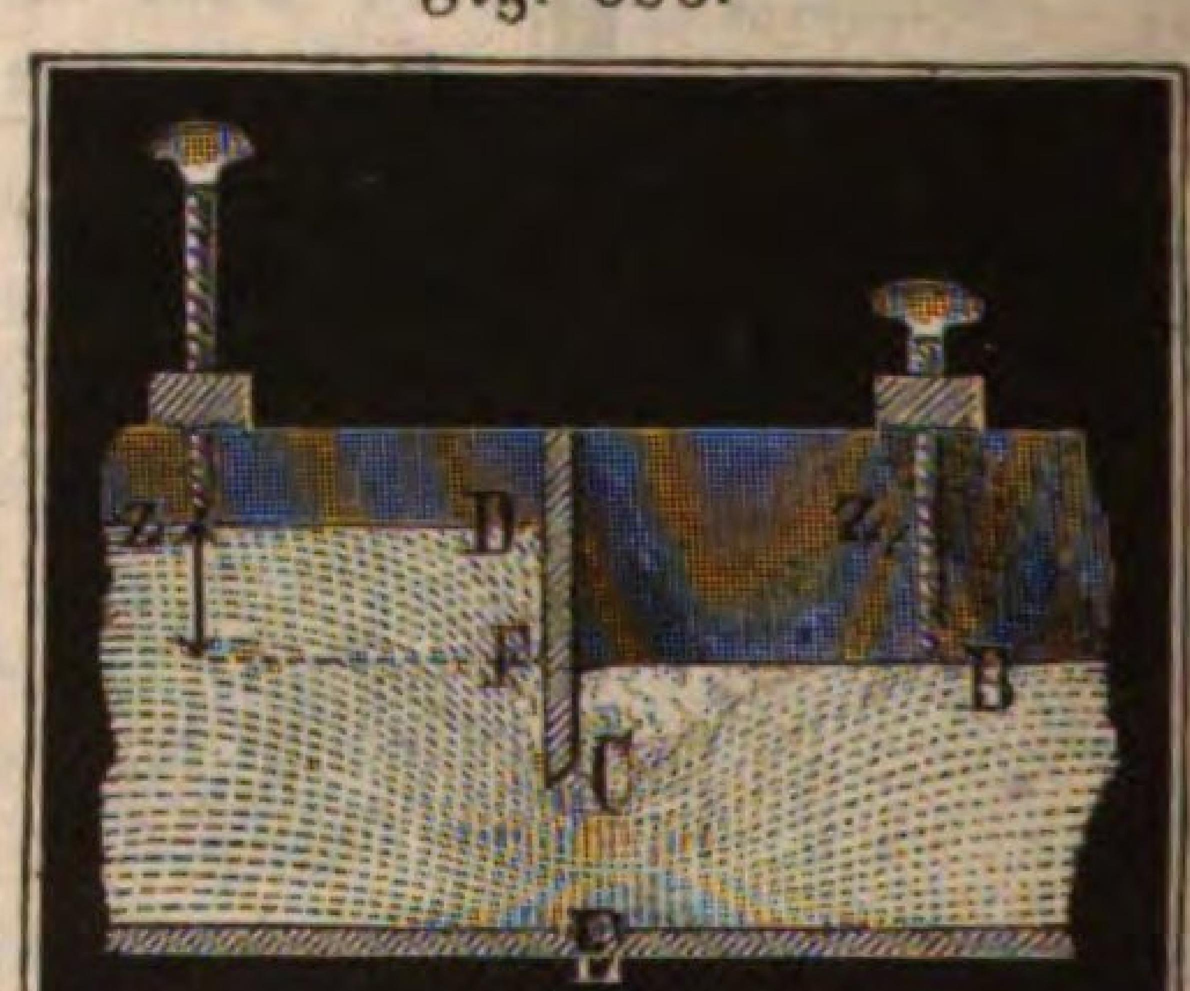


Fig. 606.



flußöffnung CE übrig bleibt, durch welche das Wasser abfließen kann. Diese Methode hat vor der Anwendung eines Ueberfalles den Vorzug, daß bei ihr das gespannte Wasser mehr zur Ruhe kommt, und deshalb die Messung der Druckhöhe schärfer zu vollziehen ist. Wenn es möglich ist, suche man einen freien Ausfluß, wie Fig. 605, herbeizuführen, weil hierbei eine größere Genauigkeit zu erlangen ist; bei einer großen Wassermenge ist es jedoch nicht möglich, das Zurückstauen des Unterwassers zu verhindern, und man muß sich daher mit einem Ausflusse unter Wasser, Fig. 606, begnügen. Der mittleren Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser durch die Mündung CE strömt, entspricht in beiden Fällen der Niveauabstand zwischen der Oberfläche des Oberwassers A und der des Unterwassers B; da jedoch im ersten Falle dieser Niveauabstand nur von dem Stande $DE = h$ des Oberwassers und von der Höhe $CE = a$ der Mündung abhängt, so kann man hier wie bei dem freien Ausflusse, die Druckhöhe bis Mitte der Mündung messen und $= h - \frac{a}{2}$ setzen. Bezeichnet nun noch b die Breite der Mündung und des Gerinnes, so hat man die Ausflußmenge: Ausfluß-regulatoren.

$$Q = \mu \,.\, ab \sqrt{2g\left(h - \frac{a}{2}\right)},$$

und es ist nach den Versuchen des Verfassers bei einer gut abgeschärften Kante C, $\mu = 0{,}596$, dagegen bei einer abgerundeten, die Contraction gänzlich beseitigenden Mündung $\mu = 0{,}889$ zu setzen.

Hat man es mit dem Ausflusse unter Wasser zu thun, so ist bei dem Niveauabstande $DF = h$, Fig. 606, $Q = \mu ab \sqrt{2gh}$, und den Versuchen des Verfassers zu Folge

für eine scharfe Kante C, $\mu = 0{,}462$
und für eine abgerundete, $\mu = 0{,}717$ zu nehmen.

Beispiel. Um die Wassermenge zu finden, welche ein Gerinne AB, Fig. 606, fortführt, hat man ein scharfkantiges Brett CD in dasselbe eingesetzt, und dadurch einen Ausfluß unter Wasser hergestellt, übrigens aber Folgendes gefunden. Weite der Mündung oder des Gerinnes $b = 3$ Fuß, Oeffnungshöhe oder Abstand CE der Brettkante C vom Gerinnboden $a = 6$ Zoll, Stand des Zeigers Z auf der Seite des Oberwassers: $h_1 = 0{,}445$ Fuß, und Stand des Zeigers Z_1 über dem Unterwasser: $h_2 = 1{,}073$. Es ist hiernach der Niveauabstand $h = 1{,}073 - 0{,}445 = 0{,}628$ Fuß und die gesuchte Wassermenge:

$$Q = 0{,}462 \,.\, 7{,}906 \,.\, 3{,}05 \sqrt{h_2 - h_1} = 5{,}48 \sqrt{0{,}628} = 4{,}34 \text{ Cubikfuß.}$$

§. 411. Da es oft lange dauert, ehe der Beharrungszustand von dem durch einen Einbau aufgestauten Wasser eintritt, so kann man folgendes von Prony zuerst vorgeschlagene Verfahren mit Vortheil anwenden. Zuerst verschließe man die Mündung durch ein Schutzbrett ganz und lasse Prony's Methode.

Prony's Methode. dadurch das Wasser ziemlich hoch, oder so weit es die Umstände erlauben, aufstauen; jetzt ziehe man das Schutzbrett so weit auf, daß mehr Wasser ab- als zufließt, und messe nun die Wasserstände in gleichen und möglichst kleinen Zeitabständen; endlich verschließe man die Schutzöffnung wieder völlig und beobachte noch die Zeit t, innerhalb welcher das Wasser auf die erste Höhe steigt. Jedenfalls ist dann im Laufe der ganzen Beobachtungszeit $t + t_1$ ebenso viel Wasser zu- als abgeflossen, und es läßt sich daher durch das Ausflußquantum in der Zeit t_1 das Zuflußquantum in der Zeit $t + t_1$ ausdrücken. Sind die Druckhöhen während des Sinkens h_0, h_1, h_2, h_3 und h_4, so hat man die mittlere Ausflußgeschwindigkeit

$$v = \frac{\sqrt{2g}}{12}(\sqrt{h_0} + 4\sqrt{h_1} + 2\sqrt{h_2} + 4\sqrt{h_3} + \sqrt{h_4}), \text{ (s. §. 387)}$$

und ist nun der Inhalt der Schutzöffnung $= F$, so hat man das Ausflußquantum in der Zeit t:

$$V = \frac{\mu F t\sqrt{2g}}{12}(\sqrt{h_0} + 4\sqrt{h_1} + 2\sqrt{h_2} + 4\sqrt{h_3} + \sqrt{h_4}), \text{ und}$$

daher das Zuflußquantum pr. Sec.:

$$Q = \frac{V}{t + t_1} = \frac{\mu F t\sqrt{2g}}{12(t+t_1)}(\sqrt{h_0} + 4\sqrt{h_1} + 2\sqrt{h_2} + 4\sqrt{h_3} + \sqrt{h_4}).$$

Beispiel. Um das zum Umtriebe eines Wasserrades zu benutzende Wasser eines Baches zu messen, hat man dasselbe durch eine Spundwand, Fig. 604, eingedämmt und nach Eröffnung der rectangulären Mündung in derselben Folgendes beobachtet: anfängliche Druckhöhe 2 Fuß, nach 30″, 1,8 Fuß, nach 60″, 1,55 Fuß, nach 90″, 1,3 Fuß, nach 120″, 1,15 Fuß, nach 150″, 1,05 Fuß, und nach 180″, 0,9 Fuß; Breite der Oeffnung 2 Fuß, Höhe der Oeffnung ½ Fuß, Zeit zum Zurücksteigen auf die erste Höhe bei verschlossener Oeffnung = 110″. Zunächst ist die mittlere Ausflußgeschwindigkeit

$$v = \frac{7{,}906}{18}(\sqrt{2} + 4\sqrt{1{,}8} + 2\sqrt{1{,}55} + 4\sqrt{1{,}3} + 2\sqrt{1{,}15} + 4\sqrt{1{,}05} + \sqrt{0{,}9})$$
$$= 0{,}4392\,(1{,}414 + 5{,}364 + 2{,}490 + 4{,}561 + 2{,}145 + 4{,}099 + 0{,}949)$$

$= 0{,}4392 \,.\, 21{,}022 = 9{,}233$ Fuß; nun ist aber $F = 2 \,.\, \frac{1}{2} = 1$ Quadratfuß, daher folgt die theoretische Ausflußmenge = 9,233 Cubikfuß. Nimmt man den Ausflußcoefficienten = 0,61, so erhält man endlich das gesuchte Wasserquantum

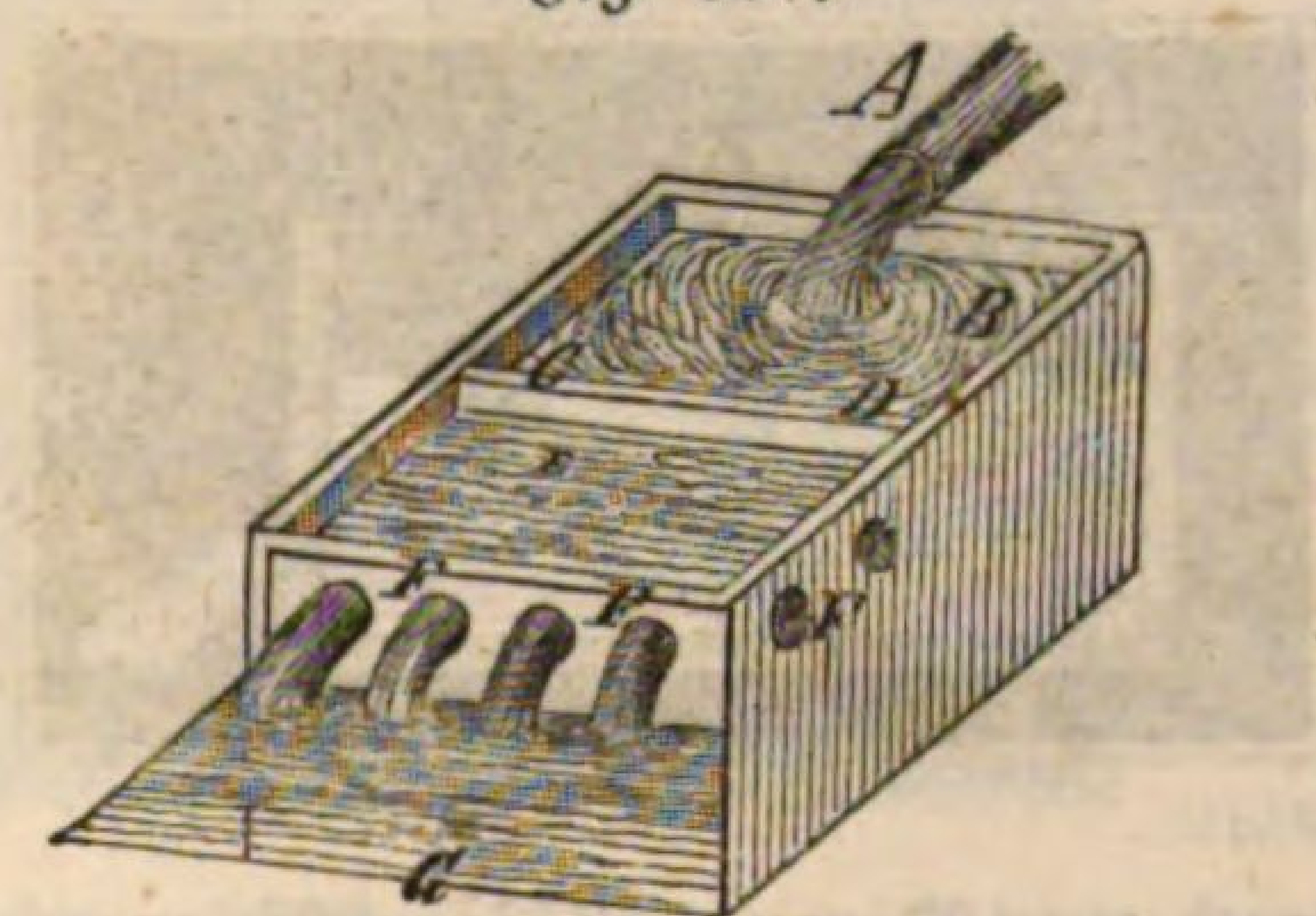
$$Q = \frac{0{,}61 \,.\, 180}{180 + 110} \,.\, 9{,}233 = 3{,}495 \text{ Cubikfuß.}$$

Wasserzoll. §. 412. Um kleine Wassermengen zu messen, bedient man sich auch wohl des Ausflusses durch runde, 1 Zoll weite Mündungen in einer dünnen Wand, unter einem gegebenen Drucke. Man nennt die Wassermenge, welche eine solche Oeffnung unter dem kleinsten Drucke, oder dann, wenn der Wasserspiegel nur eine Linie über der obersten Stelle der Mündung steht, einen Wasser- oder Brunnenzoll (franz. pouce d'eau; engl. water-inch). Die Franzosen nehmen an, daß einem Wasserzolle (Alt

Paris. Maaß) in 24 Stunden 15 Pinten oder 19,1953 Cubikmeter Wasser, Wasserzoll.
also in 1 Stunde 0,7998 »
und in 1 Minute 0,01333 Cubikmeter entspricht, doch weichen ältere Angaben von Mariotte, Couplet und Bossut hiervon nicht unbedeutend ab. Nach Hagen liefert ein Wasserzoll (für das preuß. Maaß) in 24 Stunden 520 Cubikfuß, also in der Minute 0,3611 Cubikfuß. Der Prony'sche doppelte Wassermodul, welcher einer Mündung von 2 Centimeter Durchmesser bei 5 Centimeter Druck entspricht und in 24 Stunden 20 Cubikmeter Wasser liefert, hat keine Aufnahme gefunden.

Die Beobachtungen lassen sich sicherer anstellen, wenn man eine größere Druckhöhe hat; am einfachsten ist es, wenn man diese Höhe wie den Durchmesser der Mündung, 1 Zoll annimmt. Nach den Herren Bornemann und Röting giebt ein solcher Wasserzoll täglich 642,8 Cubikfuß Wasser. (S. den Ingenieur, Seite 481.)

Fig. 607.



Der Apparat, an dem man mit Hülfe von Wasserzollen das Wasser mißt, ist in Fig. 607 abgebildet. Das zu messende Wasser fließt durch die Röhre A in einen Kasten B, aus diesem tritt es durch unten in der Scheidewand CD angebrachten Löcher in den Kasten E, und aus diesem fließt es durch eine horizontale Reihe von genau einen Zoll weiten und in Blech ausgeschnittenen runden Mündungen F in das Reservoir G. Damit sich aber der Wasserspiegel nur eine Linie über den Köpfen dieser Mündungen stellt, ist es nöthig, daß diese in hinreichender Zahl vorhanden seien, und daß man einen Theil derselben durch Stöpsel verschließe. Bei großen Wassermengen theilt man wohl erst das ganze Wasser, und mißt auf diese Weise nur einen Theil, z. B. den zehnten. Dieses Theilen ist aber leicht dadurch zu bewirken, daß man das Wasser erst in ein Reservoir mit einer gewissen Anzahl in gleichem Niveau befindlicher Mündungen leitet, und nur das von der einen Mündung gelieferte Wasser in dem oben abgebildeten Apparate auffängt.

Anmerkung 1. Man kann auch die Hähne und andere Regulirungsapparate zur Wassermessung anwenden, wenn man den jeder Stellung entsprechenden Widerstandscoefficienten kennt. Ist h die Druckhöhe, F der Querschnitt des Rohres, und μ der Ausflußcoefficient bei völlig geöffnetem Hahne, so hat man die Ausflußmenge $Q = \mu F \sqrt{2gh}$, sowie umgekehrt $\mu = \frac{Q}{F\sqrt{2gh}}$ und $\frac{1}{\mu^2} = \left(\frac{F}{Q}\right)^2 . 2gh$.

Wasserzoll. Setzt man nun den einer Hahnstellung entsprechenden und aus den oben mitgetheilten Tabellen zu entnehmenden Widerstandscoefficienten $= \zeta$, so hat man die entsprechende Ausflußmenge:

$$Q_1 = F\sqrt{\frac{2gh}{\frac{1}{\mu^2}+\zeta}} = \frac{\mu F\sqrt{2gh}}{\sqrt{1+\mu^2\zeta}} = \frac{Q}{\sqrt{1+\zeta\left(\frac{Q}{F}\right)^2\cdot\frac{1}{2gh}}}.$$

Der Bequemlichkeit wegen kann man sich hiernach eine Tabelle construiren, so daß es nur eines Blickes auf diese bedarf, um die einer Hahnstellung entsprechende Ausflußmenge, oder um die einem gegebenen Ausflußquanto entsprechende Stellung des Hahnes zu finden. Ist z. B. $\mu = 0{,}7$ und $F = 4$ Quadratzoll, so hat man $Q_1 = \frac{0{,}7 \quad 4 \;.\; 12 \;.\; 7{,}906\sqrt{h}}{\sqrt{1+0{,}49\;.\;\zeta}} = 265{,}6\sqrt{\frac{h}{1+0{,}49\,\zeta}}$ Cubikzoll, oder wenn h constant 1 Fuß ist, $Q_1 = \frac{265{,}6}{\sqrt{1+0{,}49\,\zeta}}$. Wenn nun den Hahnstellungen 5°, 10°, 15°, 20°, 25° u. s. w. die Widerstandscoefficienten 0,057; 0,293; 0,758; 1,559; 3,095 zukommen, so entsprechen diesen die Ausflußmengen: 262,1; 248,4; 226,8; 200,0; 167,4 Cubikzoll.

Fig. 608

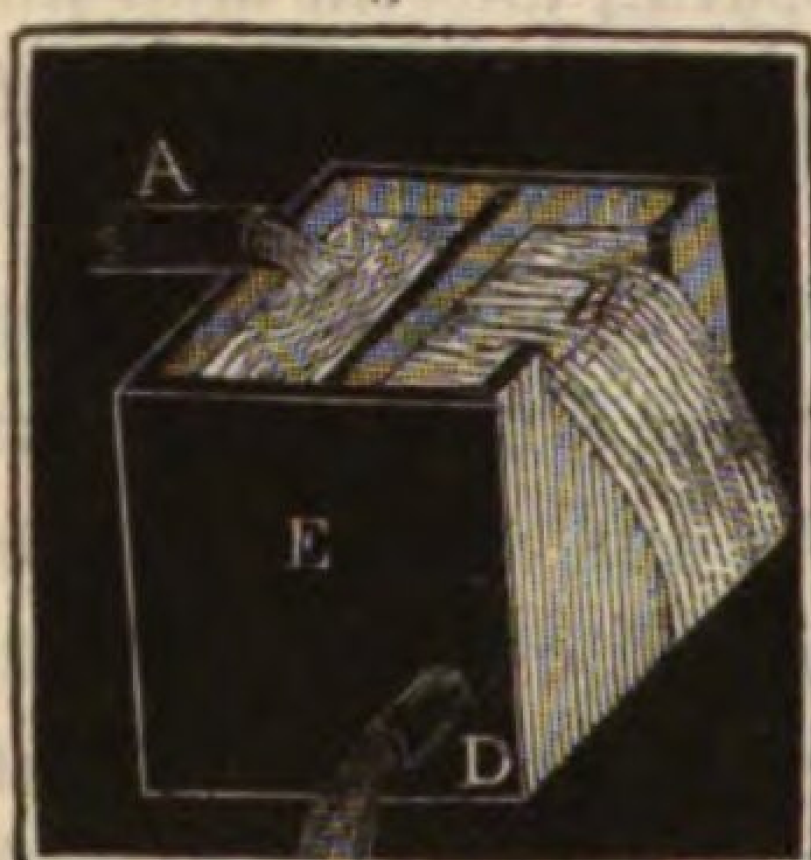
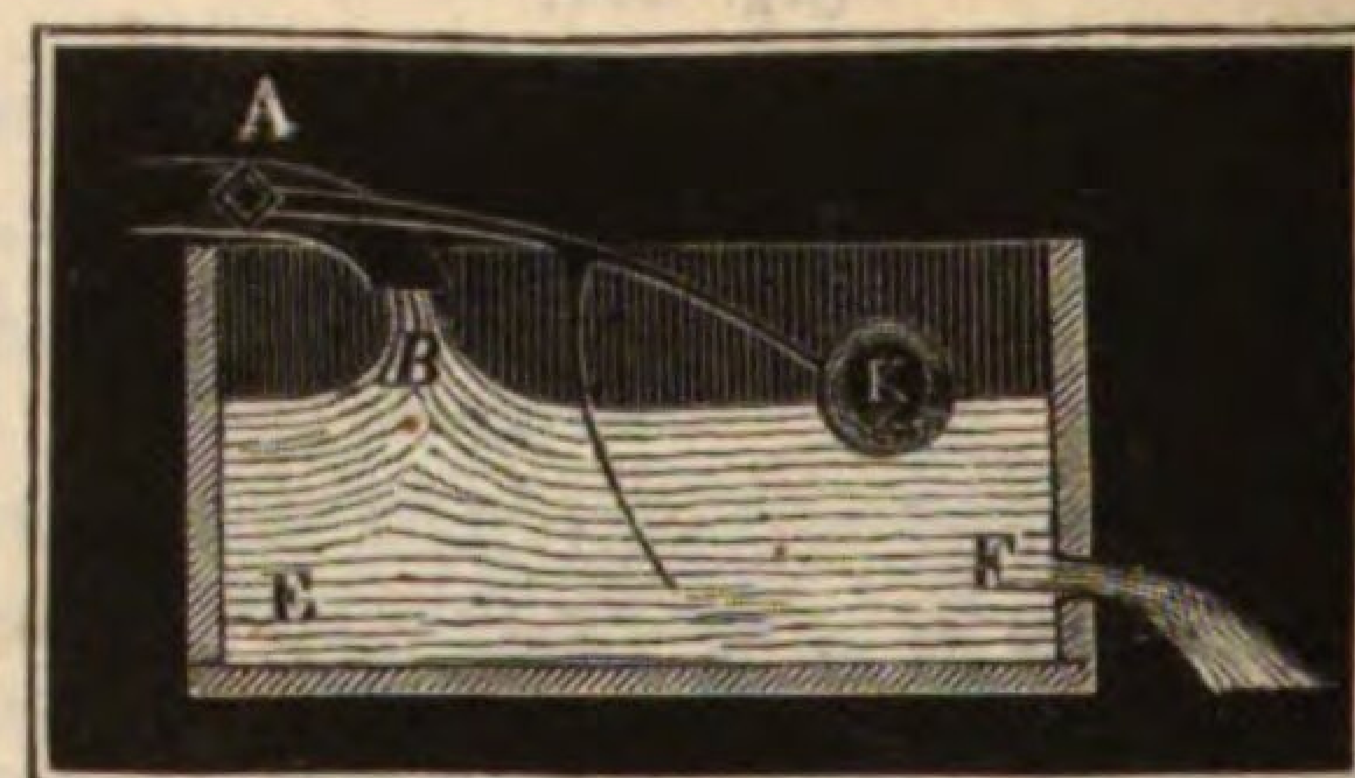


Fig. 609.



Anmerkung 2. Um den Ausfluß durch eine Mündung D, Fig. 608, zu reguliren, kann man einen Ueberfall B anbringen, damit das durch die Röhre A im Uebermaaße herbeigeführte Wasser durch denselben abfließe, und ein constanter Druck im Reservoir DE erhalten werde. Um gar keinen Wasserverlust zu erhalten, wendet man auch einen Hahn oder eine Klappe A, Fig. 609, an, welche durch einen Schwimmer K mittels eines Hebels regulirt wird, so daß durch B immer nur so viel Wasser zu-, als durch F abfließt.

Schwimmer. §. 413. Die Wassermengen von größeren Bächen, Kanälen und von Flüssen lassen sich nur mittels die Geschwindigkeit angebender Hydrometer bestimmen. Unter diesen Instrumenten sind aber die Schwimmer (franz. flotteurs; engl. floating-bodies) die einfachsten. Man kann zwar hierzu jeden schwimmenden Körper gebrauchen, doch ist es sicherer, Körper von mittlerer Größe, welche nur wenig specifisch leichter als Wasser sind, hierzu zu verwenden. Körper von ohngefähr $\frac{1}{10}$ Cubikfuß Inhalt sind hinreichend groß. Sehr große Körper nehmen nicht leicht die Geschwindigkeit des Wassers an, und sehr kleine Körper lassen sich wieder, namentlich wenn sie viel aus dem Wasser hervorragen, leicht durch zufällige Umstände, zumal durch die Luft über dem Wasserspiegel, in ihrer Bewegung stören. Oft

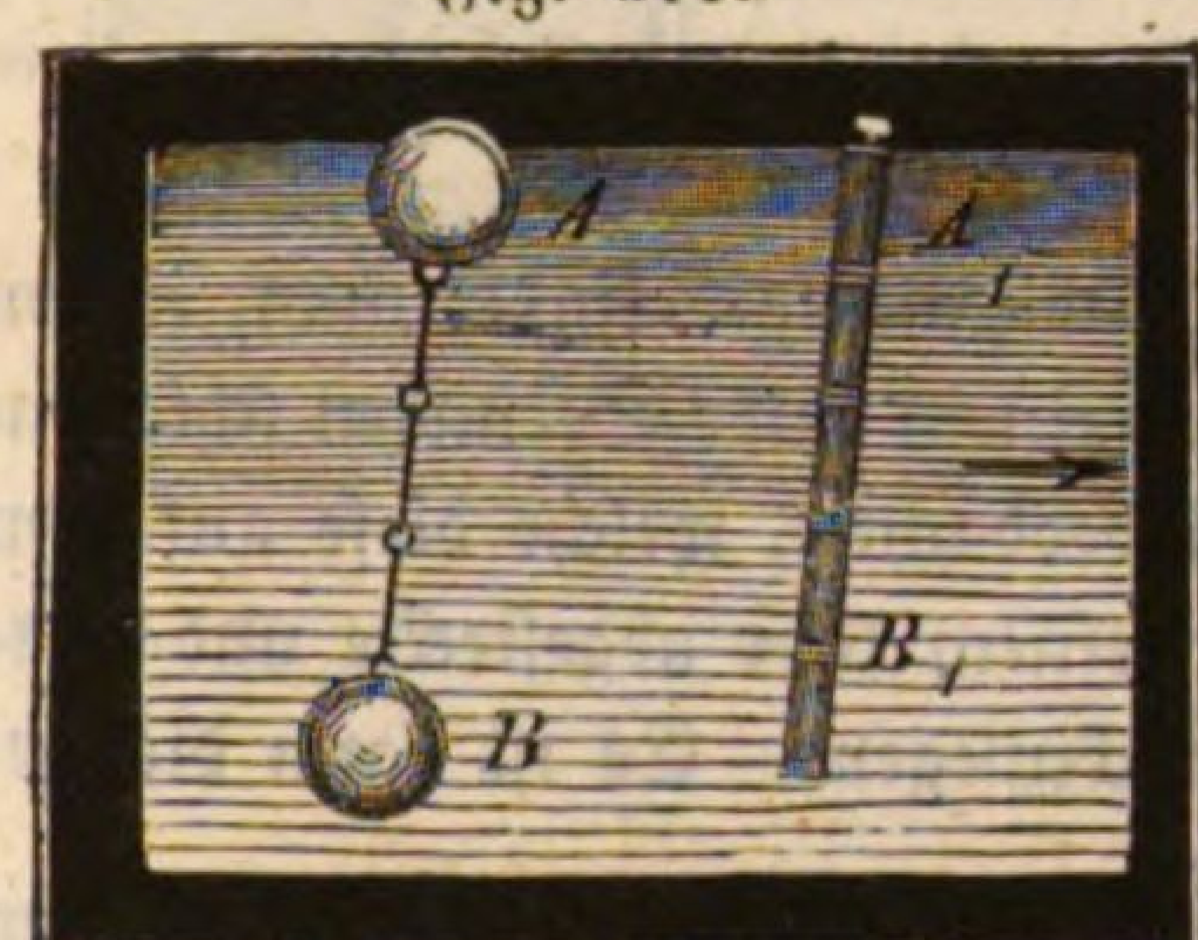
wendet man einfache Holzstücke an, gut ist es aber, wenn dieselben mit einer hellen Firnißfarbe überstrichen sind, und noch besser sind die hohlen Schwimmer, wie Glasflaschen, Blechkugeln u. s. w., weil man diese nach Belieben mit Wasser füllen kann. Am häufigsten wendet man aber die Schwimmkugeln an. Dieselben werden von 4 bis 12 Zoll Durchmesser aus Messingblech verfertigt, sie bekommen, um sie nicht leicht aus dem Auge zu verlieren, einen Anstrich von lichter Oelfarbe, und erhalten auch noch eine Oeffnung mit einem Halse, um sie mit Wasser anfüllen und verstöpseln zu können. Schwimmer.

Eine solche Schwimmkugel A, Fig. 610, giebt allerdings nur die Geschwindigkeit an der Oberfläche und sogar oft nur die im Stromstriche an, allein man kann durch das Aneinanderhängen zweier Kugeln A und B, Fig. 611, auch die Geschwindigkeiten in verschiedenen Tiefen bestimmen. In diesem Falle wird die eine Kugel B, welche unter Wasser schwimmen soll, ganz mit Wasser, die andere aber, welche im Wasserspiegel zu schwimmen bestimmt ist, nur so viel mit Wasser angefüllt, daß sie nur wenig aus dem Wasser hervorragt. Beide Kugeln werden durch einen Faden oder durch einen Draht, oder durch eine dünne Drahtkette mit einander verbunden. Zuerst bestimmt man durch die einfache Kugel die Oberflächengeschwindigkeit c_0, und dann beobachtet man durch die Kugelverbindung die mittlere Geschwindigkeit c beider, bezeichnet man nun die Geschwindigkeit in der Tiefe der zweiten Kugel durch c_1, so läßt sich setzen:

Fig. 610.



Fig. 611.



$c = \frac{c_0 + c_1}{2}$, und daher umgekehrt, $c_1 = 2c - c_0$. Indem man nun beide Kugeln durch längere und längere Drähte mit einander verbindet, so kann man auf diese Weise die Geschwindigkeiten in größeren und größeren Tiefen finden. Uebrigens ergiebt sich auch die mittlere Geschwindigkeit c eines Perpendikels, wenn man die zweite Kugel nahe über dem Boden schwimmen läßt und ebenfalls $c = \frac{c_0 + c_1}{2}$ setzt; genauer aber noch, wenn man das Mittel aus allen beobachteten Geschwindigkeiten in einem Perpendikel nimmt.

Um die mittlere Geschwindigkeit in einem Perpendikel anzugeben, wendet man auch oft den in Fig. 611 abgebildeten Schwimmstab A_1B_1 an, namentlich ist dieser bei Messungen in Kanälen und Gräben bequem, zumal, wenn er aus kurzen Stücken zusammengeschraubt werden kann. Der Schwimmstab, welchen der Verfasser anwendet, ist aus 15 ausgehöhlten Theilen, jeder

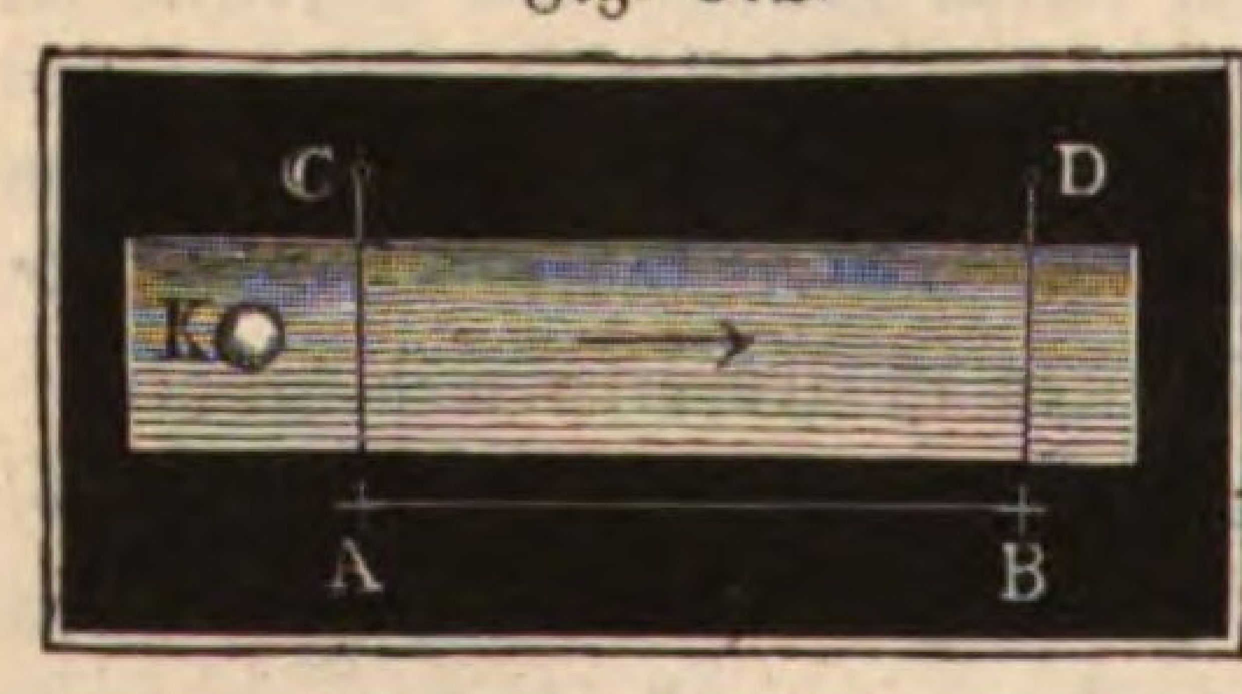
Schwimmer. von 1 Decimeter Länge zusammengesetzt. Damit derselbe ziemlich aufrecht schwimme, wird stets das unterste Stück so stark mit Schrot angefüllt, daß der Kopf beim Schwimmen nur wenig aus dem Wasser hervorragt. Die Anzahl der zusammenzuschraubenden Stücke hängt natürlich von der Tiefe des Kanales ab.

An dem Schwimmstabe, sowie an der Schwimmkugelverbindung läßt sich auch wahrnehmen, daß bei ungehinderter Bewegung des Wassers in Betten die Geschwindigkeit am Wasserspiegel größer ist, als am Boden, weil der Kopf des Stabes dem Fuße und die obere Kugel der unteren etwas vorausschwimmt. Nur bei durch Verengungen, z. B. durch Brückenpfeiler gebildeten Aufstauungen, findet das Gegentheil statt.

Anmerkung. In der Regel ist, namentlich bei großen Schwimmern, wie Schiffen u. s. w., die Geschwindigkeit der schwimmenden Körper etwas größer als die des Wassers, weniger deshalb, weil diese Körper beim Schwimmen von einer durch die Oberfläche des Wassers gebildeten schiefen Ebene herabgleiten, als deshalb, weil sie nicht oder nur zum Theil an der unregelmäßigen inneren Bewegung des Wassers Theil nehmen, doch ist die Abweichung bei kleinen Schwimmern klein genug, um sie vernachlässigen zu können.

§. 414. Die Geschwindigkeit einer Schwimmkugel findet man, indem man mit einer guten Secundenuhr oder an einem halbe Secunden schlagenden Lothe oder Pendel (§. 263) die Zeit t beobachtet, welche diese auf dem Wasser schwimmend braucht, um eine an einem Ufer abgesteckte und ausgemessene Strecke $AB = s$, Fig. 612, zurückzulegen. Es ist dann die gesuchte Geschwindigkeit der Kugel $c = \frac{s}{t}$. Damit die Zeit t genau dem am Ufer abgemessenen Wege entsprechend gefunden werde, ist es nöthig, mit Hülfe eines Winkelkreuzes oder Winkelspiegels am jenseitigen Ufer zwei, Perpendikel auf AB bezeichnende Signalstangen C und D, einzustecken. Stellt man sich hinter A, so kann man den Zeitpunkt beobachten, wenn der etwas oberhalb A eingesetzte Schwimmer K in das Alignement AC kommt, und begiebt man sich hinter B, so kann man ebenfalls an der in der Hand gehaltenen Uhr beobachten, wann der Schwimmer in das Alignement BD gelangt, und man findet dann durch Subtraction der Beobachtungszeiten die gesuchte und der Durchlaufung von s entsprechende Zeit t. Außer der mittleren Geschwindigkeit c des Wassers ist auch noch der Inhalt F des Querprofiles erforderlich, um das Wasserquantum $Q = Fc$ zu bestimmen. Um diesen Inhalt angeben zu können, ist es aber nöthig, daß man die Breite und mittlere Tiefe des Wassers kenne. Die Tiefen mißt man mit einer einge-

Fig. 612.



theilten Sondirstange *AB*, Fig. 613, mit rhomboidalem Querschnitte Schwimmer.
und einem Brettchen *B* am Fuße; bei größeren Tiefen kann man sich auch einer Sondirkette bedienen, an deren Ende eine eiserne Platte hängt, die sich beim Einsenken auf das Grundbette aufsetzt. Die Breite und die den gemessenen Tiefen entsprechenden Abscissen oder Abstände von den Ufern ergeben sich bei Kanälen und schmalen Bächen *EFG*, Fig. 614, durch Ausspannen einer Meßkette *AB* oder Legen einer Stange u. s. w. quer

Fig. 613.

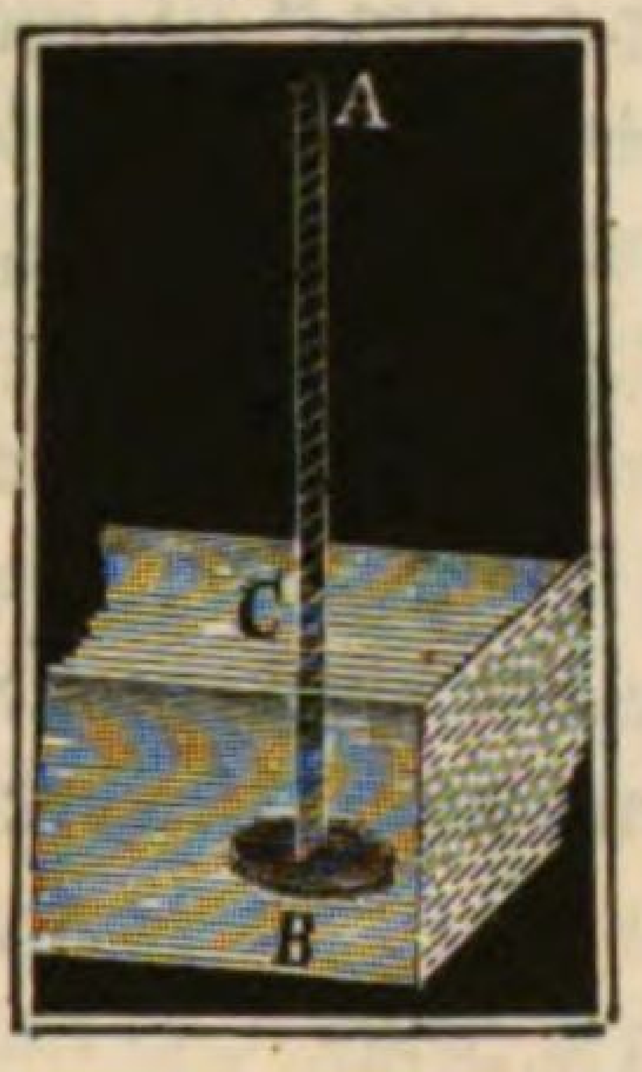


Fig. 614.

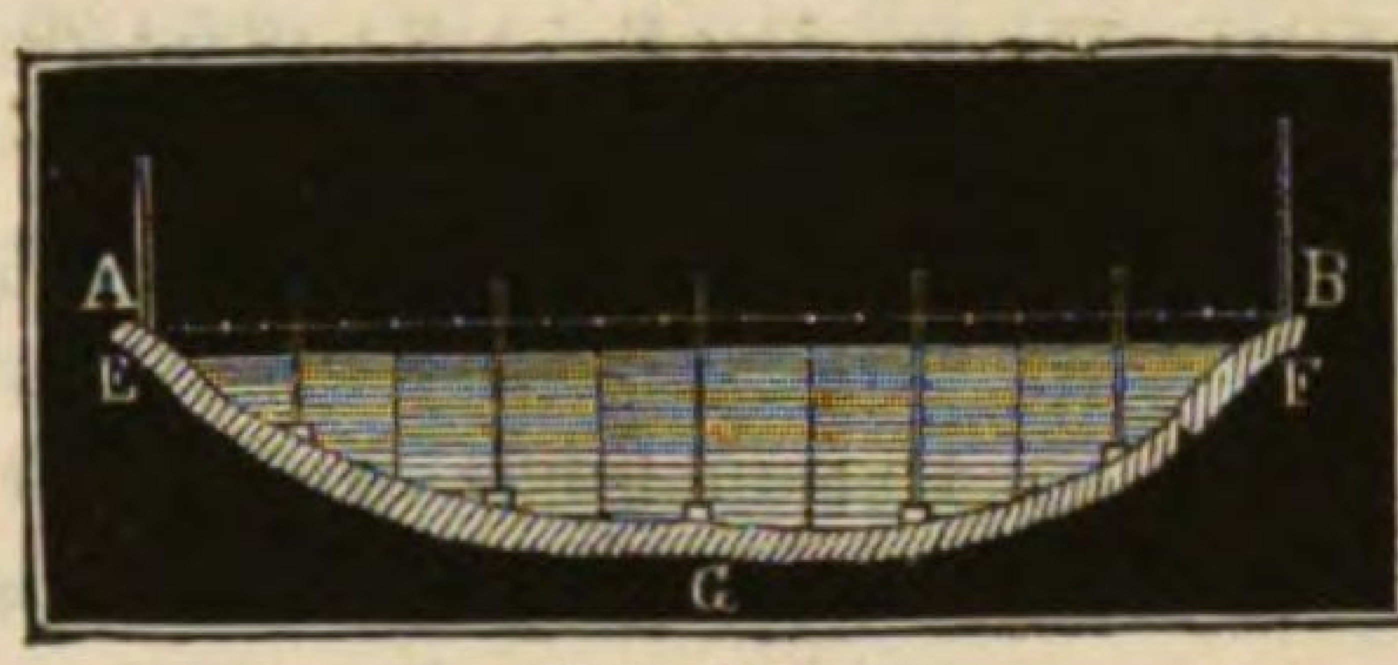
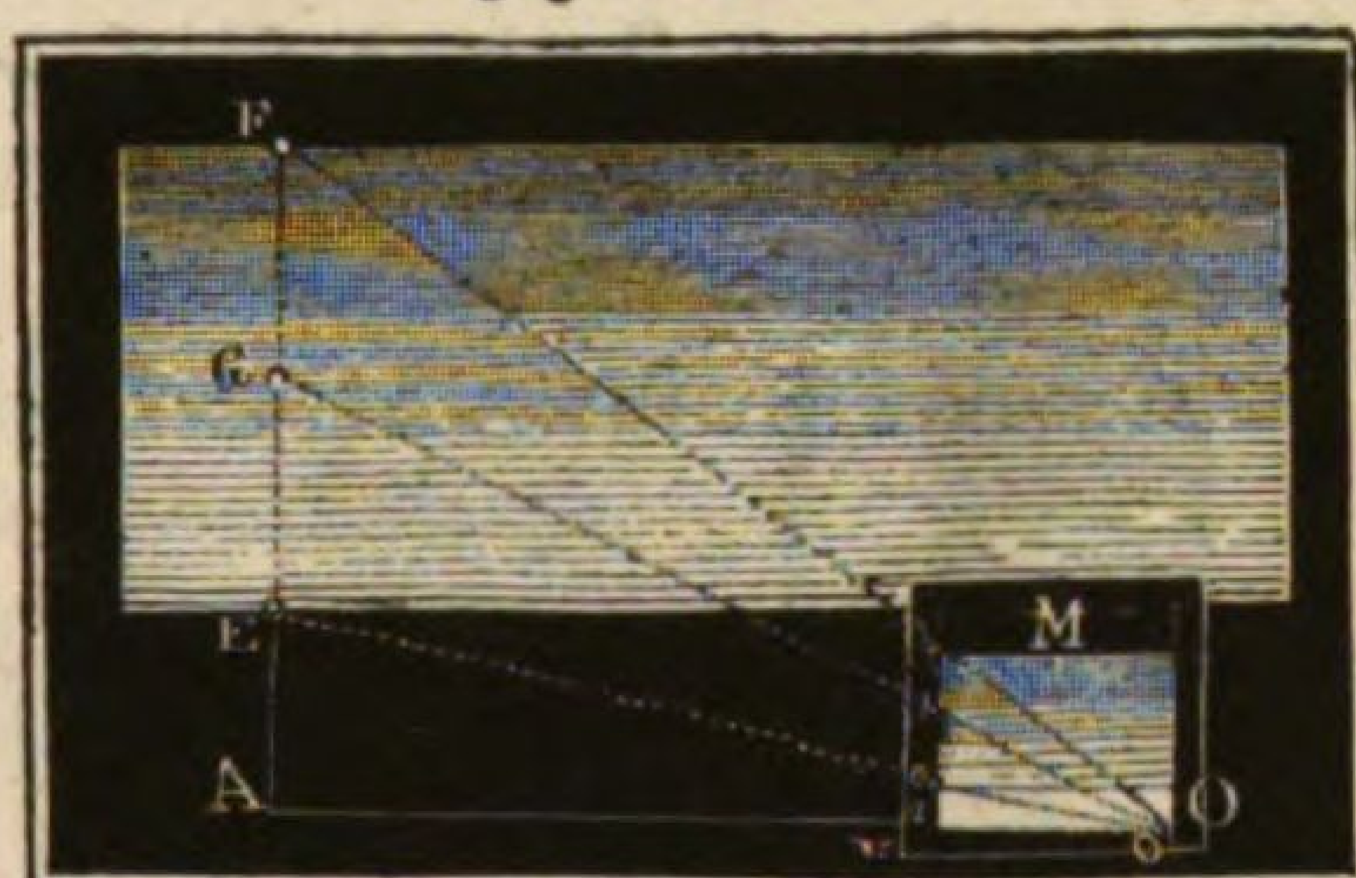


Fig. 615.



über das fließende Wasser. Bei breiten Flüssen bestimmt man sie mit Hülfe eines Meßtisches *M*, den man in schicklicher Entfernung *AO* vom zu messenden Querprofile *EF*, Fig. 615, aufstellt. Ist *ao* auf der Mensel die verjüngte Entfernung *AO* der Standpunkte *A* und *O* von einander, und hat man *ao* in der Richtung von *AO* gestellt, und dadurch auch die vorher beim Aufstellen des Meßtisches aufgetragene Breitenrichtung *af* mit der abgesteckten Breitenlinie *AF* parallel gestellt, so schneidet jede Visirlinie nach den Punkten *E, F, G* u. s. w. im Querprofile entsprechende Punkte *e, f, g* auf der Mensel ab, und es sind *ae*, *af*, *ag* u. s. w. die Entfernungen *AE*, *AF*, *AG* u. s. w. im verjüngten Maaße. Man hat also beim Einsetzen der Sondirstange und dem dadurch bewirkten Tiefenmessen nicht erst nöthig, die Entfernungen der entsprechenden Punkte von den Ufern zu messen, wenn der am Meßtische stehende Ingenieur die Sondirstange beim Einsetzen in der Linie *EF* anvisirt.

Besteht nun die Breite *EF*, Fig. 614, eines Querprofiles aus den Theilen b_1, b_2, b_3 u. s. w. und sind die mittleren Tiefen innerhalb dieser Theile a_1, a_2, a_3 und die mittleren Geschwindigkeiten c_1, c_2, c_3 u. s. w., so hat man den Inhalt des Querprofiles: $F = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \ldots$,

Schwimmer. die Wassermenge $Q = a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2 + a_3 b_3 c_3 + \ldots$, und endlich die mittlere Geschwindigkeit $c = \frac{Q}{F} = \frac{a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2 + \ldots}{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots}$.

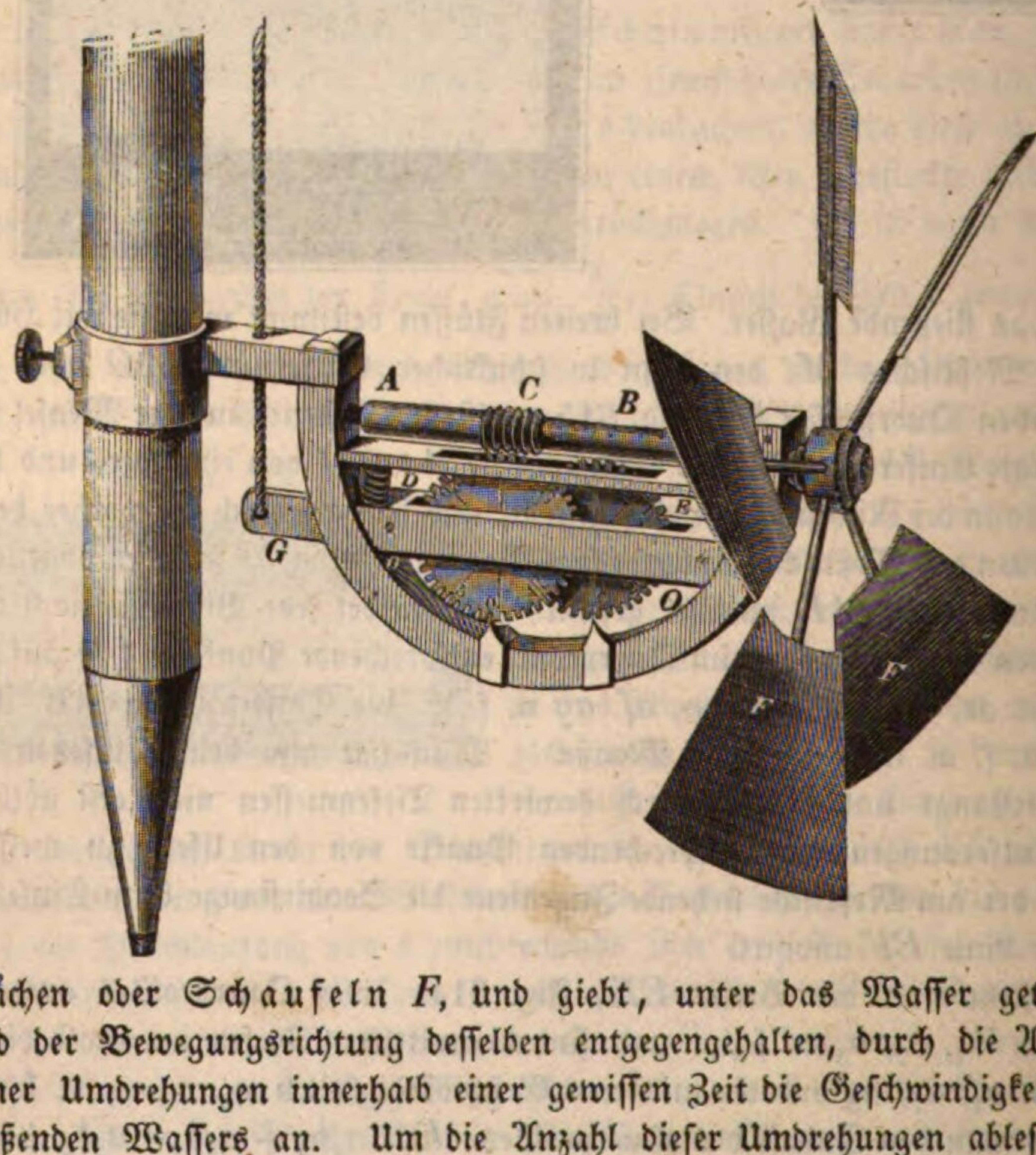
Beispiel. An einer ziemlich geraden und unveränderlichen Flußstrecke hat man in den Mittelpunkten der Breitentheile

	5 Fuß,	12 Fuß,	20 Fuß,	15 Fuß,	7 Fuß,
die Tiefen:	3 »	6 »	11 »	8 »	4 »
die mittleren Geschwindigkeiten:	1,9 »	2,3 »	2,8 »	2,4 »	2,1 »;

es läßt sich daher setzen:
der Inhalt des Querprofiles $F = 5.3 + 12.6 + 20.11 + 15.8 + 7.4 = 455$ Quadratfuß, das Wasserquantum $Q = 15.1,9 + 72.2,3 + 220.2,8 + 120.2,4 + 28.2,1 = 1156,9$ Cubikfuß. Die mittlere Geschwindigkeit ist $c = \frac{1156,9}{455} = 2,54$ Fuß.

Hydrometrischer Flügel. §. 415. Das vorzüglichste **Hydrometer** ist der **hydrometrische Flügel von Woltmann** (franz. Moulinet de Woltmann; engl. Sail-wheel of Woltmann) Fig. 616. Er besteht aus einer horizontalen Welle AB mit 2 bis 5 schief gegen die Axenrichtung stehenden

Fig. 616.



Flächen oder **Schaufeln** F, und giebt, unter das Wasser getaucht und der Bewegungsrichtung desselben entgegengehalten, durch die Anzahl seiner Umdrehungen innerhalb einer gewissen Zeit die Geschwindigkeit des fließenden Wassers an. Um die Anzahl dieser Umdrehungen ablesen zu

können, erhält die Welle ein paar Schraubengänge C, und läßt diese zwischen die Zähne eines Rades D greifen, auf dessen Seitenflächen Ziffern eingravirt sind, welche an einem festen Zeiger die Anzahl der Umdrehungen der Flügelwelle angeben. Um aber eine große Anzahl der Umdrehungen beobachten zu können, wird auf die Welle dieses Zahnrades noch ein Getriebe aufgesetzt, das in ein zweites Zahnrad E eingreift, an dem sich, gleichsam wie am Stundenweiser einer Uhr, vielfache, z. B. fünf- oder zehnfache der Flügelumdrehungen ablesen lassen. Hat z. B. jeder der beiden Zahnräder 50 Zähne, und das Getriebe deren 10, so dreht sich das zweite Rad um einen Zahn, während das erste um fünf Zähne fortrückt, oder das Flügelrad fünf Umdrehungen macht. Wenn der Zeiger des ersten Rades auf $27 = 25 + 2$ und des zweiten auf 32 steht, so ist hiernach die entsprechende Umdrehungszahl des Flügels $= 32 . 5 + 2 = 162$. Das ganze Instrument wird mit einer Blechfahne an einen Stab geschraubt, um es bequem in's Wasser eintauchen und dem Strome entgegenhalten zu können. Damit aber das Räderwerk nur während der Beobachtungszeit umlaufe, läßt man seine Axen in Pfannen umgehen, die auf einem Hebel GO sitzen, der durch eine Feder niedergedrückt wird, so daß ein Eingreifen der Zähne des ersten Rades in die Schraubengänge nur so lange statt hat, als man den Hebel mittels einer Schnur emporzieht. Hydrometrischer Flügel.

Die Umdrehungszahl eines Flügels in einer gewissen Zeit, z. B. in einer Secunde, ist nicht genau der Geschwindigkeit des Wassers proportional, es läßt sich daher auch nicht $v = \alpha . u$, wo u die Umdrehungszahl, v die Geschwindigkeit und α eine Erfahrungszahl bezeichnen, setzen; es ist vielmehr zu setzen: $v = v_0 + \alpha u$, oder genauer $v = v_0 + \alpha u + \beta u^2 \ldots$ oder noch genauer $v = \alpha u + \sqrt{v_0^2 + \beta u^2}$, wo v_0 diejenige Geschwindigkeit bezeichnet, bei welcher das Wasser nicht mehr im Stande ist, den Flügel in Umdrehung zu setzen, α und β aber Erfahrungscoefficienten ausdrücken. Die Constanten v_0, α, β sind für jedes Instrument besonders zu ermitteln. Mit Hülfe ihrer ergiebt sich durch eine einzige Beobachtung die Geschwindigkeit, doch ist es sicherer, deren immer wenigstens zwei anzustellen, und den mittleren Werth als den richtigen einzuführen.

Beispiel. Wenn bei einem Flügel $v_0 = 0{,}110$ Fuß, $\alpha = 0{,}480$, und $\beta = 0$, also $v = 0{,}11 + 0{,}48\,u$ ist, und man hat bei einer Beobachtung mit diesem Instrumente in einer Zeit von 80 Secunden eine Umdrehungszahl von 210 gefunden, so ist die entsprechende Geschwindigkeit des Wassers:

$$v = 0{,}11 + 0{,}48 . \frac{210}{80} = 0{,}11 + 1{,}26 = 1{,}37 \text{ Fuß}.$$

Anmerkung 1. Die Constanten v_0, α und β hängen vorzüglich von der Größe des Stoßwinkels, d. i. von dem Winkel ab, welchen die Flügelebene mit der Bewegungsrichtung des Wassers und also auch mit der Axenrichtung des Flügels einschließt. Um bei kleinen Geschwindigkeiten noch ziemlich genau beobachten zu kön-

Hydrometrischer Flügel.

Fig. 617.



nen, ist es gut, den Stoßwinkel groß, d. i. gegen 70° zu machen. Uebrigens ist es zweckmäßig, Flügel von verschiedener Größe und verschiedenen Stoßwinkeln zu haben, um, je nach dem die Tiefe oder die Geschwindigkeit des fließenden Wassers größer oder kleiner ist, den einen oder den anderen anwenden zu können.

Anmerkung 2. Um die Oberflächengeschwindigkeit des Wassers zu finden, wendet man auch wohl ein kleines Blechrädchen, wie Fig. 617 repräsentirt, an, indem man nur dessen Untertheil in's Wasser eintaucht. Die Anzahl der Umdrehungen desselben läßt sich durch ein Räderwerk genau wie beim hydraulischen Flügel angeben.

§. 416. Um die Constanten oder Coefficienten eines hydrometrischen Flügels zu finden, ist es nöthig, dieses Instrument in fließende Wasser einzuhalten, deren Geschwindigkeiten bekannt sind, und die entsprechenden Umdrehungszahlen zu beobachten. Wiewohl man eigentlich nur so viel Beobachtungen braucht, als Constanten vorhanden sind, so ist es doch viel sicherer, so viel Beobachtungen wie möglich, und namentlich auch bei sehr verschiedenen Geschwindigkeiten anzustellen, weil man dann die Methode der kleinsten Quadrate anwenden und dadurch den Einfluß der zufälligen Beobachtungsfehler herabziehen kann. Uebrigens kann man die Geschwindigkeit des Wassers entweder durch eine Schwimmkugel oder auch dadurch finden, daß man das Wasser in einem Aichgefäße auffängt, und die darin gemessene Wassermenge durch das Querprofil dividirt. Bei Anwendung der Schwimmkugeln ist ruhige Luft und eine gerade und gleichförmig fließende Wasserstrecke nöthig. Der Flügel ist an mehreren Stellen des von dem Schwimmer durchlaufenen Weges einzuhalten, und es ist auch die Genauigkeit befördernd, wenn der Durchmesser der Schwimmkugel ohngefähr gleich ist dem Durchmesser des Flügelrades.

Viele Vortheile gewährt die zweite Bestimmungsweise, wo man das Wasser, in welches der Flügel eingetaucht wird, in einem Aichkasten auffängt. Zu diesem Zwecke, und zum Justiren der Hydrometer überhaupt, ist es sehr gut, wenn der Hydrauliker über ein besonderes, aus einem Ausflußkasten, einem Aichreservoir und einem zwischen beiden befindlichen Gerinne bestehendes hydraulisches Observatorium verfügen kann. Bei einem solchen ist ohne Umstände dem Wasser jede beliebige Geschwindigkeit zu ertheilen, indem man nicht nur den Eintritt in das Gerinne, sondern auch die Bewegung in demselben durch Einsatzbretter nach Willkür reguliren kann. Bei den Beobachtungen hat man den Flügel an verschiedenen Stellen eines Querprofiles im Gerinne einzuhalten, die Tiefe dieses Profiles durch Wasserstandsscalen zu messen, und endlich das in irgend einer Zeit durchgelaufene Wasser im untern Reservoir zu aichen (§. 408). Den Inhalt F des Querprofiles erhält man durch Multiplication der mittleren Wassertiefe mit der

mittleren Breite, und das Wasserquantum Q erhält man aus dem mittleren Querschnitte G des Aichmaaßes und der Höhe s des in der Zeit zugeflossenen Wasserquantums durch die Formel $Q = \frac{Gs}{t}$; aus Q und F folgt aber die mittlere Wassergeschwindigkeit $v = \frac{Q}{F} = \frac{Gs}{Ft}$. Hydrometrischer Flügel.

Die entsprechende Umdrehungszahl u des Flügels ist das Mittel aus allen Umdrehungen, welche man erhält, wenn man das Instrument in verschiedenen Breiten und Tiefen des ausgemessenen Querprofiles einhält.

Hat man nun bei einer Versuchsreihe die mittleren Geschwindigkeiten v_1, v_2, v_3 u. s. w. und die entsprechenden Umdrehungszahlen gefunden, so erhält man durch Substitution in der Formel $v = v_0 + \alpha u$, oder in der genaueren $v = \alpha u + \sqrt{v_0^2 + \beta u^2}$ so viel Bestimmungsgleichungen für die Constanten v_0, α, β, als Beobachtungen angestellt worden sind, und man kann nun hieraus die Constanten selbst finden, indem man entweder ein im Ingenieur §. 17 angegebenes Verfahren anwendet, oder indem man diese Gleichungen in so viel Gruppen theilt, als unbekannte Constanten vorhanden sind, und diese durch Addition zu so viel Bestimmungsgleichungen vereinigt, als zur Ermittelung von v_0, α und nach Befinden, β, nöthig sind.

Anmerkung 1. Wenn man die einfachere Formel mit 2 Constanten zu Grunde legt, so kann man nach der Methode der kleinsten Quadrate setzen:

$$v_0 = \frac{\Sigma(y^2)\,\Sigma(x) - \Sigma(xy)\,\Sigma(y)}{\Sigma(x^2)\,\Sigma(y^2) - [\Sigma(xy)]^2} \text{ und } \alpha = \frac{\Sigma(x^2)\,\Sigma(y) - \Sigma(xy)\,\Sigma(x)}{\Sigma(x^2)\,\Sigma(y^2) - [\Sigma(xy)]^2}, \text{ wobei}$$

$x = \frac{1}{v}$ und $y = \frac{u}{v}$, das Zeichen Σ aber die Summe von allen ihm folgenden gleichnamigen Werthen, z. B. $\Sigma(x) = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \ldots$, $\Sigma(xy) = \frac{1}{v_1} \cdot \frac{u_1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \cdot \frac{u_2}{v_2} + \frac{1}{v_3} \cdot \frac{u_3}{v_3} + \ldots$ bezeichnet.

Beispiel. Man hat mit einem kleinen hydrometrischen Flügel bei den Geschwindigkeiten: 0,163; 0,205; 0,298; 0,366; 0,610 Meter, die Umdrehungszahlen pro Secunde: 0,600; 0,835; 1,467; 1,805; 3,142 beobachtet, und soll nun die diesem Flügel entsprechenden Constanten bestimmen. Mit Hülfe der in der Anmerkung gegebenen Formel folgt, da

$\Sigma(x) = \frac{1}{0,163} + \frac{1}{0,205} + \ldots = 18,740$, $\Sigma(y) = \frac{0,600}{0,163} + \ldots = 22,759$,

$\Sigma(x^2) = \left(\frac{1}{0,163}\right)^2 + \left(\frac{1}{0,205}\right)^2 + \ldots = 82,846$, $\Sigma(y^2) = 105,223$, und

$\Sigma(xy) = \frac{0,600}{(0,163)^2} + \frac{0,835}{(0,205)^2} + \ldots = 80,961$ ist,

$$v_0 = \frac{105,223 \,.\, 18,740 - 80,961 \,.\, 22,759}{82,846 \,.\, 105,223 - (80,961)^2} = \frac{129,5}{2162} = 0,060 \text{ und } \alpha = \frac{368,3}{2162}$$

$= 0,1703$, daher gilt für dieses Instrument die Formel $v = 0,060 + 0,1703\,u$.

Hydrometrischer Flügel.

Setzt man hierin $u = 0,6$, so bekommt man $v = 0,060 + 0,102 = 0,162$;
ferner $u = 0,835$ giebt $v = 0,060 + 0,142 = 0,202$;
ferner $u = 1,467$ » $v = 0,060 + 0,249 = 0,309$;
$u = 1,805$ » $v = 0,060 + 0,307 = 0,367$;
endlich $u = 3,142$ » $v = 0,060 + 0,535 = 0,595$;

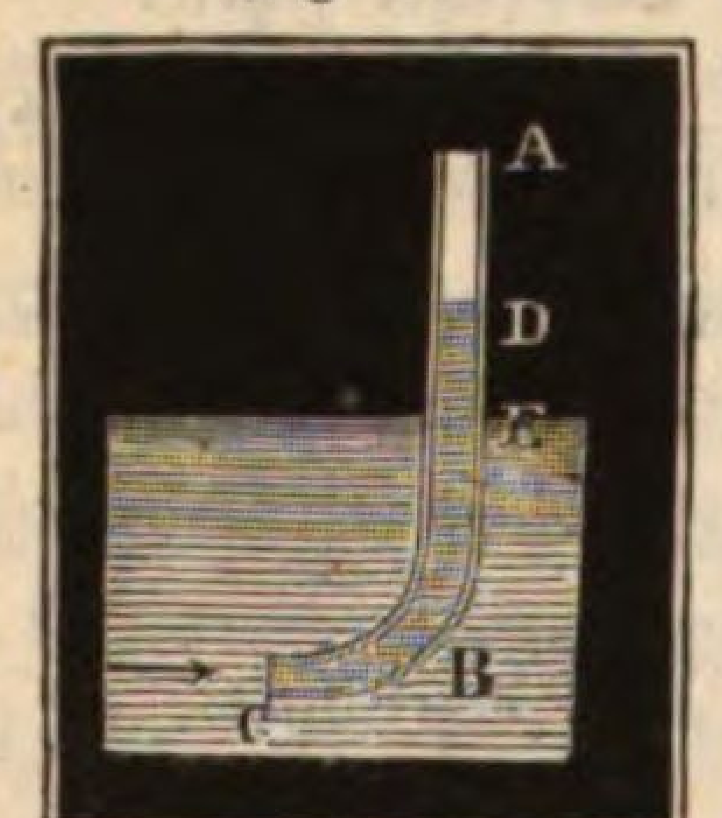
es findet also eine sehr gute Uebereinstimmung dieser berechneten Werthe mit den beobachteten statt.

Anmerkung 2. Man kann auch nach Lapointe das hydraulische Flügelrad in eine cylindrische Röhre einsetzen, und sich von demselben die Geschwindigkeit des durchfließenden Wassers angeben lassen. Der Zählapparat kann dann außerhalb des Wassers stehen und mit dem Rade durch eine stehende Welle in Verbindung gesetzt werden. Lapointe nennt dieses Instrument une tube jaugeur (s. Comptes rendues, Bd. 25, auch Polytechn. Centralblatt, 1847). In Frankreich fängt man erst seit Kurzem an, dem hydraulischen Flügelrade die nöthige Aufmerksamkeit zu schenken. Wir finden eine ausführliche Abhandlung über dieses Instrument in den Annales des ponts et chaussées, T. XIV, 1847, von Baumgarten, und einen Auszug hiervon im polytechnischen Centralblatte, 1849. Herr Baumgarten empfiehlt besonders die Schraubenflügel, und macht hierzu noch manche Bemerkungen, die allerdings mit den von uns schon längst gemachten Erfahrungen ganz im Einklange stehen.

Pitot'sche Röhre.

§. 417. Die übrigen Hydrometer sind unvollkommener als der hydraulische Flügel, denn sie gewähren entweder weniger Genauigkeit, oder sie sind umständlicher im Gebrauche. Das einfachste Instrument dieser Art ist die Pitot'sche Röhre (franz. la tube de Pitot; engl. Pitot's tube).

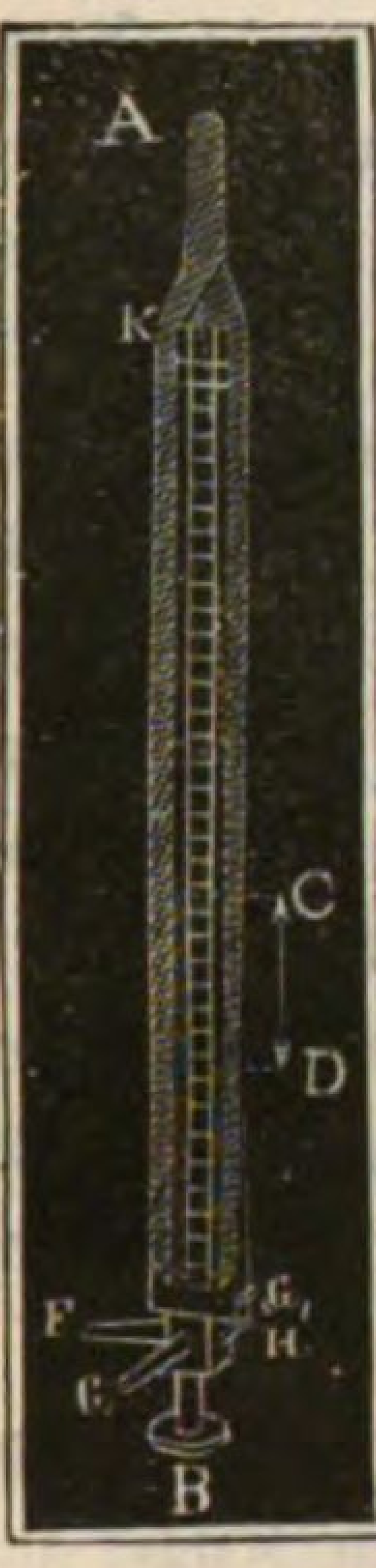
Fig. 618.



In seiner einfachsten Gestalt besteht es in einer gläsernen Knieröhre ABC, Fig. 618, welche so in's Wasser gehalten wird, daß der untere Theil derselben horizontal und dem Wasser entgegen zu stehen kommt. Durch den Wasserstoß wird nun in dieser Röhre eine Wassersäule zurückgehalten, die über das Niveau des äußeren Wasserspiegels zu stehen kommt, und die Erhebung DE dieser Wassersäule fällt um so größer aus, je größer der Stoß oder die ihn erzeugende Geschwindigkeit des Wassers ist; es kann daher auch umgekehrt diese Erhebung oder Niveaudifferenz als Maaß der Geschwindigkeit des Wassers dienen. Setzen wir diese Erhebung DE über den äußeren Wasserspiegel $= h$, und die Geschwindigkeit des Wassers $= v$, so können wir $h = \frac{v^2}{2g\mu^2}$, wo μ eine Erfahrungszahl ist, und daher umgekehrt, $v = \mu\sqrt{2gh}$ oder einfacher $v = \psi\sqrt{h}$ setzen. Um die Constante ψ zu finden, hält man das Instrument an einer Stelle in's Wasser, wo die Geschwindigkeit v_1 bekannt ist; zeigt sich hier die Erhebung $= h_1$, so hat man für die Constante $\psi = \frac{v_1}{\sqrt{h_1}}$, welche nun in anderen

Fällen, wo die Geschwindigkeit mit diesem Instrumente gesucht werden soll, zu gebrauchen ist. Pitot'sche Röhre.

Fig 619.



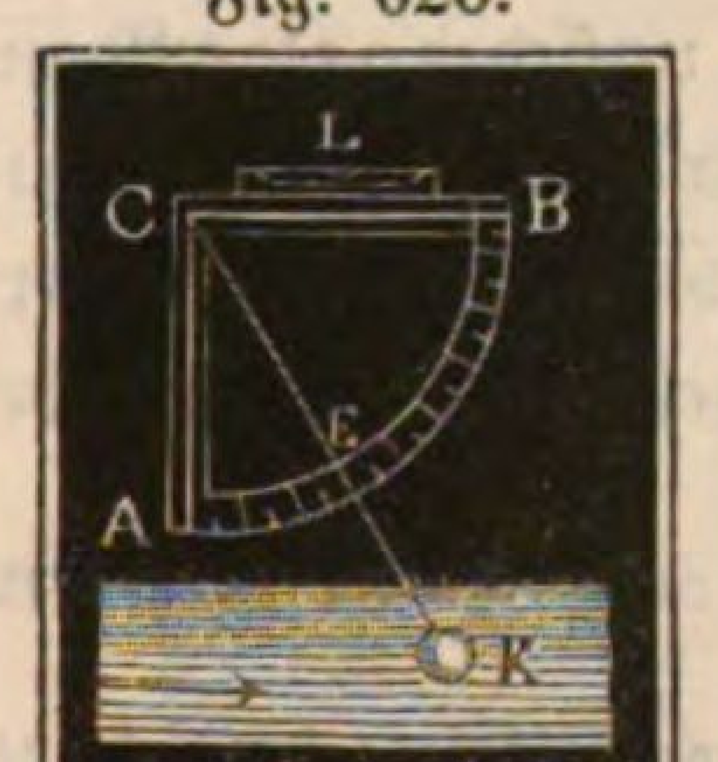
Um das Ablesen der Höhe h zu erleichtern, läßt man das Instrument aus zwei Röhren bestehen, und wie Figur 619 zeigt, aus der einen ein Röhrchen F gegen den Strom, aus der andern aber zwei Röhrchen G und G_1 rechtwinkelig gegen die Stromrichtung, durch beide Röhren aber einen einzigen Hahn H gehen, womit man die Wassersäulen in beiden Röhren absperren kann. Zieht man das Instrument aus dem Wasser heraus, so kann man bequem an einer zwischen beiden Röhren befindlichen Scala die Differenz $CD = h$ beider Wassersäulen ablesen. Damit das Wasser in der Röhre keine große Schwankungen annehme, ist nöthig, den Röhren enge Einmündungen zu geben, und damit das Absperren der Röhren schnell und sicher vor sich gehen könne, versieht man den Hahn mit einem Arme und einer Drahtstange HK, welche oben nahe an der Handhabe des Instrumentes sich endigt.

Anmerkung 1. Wenn auch die Pitot'sche Röhre nicht die Genauigkeit gewährt wie der hydraulische Flügel, so ist sie doch wegen ihres einfachen Gebrauches ein sehr zu empfehlendes Instrument. Der Verfasser handelt im polytechnischen Centralblatte, 1847, etwas specieller von diesem Instrumente und theilt auch daselbst eine Reihe von Erfahrungszahlen und die darauf gegründete Bestimmung des Coefficienten ψ mit. Bei seinem Instrumente sind die Geschwindigkeiten zwischen 0,32 und 1,24 Meter, $v = 3{,}545\sqrt{h}$ Meter zu setzen.

Anmerkung 2. Duchemin empfiehlt eine Pitot'sche Röhre mit Schwimmer. Da dieselbe ziemlich weit sein muß, so giebt sie eine nicht unbeträchtliche Stauung, weshalb sie in engen Kanälen nicht zu gebrauchen ist. S. Duchemin: Recherches expérim. sur les lois de la résistance des fluides. Boileau wendet eine unten zusammengezogene gerade Röhre an, um der Geschwindigkeit des Wassers bei Ueberfällen zu ermitteln. S. dessen 4 Abhandlungen in den Compt. rendues oder die Auszüge hiervon in dem polytechn. Centralblatte.

§. 418. Der Stromquadrant oder das hydrometrische Pendel (franz. pendule hydrométrique; engl. hydrometrical-pendulum) ist Stromquadrant.

Fig. 620.



vorzüglich von Ximenes, Michelotti, Gerstner und Eytelwein zum Messen der Geschwindigkeit fließender Wasser angewendet worden. Dieses Instrument besteht aus einem in Grade und feinere Theile eingetheilten Quadranten AB, Fig. 620, und aus einer im Mittelpunkte C desselben mittels eines Fadens aufgehängten Metall- oder Elfenbeinkugel K von 2 bis 3 Zoll Durchmesser; es giebt die Geschwindigkeit

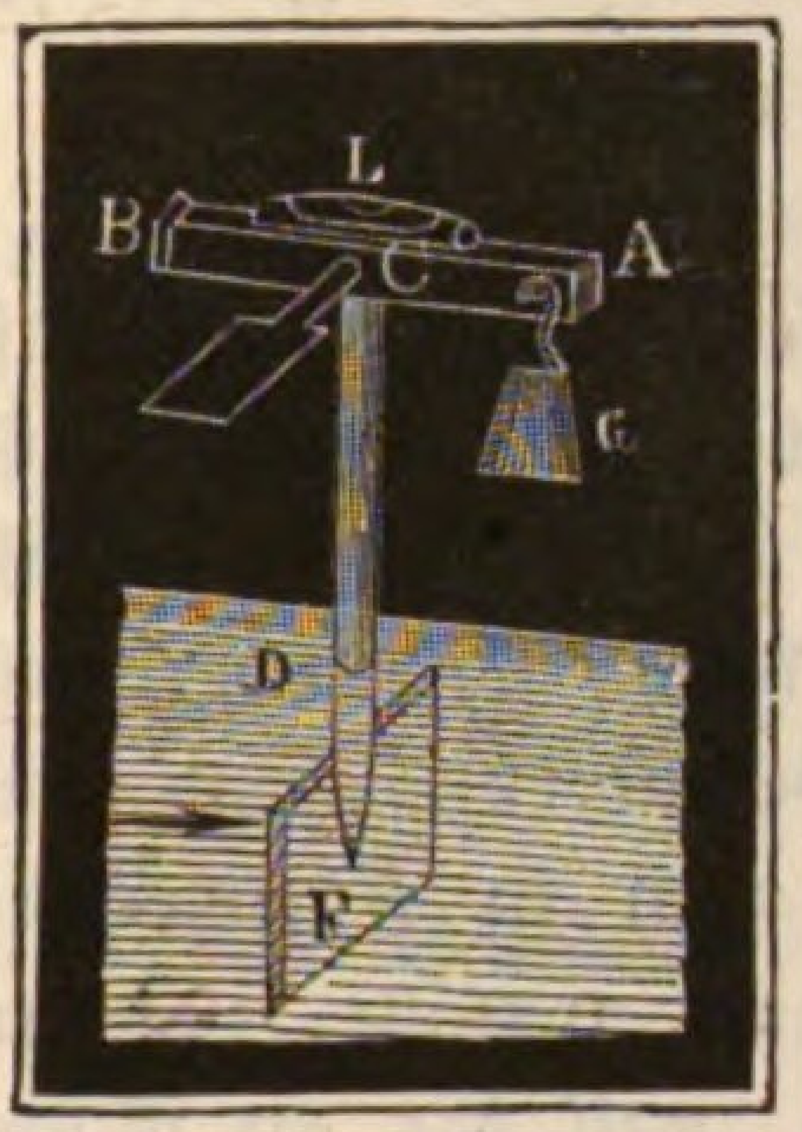
Strom-quadrant. des Wassers durch den Winkel ACE an, um welchen der von der Kugel gespannte Faden von der Vertikalen abweicht, wenn man die Ebene des Instrumentes in die Richtung des Stromes bringt, die Kugel aber unter das Wasser tauchen läßt. Da der Winkel nicht leicht 40 und mehr Grade beträgt, so giebt man diesem Instrumente oft nur die Form eines rechtwinkeligen Dreieckes und bringt die Gradtheilung auf der horizontalen Kathete desselben an. Zum Einstellen der Index- oder Nulllinie in die Vertikale wendet man am besten eine oben aufsitzende Röhrenlibelle an, oder man bedient sich dazu der Kugel selbst, indem man dieselbe außerhalb des Wassers hängen läßt und das Instrument so lange dreht, bis der Faden in die Nulllinie der Eintheilung fällt. Bei Geschwindigkeiten unter 4 Fuß kann man sich einer Elfenbeinkugel, bei größeren Geschwindigkeiten muß man sich aber hohler Metallkugeln bedienen. Wegen der steten Schwankungen der Kugel in der Bewegungsrichtung des Wassers sowohl als auch rechtwinkelig gegen die Stromrichtung, ist das Ablesen ziemlich beschwerlich und läßt viel Unsicherheit zurück, weswegen man dieses Instrument nicht zu den vollkommneren zählen darf.

Die Abhängigkeit zwischen dem Ablenkungswinkel und der Geschwindigkeit des Wassers läßt sich bei einer nicht sehr tief eingetauchten Kugel auf folgende Weise ermitteln. Aus dem Gewichte G der Kugel und aus dem mit dem Quadrate der Geschwindigkeit v und dem Querschnitte F der Kugel gleichmäßig wachsenden Wasserstoße $P = \mu F v^2$, folgt eine Mittelkraft R, deren Richtung auch der Faden annimmt, und bestimmt ist durch den Ablenkungswinkel β, für den man hat $tang.\beta = \frac{P}{G} = \frac{\mu F v^2}{G}$; es ist daher auch umgekehrt, $v^2 = \frac{G\,tang.\beta}{\mu F}$, und $v = \sqrt{\frac{G}{\mu F}} \cdot \sqrt{tang.\beta}$, d. i. $v = \psi \sqrt{tang.\beta}$, wenn ψ einen Erfahrungscoefficienten bezeichnet, den man vor dem Gebrauche nach der oben angegebenen Regel zu ermitteln hat.

Rheometer. §. 419. Die übrigen Hydrometer, als: Lorgna's Wasserhebel, Ximene's Wasserfahne, Michelotti's hydraulische Schnellwaage, Brünning's Tachometer, Poletti's Rheometer, sind im Gebrauche umständlicher und zum Theil auch unsicher. Das Princip ist bei allen diesen Instrumenten dasselbe; diese Instrumente sind aus einer Stoßfläche und einer Waage zusammengesetzt, und es dient die letztere dazu, den Stoß P des Wassers gegen die erstere anzugeben; da dieser aber $= \mu F v^2$ ist, so hat man umgekehrt $v = \sqrt{\frac{P}{\mu F}} = \psi \sqrt{P}$, wo ψ eine von der Größe der Stoßfläche F abhängige Erfahrungsconstante bezeichnet.

Das Rheometer, welches in der neueren Zeit von Poletti vorgeschlagen wurde, und im Wesentlichen nicht von Michelotti's hydrometrischer Schnellwaage abweicht, besteht aus einem um eine feste Axe C drehbaren Hebel AB, Fig. 621, und einem zweiten Arme CD, an welchen die Stoßfläche oder, nach Poletti, ein bloßer Stoßstab angeschraubt wird. Um dem Stoße des Wassers gegen diese Fläche das Gleichgewicht zu halten, werden in die am Hebelende A hängende Blechbüchse Gewichte oder Schrotkörner eingelegt, und um die leere Waage im stillstehenden Wasser in's Gleichgewicht zu setzen, ist bei B ein Gegengewicht angesetzt, welches das äußerste Ende des Armes CB ausmacht. Aus dem aufgelegten Gewichte G folgt die Stoßkraft P mittels der Hebelarme $CA = a$ und $CF = b$, durch die Formel $Pb = Ga$, weshalb nun $P = \frac{a}{b} G$ und $v = \sqrt{\frac{P}{\mu F}} = \sqrt{\frac{aG}{\mu b F}} = \psi \sqrt{G}$ ist, wo ψ aber eine Erfahrungsconstante bezeichnet. Rheometer.

Fig. 621.



Anmerkung 1. Ueber die letzteren Hydrometer wird ausführlicher gehandelt: in Eytelwein's Handbuch der Mechanik fester Körper und der Hydraulik, ferner in Gerstner's Handbuch der Mechanik, Band 2, in Brünning's Abhandlung über die Geschwindigkeit des fließenden Wassers, in Venturoli's Elementi di Meccanica e d'Idraulica, Vol. 2. Wegen Poletti's Rheometer ist in Dingler's polytechn. Journal, Band 20, 1826 nachzusehen. Stevenson's Hydrometer ist der Woltmann'sche Flügel, s. Dingler's Journal, Band 65, 1842.

Anmerkung 2. Ein besonders auch zum praktischen Gebrauch zu empfehlendes Werk ist die Hydrometrie oder praktische Anleitung zum Wassermessen von Bornemann, Freiberg, 1849.

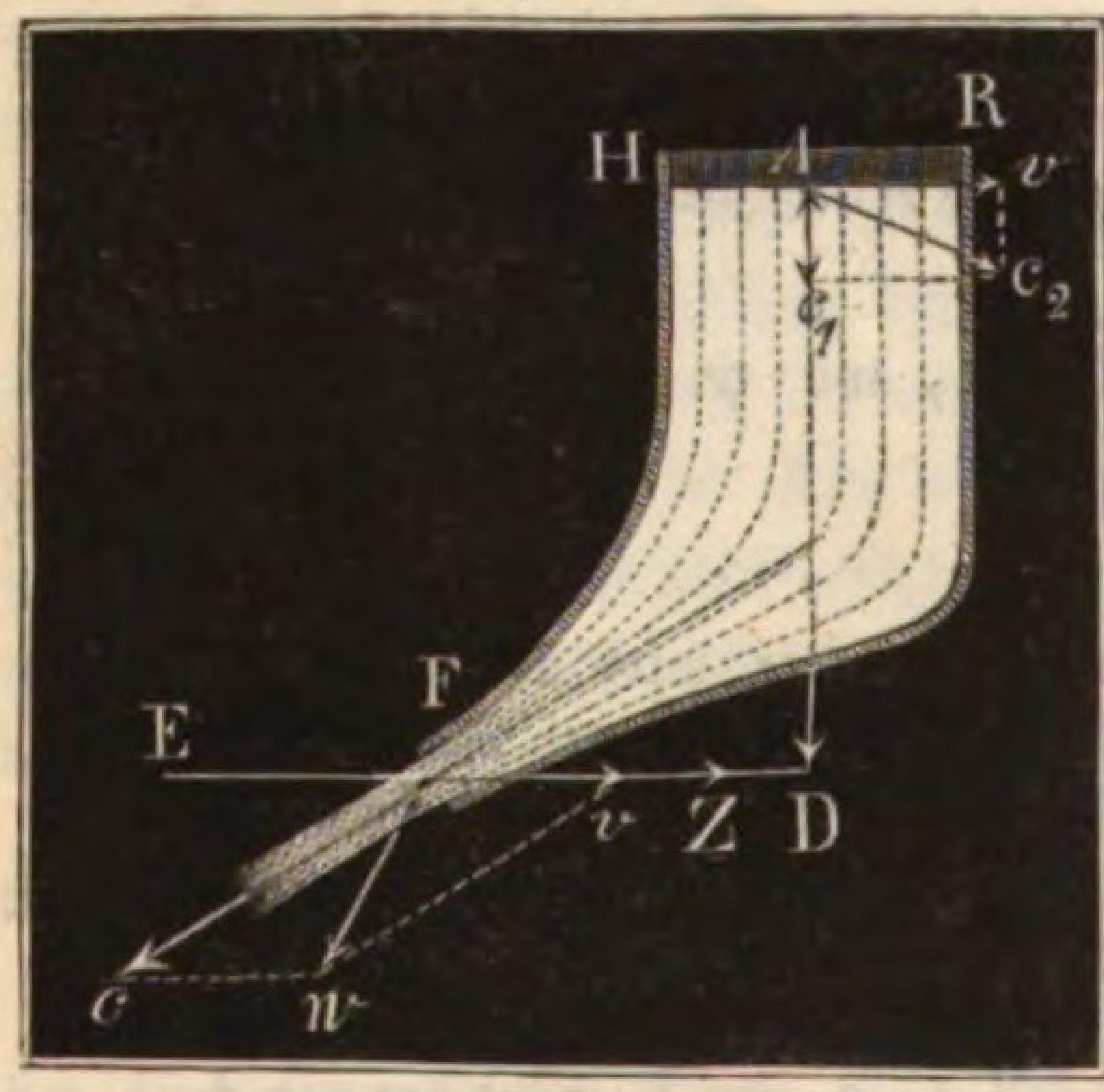
Neuntes Kapitel.

Von der Kraft und dem Widerstande der Flüssigkeiten.

Reaction des Wassers.

§. 420. Der Gesammtdruck des in einem Gefäße stillstehenden Wassers reducirt sich nach §. 305 auf eine dem Gewichte dieser Wassermasse gleiche Vertikalkraft; wenn aber das Gefäß *HRF*, Fig. 622, eine Oeffnung *F* hat, durch welche das Wasser ausfließen kann, so erleidet diese Kraft eine Veränderung, und zwar nicht allein, weil in *F* ein Theil der Gefäßwand ausfällt, sondern auch deshalb, weil das der Mündung zufließende Wasser wie jeder andere Körper, der seinen Bewegungszustand ändert, vermöge seiner Trägheit reagirt. Die Bewegungsänderung eines Körpers kann sich sowohl auf eine Veränderung der Geschwindigkeit als auch auf eine Veränderung der Bewegungsrichtung erstrecken; und daher kann auch die Reaction (fr. réaction, engl. reaction) des ausfließenden Wassers sowohl aus einer Beschleunigung als auch aus einer stetigen Richtungsänderung des der Mündung zuströmenden Wassers entspringen.

Fig. 622.



Auf folgendem Wege gelangen wir sogleich zur Kenntniß der vollständigen Reaction des Wassers in einem Ausflußgefäße.

Es sei c die Geschwindigkeit des durch die Mündung F fließenden Wassers, c_1 die relative Geschwindigkeit des Wassers an der Oberfläche $HR = G$, und h die Druckhöhe AD in der Ausmündung. Dann haben wir $\frac{c^2}{2g} = h + \frac{c_1^2}{2g}$ und das Ausflußquantum $Q = Fc = Gc_1$.

Denken wir das Gefäß *HRF*, Fig. 622, mit einer Geschwindigkeit v horizontal fortgehend, so müssen wir für die absolute Geschwindigkeit c_2 des eintretenden Wassers $c_2^2 = c_1^2 + v^2$ und bei dem Neigungswinkel $EFc = \alpha$ der Strahlaxe gegen den Horizont für die absolute Geschwin-

digkeit w des austretenden Strahles $w^2 = c^2 + v^2 - 2\, c\, v\, cos.\, \alpha$ setzen. Reaction des Wassers.

Nun ist das Arbeitsvermögen des Wassers von dem Ausflusse

$$L_1 = \left(\frac{c_2^2}{2g} + h\right) Q\gamma = \left(\frac{c_1^2 + v^2}{2g} + h\right) Q\gamma,$$

dagegen das Arbeitsvermögen desselben nach dem Ausflusse

$$L_2 = \frac{w^2}{2g}\, Q\gamma = \left(\frac{c^2 + v^2 - 2\, c\, v\, cos.\, \alpha}{2g}\right) Q\gamma,$$

daher folgt das dem Wasser entzogene und auf das Gefäß übergetragene Arbeitsquantum:

$$L = L_1 - L_2 = \left(\frac{c_1^2 - c^2 + 2\, c\, v\, cos.\, \alpha}{2g} + h\right) Q\gamma,$$

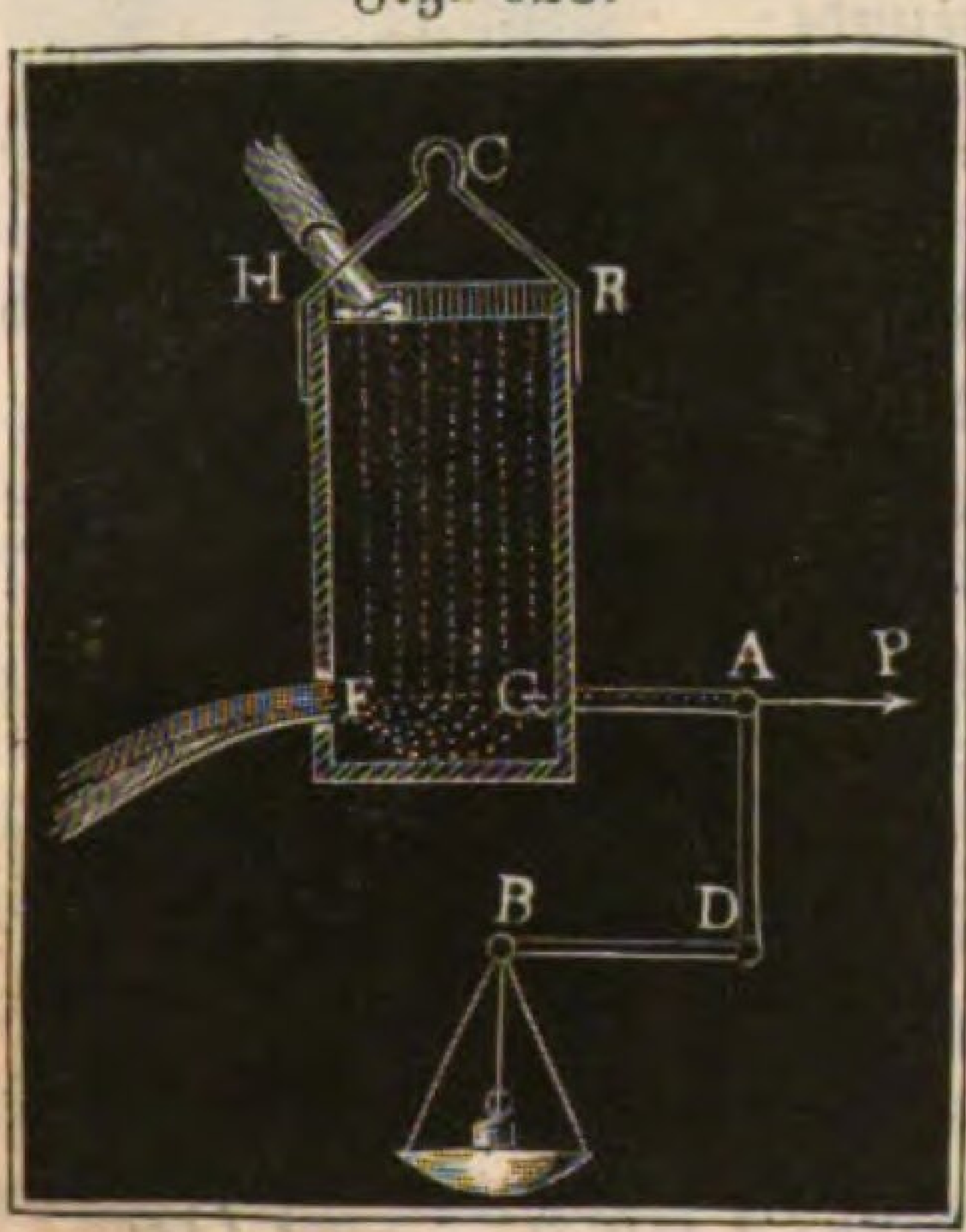
oder, da $\frac{c^2}{2g} - \frac{c_1^2}{2g} = h$ ist, $L = \frac{c\, v\, cos.\, \alpha}{g}\, Q\gamma$; und hiernach der horizontale Component der Reaction des Wassers:

$$Z = \frac{L}{v} = \frac{c\, cos.\, \alpha}{g}\, Q\gamma.$$

Da $Q = Fc$ ist, so haben wir auch

$$Z = \frac{c^2}{g}\, F\gamma\, cos.\, \alpha = 2\, .\, \frac{c^2}{2g}\, F\gamma\, cos.\, \alpha = 2hF\gamma\, cos.\, \alpha.$$

Fig. 623.



und daher bei einem horizontal gerichteten Strahle, wie Fig. 623,

$$Z = 2hF\gamma.$$

Es ist also die Reaction eines horizontalen Strahles gleich dem Gewichte einer Wassersäule, welche den Querschnitt des Strahles zur Basis und die doppelte Geschwindigkeitshöhe ($2h$) zur Länge hat.

Anmerkung. Ein Engländer, Peter Ewart, hat in der neuesten Zeit die Richtigkeit dieses Gesetzes durch Versuche zu bestätigen gesucht. (S. Memoirs of the Manchester Philosophical Society, Vol. II., oder den Ingenieur, Zeitschrift für das gesammte Ingenieurwesen, Bd. I.) Hierbei wurde das Gefäß HRF, Fig. 623, an eine horizontale Axe C aufgehangen, und die Reaction durch eine Winkelhebelwaage ADB gemessen, auf welche das Gefäß mittels eines horizontalen Stabes AG wirkt, der sich genau der Mündung F gegenüber an das Gefäß anstemmte. Beim Ausflusse durch eine Mündung in der dünnen Wand ergab sich $P = 1{,}14\, .\, \frac{v^2}{2g}\, F\gamma$. Setzt man den Strahlquerschnitt $F_1 = 0{,}64\, .\, F$ und

Reaction des Wassers. die effective Ausflußgeschwindigkeit $v_1 = 0{,}96\,v$ (s. §. 344), so erhält man nach der theoretischen Formel

$$P = 2 \cdot \frac{v_1^2}{2g} \cdot F_1 \gamma = 2 \cdot 0{,}96^2 \cdot 0{,}64 \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma = 1{,}18 \frac{v^2}{2g} F\gamma,$$

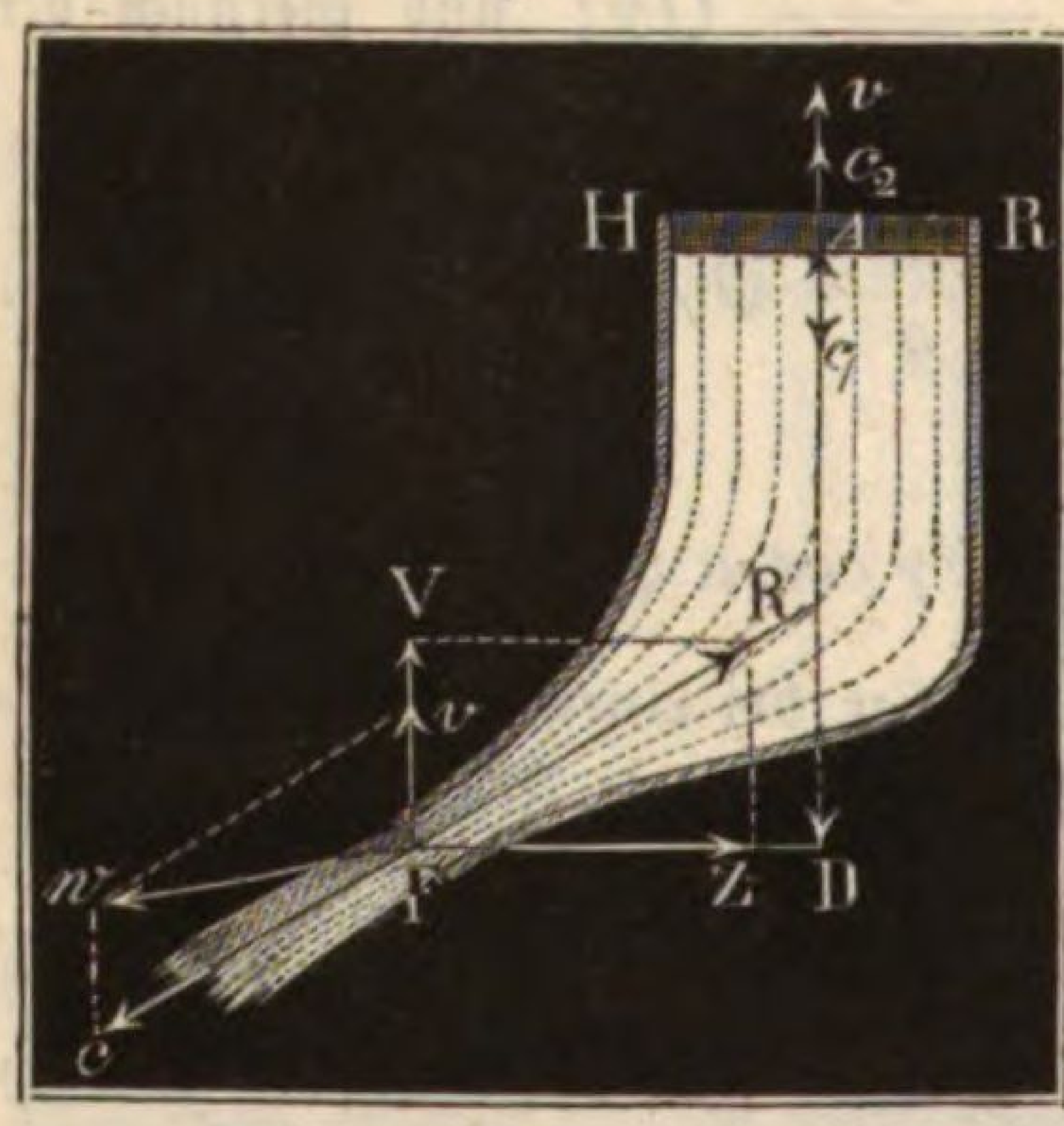
also ziemlich dasselbe, was die Versuche gegeben haben. Bei einer nach dem contrahirten Wasserstrahle geformten Mündung wurde $P = 1{,}73 \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma$, der Ausfluß- oder Geschwindigkeitscoefficient aber $= 0{,}94$ gefunden. Da hier $F_1 = F$ und $v_1 = 0{,}94\,v$ ist, so hat man theoretisch

$$P = 2 \cdot 0{,}94^2 \frac{v^2}{2g} F\gamma = 1{,}77 \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma,$$

also wieder eine gute Uebereinstimmung.

§. 421. Denkt man sich das Ausflußgefäß HRF, Fig. 624, mit einer Geschwindigkeit v vertikal aufwärts bewegt, so haben wir für die absolute Geschwindigkeit des eintretenden Wassers: $c_2 = v - c_1$ und dagegen für die des ausfließenden, bei der im vorigen Paragraphen gebrauchten Bezeichnung:

Fig. 624.



$$w^2 = c^2 + v^2 + 2\,c\,v\,cos.(90^0 + \alpha)$$
$$= c^2 + v^2 - 2\,c\,v\,sin.\alpha.$$

Es ist hiernach das ganze Leistungsvermögen der Wassermenge Q pr. Secunde:

$$L_1 = \left(\frac{(v - c_1)^2}{2g} + h\right) Q\gamma,$$

dagegen das des abfließenden Wassers:

$L_2 = (c^2 + v^2 - 2\,c\,v\,sin.\alpha)\,Q\gamma$, und folglich die mechanische Arbeit, welche das Wasser dem Gefäße mitgetheilt hat,

$$L = L_1 - L_2 = \left(\frac{2\,v\,c_1 + c_1^2 - c^2 + 2\,c\,v\,sin.\alpha}{2g} + h\right) Q\gamma,$$

oder, da $h = \frac{c^2}{2g} - \frac{c_1^2}{2g}$ ist, $L = \frac{(c\,sin.\alpha - c_1)\,v}{g}\,Q\gamma$,

und die entsprechende Vertikalkralkraft:

$$V = \frac{L}{v} = \left(\frac{c\,sin.\alpha - c_1}{g}\right) Q\gamma = \frac{c}{g}\left(sin.\alpha - \frac{F}{G}\right) Q\gamma$$
$$= \frac{c^2}{g}\left(sin.\alpha - \frac{F}{G}\right) F\gamma = \left(sin.\alpha - \frac{F}{G}\right) \cdot 2\,h\,F\gamma.$$

Ist die Ausflußmündung klein gegen die Oberfläche G, so hat man $\frac{F}{G} = 0$, und daher den vertikalen Componenten der Reaction:

$$V = 2\,h\,F\,\gamma\,sin.\alpha.$$

Nach dem vorigen Paragraphen hat man aber den horizontalen Componenten dieser Kraft: Reaction des Wassers.

$$Z = 2hF\gamma \cos.\alpha,$$

daher ist die vollständige Reaction des Wassers:

$$R = \sqrt{V^2 + Z^2} = 2hF\gamma,$$

und die Richtung derselben der Bewegung des ausfließenden Wassers genau entgegengesetzt.

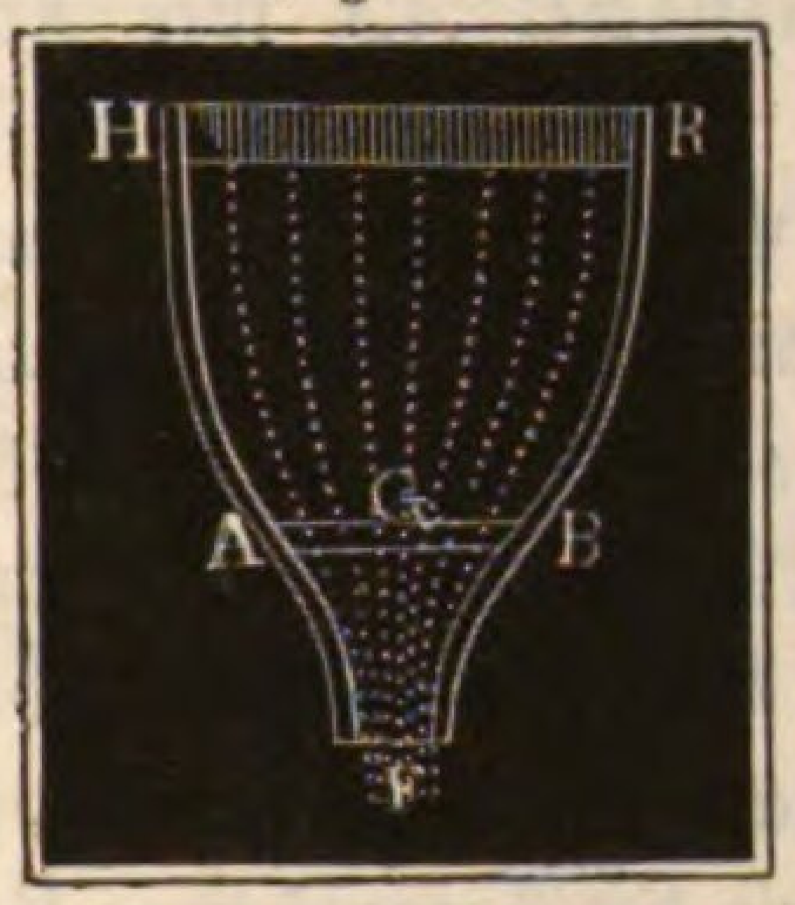
Ist $F = G$, fließt z. B. das Wasser durch eine überall gleichweite Röhre, so hat man $\frac{F}{G} = 1$ und daher

$$V = (\sin.\alpha - 1) \,.\, 2hF\gamma = -(1 - \sin.\alpha) \,.\, 2hF\gamma;$$

dann wirkt also V nicht nach oben, sondern nach unten, und es ist die vollständige Reaction:

$$R = \sqrt{V^2 + Z^2} = \sqrt{\cos.\alpha^2 + (1 - \sin.\alpha)^2} \,.\, 2hF\gamma$$
$$= \sqrt{2(1 - \sin.\alpha)} \,.\, 2hF\gamma = 4hF\gamma \sin.\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Fig. 625.



Für $\alpha = -90^0$, d. i. wenn die Röhre einen Halbkreis bildet, ist $R = 4hF\gamma$.

Ist $\alpha = +90^0$, so hat man es also im Allgemeinen mit dem Ausflusse, wie Fig. 625, zu thun, und es ist $Z = 0$ und

$$V = \frac{(c - c_1)}{g} Q\gamma = \left(1 - \frac{F}{G}\right) \,.\, 2hF\gamma,$$

folglich für $\frac{F}{G} = 0$, $V = R = 2hF\gamma$.

Zu V kommt natürlich in allen Fällen noch das ganze Gewicht des im Ausflußapparate befindlichen Wassers.

§. 422. Das Wasser oder eine andere Flüssigkeit übt gegen einen festen Körper einen Stoß aus, wenn sie mit diesem zusammentrifft, und dadurch in ihrem Bewegungszustande verändert wird. Von dem Stoße ist der Widerstand (franz. résistance; engl. resistence), welchen das Wasser der Bewegung eines Körpers entgegensetzt, nicht wesentlich verschieden. Die Untersuchung beider bildet den dritten递Haupttheil der Hydraulik. Man unterscheidet zunächst von einander: 1) den Stoß isolirter Wasserstrahlen (franz. choc d'une veine de fluide; engl. impact of an isolate stream), 2) den Stoß im begrenzten Wasser oder Gerinne (franz. choc d'un fluide défini; engl. impact of a boundet stream), und 3) den Stoß im unbegrenzten Wasser (franz. choc d'un fluide indéfini; engl. impact of an unlimited stream). Ein Stoß der ersten Art findet statt, wenn sich dem aus einem Gefäße ausfließenden Stoß und Widerstand des Wassers.

Stoß und Widerstand des Wassers.

Wasserstrahl ein Körper, z. B. die Schaufel eines oberschlägigen Wasserrades entgegenstellt; ein Stoß der zweiten Art tritt ein, wenn das Wasser in einem Kanale oder Gerinne gegen einen, den Querschnitt des letzteren ganz ausfüllenden Körper, z. B. gegen die Schaufel eines unterschlägigen Wasserrades trifft; die dritte Art kommt endlich vor, wenn ein fließendes Wasser gegen einen in dasselbe eingetauchten Körper trifft, dessen Querschnitt nur ein sehr kleiner Theil ist vom Querschnitte des Wasserstromes, wie z. B. wenn es gegen die Schaufeln eines Schiffmühlenrades anrückt.

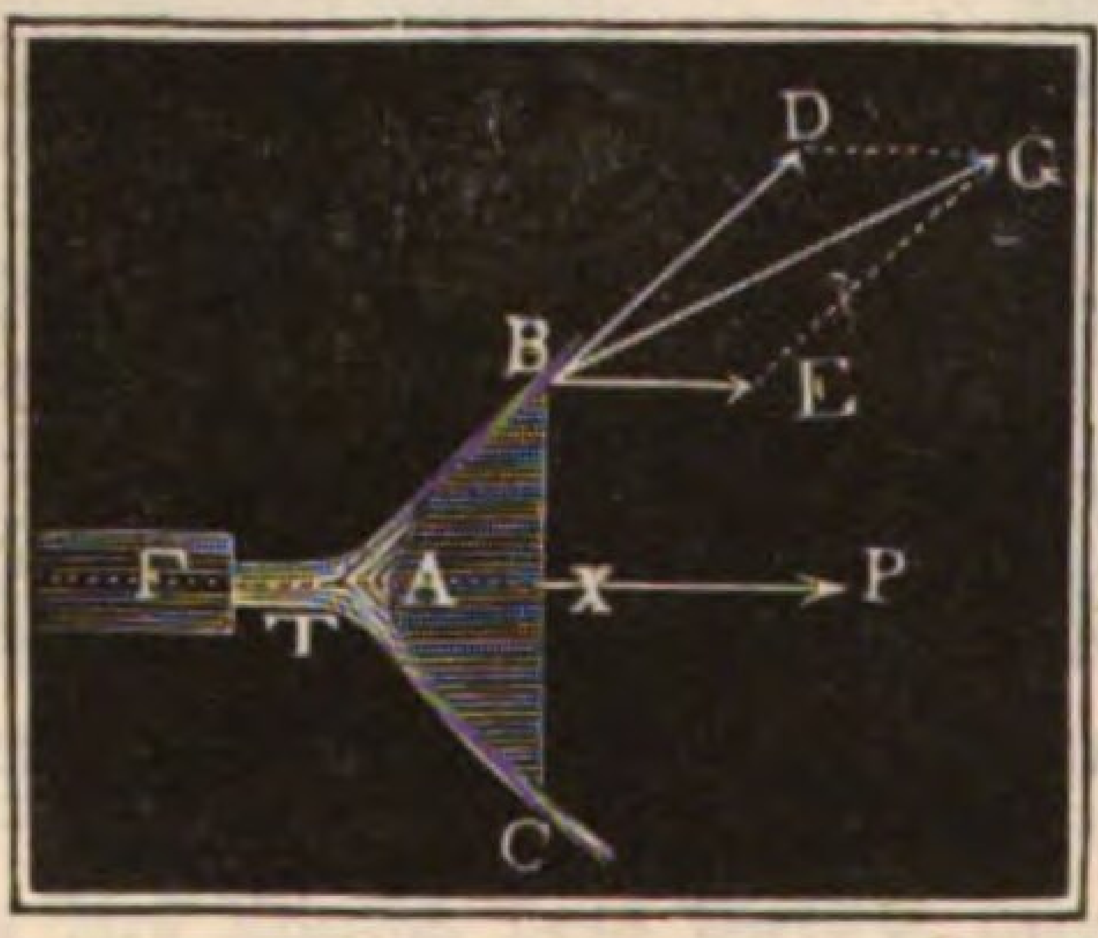
Uebrigens ist zu unterscheiden, der Wasserstoß gegen ruhende und der gegen bewegte Körper, ferner der Stoß gegen krumme Flächen und der gegen ebene Flächen, und bei letzterem wieder der senkrechte und der schiefe Stoß.

Wir betrachten gleich einen allgemeinern Fall, nämlich den Stoß eines isolirten Strahles gegen eine Rotationsfläche, welche sich in ihrer eigenen, mit der der Bewegungsrichtung des Strahles zusammenfallenden Axe bewegt.

Stoß isolirter Strahlen.

§. 423. Es sei BAC, Fig. 626, eine Rotationsfläche, AX ihre Axe, und FA ein in der Richtung dieser antreffender Wasserstrahl; setzen wir die Geschwindigkeit des Wassers $= c$, die der Fläche $= v$ und den Winkel BTX, welchen die Tangente DT am Ende B der Erzeugungscurve oder jeder die Fläche verlassende Wasserfaden BD mit der Axenrichtung BE einschließt, $= \alpha$, nehmen wir endlich noch an, daß das Wasser beim Hinlaufen an der Fläche durch Reibung an lebendiger Kraft nichts verliere.

Fig 626.



Das Wasser trifft die Fläche mit der relativen Geschwindigkeit $c - v$ und geht daher auch mit dieser an der Fläche hin, entfernt sich also auch mit derselben in den Tangentialrichtungen TB, TC u. s. w. von der Fläche. Aus der Tangentialgeschwindigkeit $BD = c - v$ und der Axengeschwindigkeit $BE = v$ ergiebt sich aber die absolute Geschwindigkeit $BG = c_1$ des Wassers nach dem Zusammenstoße mit der Fläche durch die bekannte Formel $c_1 = \sqrt{(c - v)^2 + 2\,(c - v)\, v \cos. \alpha + v^2}$.

Nun kann aber ein Wasserquantum Q durch seine lebendige Kraft die mechanische Arbeit $\frac{c^2}{2g} . Q\gamma$ verrichten, wenn seine Geschwindigkeit c vollkommen zugesetzt wird; es ist demnach auch das im Wasser zurückbleibende

Arbeitsvermögen $= \frac{c_1^2}{2g} \cdot Q\gamma$, folglich die auf die Fläche übergetragene Arbeit $Pv = \frac{c^2}{2g} Q\gamma - \frac{c_1^2}{2g} Q\gamma = \frac{c^2 - c_1^2}{2g} \cdot Q\gamma$ Stoß isolirter Strahlen.

$$= \frac{[c^2 - (c-v)^2 - 2(c-v)\, v \cos.\alpha - v^2]}{2g} Q\gamma$$

$$= \frac{2cv - 2v^2 - 2(c-v)\, v \cos.\alpha}{2g} Q\gamma, \text{ d. i.}$$

$Pv = (1 - \cos.\alpha) \frac{(c-v)\, v}{g} Q\gamma$, und die Kraft oder der Wasserstoß in der Axenrichtung: $P = (1 - \cos.\alpha) \frac{(c-v)}{g} Q\gamma$.

Geht die Fläche dem Wasser mit der Geschwindigkeit v entgegen, so hat man $P = (1 - \cos.\alpha) \cdot \frac{(c+v)}{g} Q\gamma$, und ist dieselbe ohne Bewegung, also $v = 0$, so stellt sich der Stoß oder hydraulische Axendruck $P = (1 - \cos.\alpha) \frac{c}{g} \cdot Q\gamma$ heraus.

Es folgt hieraus, daß der Stoß einer und derselben Wassermasse unter übrigens gleichen Umständen der relativen Geschwindigkeit $c \mp v$ des Wassers proportional ist.

Aus dem Inhalte F des Querschnittes vom Wasserstrahle folgt das zum Stoße gelangende Wasserquantum $Q = F(c \mp v)$; daher

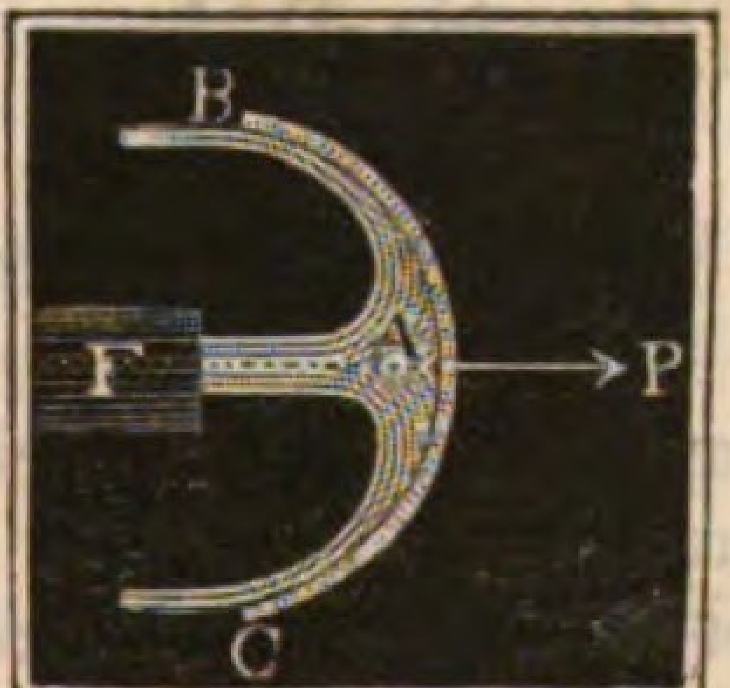
$$P = (1 - \cos.\alpha) \frac{(c \mp v)^2}{g} F\gamma;$$

und für $v = 0$, $P = (1 - \cos.\alpha) \frac{c^2}{g} F\gamma$.

Bei gleichem Querschnitte des Strahles wächst also hiernach der Stoß gegen eine ruhende Fläche wie das Quadrat der Geschwindigkeit des Wassers.

§. 424. Der Stoß eines und desselben Wasserstrahles hängt vorzüglich auch noch von dem Winkel α ab, unter welchem das Wasser nach dem Stoße sich von der Axe entfernt; er ist Null, wenn dieser Winkel = Null ist, und dagegen ein Maximum, nämlich $= 2 \frac{(c \mp v)}{g} Q\gamma$, wenn dieser Winkel 180^0, als dessen Cosinus $= -1$ ist, wo das Wasser, wie Fig. 627 repräsentirt, in der entgegengesetzten Richtung die Fläche verläßt, in welcher es dieselbe trifft. Ueberhaupt ist derselbe bei concaven Flächen größer Stoß gegen ebene Flächen

Fig. 627.

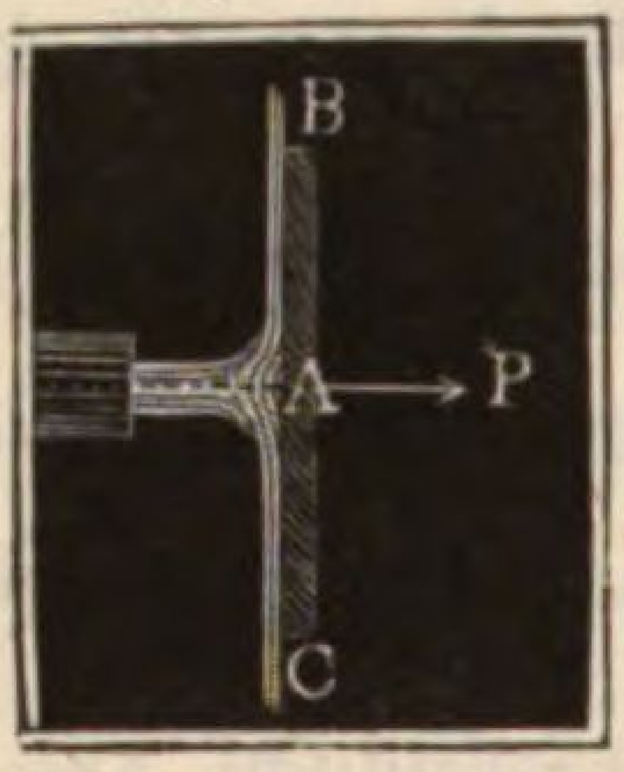


Stoß gegen ebene Flächen.

als bei converen, weil dort der Winkel stumpf, also der Cosinus negativ ausfällt und $1 - cos.\ \alpha$ in $1 + cos.\ \alpha$ übergeht.

Am häufigsten ist die Fläche, wie Fig. 628 vorstellt, eben, und daher $\alpha = 90^0$, also $cos.\ \alpha = 0$ und der Stoß $P = \frac{(c \mp v)}{g} \,.\, Q\gamma$; bei einer ruhenden Fläche $P = \frac{c}{g}\, Q\gamma = \frac{c^2}{2g} F\gamma = 2 \,.\, \frac{c^2}{2g}\, F\gamma = 2 F h \gamma$.

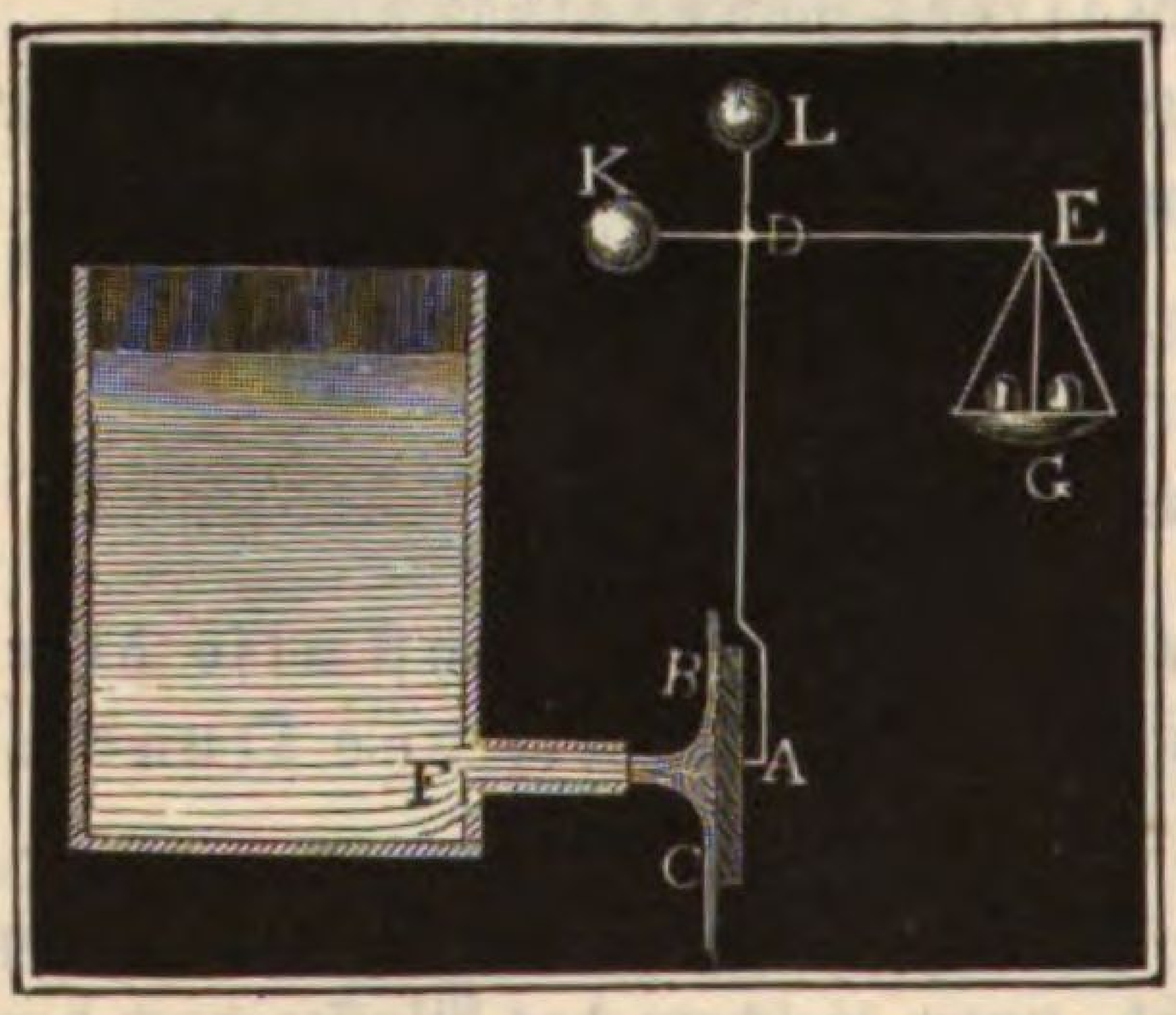
Fig. 628.



Der Normalstoß des Wassers gegen eine ebene Fläche ist also gleich dem Gewichte einer Wassersäule, die zur Basis den Querschnitt F des Strahles und zur Höhe die zweifache Geschwindigkeitshöhe $2h = 2 \,.\, \frac{c^2}{2g}$ hat.

Die hierüber angestellten Versuche von Michelotti, Vince, Langsdorf, Bossut, Morosi und Bidone haben ziemlich zu dem nämlichen Ergebnisse geführt, wenn der Querschnitt der gestoßenen Fläche mindestens 6mal so groß war, als der des Strahles, und wenn diese Fläche wenigstens zweimal so weit von der Ebene der Ausflußmündung abstand, als die Strahldicke maß. Der Apparat, welcher hierbei in Anwendung gekommen ist, bestand in einem Hebel, ähnlich wie Poletti's Rheometer, welcher auf der einen Seite den Wasserstoß aufnahm, dem durch Gewichte auf der andern Seite das Gleichgewicht gehalten wurde. Das Instrument, welches Bidone angewendet hat, ist in Fig. 629 abgebildet. BC ist die vom Strahle FA gestoßene Fläche, G die Waagschale zur Aufnahme von Gewichten, D aber die Drehungsaxe und K und L sind Gegengewichte.

Fig. 629.



Anmerkung. Die neuesten uud ausführlichsten Versuche über den Wasserstoß sind von Bidone. S. Memorie de la Reale Accademia delle Scienze di Torino. T. XL. 1838. Sie wurden bei einer Geschwindigkeit von mindestens 27 Fuß und an Messingplatten von 2 bis 9 Zoll Durchmesser angestellt. Im Allgemeinen fand Bidone den Normalstoß gegen eine ebene Fläche etwas größer als $2\,Fh\gamma$, doch ist diese Abweichung wohl einer Vergrößerung des Hebelarmes beizumessen, welche durch das zurückfallende Wasser erzeugt wurde. S. Duche-

min: Recherches expérim. sur les lois de la résistance des fluides (in's Deutsche übersetzt von Schnuse). Wenn die gestoßene Fläche der Mündung ganz nahe war, so fiel bei Bidone P nur $1{,}5\,Fhy$ aus. Wenn ferner die Fläche mit dem Strahle gleichen Querschnitt hat, in welchem Falle das Wasser nur um einen spitzen Winkel α abgelenkt wird, so ist nach Du Buat und Langsdorf $P =$ nur Fhy. Endlich hat sich auch bei Bidone und Anderen ergeben, daß der Stoß im ersten Augenblicke beinahe noch einmal so groß ist, als der permanente Stoß.

§. 425. Die mechanische Arbeit $Pv = (1 - cos.\,\alpha)\,\dfrac{(c - v)v}{g}\,Q\gamma$ des Stoßes hängt vorzüglich auch von der Geschwindigkeit v der gestoßenen Fläche ab; sie ist z. B. Null, nicht nur für $v = c$, sondern auch für $v = 0$; es muß daher auch eine Geschwindigkeit geben, bei welcher die Arbeit des Stoßes ein Maximum ist. Offenbar kommt es hierbei nur darauf an, daß $(c - v)v$ zu einem solchen wird. Sehen wir c als den halben Umfang eines Rechteckes und v als die Grundlinie desselben an, so haben wir für dessen Höhe$=c-v$ und für dessen Inhalt$=(c-v)\,v$; nun hat aber unter allen Rechtecken das Quadrat bei gegebenem Umfange $2c$ den größten Inhalt, es ist daher auch $(c - v)\,v$ ein Maximum, wenn $c - v = v$, d. i. $v = \dfrac{c}{2}$ gemacht wird, und wir erhalten so den Maximalwerth der Arbeit des Wasserstoßes, wenn die Fläche mit der halben Geschwindigkeit des Wassers ausweicht, und zwar Maximalarbeit des Stoßes.

$$Pv = (1 - cos.\alpha)\,.\,{}^1\!/_2\,.\,\frac{c^2}{2g}\,.\,Q\gamma = (1 - cos.\,\alpha)\,.\,{}^1\!/_2\,Q\,h\gamma.$$

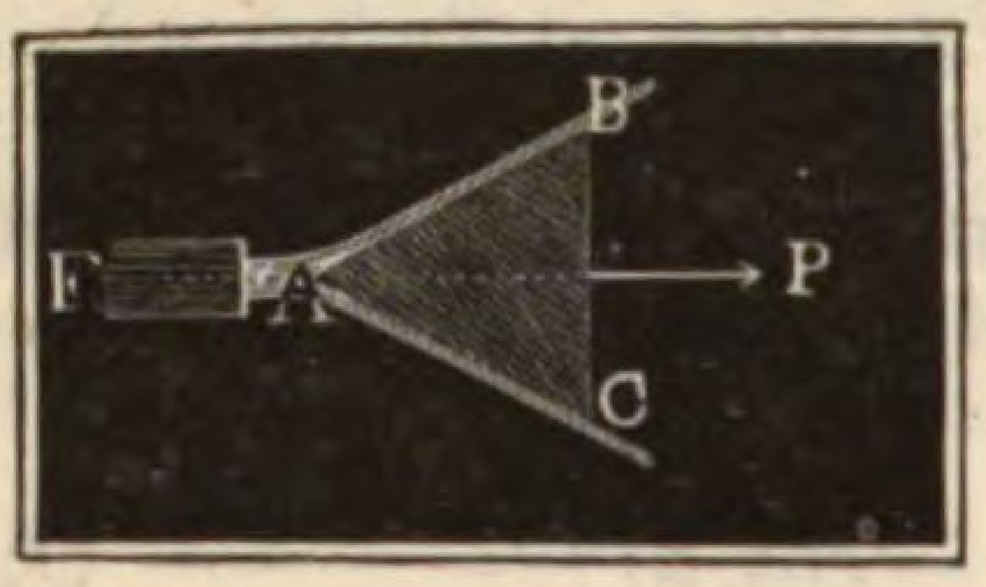
Ist nun $\alpha = 180^0$, wird also die Bewegung des Wassers durch den Anstoß die entgegengesetzte, so hat man allerdings die Arbeit$=2\,.\,{}^1\!/_2\,Qh\gamma$ $=Q\,h\gamma$; ist aber $\alpha = 90^0$, wie beim Stoße gegen eine ebene Fläche, so stellt sich diese Arbeit nur ${}^1\!/_2\,Qh\gamma$ heraus, es wird also im letzteren Falle von der ganzen disponiblen oder der lebendigen Kraft des Wassers entsprechenden Arbeit nur die Hälfte gewonnen oder auf die Fläche übergetragen.

Beispiele. 1) Wenn ein Wasserstrahl von 40 Quadratzoll Querschnitt eine Wassermenge von 5 Cubikfuß pr. Sec. liefert und gegen eine ebene Fläche normal stößt, welche mit 12 Fuß Geschwindigkeit ausweicht, so ist die Stoßkraft $P = \dfrac{(c-v)}{g}\,Q\gamma = \left(\dfrac{5\,.\,144}{40} - 12\right)\,.\,0{,}032\,.\,5\,.\,66 = 6\,.\,0{,}032\,.\,330$ $= 63{,}36$ Pfund, und die auf die Fläche übergetragene mechanische Arbeit $Pv = 63{,}36\,.\,12 = 760{,}32$ Fußpfund. Die größte Leistung ist für $v = \dfrac{c}{2} = {}^1\!/_2\,.\,\dfrac{5\,.\,144}{40} = 9$ Fuß, und zwar $L = {}^1\!/_2\,.\,\dfrac{c^2}{2g}\,.\,Q\gamma = {}^1\!/_2\,.\,18^2\,.\,0{,}016\,.\,5\,.\,66$ $= 81\,.\,0{,}16\,.\,66 = 855{,}36$ Fußpfund; der entsprechende Stoß oder hydraulische Druck aber $P = \dfrac{855{,}36}{9} = 95{,}04$ Pfund.

Maximalarbeit des Stoßes.

2) Wenn ein Strahl FA, Fig. 630, von 64 Quadratzoll Querschnitt, und 40 Fuß Geschwindigkeit gegen einen unbeweglichen Kegel mit dem Convergenzwinkel $BAC = 100^\circ$ stößt, so ist der hydraulische Druck in der Richtung des Strahles $P = (1 - cos. \alpha) \frac{c}{g} Q\gamma$

Fig. 630.



$= (1 - cos. 50^\circ) . 40 . 0{,}032 . \frac{64}{144} . 40 . 66$

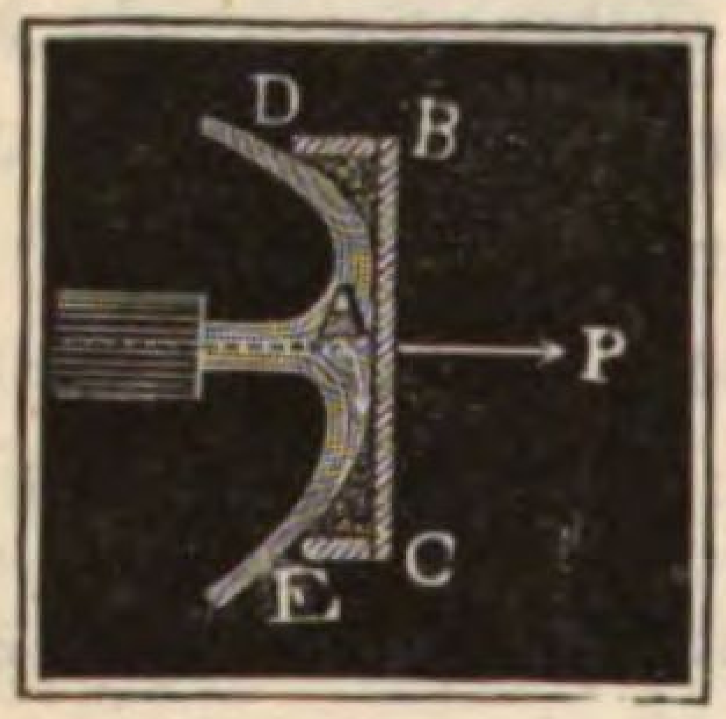
$= (1 - 0{,}64279) . 1{,}28 . \frac{3520}{3}$

$= 0{,}35721 . 1501{,}9 = 536{,}5$ Pfund.

Stoß des begrenzten Wassers.

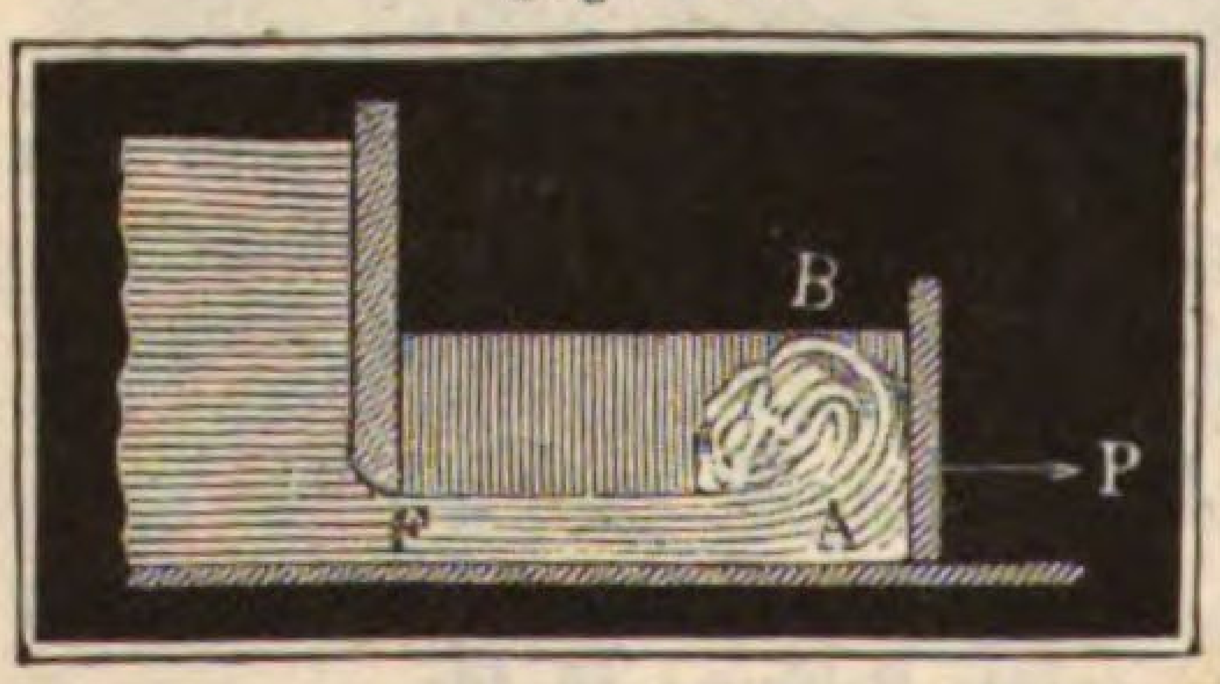
§. 426. Besetzt man den Umfang einer ebenen Fläche BE, Fig. 631, mit Leisten BD, CE (franz. rebords; engl. borders), welche über der vom Wasser getroffenen Seite hervorragen, so wird das Wasser, ähnlich wie bei concaven Flächen, um einen stumpfen Winkel von seiner anfänglichen Richtung abgelenkt, und es fällt daher der Stoß größer aus, als bei der einfachen ebenen Fläche. Die Wirkung dieses Stoßes hängt vorzüglich von der Höhe der Einfassung und von dem Querschnittsverhältnisse zwischen dem Strahle und dem eingefaßten Theile ab. Bei einem Versuche, wo der Strahl 1 Zoll Dicke, die cylindrische Einfassung aber 3 Zoll Weite und $3\frac{1}{2}$ Linien Höhe hatte, floß das Wasser beinahe in umgekehrter Richtung und es betrug der Stoß $3{,}93 \frac{c^2}{2g} F\gamma$; in jedem anderen Falle war diese Kraft eine kleinere. Wegen der Reibung des Wassers an der Fläche und Einfassung ist der theoretische Maximalwerth $4 \frac{c^2}{2g} F\gamma$ nie zu erreichen.

Fig. 631.



Auch bei dem Stoße des begrenzten Wassers FAB, Fig. 632, findet eine Einfassung statt, es nimmt aber diese Einfassung nur einen Theil des Umfanges ein, und erstreckt sich dagegen auf die gestoßene Fläche und den Wasserstrahl zugleich. Das stoßende Wasser nimmt die Richtung nach dem uneingefaßten Theil des Umfanges ein, wird also auch hier um den Rechtwinkel abgelenkt, weshalb hier auch die oben gefundene Formel für den isolirten Strahl $P = \frac{(c-v)}{g} Q\gamma$ ihre Giltigkeit hat; doch läßt sich dieselbe auch auf folgendem Wege herleiten. Nimmt man an, daß das ankom=

Fig. 632.



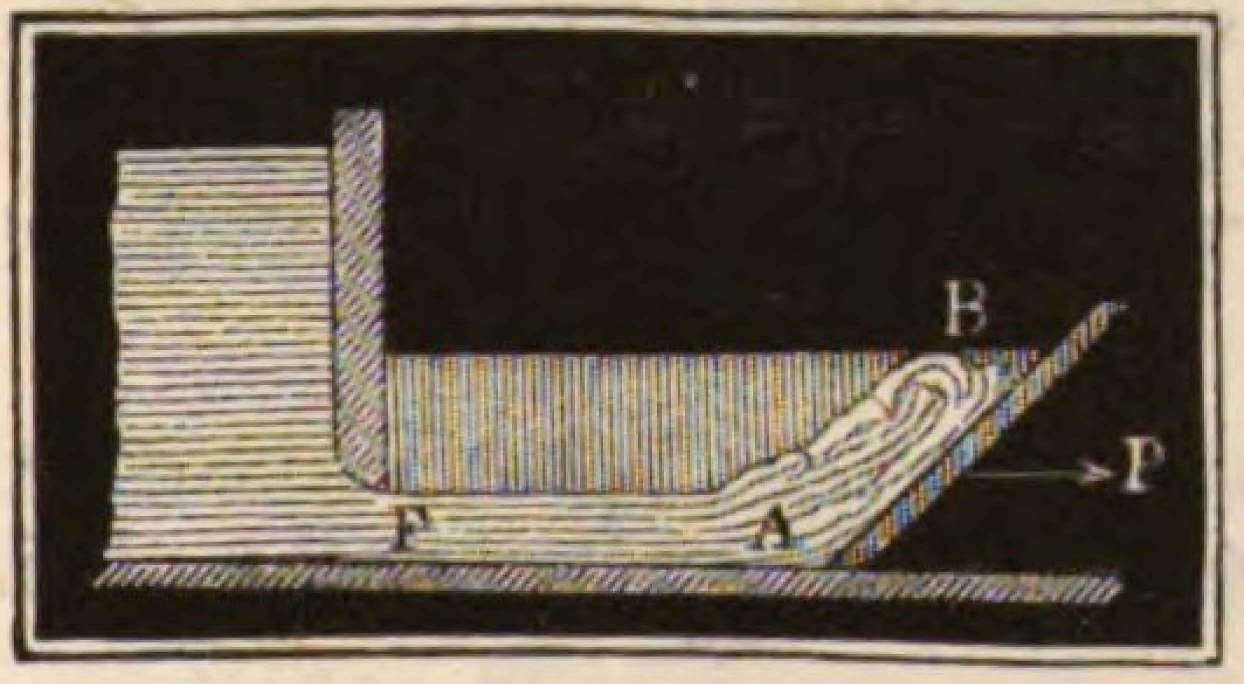
mende Wasser durch den Anstoß an die Fläche seine Geschwindigkeit c plötzlich in die Geschwindigkeit v der Fläche umändere, so läßt sich auch annehmen, daß damit ein auf die Zertheilung des Wassers verwendeter Arbeitsverlust $\frac{(c-v)^2}{2g} Q\gamma$ (ähnlich wie im §. 372) verbunden sei. Nun ist aber die der lebendigen Kraft des ankommenden Wassers entsprechende Arbeit $= \frac{c^2}{2g} Q\gamma$ und die des fortgehenden Wassers $= \frac{v^2}{2g} Q\gamma$, daher folgt die auf die Fläche übergetragene Arbeit: Stoß des begrenzten Wassers.

$$Pv = [c^2 - (c-v)^2 - v^2] \frac{1}{2g} Q\gamma = \frac{(c-v)v}{g} Q\gamma.$$

Anmerkung. Diese Formel findet in der Folge bei der Theorie der Wasserräder ihre Anwendung.

§. 427. Bei dem schiefen Stoße gegen ebene Flächen müssen wir unterscheiden, ob das Wasser nur nach einer oder nach zwei oder nach allen Richtungen in der Ebene abfließt. Ist wie beim Stoße des begrenzten Wassers die Fläche AB, Fig. 633, von drei Seiten eingefaßt, so daß es nur nach einer Richtung abströmen kann, so hat man den hydraulischen Druck des Wassers gegen die Fläche in der Richtung des Strahles: Schiefer Stoß.

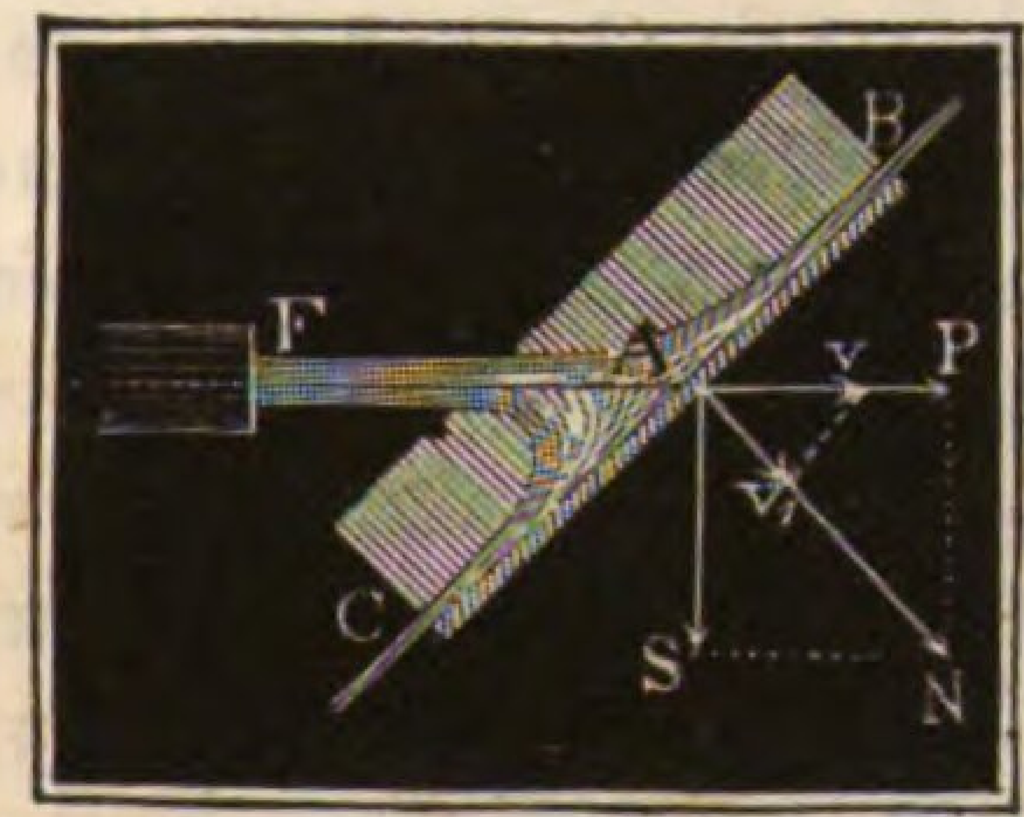
Fig. 633.



$$P = (1 - cos.\ \alpha) \frac{(c-v)}{g} Q\gamma.$$

Ist aber die gestoßene Ebene BC, Fig. 634, nur auf zwei gegenüberliegenden Seiten eingefaßt, so theilt sich der Strahl in zwei ungleiche Theile, der größere Theil Q_1 nimmt die kleinere Ablenkung α und der kleinere Theil Q_2, die größere Ablenkung $180 - \alpha$ an, es ist daher Gesammtstoß in der Richtung des Strahles:

Fig. 634.



$$P = (1 - cos.\ \alpha) \cdot \frac{c-v}{g} Q_1\gamma + (1 + cos.\ \alpha) \cdot \frac{c-v}{g} Q_2\gamma$$

$$= \left(\frac{c-v}{g}\right) \gamma\ [(1 - cos.\ \alpha)\ Q_1 + (1 + cos.\ \alpha)\ Q_2].$$

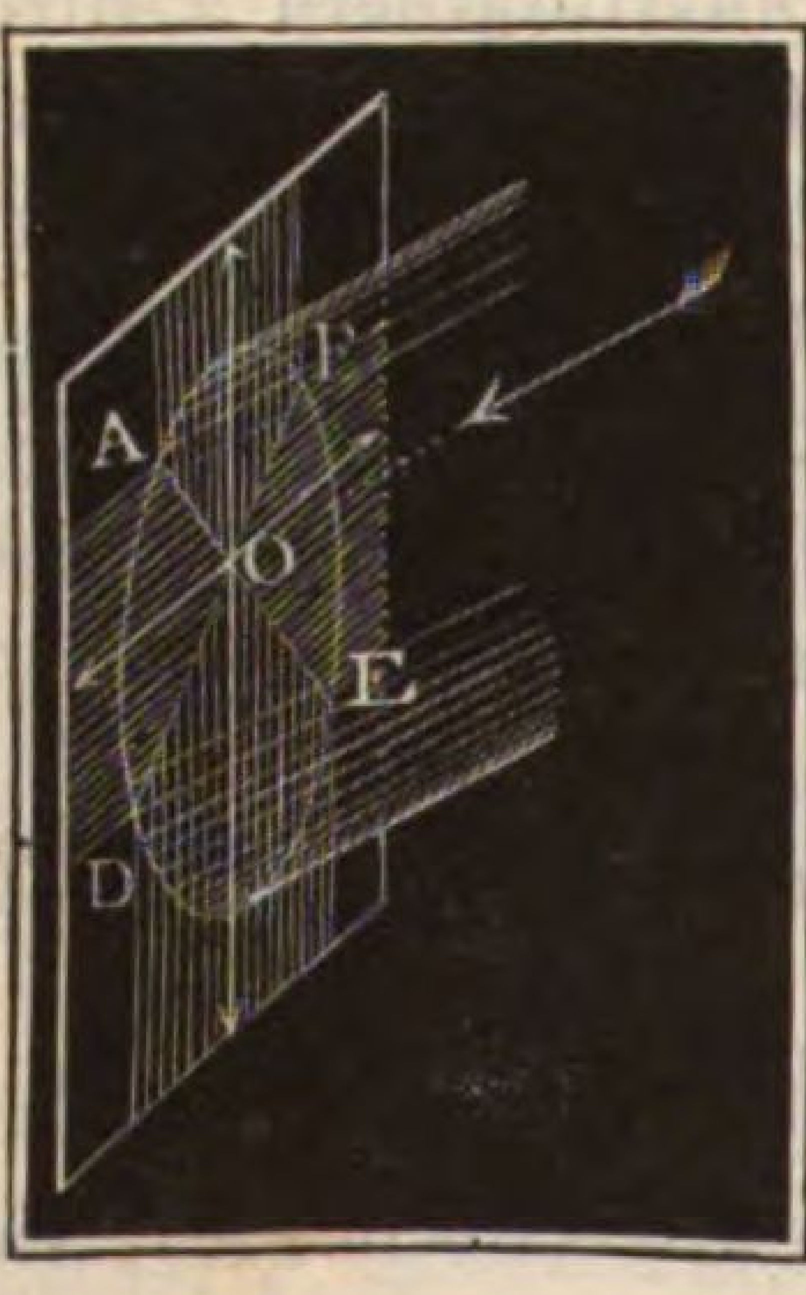
Nun fordert aber das Gleichgewicht der beiden Strahltheile, daß die Drücke $\frac{(c-v)}{g} \gamma\ (1 - cos.\ \alpha)\ Q_1$ und $\frac{(c-v)}{g} \gamma\ (1 + cos.\ \alpha)\ Q_2$

Schiefer Stoß. zwischen denselben einander gleich seien, es ist daher auch
$(1 - cos.\ \alpha)\ Q_1 = (1 + cos.\ \alpha)\ Q_2$, oder da $Q_1 + Q_2 = Q$,
$$(1 - cos.\ \alpha)\ Q_1 = (1 + cos.\ \alpha)\ (Q - Q_1) \text{ d. i.}$$
$Q_1 = \left(\frac{1 + cos.\ \alpha}{2}\right) Q$ und $Q_2 = \left(\frac{1 - cos.\ \alpha}{2}\right) Q$ zu setzen, so daß endlich der gesammte Stoß in der Richtung des Strahles:
$$P = \frac{(c-v)}{g}\gamma . 2\,(1 - cos.\ \alpha)\,\frac{(1 + cos.\ \alpha)\,Q}{2} = \frac{(c-v)\gamma}{g}(1 - cos.\ \alpha^2)\,Q,$$
d. i. $P = \frac{c-v}{g}\ sin.\ \alpha^2 .\ Q\gamma$ ausfällt.

Dividirt man die Stoßleistung $L = Pv = \frac{(c-v)}{g}\ v\ sin.\ \alpha^2\ .\ Q\gamma$ durch die Geschwindigkeit $Av_1 = v_1 = v\ sin.\alpha$, mit welcher die Fläche in normaler Richtung ausweicht, so erhält man den **Normalstoß**
$$N = \frac{(c-v)\ v\ sin.\ \alpha^2}{gv\ sin.\alpha}\ .\ Q\gamma = \frac{(c-v)}{g}\ sin.\ \alpha\ .\ Q\gamma,$$
und dieser besteht außer dem bekannten **Parallelstoße**
$$P = N\ sin.\alpha = \frac{(c-v)}{g}\ sin.\alpha^2\ .\ Q\gamma,$$
noch aus einem **Seitenstoße**
$$S = N\ cos.\alpha = \frac{(c-v)}{g}\ sin.\alpha\ cos.\alpha\ .\ Q\gamma = \frac{(c-v)}{2g}\ .\ sin.\ 2\,\alpha\ .\ Q\gamma.$$

Es wächst also der **Normalstoß wie der Sinus, der Parallelstoß wie das Quadrat des Sinus des Einfallwinkels und der Seitenstoß wie der Sinus vom Doppelten dieses Winkels.**

Fig. 635.



Hat endlich die schiefgestoßene Fläche gar keine Einfassung, so daß sich das Wasser nach allen Richtungen auf ihr ausbreiten kann, so fällt der Stoß noch größer aus, weil unter allen Winkeln, um welche die Wasserfäden abgelenkt werden, gerade α der kleinste ist, und daher jeder Faden, welcher sich nicht in der Normalebene bewegt, einen größeren Druck ausübt, als der Faden in der Normalebene. Nehmen wir an, daß ein den Sectoren *AOB* und *DOE*, Fig. 635, entsprechender Theil Q_1 um die Winkel α und $180 - \alpha$, und ein anderer, den Sectoren *AOD* und *BOE* entsprechender Theil Q_2 um 90^0 abgelenkt werde, und daß beide Theile einen gleichen Parallelstoß ausüben, so können wir setzen:

$P = \frac{c-v}{g} Q_1 \gamma \; sin. \; \alpha^2 + \frac{c-v}{g} Q_2 \gamma$, $Q_1 \; sin. \; \alpha^2 = Q_2$ und $Q_1 + Q_2 = Q$; es folgt daher $Q_1 \; (1 + sin. \alpha^2) = Q$, und der gesammte Parallelstoß $P = \left(\frac{c-v}{g}\right) \frac{2 \, Q \gamma \, sin. \alpha^2}{1 + sin. \alpha^2} = \frac{2 \, sin. \alpha^2}{1 + sin. \alpha^2} \cdot \frac{c-v}{g} \cdot Q \gamma$.

Wiewohl diese Voraussetzung nur eine annähernd richtige ist, so stimmt diese Formel doch ziemlich mit den neuesten Versuchen von Bidone überein.

Wirkungen unbegrenzter Flüssigkeiten.

§. 428. Wenn sich ein Körper in einer unbegrenzten Flüssigkeit progressiv fortbewegt, oder wenn ein Körper in eine bewegte Flüssigkeit gebracht wird, so erleidet derselbe einen Druck, der von der Form und Größe dieses Körpers sowie von der Dichtigkeit der Flüssigkeit und von der Geschwindigkeit der einen oder der anderen Masse abhängt, und in einem Falle Widerstand, im anderen aber Stoß der Flüssigkeit genannt wird. Dieser hydraulische Druck entspringt aber vorzüglich aus der Trägheit des Wassers, dessen Bewegungszustand durch das Zusammentreffen mit dem festen Körper verändert wird, dann aber auch noch aus der Kraft des Zusammenhängens der Wassertheilchen, die hierbei theilweise von einander getrennt oder an einander verschoben werden. Bewegt sich ein Körper *AC*, Fig. 636, dem stillstehenden Wasser entgegen, so schiebt er eine gewisse Wassermasse mit erhöhtem Drucke vor sich her. Während diese Wassermasse beim weiteren Fortrücken des Körpers auf der einen Seite immer mehr Zuwachs erhält, findet auf einer anderen Seite, nahe am Körper ein steter Abfluß statt, indem die der Vorderfläche *AB* zunächst liegenden Theilchen eine Bewegung in der Richtung dieser Fläche annehmen. Trifft das bewegte Wasser einen in Ruhe befindlichen Körper *AC*, Fig. 637, so erzeugt sich vor demselben ebenfalls ein erhöhter Wasserdruck und macht, daß die Wassertheilchen vor dem Körper von ihrer ursprünglichen Richtung abgelenkt werden und sich an der Vorderfläche *AB* hinbewegen. Haben diese Wassertheilchen die Grenzen der Vorderfläche erreicht, so machen dieselben eine Wendung, und laufen nachher an den Seitenflächen des Körpers hin, bis sie an die Hinterfläche kommen, wo sie sich nicht sogleich wieder vereinigen, sondern zunächst wirbelnde Bewegungen annehmen. Man sieht, daß die allgemeinen Bewegungsverhält=

Fig. 636.

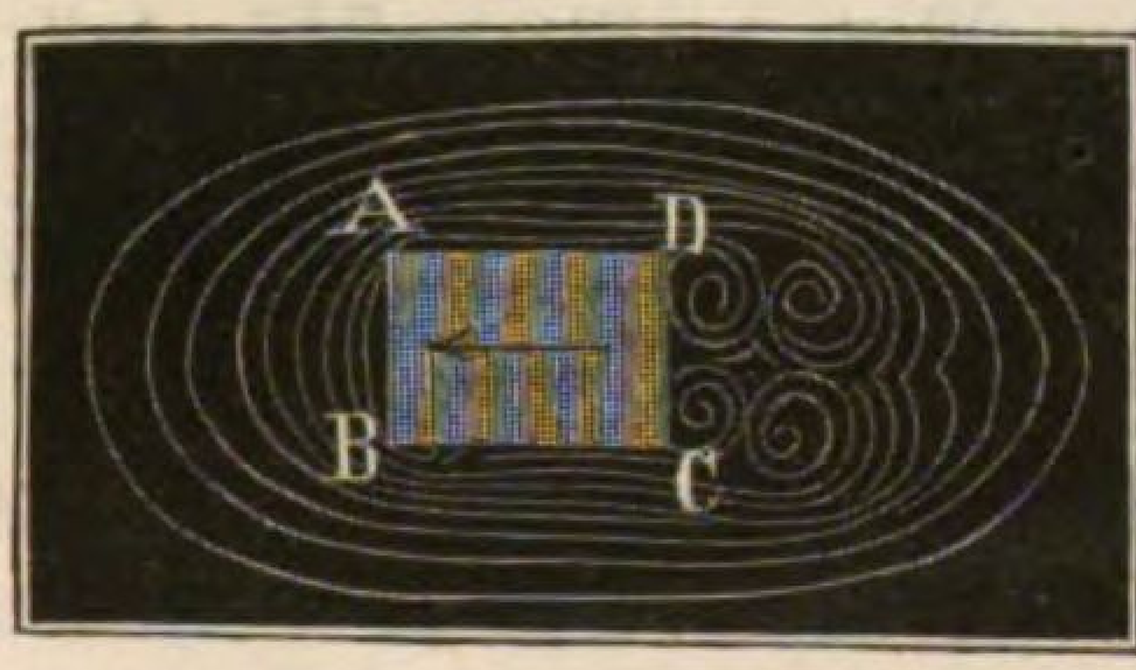
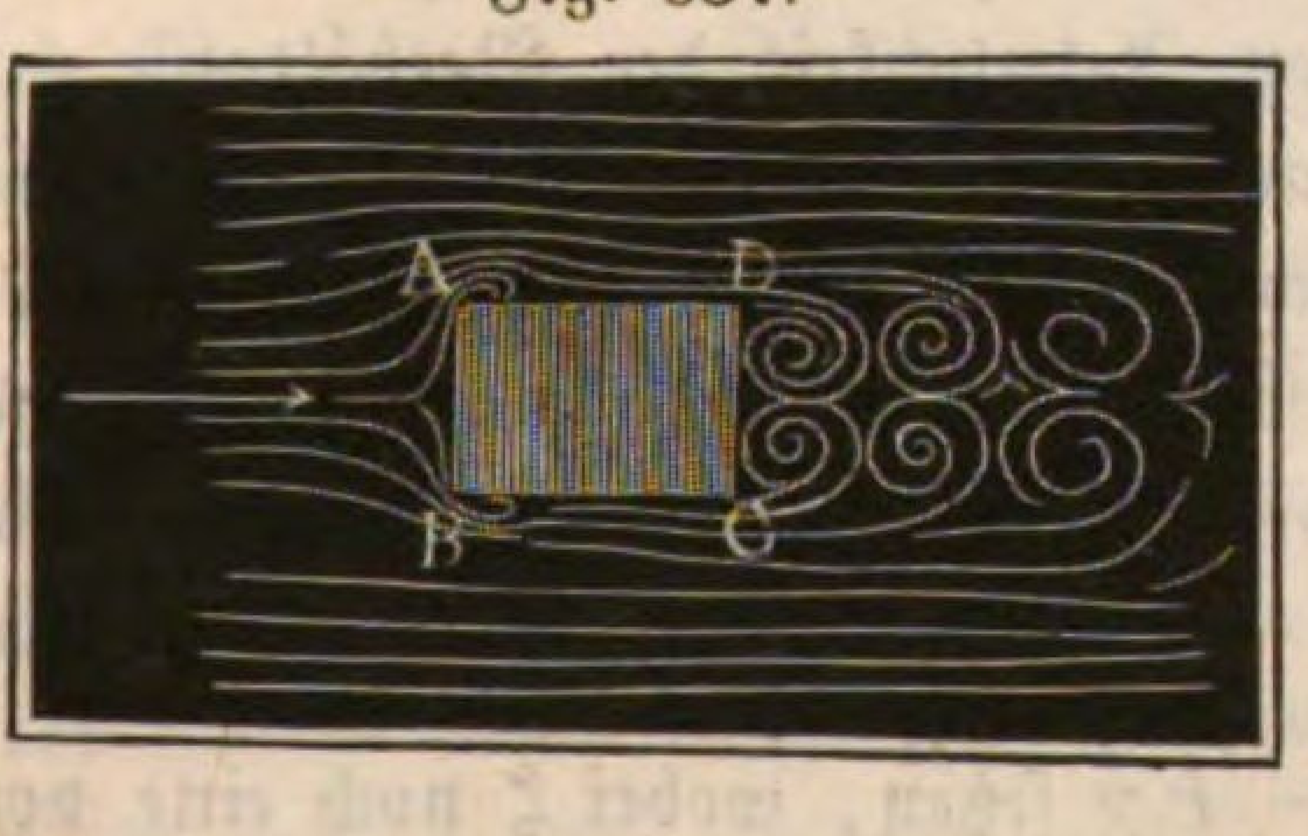


Fig. 637.



nisse der den Körper umgebenden Wasserelemente beim Stoße des bewegten Wassers dieselben sind, wie beim Widerstande eines im Wasser bewegten Körpers; nur findet bei den Wirbeln eine Verschiedenheit insofern statt, als bei kurzen Körpern die Wirbel im letzteren Falle einen kleineren Raum einnehmen, als im ersteren. Die Geschwindigkeit der Wasserelemente nimmt in beiden Fällen von der Mitte der Vorderfläche an nach den Grenzen derselben immer mehr und mehr zu, erreicht am Anfange der Seitenflächen, wo in der Regel noch eine Contraction eintritt, ihr Maximum, nimmt nun bei dem an den Seitenflächen hingehenden Wasser allmälig ab, und erreicht endlich ihr Minimum bei dem Wasser, welches die Hinterfläche erlangt und in wirbelnde Bewegung übergeht.

Theorie des Stoßes und Widerstandes. §. 429. Der Normaldruck des Wassers ist an verschiedenen Punkten des Körpers sehr verschieden. Er ist in der Mitte der Vorderfläche desselben am größten, und in der Mitte der Hinterfläche und nächstdem am Anfange der Seitenflächen am kleinsten, weil dort mehr ein Zu-, hier aber mehr ein Entströmen des Wassers in Hinsicht auf den Körper statt hat. Ist der Körper, wie wir in der Folge voraussetzen wollen, in Hinsicht auf die Bewegungsrichtung symmetrisch, so heben sich die sämmtlichen Pressungen rechtwinkelig gegen diese Richtung auf, und es kommen daher nur die Pressungen in der Bewegungsrichtung in Betracht. Nun sind aber die Pressungen auf der Hinterfläche des Körpers den Pressungen auf der Vorderfläche entgegengesetzt, es läßt sich daher der resultirende Stoß oder Widerstand des Wassers gleichsetzen der Differenz zwischen dem Drucke gegen die Vorder- und dem gegen die Hinterfläche.

Wenn wir auch die Größe dieser Drücke a priori nicht angeben können, so können wir doch wegen der großen Aehnlichkeit der Verhältnisse mit dem Stoße isolirter Strahlen annehmen, daß wenigstens das allgemeine Gesetz für den Stoß des unbegrenzten Wassers von dem für den Stoß isolirter Strahlen nicht abweiche. Ist also F der Inhalt einer Fläche, welche von einem unbegrenzten Strome, dessen Dichtigkeit γ sein möge, mit der Geschwindigkeit v getroffen wird, so läßt sich der entsprechende Stoß oder hydraulische Druck $P = \zeta \frac{v^2}{2g} F\gamma$ setzen, wobei ζ noch eine von der Form der Fläche abhängige Erfahrungszahl bezeichnet. Dieser Ausdruck läßt sich aber nicht nur auf die Wirkung gegen die Vorderfläche, sondern auf die gegen die Hinterfläche anwenden, nur besteht sie hier, wo das Wasser ein Bestreben hat sich zu entfernen, in einem Zuge oder einem Negativdrucke. Ist nun $Fh\gamma$ der hydrostatische Druck (§. 299) gegen die Vorder- und gegen die Hinterfläche eines Körpers, so folgt der Gesammt-

druck gegen die Vorderfläche: $P_1 = Fh\gamma + \zeta_1 \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma$ und der gegen die Hinterfläche: $P_2 = Fh\gamma - \zeta_2 \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma$, und es ergiebt sich so der resultirende Stoß oder Widerstand des Wassers: Theorie des Stoßes und Widerstandes.

$$P = P_1 - P_2 = (\zeta_1 + \zeta_2) \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma = \zeta \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma, \text{ wenn } \zeta_1 + \zeta_2 = \zeta$$

gesetzt wird. Diese allgemeine Formel für den Stoß des unbegrenzten Wassers findet auch ihre Anwendung auf den Stoß des Windes und auf den Widerstand der Luft. Allerdings findet hier außer der Verschiedenheit des aërodynamischen Druckes an der Vorder- und Hinterfläche auch noch eine Verschiedenheit des aërostatischen Druckes statt, indem die Luft vor der Vorderfläche bei ihrer größeren Spannung auch eine größere Dichtigkeit (γ) hat, als an der Hinterfläche. Deshalb fallen wenigstens bei großen Geschwindigkeiten, wie sie z. B bei Geschützkugeln vorkommen, die Widerstandscoefficienten der Luft größer aus, als die des Wassers.

Anmerkung. Eine eigenthümliche Erscheinung beim Stoße und Widerstande unbegrenzter Mittel (Wasser oder Luft) ist das Anhängen einer gewissen Wasser- oder Luftmasse an den Körper, dessen Einfluß sich bei der ungleichförmigen Bewegung der Körper, wie z. B. bei Pendelschwingungen, besonders bemerkbar macht. Bei einer Kugel hat die dem bewegten Körper anhängende Luft- oder Wassermasse ein Volumen von 0,6 des Volumens der Kugel. Bei einem in der Axenrichtung bewegten prismatischen Körper ist das Verhältniß dieser Volumina $= 0{,}13 + 0{,}705 \frac{\sqrt{F}}{l}$, wo l die Länge und F den Querschnitt des Körpers bezeichnet. Diese schon von Du Buat aufgefundenen Verhältnisse haben durch die neueren Beobachtungen von Bessel, Sabine und Baily vollkommene Bestätigung gefunden.

§. 430. Der Widerstandscoefficient ζ oder die Zahl, womit die Geschwindigkeitshöhe $\frac{v^2}{2g}$ zu multipliciren ist, um die Höhe einer den hydraulischen Druck messenden Wassersäule zu erhalten, ist bei Körpern von verschiedenen Formen sehr verschieden, und nur bei Platten, welche rechtwinkelig gegen die Bewegungsrichtung stehen, von beinahe bestimmter Größe. Nach den Versuchen von Du Buat, und nach denen von Thibault läßt sich für den Luft- und Wasserstoß gegen eine ruhende ebene Fläche $\zeta = 1{,}86$ setzen, wogegen, jedoch mit weniger Sicherheit, für den Widerstand der Luft und des Wassers gegen eine bewegte ebene Fläche $\zeta = 1{,}25$ anzunehmen sein möchte. In beiden Fällen kommen auf die Vorderfläche ohngefähr zwei und auf die Hinterfläche ein Drittel der ganzen Wirkung. Der Widerstand, welchen die Luft einer im Kreise umlaufenden Fläche entgegensetzt, ist von Borda, Hutton und Thibault sehr verschieden gefunden worden, möchte jedoch im Mittel durch den Coefficienten $\zeta =$ Stoß und Widerstand gegen Flächen

Stoß und Widerstand gegen Flächen. 1,5 auszudrücken sein. Steht die Fläche nicht rechtwinkelig gegen die Bewegungsrichtung, sondern bildet sie mit ihr einen spitzen Winkel α, so läßt sich mit ziemlicher Genauigkeit nach Duchemin statt ζ. $\frac{2\zeta \sin \alpha^2}{1+\sin.\alpha^2}$ setzen.

Stoß und Widerstand unbegrenzter Mittel werden auch erhöht, wenn man die Flächen aushöhlt oder am Umfange mit vorstehenden Rändern versieht, doch ist man hierüber zu allgemeinen Ergebnissen noch nicht gelangt.

Beispiel. Wenn der Wind mit 20 Fuß Geschwindigkeit gegen ein festgebremstes Windrad stößt, das aus 4 Flügeln besteht, wovon jeder 200 Quadratfuß Inhalt hat und 75° gegen die Windrichtung steht, so ist die Kraft des Windstoßes in der Richtung der Windbewegung oder der Radaxe:

$$P = 1{,}85 \;.\; \frac{2\,(\sin.\,75)^2}{1+(\sin.75)^2} \;.\; \frac{20^2}{2g} \;.\; 4 \;.\; 200 \;.\; 0{,}086$$

$= 1{,}85 \,.\, 0{,}965 \,.\, 6{,}4 \,.\, 800 \,.\, 0{,}086 = 786$ Pfd., wobei die Dichtigkeit des Windes (nach §. 333) $= 0{,}086$ Pfd. angenommen worden ist.

Anmerkung. Ganz abweichende Ansichten in Hinsicht des Stoßes und Widerstandes unbegrenzter Flüssigkeiten werden in dem oben citirten Werke von Duchemin ausgesprochen. So wird z. B. dort behauptet, daß der Stoß und Widerstand gegen die Vorderfläche einer dünnen Platte $2 \,.\, \frac{v^2}{2g} F\gamma$ betrage und an der Hinterfläche nicht negativ, sondern beim Stoße $= 0{,}136 \frac{v^2}{2g} F\gamma$ und beim Widerstande $= 0{,}746 \frac{v^2}{2g} F\gamma$ sei. Es würde zu umständlich sein, hier die Gründe auseinanderzusetzen, weswegen der Verfasser den Ansichten Duchemin's nicht allenthalben folgen kann, doch wird man Mehreres in dieser Beziehung ausgesprochen finden in Poncelet's Introduction à la mécanique industrielle. Deux. édit. 1841.

Stoß und Widerstand gegen Körper. §. 431. Der Stoß und Widerstand des Wassers gegen prismatische Körper, deren Axe mit der Bewegungsrichtung zusammenfällt, nimmt ab, wenn die Länge der Körper eine größere wird. Nach den Versuchen von Du Buat und Duchemin ist der Stoß von der Vorderfläche unveränderlich, und nur die Wirkung gegen die Hinterfläche veränderlich. Jenem entspricht der Coefficient $\zeta_1 = 1{,}186$, für die Gesammtwirkung aber ist bei den relativen Längen $\frac{l}{\sqrt{F}} = 0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,$

$$\zeta = 1{,}86;\; 1{,}47;\; 1{,}35;\; 1{,}33.$$

Bei noch größerem Verhältnisse zwischen der Länge l und der mittleren Breite $\sqrt{F}$ des Körpers nimmt ζ in Folge der Reibung des Wassers an den Seitenflächen des Körpers wieder zu. Bei dem Widerstande des Wassers treten umgekehrte Verhältnisse ein. Hier ist nach Du Buat für

die Wirkung gegen die Vorderfläche unveränderlich $\zeta_1 = 1$, für die Gesammtwirkung aber Stoß und Widerstand gegen Körper.

bei $\frac{l}{\sqrt{F}} = 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3,$

$\zeta = 1{,}25;\ 1{,}28;\ 1{,}31;\ 1{,}33$, so daß also bei einem Prisma, welches 3mal so lang als dick ist, der Stoß mit dem Widerstand des Wassers gleich groß ausfällt.

Die von Borda, Hutton, Vince, Désaguilliers, Newton u. A. angestellten Versuche über den Widerstand von eckigen und runden Körpern lassen noch viel Unsicherheit zurück. Was die Kugeln betrifft, so scheint bei mäßigen Geschwindigkeiten der Widerstandscoefficient für die Bewegung in Luft oder Wasser im Mittel = 0,6 gesetzt werden zu können. Bei großer Geschwindigkeit und für die Bewegung in der Luft ist aber nach Robins und Hutton zu setzen für die Geschwindigkeiten

$v = 1, \quad 5, \quad 25, \quad 100, \quad 200, \quad 300, \quad 400, \quad 500, \quad 600,$ Meter,

$\zeta = 0{,}59;\ 0{,}63;\ 0{,}67;\ 0{,}71;\ 0{,}77;\ 0{,}88;\ 0{,}99;\ 1{,}04;\ 1{,}01.$

Duchemin und Piobert haben besondere Formeln für das Wachsen dieser Widerstandscoefficienten angegeben.

Für den Stoß des Wassers gegen eine Kugel findet Eytelwein $\zeta = 0{,}7886$.

Anmerkung. Sehr ausführlich über diese Verhältnisse handeln Poncelet in seiner oben citirten Introduction, und Duchemin sowie Thibault in ihren Récherches expérimentales etc. Ueber den Widerstand gegen schwimmende Körper, namentlich gegen Schiffe, sowie auch vom Stoße des Windes gegen Räder, wird im zweiten Theile gehandelt.

Beispiel. Wenn man nach Borda den Widerstand und Stoß rechtwinkelig gegen die Axe eines Cylinders $^1/_2$mal so groß setzt, als den gegen ein Parallelepiped, welches mit ihm gleiche Dimensionen hat, so erhält man für den Widerstand $\zeta = {}^1/_2 \,.\, 1{,}28 = 0{,}64$ und den Stoß $= {}^1/_2 \,.\, 1{,}47 = 0{,}735$. Wendet man nun diese Werthe auf den menschlichen Körper an, dessen Querschnitt etwa 7 Quadratfuß Inhalt hat, so findet man für den Widerstand und Stoß der Luft gegen denselben die Werthe

$P = 0{,}64 \,.\, 0{,}016 \,.\, 7 \,.\, 0{,}086\, v^2 = 0{,}00616\, v^2$, und

$P = 0{,}735 \,.\, 0{,}016 \,.\, 7 \,.\, 0{,}086\, v^2 = 0{,}00708\, v^2$. Bei einer Geschwindigkeit von 5 Fuß ist daher der Widerstand der Luft nur $0{,}00616 \,.\, 25 = 0{,}154$ Pfd.: und die entsprechende Leistung pr. Sec. $= 5 \,.\, 0{,}154 = 0{,}77$ Fußpfund; bei einer Geschwindigkeit von 10 Fuß ist dieser Widerstand schon 4mal und der Arbeitsaufwand 8mal so groß, und bei einer Geschwindigkeit von 15 Fuß ist der Widerstand das 9- und die Arbeit sogar das 27fache. Bewegt sich ein Mensch mit 5 Fuß Geschwindigkeit dem Winde von 50 Fuß Geschwindigkeit entgegen, so hat er einen der relativen Geschwindigkeit $50 + 5 = 55$ Fuß entsprechenden Widerstand $0{,}00708 \,.\, 55^2 = 21{,}42$ Pfd zu überwinden, und dabei die übermäßige Arbeit von $21{,}42 \,.\, 5 = 107{,}1$ Fußpfund zu verrichten.

§. 432. Die Gesetze der Bewegung eines Körpers in widerstehenden Mitteln sind nicht sehr einfach, weil man es hier mit einer veränderlichen, Bewegung in widerstehenden Mitteln.

Bewegung in widerstehenden Mitteln.

d. i. mit dem Quadrate der Geschwindigkeit wachsenden Kraft zu thun hat. Aus der Kraft P_1, die einen Körper forttreibt, und aus dem Widerstande $P_2 = \zeta \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma$, welchen das Mittel der Bewegung entgegensetzt, folgt die bewegende Kraft

$P = P_1 - P_2 = P_1 - \zeta \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma$, da aber die Masse des Körpers $= M = \frac{G}{g}$ ist, so ergiebt sich die Beschleunigung des Körpers:

$$p = \frac{P}{M} = \left(P_1 - \zeta \frac{v^2}{2g} F\gamma\right) : M = \left(\frac{P_1 - \zeta \frac{v^2}{2g} F\gamma}{G}\right) \cdot g,$$

oder, wenn wir $\frac{F\gamma}{2gP_1}$ durch $\frac{1}{w^2}$ bezeichnen, also $\sqrt{\frac{2gP_1}{F\gamma}} = w$ setzen,

$p = \left[1 - \zeta \left(\frac{v}{w}\right)^2\right] \frac{P_1}{G} g$. Nun nimmt aber bei der Acceleration p die Geschwindigkeit v in dem kleinen Zeittheilchen τ um $\varkappa = p\tau$ zu, daher läßt sich setzen:

$\varkappa = \left[1 - \zeta \left(\frac{v}{w}\right)^2\right] \frac{P_1}{G} g\tau$, und umgekehrt

$$\tau = \frac{G}{P_1} \cdot \frac{\varkappa}{g\left[1 - \zeta \left(\frac{v}{w}\right)^2\right]}.$$

Um nun die einer gegebenen Geschwindigkeitsveränderung entsprechende Zeit zu finden, theilen wir die Differenz $v_n - v_0$ zwischen der End- und Anfangsgeschwindigkeit in n Theile, setzen einen solchen Theil $\frac{v_n - v_0}{n} = \varkappa$, berechnen hiernach die Geschwindigkeiten $v_1 = v_0 + \varkappa$, $v_2 = v_0 + 2\varkappa$, $v_3 = v_0 + 3\varkappa$ u. s. w., und führen diese Werthe in die Simpson'sche Formel ein. Auf diese Weise erhalten wir die gesuchte Zeit bei Annahme von 4 Theilen.

$$1)\ t = \frac{G}{P_1} \cdot \frac{v_n - v_0}{12g} \left(\frac{1}{1 - \zeta \left(\frac{v_0}{w}\right)^2} + \frac{4}{1 - \zeta \left(\frac{v_1}{w}\right)^2} + \frac{2}{1 - \zeta \left(\frac{v_2}{w}\right)^2} + \frac{4}{1 - \zeta \left(\frac{v_3}{w}\right)^2} + \frac{1}{1 - \zeta \left(\frac{v_4}{w}\right)^2} \right).$$

Es ist ferner der in einem Zeittheilchen τ zurückgelegte Raumtheil (§. 19):

$\sigma = v\tau$, oder da $\tau = \frac{\varkappa}{p}$ ist, $\sigma = \frac{v\varkappa}{p}$, also hier

Bewegung in widerstehenden Mitteln.

$\sigma = \frac{v\varkappa}{1 - \zeta\left(\frac{v}{w}\right)^2} \cdot \frac{G}{P_1 g}$. Durch Anwendung der Simpson'schen Regel findet man nun den Raum, welcher zurückgelegt wird, während die Geschwindigkeit v_0 in v_n übergeht.

$$2)\ s = \frac{G}{P_1} \cdot \frac{v_n - v_0}{12g} \left(\frac{v_0}{1 - \zeta\left(\frac{v_0}{w}\right)^2} + \frac{4v_1}{1 - \zeta\left(\frac{v_1}{w}\right)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2v_2}{1 - \zeta\left(\frac{v_2}{w}\right)^2} + \frac{4v_3}{1 - \zeta\left(\frac{v_3}{w}\right)^2} + \frac{v_4}{1 - \zeta\left(\frac{v_4}{w}\right)^2} \right).$$

Natürlich wird die Genauigkeit größer, wenn man 6, 8 oder noch mehr Theile annimmt. Uebrigens gestattet diese Formel auch eine Berücksichtigung der Veränderlichkeit des Widerstandscoefficienten, was bei bedeutenden Geschwindigkeiten nothwendig ist. Beim freien Fall der Körper in der Luft oder im Wasser ist $P_1 = G$, und bei der Bewegung auf der Horizontalebene $P_1 = 0$, oder richtiger, gleich der Reibung fG. Da diese ein Widerstand ist, so hat man sie negativ in Rechnung zu bringen, weshalb hier $P = -(P_1 + P_2)$ und $p = -\left[1 + \zeta\left(\frac{v}{w}\right)^2\right]\frac{P_1}{G}\, g$ zu setzen ist. Da ferner hier nicht von einer Zu-, sondern nur von einer Abnahme der Geschwindigkeit die Rede sein kann, so haben wir hier statt $v_n - v_0$, $v_0 - v_n$ in den obigen Formeln zu setzen.

In dem Falle, wenn der Körper durch eine Kraft, z. B. durch sein Gewicht getrieben wird, nähert sich die Bewegung immer mehr und mehr einer gleichförmigen, so daß sie schon nach einer gewissen Zeit als eine solche angesehen werden kann, wiewohl sie es in Wahrheit nie wird. Es fällt die Acceleration $p =$ Null aus, wenn $\zeta . \frac{v^2}{2g} F\gamma = P_1$, wenn also $v = \sqrt{\frac{2\,g\,P_1}{\zeta F\gamma}} = \frac{w}{\sqrt{\zeta}}$ ist. Diesem Ziele nähert sich also die Geschwindigkeit eines fallenden Körpers immer mehr und mehr, ohne es je vollkommen zu erreichen.

Beispiel. Piobert, Morin und Didion fanden für einen Fallschirm, dessen Tiefe 0,31 des Oeffnungsdurchmessers betrug, den Widerstandscoefficienten $\zeta = 1{,}94 \,.\, 1{,}37 = 2{,}66$. Von welcher Höhe wird sich hiernach ein 150 Pfd. schwerer Mensch mit einem ähnlichen Fallschirme von 10 Pf. Gewicht und 60 Quadratfuß Querschnitt herablassen können, ohne eine größere Geschwindigkeit anzunehmen, als diejenige, welche er erlangt, wenn er ohne Fallschirm 10 Fuß

Bewegung in widerstehenden Mitteln. hoch herabspringt? Die letzte Geschwindigkeit ist $v = 7,906\sqrt{10} = 25$ Fuß, die Kraft ist $P_1 = G = 150 + 10 = 160$ Pf., die Fläche $F = 60$ Quadratfuß, die Dichtigkeit $\gamma = 0,0859$ und der Widerstandscoefficient $\zeta = 2,66$, daher $\frac{1}{w^2} = \frac{60 \,.\, 0,0859}{62,5 \,.\, 160} = 0,000515$, und $\zeta \,.\, \frac{v^2}{w^2} = 2,66 \,.\, 0,000515 \,.\, 25^2 = 0,85625$. Nehmen wir nun 6 Theile an, so erhalten wir für diese

$1 - \zeta \,.\, \frac{v^2}{w^2} = 0,97621;\ 0,90486;\ 0,78593;\ 0,61944;\ 0,40537;\ 0,14375$, und für

$\frac{v}{1 - \zeta \frac{v^2}{w^2}} = 0;\ 4,268;\ 9,210;\ 15,905;\ 26,910;\ 51,393$ und $173,913$, daher nach der Simpson'schen Regel den mittleren Werth hiervon

$= (1.0 + 4\,.\,4,268 + 2\,.\,9,210 + 4\,.\,15,905 + 2\,.\,26,910 + 4\,.\,51,393 + 1\,.\,173,913) : (3\,.\,6)$

$= \frac{532,42}{18} = 29,58$; und hieraus den gesuchten Fallraum $s = \frac{v_n - v_0}{g}$. mal

Mittel von $\frac{v}{1 - \zeta \,.\, \frac{v^2}{w^2}} = \frac{25 - 0}{31,25} \,.\, 29,58 = 23,6$ Fuß.

Die entsprechende Fallzeit ist, da der mittlere Werth von $\frac{1}{1 - \zeta \frac{v^2}{w^2}}$

$= (1\,.\,0 + 4\,.\,1,024 + 2\,.\,1,105 + 4\,.\,1,272 + 2\,.\,1,614 + 4\,.\,2,467 + 1\,.\,6,957) : 18 = 1,747$ ist, $t = \frac{25}{31,25} \,.\, 1,747 = 1,4$ Sec.

Anmerkung. Für einen constanten Widerstandscoefficienten ergiebt sich durch den höheren Calcül:

$$v = \left(\frac{e^{\mu t} - 1}{e^{\mu t} + 1}\right)\sqrt{2g \,.\, \frac{P}{\zeta F \gamma}} \text{ und } s = \frac{G}{\zeta F \gamma}\, Ln. \left(\frac{(e^{\mu t} + 1)^2}{4e^{\mu t}}\right),$$

wobei $\mu = \sqrt{2g \,.\, \zeta \frac{PF\gamma}{G^2}}$, e die Grundzahl des natürlichen Potenzensystemes und $Ln.$ den natürlichen Logarithmen bezeichnet.

Geworfene Körper. §. 433. Wir haben schon früher die Wurfbewegung im luftleeren Raume kennen gelernt und §. 38 gefunden, daß derselben eine Parabel entspricht. Jetzt können wir uns auch über diese Bewegung in einem widerstehenden Mittel, z. B. in der Luft, z. B. die eines abgeschossenen Körpers, nähere Kenntniß verschaffen.

Jedenfalls ist die Bahn ACD, Fig. 638 (s. f. S.), eines die Luft durchschneidenden Körpers keine Parabel A_1CD_1, wie im luftleeren Raume, sondern eine unsymmetrische Curve, mit einem schwächer auf- und stärker niedersteigenden Schenkel. Ist c die Geschwindigkeit im Scheitel C, und t die Zeit zum Durchlaufen der Parabelschenkel AC und DC im leeren Raume, so hat man die Coordinaten

$$BC = x = \frac{g t^2}{2} \text{ und } BA_1 = BD_1 = y = ct,$$

oder, $t = \sqrt{\frac{2x}{g}}$ aus der ersten Formel in die zweite eingesetzt, Geworfene Körper.

$$y = c\sqrt{\frac{2x}{g}}.$$

Da nun durch den Widerstand der Luft die Geschwindigkeit c vermindert wird, so ist der mittlere Werth der horizontalen Geschwindigkeit des aufsteigenden Schenkels AC größer und der des niedersteigenden kleiner als c, und daher auch die Ordinate BA des ersten Schenkels größer und die Ordinate BD des zweiten kleiner als die Ordinate $BA_1 = BD_1$ der Parabel.

Die Construction der Wurflinie oder Bahn ACD eines geworfenen Körpers in einem widerstehenden Mittel, wie die Luft, läßt sich auf folgende Weise mit Hülfe von Krümmungskreisen bewerkstelligen.

Fig. 638.

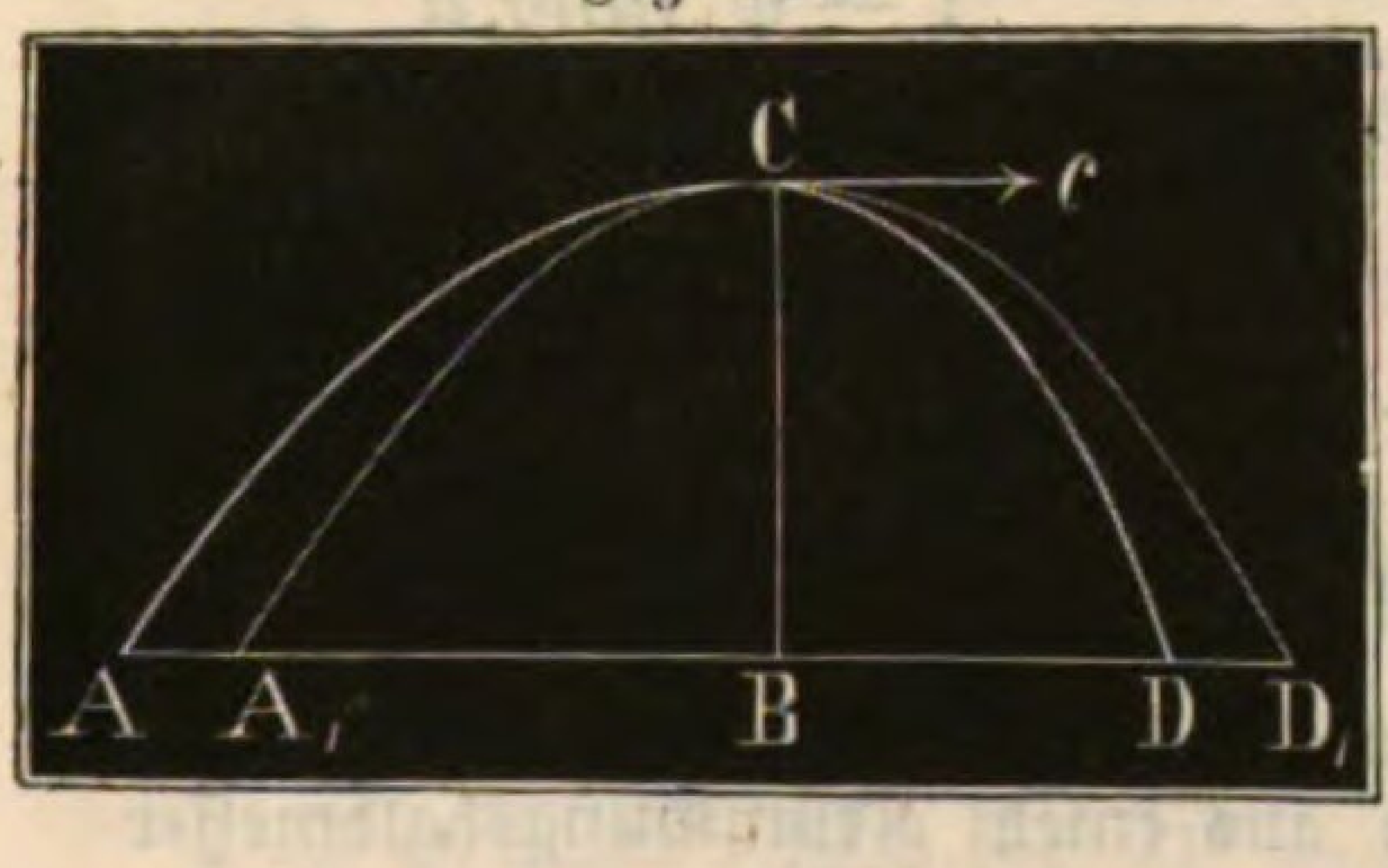
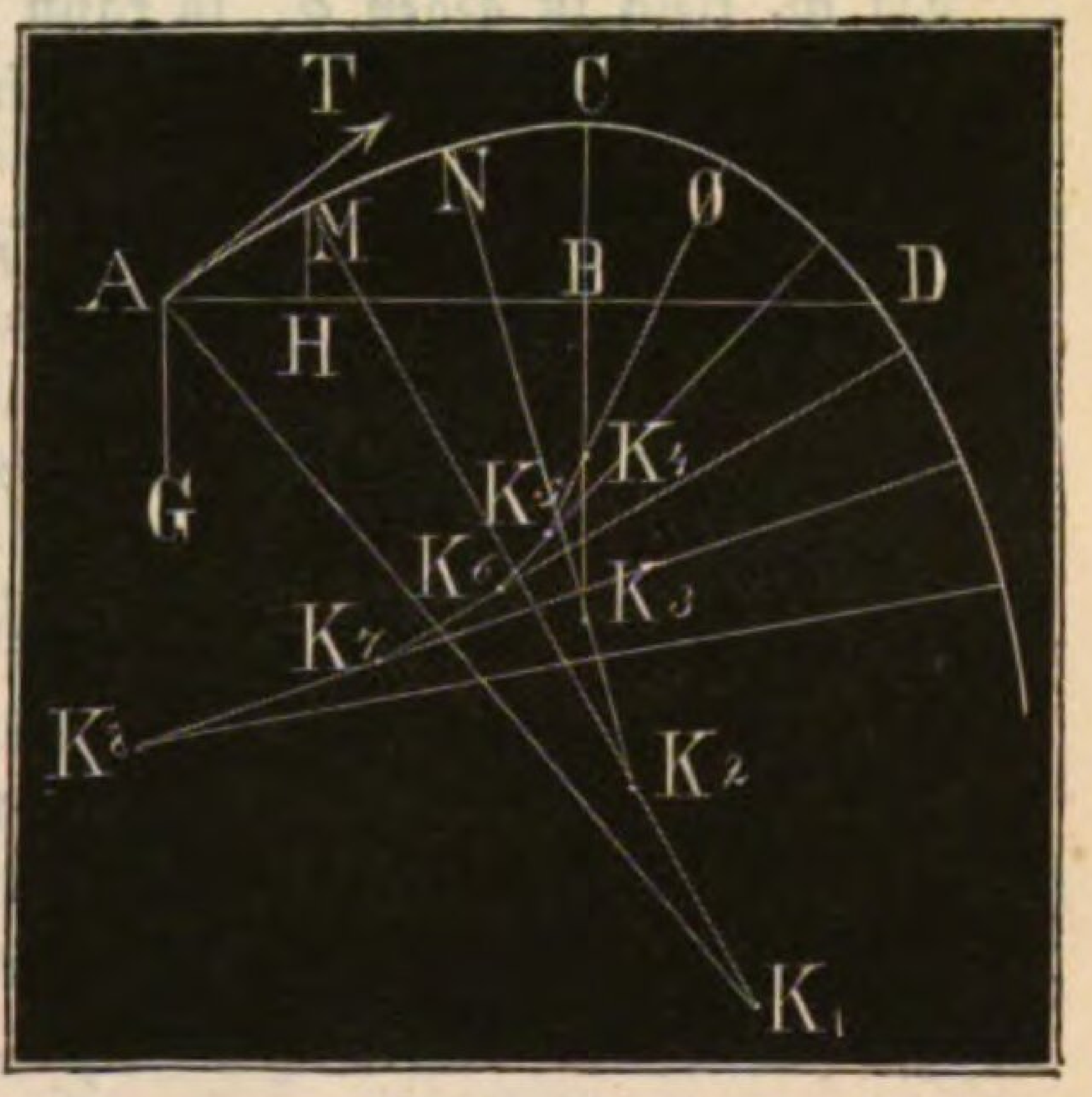


Fig. 639.



Aus der Anfangsgeschwindigkeit v und dem Elevationswinkel $TAB = \alpha$ folgt nach §. 40 der Krümmungshalbmesser $AK_1 = MK_1$ des ersten Bogenstückes AM:

$$r = \frac{v^2}{g\,sin.\,TAG} = \frac{v^2}{g\,sin\,(90^0 + \alpha)} = \frac{v^2}{g\,cos.\,\alpha}.$$

Nimmt man nun den Centriwinkel AK_1M des ersten Bogenelementes $= \varphi_1$, und setzt man die Geschwindigkeit in M, $= v_1$, so hat man den Elevationswinkel in M: $\alpha_1 = \alpha - \varphi_1$ und daher den Krümmungshalbmesser $MK_2 = NK_2$ für das folgende Curvenstück MN:

$$r_1 = \frac{v_1^2}{g\,cos.\,\alpha_1} = \frac{v_1^2}{g\,cos.(\alpha - \varphi_1)}.$$

Geworfene Körper.

Dem Widerstande $\zeta \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma$ der Luft entspricht das Verzögerungsmaaß $p = \zeta \cdot \frac{v^2}{2} \cdot \frac{F\gamma}{G} = \zeta \cdot \frac{F\gamma}{2G} v^2 = \mu v^2$, wenn $\mu = \zeta \cdot \frac{F\gamma}{2G}$ gesetzt wird; ist daher h die Vertikalprojection MH des Curvenstückes $AM = \varphi r$, so läßt sich dem Principe der lebendigen Kräfte zu Folge setzen:

$$\frac{v_1^2}{2} = \frac{v^2}{2} - \mu v^2 \cdot \varphi_1 r - gh.$$

Nun ist aber annähernd $h = \varphi_1 r \sin.\alpha$, daher auch $v_1^2 = v^2 - (\mu v^2 + g \sin.\alpha)\, 2\varphi_1 r$; oder $v^2 = gr \cos.\alpha$ eingesetzt, $v_1^2 = gr\, [\cos.\alpha - 2\varphi_1 (\mu r \cos.\alpha + \sin.\alpha)]$, und daher

$$r_1 = \frac{r\, [\cos.\alpha - 2\varphi_1 (\mu r \cos.\alpha + \sin.\alpha)]}{\cos.(\alpha - \varphi_1)}.$$

Da φ_1 klein ist gegen α, so kann man
$\cos.(\alpha - \varphi_1) = \cos.\alpha \cos.\varphi_1 + \sin.\alpha \sin.\varphi_1 = \cos.\alpha + \varphi_1 \sin.\alpha$,
und $\frac{1}{\cos.(\alpha - \varphi_1)} = \frac{1}{\cos.\alpha\,(1 + \varphi_1 tang\, \alpha)} = \frac{1 - \varphi_1 tang.\alpha}{\cos.\alpha}$ setzen, weshalb nun annähernd

$$r_1 = \frac{r}{\cos.\alpha}\,(1 - \varphi_1\, tang.\alpha)\,[\cos.\alpha - 2\varphi_1 (\mu r \cos.\alpha + \sin.\alpha)]$$
$$= r\,(1 - \varphi_1\, tang.\alpha)\,[1 - 2\varphi_1(\mu r + tang.\alpha)]$$
$$= r\,[1 - \varphi_1 (3\, tang.\alpha + 2\mu r)] \text{ folgt.}$$

Mit Hülfe dieser Formel kann man aus einem Krümmungshalbmesser den nächstfolgenden, und daher auch aus dem ersten Krümmungshalbmesser alle folgenden berechnen. Ist φ_2 der Centriwinkel NK_3C des folgenden Bogenstückes NC und $\alpha_2 = \alpha_1 - \varphi_2 = \alpha - (\varphi_1 + \varphi_2)$ der Elevationswinkel in N, so hat man z. B. den Krümmungshalbmesser

$$NK_3 = CK_3 = r_2 = r_1\,[1 - \varphi_2 (3\, tang.\alpha_1 + \mu r_1)] \text{ u. s. w.}$$

Beispiel. Eine massive gußeiserne Kugel von 4 Zoll Durchmesser werde unter dem Elevationswinkel $\alpha = 25^0$ mit der Geschwindigkeit $v = 1000$ Fuß abgeschossen, man soll die Bahn derselben mittels Krümmungshalbmesser annähernd angeben. Für den ersten Curventheil hat man den Krümmungshalbmesser

$$r = \frac{v^2}{g \cos.\alpha} = \frac{1000^2}{31{,}25 \cos.\, 25^0} = \frac{320000}{\cos.\, 25^0} = 35308 \text{ Fuß}.$$

Da die Dichtigkeit der Luft $= 0{,}0859$ und die des Gußeisens 470 Pfund ist, so hat man $\mu = \frac{F\gamma}{2G} \cdot \zeta = \frac{3}{4} \cdot 3 \cdot \frac{0{,}0859}{470} \cdot \zeta = 0{,}00041122\, \zeta$, und daher für $v = 1000$ Fuß, wo $\zeta = 0{,}90$ ist, $\mu = 0{,}9 \cdot 0{,}00041122 = 0{,}0003701$. Nimmt man nun den ersten Bogen φ_1 nur 1 Grad $= 0{,}017453$ an, so erhält man den folgenden Krümmungshalbmesser

Geworfene Körper.

$$r_1 = r\,[1 - \varphi_1\,(3\,tang.\,\alpha + \mu r)]$$
$$= 35308\,[1 - 0{,}017453\,(3\,.\,tang.\,25^0 + 0{,}0003701\,.\,35308)]$$
$$= 35308\,(1 - 0{,}017453\,.\,14{,}4664) = 35308\,.\,0{,}74752 = 26393 \text{ Fuß}.$$

Diesem Halbmesser entspricht ohngefähr die Geschwindigkeit $v_1 = \sqrt{g r_1\,cos.\,\alpha_1} = \sqrt{31{,}25\,.\,26393\,cos.\,24^0} = 870$ Fuß $= 273$ Meter, und es ist hiernach $\zeta = 0{,}85$, also $\mu = 0{,}00041122\,.\,0{,}85 = 0{,}00034954$ zu nehmen. Beschreibt man mit dem letzten Halbmesser einen Bogen φ_2 von $2^0 = 0{,}034907$, so erhält man folgenden Krümmungshalbmesser

$$r_2 = r_1\,[1 - \varphi_2\,(3 tang.\,\alpha_1 + \mu r_1)]$$
$$= 26393\,[1 - 0{,}034907\,(3 tang.\,24^0 + 0{,}00034954\,.\,26393)]$$
$$= 26393\,(1 - 0{,}034907\,.\,10{,}5613) = 26393\,.\,0{,}63162 = 16670 \text{ Fuß}.$$

Diesem Halbmesser entspricht ohngefähr die Geschwindigkeit $v_2 = \sqrt{g r_2\,cos.\,\alpha_2} = \sqrt{31{,}25\,.\,16670\,.\,cos.\,22^0} = 700$ Fuß $= 220$ Meter, es ist hiernach $\zeta = 0{,}79$ und $\mu = 0{,}79\,.\,0{,}00041122 = 0{,}00032486$. Nimmt man nun den Centriwinkel $\varphi_3 = 4^0 = 0{,}069813$, so erhält man den folgenden Krümmungshalbmesser

$$r_3 = 16670\,[1 - 0{,}069813\,(3\,tang.\,22^0 + 0{,}00032486\,.\,16670)]$$
$$= 16670\,(1 - 0{,}069813\,.\,6{,}6276) = 16670\,.\,0{,}537307 = 8957 \text{ Fuß}.$$

Die entsprechende Geschwindigkeit ist ohngefähr $v_3 = \sqrt{31{,}25\,.\,8957\,.\,cos.\,18^0} = 500$ Fuß $= 157$ Meter, daher folgt $\zeta = 0{,}74$ und $\mu = 0{,}74\,.\,0{,}00041122 = 0{,}00030430$. Nun $\varphi_4 = 7^0 = 0{,}12217$ angenommen, erhält man ferner

$$r_4 = 8957\,[1 - 0{,}12217\,(3\,tang.\,18^0 + 0{,}0003043\,.\,8957)]$$
$$= 8957\,(1 - 0{,}12217\,.\,3{,}7004) = 8957\,.\,0{,}54792 = 4908 \text{ Fuß}.$$

Für diesen Halbmesser ist die Geschwindigkeit ohngefähr $v = \sqrt{31{,}25\,.\,4908\,cos.\,11^0} = 390$ Fuß $= 120$ Meter, daher $\zeta = 0{,}72$ und $\mu = 0{,}00041122\,.\,0{,}72 = 0{,}00029608$. Nimmt man nun $\varphi_4 = 11^0 = 0{,}19199$, so erhält man den Krümmungshalbmesser

$$r_5 = 4908\,[1 - 0{,}19199\,(3\,tang.\,11^0 + 0{,}00029608\,.\,4908)]$$
$$= 4908\,(1 - 0{,}19199\,.\,2{,}0362) = 2989 \text{ Fuß}.$$

Für diesen Halbmesser ist ferner die Geschwindigkeit ohngefähr $v = \sqrt{31{,}25\,.\,2989\,.\,cos.\,0^0} = 300$ Fuß $= 95$ Meter, daher $\zeta = 0{,}71$ und $\mu = 0{,}00041122\,.\,0{,}71 = 0{,}00029197$. Nimmt jetzt φ_5 wieder $= 11^0 = 0{,}19199$, so bekommt der Krümmungshalbmesser vom ersten Stück des niedersteigenden Bogens:

$$r_6 = 2989\,[1 - 0{,}19199\,.\,(3\,tang.\,0^0 + 0{,}00029197\,.\,2989)]$$
$$= 2989\,(1 - 0{,}19199\,.\,0{,}00029197\,.\,2989) = 2488{,}3 \text{ Fuß}.$$

Diesem Halbmesser entspricht die ohngefähre Geschwindigkeit $v = \sqrt{31{,}25\,.\,2488{,}3\,cos.\,11^0} = 280$ Fuß $= 90$ Meter, daher ist $\zeta = 0{,}70$ und $\mu = 0{,}00041122\,.\,0{,}7 = 0{,}00028885$. Nochmals $\varphi_6 = 11^0$ gesetzt, folgt

$$r_7 = 2488{,}3\,[1 - 0{,}19199\,(- 3\,tang.\,11^0 + 0{,}00028885\,.\,2488{,}3)]$$
$$= 2488{,}3\,(1 - 0{,}19199\,.\,0{,}13561) = 2423{,}5 \text{ Fuß}.$$

Geworfene Körper.

Wird $\zeta = 0{,}70$, also $\mu = 0{,}00028885$ und $\varphi_7 = 11^\circ$ angenommen, bekommt man nun

$$r_8 = 2423{,}5\ [1 + 0{,}19199\ (3\ tang.\ 22^\circ - 0{,}00028885\ .\ 2423{,}5)]$$
$$= 2423{,}5\ (1 + 0{,}19199\ .\ 0.51203) = 2662\ \text{Fuß}.$$

Nimmt man nochmals $\zeta = 0{,}70$, $\mu = 0{,}00028885$ und $\varphi_8 = 11^\circ$, so stellt sich

$$r_9 = 2662\ [1 + 0{,}19199\ (3\ tang.\ 33^\circ - 0{,}00028885\ .\ 2662)]$$
$$= 2662\ (1 + 0{,}19199\ .\ 1{,}17937) = 2662 . 1{,}22642 = 3474\ \text{Fuß heraus},$$

Wenn sich dem fallenden Körper kein Hinderniß entgegensetzt, so fährt der Krümmungshalbmesser fort immer mehr und mehr zu wachsen, es nähert sich die Bahn immer mehr und mehr einer senkrechten Linie und die Geschwindigkeit immer mehr und mehr dem Werthe

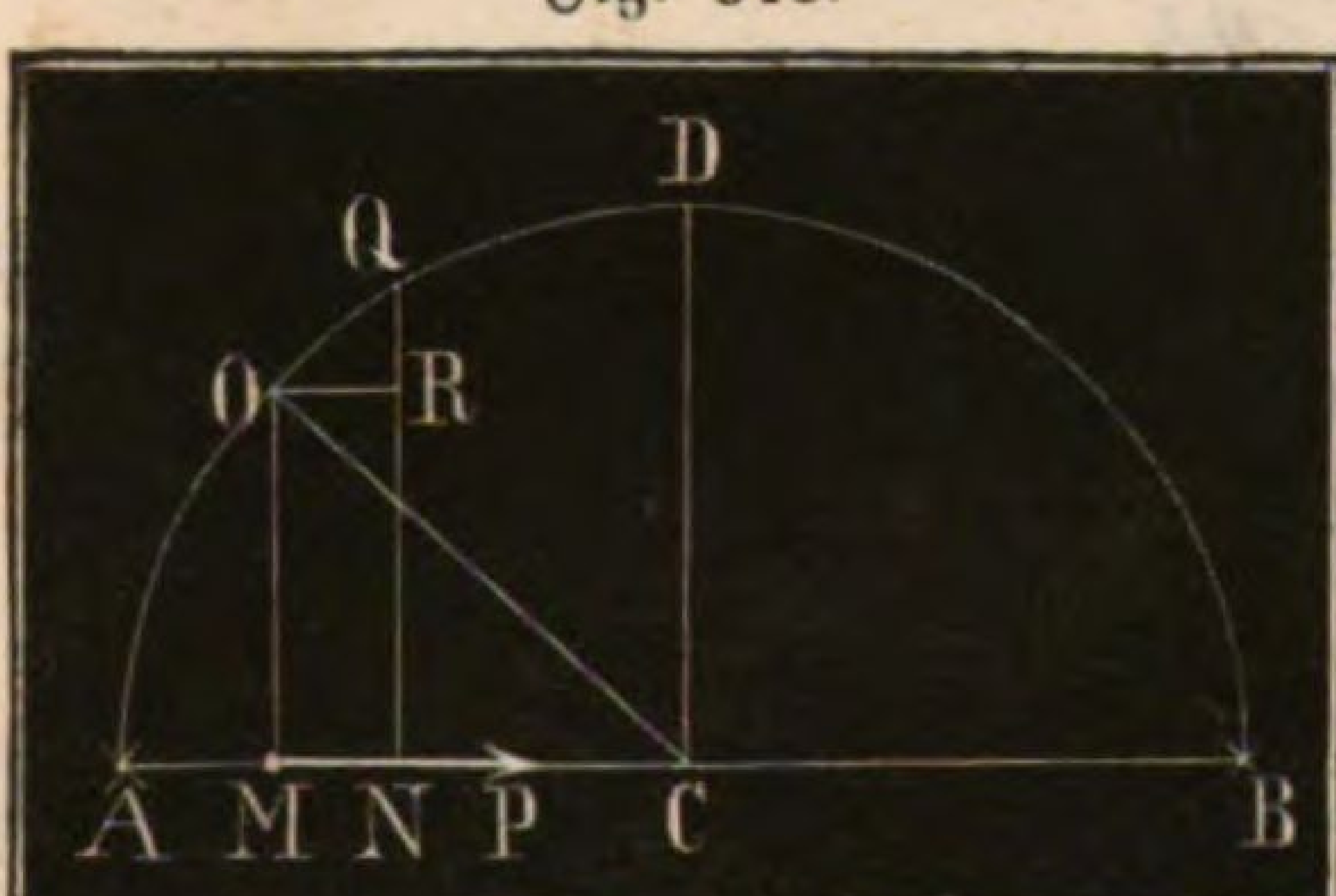
$$v = \sqrt{\frac{2gG}{\zeta F\gamma}} = \sqrt{\frac{62{,}5}{0{,}00082244\ \zeta}} = \sqrt{\frac{62{,}5}{0{,}00058394}} = 327\ \text{Fuß}.$$

A n h a n g.

Die Theorie der Schwingungen.

§. 1*). Ein Körper hat eine schwingende Bewegung (franz. mouvement oscillatoire, engl. oscillatory motion) oder ist in Schwingung (franz. und engl. oscillation), wenn er wiederholt in gleichen Zeiten denselben Weg hin und zurück durchläuft. Die Natur bietet uns außer der Bewegung eines Pendels noch viele andere Schwingungsbewegungen dar. Die vorzüglichste Ursache einer solchen Bewegung ist eine Kraft, welche den schwingenden Körper nach einem und demselben Punkte hinzieht oder hintreibt. So ist es z. B. die Schwerkraft, welche ein Pendel in schwingende Bewegung setzt. Wenn ein vorher in Ruhe befindlicher Körper ungestört der Kraft folgen kann, welche denselben nach einem gewissen Punkte hintreibt, so erfolgt die Schwingung desselben in einer geraden Linie; außerdem aber nimmt er Schwingungen in einer Curve an, wie z. B. ein Pendel, wo die Verbindung des Körpers mit einem festen Punkte die Schwerkraft fortwährend stört. Ebenso erfolgt die Schwingung in einer krummen Linie, wenn der Körper eine Anfangsgeschwindigkeit besitzt, welche mit der Kraft nicht einerlei Richtung hat. Der einfachste und am häufigsten vorkommende Fall ist der, wenn die Kraft der Entfernung von einem gewissen Punkte C proportional ist. Es sei A, Fig. 640, der Anfangspunkt der Bewegung, C der Sitz der Kraft, also der Ort des Körpers, wo die Kraft Null ist, und M der veränderliche Ort des Körpers. Bezeichnen wir nun den Abstand CM durch x, so können wir die Acceleration des Körpers in M, $p = \mu x$ setzen, Schwingungstheorie.

Fig. 640.

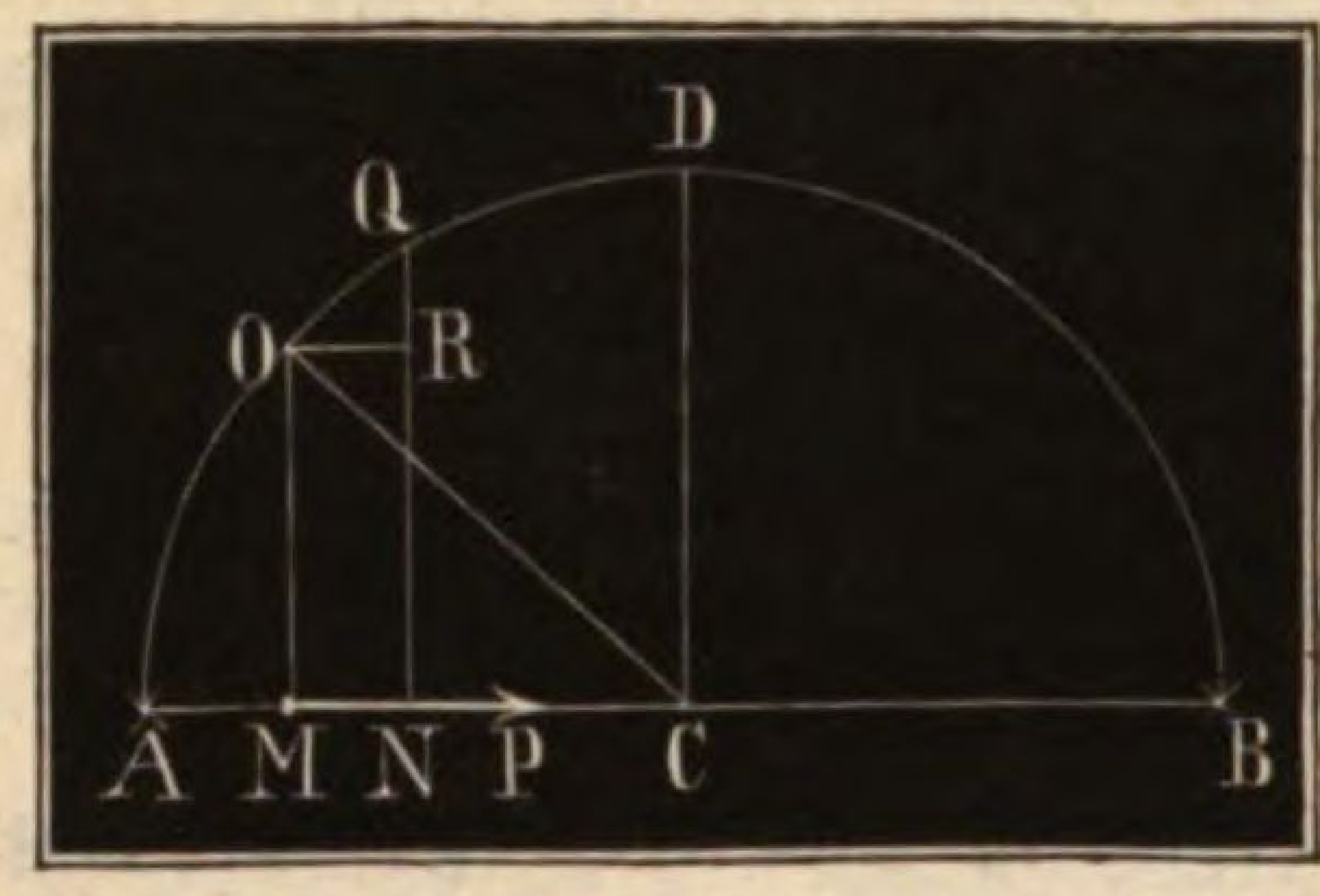


und erhalten sonach für die Geschwindigkeit v des Körpers (s. §. 19*, III.), da x um $MN = dx$ abnimmt, wenn der Weg APM um eben soviel

Schwingungstheorie.

wächst, $\frac{1}{2}v^2 = -\int p\,dx = -\mu\int x\,dx = -\frac{\mu x^2}{2} + Con.$

Fig. 641.



Nun ist aber in A, $v = 0$ und CA eine bestimmte Größe a, daher hat man

$$0 = -\frac{\mu a^2}{2} + Con., \text{ und}$$

$$v^2 = \mu\,(a^2 - x^2),$$

also die Geschwindigkeit selbst,

$$v = \sqrt{\mu\,(a^2 - x^2)}.$$

Kommt der Körper in C an, ist also $x = 0$, so ist v ein Maximum, und zwar

$$v = c = \sqrt{\mu a^2} = a\sqrt{\mu}.$$

Jenseits von C nimmt v wieder allmälig ab, und ist die Entfernung x von $C = CB = -a$, so fällt wieder $v = 0$ aus, und es kehrt nachher der Körper mit wachsender Geschwindigkeit nach C zurück. Diese rückgängige Bewegung erfolgt genau nach demselben Gesetze, wie die hingehende; es ist in C, $v = -c$ und in A, $v = 0$. Auf diese Weise wiederholt sich die Bewegung ohne Ende in dem Raume $AB = 2a$, die man deshalb die **doppelte Schwingungsweite** (franz. amplitude des oscillations, engl. amplitude of oscillations) nennt.

§. 2*). Die Zeit, während welcher der schwingende Körper einen gewissen Weg $AM = x_1$, Fig. 641, zurücklegt, läßt sich, wie folgt, bestimmen. Wird in dem Zeitelemente dt das Wegelement $MN = dx_1 = -dx$ zurückgelegt, so hat man nach §. 19*) I.:

$$dx_1 = v dt, \text{ d. i. } dx = -\sqrt{\mu\,(a^2 - x^2)}\,dt;$$

und daher umgekehrt:

$$dt = -\frac{dx}{\sqrt{\mu\,(a^2 - x^2)}}.$$

Beschreiben wir über AB mit dem Halbmesser $CA = CB = a$ einen Kreis ADB, so erscheint in demselben $\sqrt{a^2 - x^2}$ als Ordinate $MO = y$, und es ist daher

$$dt = -\frac{dx}{\sqrt{\mu}\cdot y}.$$

Setzen wir ferner den der Abscisse $CM = x$ entsprechenden Bogen $DO = s$, und das Element OQ desselben $= -ds$, so giebt uns die Aehnlichkeit gewisser Dreiecke OQR und OCM, in welchen $OR = -dx$, $OQ = -ds$, $MO = y$ und $OC = a$ ist, die Proportion $\frac{dx}{ds} = \frac{y}{a}$,

daher $\frac{dx}{y} = \frac{ds}{a}$, und es folgt sonach $dt = -\frac{ds}{\sqrt{\mu}\,.\,a}$; daher Schwingungstheorie.

$$t = -\int \frac{ds}{\sqrt{\mu}\,.\,a} = -\frac{s}{\sqrt{\mu}\,.\,a} + Con.$$

Nun ist aber für den Anfangspunkt A, $t = 0$ und s der Quadrant $DA = \frac{1}{2}\pi a$, daher hat man $0 = -\frac{\frac{1}{2}\pi a}{\sqrt{\mu}\,.\,a} + Con.$, und die Schwingungszeit, oder die Zeit, innerhalb welcher A nach P kommt:

$$t = \frac{\frac{1}{2}\pi a}{\sqrt{\mu}\,.\,a} - \frac{s}{\sqrt{\mu}\,.\,a} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{s}{a}\right).$$

Für die halbe Schwingungsdauer, d. i. für die Zeit, innerhalb welcher der Körper nach dem Ruhe- oder Mittelpunkt C kommt, ist $s = 0$, daher $t = \frac{\pi}{2\sqrt{\mu}}$, ferner die Zeit einer Schwingung oder zum Durchlaufen des Weges $AB = 2a$, $t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}}$, endlich die Zeit, innerhalb welcher der Körper nach A zurückkehrt, ist $t = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$. Eben so groß ist auch die Schwingungsdauer, oder die Zeit zum Durchlaufen eines Weges $2AB = 4a$, wenn dieselbe an einem andern Orte M zu zählen angefangen wird; denn die Zeit für den Weg MB hin und zurück ist

$= 2\,.\,\frac{\text{Bog.}\,OB}{\sqrt{\mu}\,.\,a}$ und die für den Weg MA hin und zurück

$= 2\,.\,\frac{\text{Bog.}\,OA}{\sqrt{\mu}\,.\,a}$; folglich die Zeit für den Weg

$$2MB + 2MA = 2\,.\,\frac{\text{Bog.}\,(OB+OA)}{a\sqrt{\mu}} = \frac{2\,.\,\pi r}{a\sqrt{\mu}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}.$$

Es hängt also die Schwingungsdauer gar nicht von der Amplitude ab. Gehen wir von dem Ruhepunkte C aus, so können wir einfacher die Zeit, welche der Elongation $CM = x$ entspricht, setzen:

$t = \frac{s}{\sqrt{\mu}\,.\,a}$, oder, da $s = a\ arc.\left(sin. = \frac{x}{r}\right)$ ist,

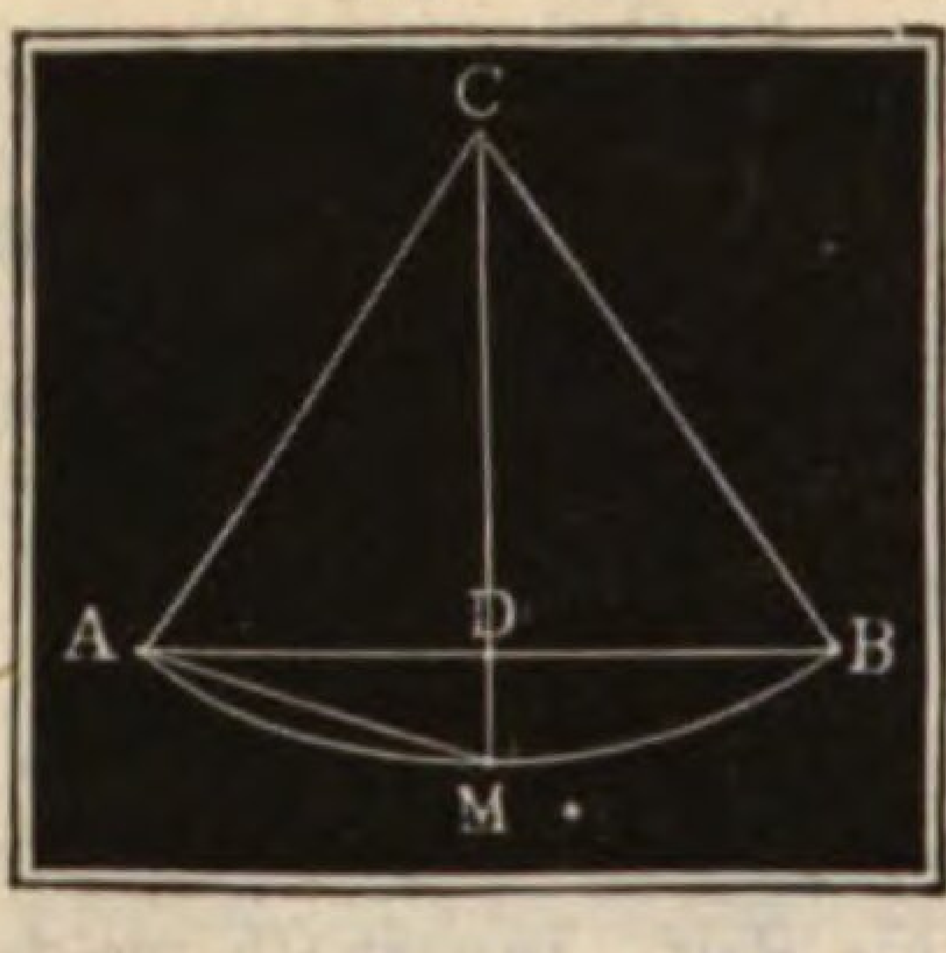
$t = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\, arc.\left(sin. = \frac{x}{a}\right)$, und umgekehrt

$x = a\ sin.(t\sqrt{\mu})$, sowie

$$v = \sqrt{\mu}\sqrt{a^2 - a^2\,[sin.(t\sqrt{\mu})]^2} = \sqrt{\mu}\,.\,a\sqrt{1-[sin.(t\sqrt{\mu})]^2}$$
$$= \sqrt{\mu}\,.\,a\ cos.\,(t\sqrt{\mu}).$$

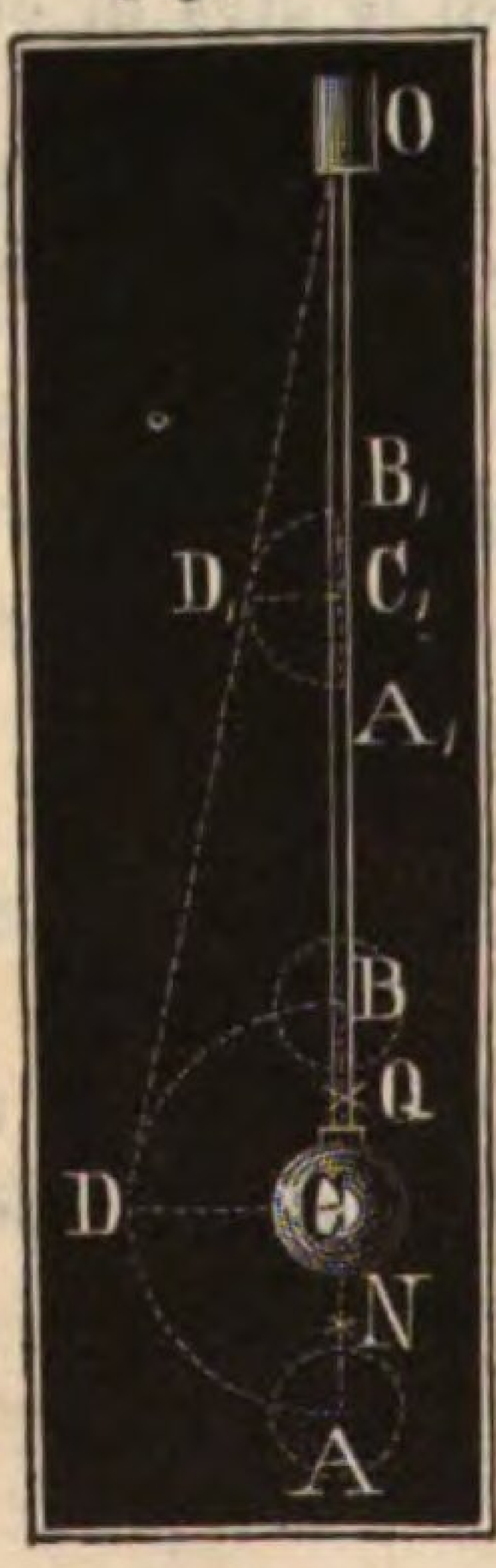
Schwingungstheorie. **Anmerkung.** Die vorstehende Schwingungstheorie läßt sich sogar auf das Kreispendel CM, Fig. 642, anwenden, wenn man kleine Schwingungsbögen voraussetzt. Es ist die Beschleunigung des im Bogen AMB schwingenden Punktes an der Stelle A, $p = g \sin. ACD = \frac{DA}{AC} \cdot g$, oder da bei kleinen Elongationen $DA = MA$ gesetzt werden kann, $p = \frac{MA}{CA} \cdot g$. Bezeichnet man nun CA mit r und MA mit x, so erhält man $p = \frac{gx}{r}$, und daher durch Vergleichung mit der Formel $p = \mu x$ des vorigen Paragraphen, $\mu = \frac{g}{r}$. Folglich ist die Schwingungszeit $t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$ (Vergl. §. 261).

Fig. 642.



Längenschwingungen. §. 3. Die vorzüglichste Ursache schwingender Bewegungen ist die **Elasticität der Körper.** Den einfachsten Fall bietet ein Faden oder eine Stange (Draht) OC, Fig. 643, dar, wenn derselbe durch ein Gewicht G gespannt wird. Führt man dieses Gewicht von dem **Ruhepunkte** C in der Axenrichtung des Fadens um einen Weg $CA = a$ fort und überläßt man es nun sich selbst, so wird es in Folge der Elasticität des Fadens wieder bis C gehoben, kommt daselbst mit einer gewissen Geschwindigkeit c an, und steigt durch seine lebendige Kraft bis zu einem Punkte B, von wo aus es wieder zurückfällt u. s. w. In dem Ruhepunkte wird das Gewicht G von der Elasticität $\frac{\lambda}{l} FE$ (s. §. 185) der Stange aufgehoben, es ist folglich hier die bewegende Kraft $P = \frac{\lambda}{l} FE - G = 0$, oder $\frac{\lambda}{l} FE = G$. Ist aber das Gewicht in einem tieferen Punkte N, welcher um $CN = x$ von C absteht, so fällt die bewegende Kraft

Fig. 643.



$$P = \frac{\lambda + x}{l} FE - G = \frac{\lambda}{l} FE + \frac{x}{l} FE - G = \frac{FE}{l} x \text{ aus,}$$

und befindet es sich in einem höheren Punkte Q, so ist diese Kraft

$$P = G - \frac{\lambda - x}{l} FE = G - \frac{\lambda}{l} FE + \frac{x}{l} FE = \frac{FE}{l} x.$$

Vernachlässigen wir die Masse der Stange, so ist folglich die Acceleration,

mit welcher sich G nach C zurückbewegt, $p = \frac{P}{G} g = \frac{FE}{Gl} g x$, und daher $\mu = \frac{FEg}{Gl}$, wenn $p = \mu x$ gesetzt wird, F den Querschnitt, l die Länge und E den Elasticitätsmodul der Stange bezeichnet. Da dieses Gesetz mit dem in den vorigen Paragraphen behandelten Fall übereinstimmt, so haben wir auch hier die Schwingungszeit: Längenschwingungen.

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} = \pi \sqrt{\frac{Gl}{FEg}} = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{Gl}{FE}}.$$

Setzt man statt F das Gewicht $G_1 = Fl\gamma$ der Stange und statt E den Elasticitätsmodul $L = \frac{E}{\gamma}$ nach Länge (s. §. 185, Anmerk. 1) ein, so erhält man auch

$$t = \frac{\pi l}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{G}{G_1 L}}.$$

Wenn man umgekehrt die Schwingungszeit t beobachtet, so kann man die Elasticitätsmodul berechnen, indem man setzt:

$$E = \frac{\pi^2}{g t^2} \cdot \frac{Gl}{F} \text{ oder } L = \frac{\pi^2 l^2}{g t^2} \cdot \frac{G}{G_1}.$$

Diese Formeln gelten auch dann, wenn die Schwingung der Stange nur durch bloßes Anhängen des Gewichtes hervorgebracht wird; es ist hier die Amplitude zu beiden Seiten von C, $a = \lambda = \frac{G}{FE} l$, wogegen wir oben $a < \lambda$ angenommen haben.

Beispiel. Wenn ein Eisendraht von 20 Fuß Länge und 0,1 Zoll Dicke durch ein Gewicht $G = 100$ Pfund in Längenschwingungen versetzt wird, deren Zeitdauer $^1/_9$ Secunde ist, so hat man $t = {}^1/_{18}{}''$ und den Elasticitätsmodul desselben

$$E = 0{,}032 \,.\, \pi^2 \,.\, 18^2 \,.\, \frac{100 \,.\, 20 \,.\, 4}{(0{,}1)^2 \,.\, \pi} = 0{,}03{,}2 \,.\, 8000 \,.\, 18^2\, \pi$$
$$= 25600 \,.\, 324\, \pi = 26'000000 \text{ Pfund}.$$

§. 4. Die vorstehenden Formeln lassen sich auch anwenden, wenn das Gewicht G **zusammendrückend** auf eine steife prismatische Stange wirkt Ebenso finden dieselben noch ihre Anwendung, wenn das an das untere Stangenende angehängte Gewicht gleich anfangs mit einer **gegebenen Geschwindigket** v niedergeht. Nach dem Principe der mechanischen Arbeiten ist in diesem Falle für die Fallhöhe h von G:

$$Gh + G \frac{v^2}{2g} = \frac{h}{l} FE \,.\, \frac{h}{2} = \frac{FE}{2l} \,.\, h^2, \text{ daher}$$

$$h = \frac{Gl}{FE} + \sqrt{\left(\frac{Gl}{FE}\right)^2 + \frac{2Gl}{FE} \cdot \frac{v^2}{2g}}.$$

Längenschwingungen

Nach Durchlaufung dieses Weges hat G seine Geschwindigkeit verloren und steigt nun in Folge der Elasticität wieder bis A, wo es wieder mit der Geschwindigkeit v ankommt. Endlich aber erhebt es sich in Folge seiner lebendigen Kraft $G\,\frac{v^2}{2g}$, indem es die Stange comprimirt, noch um eine Höhe h_1, ehe es wieder zurückkehrt und eine neue Schwingung beginnt. Für diese zweite Höhe ist

$$G\,\frac{v^2}{2g} = G h_1 + \frac{FE}{2l}\,h_1^2,\ \text{und daher}$$

$$h_1 = -\frac{Gl}{FE} + \sqrt{\left(\frac{Gl}{FE}\right)^2 + \frac{2\,Gl}{FE}\cdot\frac{v^2}{2g}}.$$

Durch Addition von h und h_1 bekommt man nun die ganze Schwingungsamplitude:

$$2a = h + h_1 = 2\sqrt{\left(\frac{Gl}{FE}\right)^2 + \frac{2\,Gl}{FE}\cdot\frac{v^2}{2g}},$$

und daher die einfache Elongation:

$$a = \sqrt{\left(\frac{Gl}{FE}\right)^2 + \frac{2\,Gl}{FE}\cdot\frac{v^2}{2g}}.$$

Da auch hier $p = \frac{FE}{Gl}\,g x = \mu x$ ist, so hat man wie oben die Zeit einer Schwingung:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{Gl}{FE}}.$$

Wenn die Anfangsgeschwindigkeit v des Gewichtes G_1 durch ein niederfallendes Gewicht G erzeugt wird, so hat man es mit dem in §. 290 abgehandelten Falle (Fig. 644) zu thun. Lassen wir das Gewicht G mit der Geschwindigkeit c aufschlagen, und setzen wir einen unelastischen Stoß voraus, so haben wir die Anfangsgeschwindigkeit von $G + G_1$:

Fig. 644.



$$v = \frac{Gc}{G+G_1},$$

daher die größte Schwingungselongation

$$a = \sqrt{\left(\frac{(G+G_1)\,l}{FE}\right)^2 + \frac{2\,G^2 l}{(G+G_1)\,FE}\cdot\frac{c^2}{2g}},$$

und die Schwingungszeit

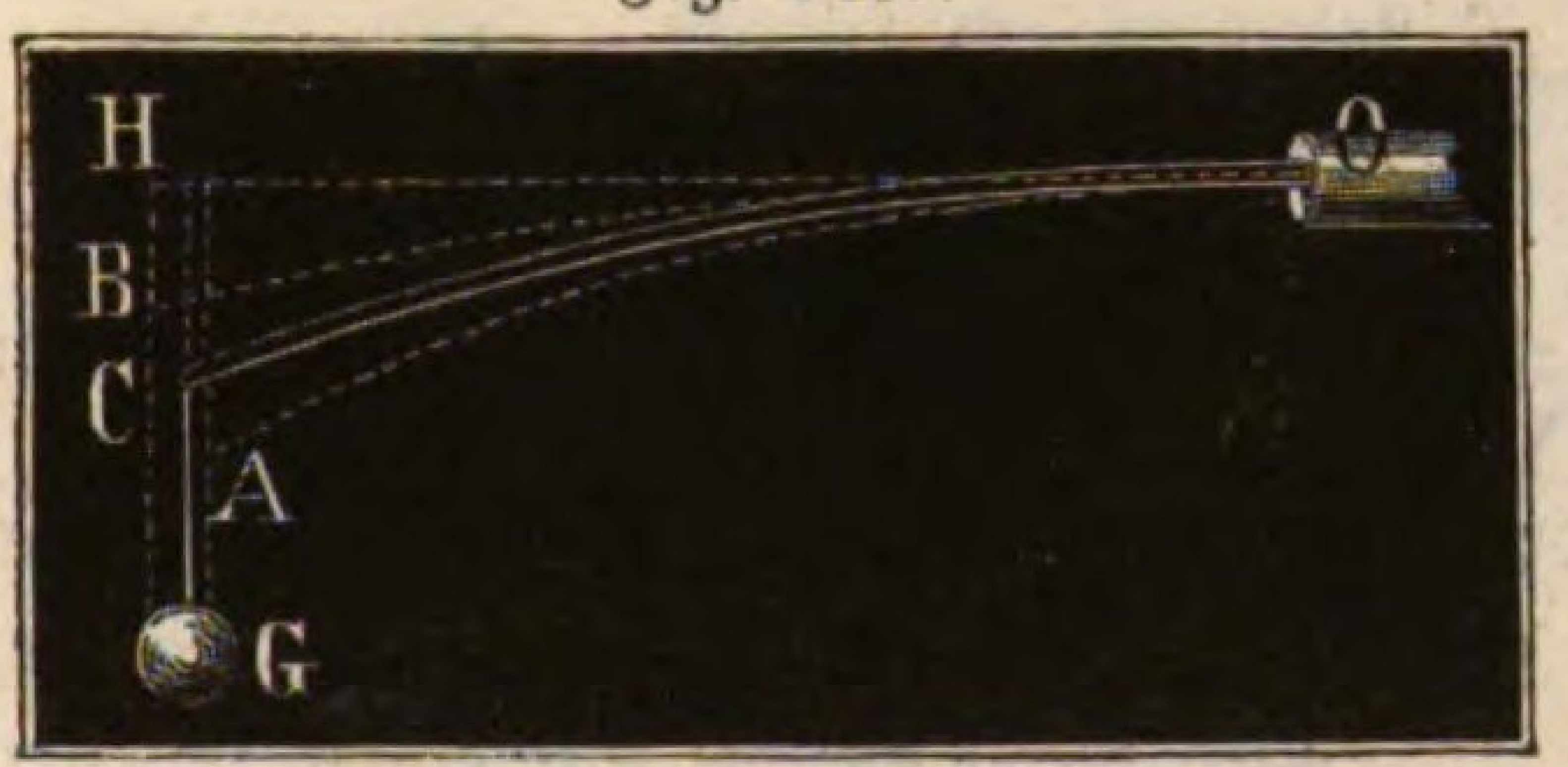
$$t = \frac{\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{(G+G_1)\,l}{FE}}.$$

Die Elemente der Stange nehmen an den Schwingungen von G oder $G + G_1$ Antheil, nur ist die Amplitude um

so kleiner, je näher das Element dem Aufhängepunkte liegt. Für ein Element C_1, Fig. 643, im Abstande $OC_1 = x$ vom Aufhängepunkte ist die Amplitude $y = \frac{x}{l}\, a$; wogegen die Schwingungszeit, da diese gar nicht von y oder a abhängt, dieselbe ist wie für G. Es schwingen also alle Elemente der Stange in von C nach O stetig abnehmenden Amplituden isochron. Längenschwingungen.

§. 5. Auch die relative oder die Torsionselasticität bietet Gelegenheiten zu Schwingungen dar, wie wir im Vorhergehenden kennen gelernt haben. Für eine an einem Ende O festgehaltene und am anderen Ende C durch ein Gewicht G gespannte Stange oder Feder OC haben wir §. 192 die Einbiegung Querschwingungen.

Fig. 645.



$$HC = a = \frac{Pl^3}{3WE}$$

gefunden; es ist daher umgekehrt die Kraft P, mit welcher die Stange gebogen ist, $P = \frac{3WEa}{l^3}$. Wird nun diese Kraft durch ein angehängtes Gewicht G ersetzt, und a um $CA = CB = x$ vergrößert oder verkleinert, so hat man die Kraft, mit welcher das Stangenende nach der Ruhelage durch die Elasticität der Stange zurückgetrieben wird,

$$P = \frac{3WE(a+x)}{l^3} - G = \frac{3WE(a+x)}{l^3} - \frac{3WE}{l^3}a = \frac{3WE}{l^3}\, x;$$

daher die Acceleration, wenn wir bloß die Masse von G in Betracht ziehen, $p = \frac{P}{G}g = \frac{3WE}{Gl^3}gx$, und, da hiernach $p = \mu x$ zu setzen ist,

$$\mu = \frac{3WE}{Gl^3}\, g.$$

Die Proportionalität zwischen p und x gestattet die Anwendung der Formel in §. 2, weshalb nun die Schwingungszeit

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{Gl^3}{3WE}} \text{ folgt.}$$

Fig. 646.



Für eine an beiden Enden frei aufliegende und in der Mitte C mit einem Gewichte G belastete Stange HO, Fig. 646, ist nach §. 193,

Querschwingungen.

$$a = \frac{Pl^3}{48WE}, \text{ daher die Schwingungsdauer } t = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{Gl^3}{48WE}}.$$

Beispiel. Wie viel Schwingungen macht der hölzerne Arm eines Hebels von 3 Fuß Länge, 4 Zoll Höhe und 3 Zoll Dicke, wenn derselbe an dem Ende ein Gewicht von 300 Pfund trägt? Es ist hier

$$WE = \frac{bh^3}{12} \cdot E = \frac{3 \cdot 64}{12} \cdot 1{\cdot}800000 = 28{\cdot}800000,$$

und $Gl^3 = 300 \cdot 36^3 = 13996800$, daher folgt die Schwingungsdauer

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{Gl^3}{3WE}} = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{13996800}{3 \cdot 28800000}} = 0{,}06530 \text{ Sec.}$$

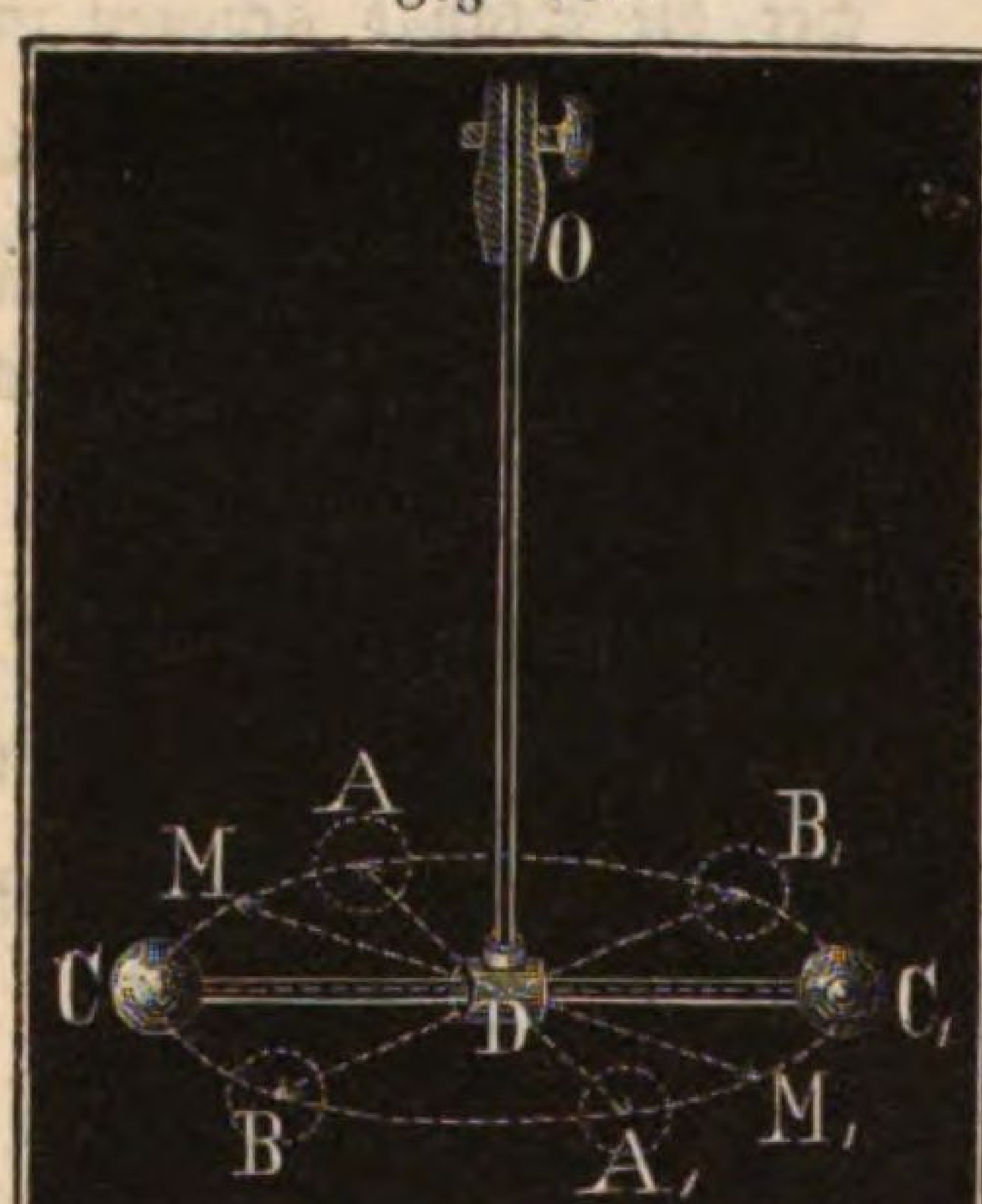
und die Zahl der Doppelschwingungen pr. Minute

$$n = \frac{60}{0{,}06530} = 919.$$

Torsionsschwingungen

§. 6. Die Formel $t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}}$ findet endlich auch bei dem Torsionspendel, d. i. bei einem Faden oder einer Stange DO, Fig. 647, statt, welche vermöge ihrer Torsion um ihre eigene Axe schwingt. In der Regel wird dieses Pendel mit einem belasteten Querarm CC_1 versehen, mittels dessen die anfängliche Drehung des Fadens hervorgebracht wird, indem man diesen Arm aus der Ruhelage CC_1 in die Lage AA_1 bringt. Die Torsion dreht dann den Arm nach CC_1 zurück, und vermöge der Trägheit geht derselbe auch noch weiter bis BB_1, von wo aus er nach CC_1 und AA_1 u. s. w. zurückkehrt. Wir haben oben (§. 216) das Torsionsmoment eines prismatischen Körpers $Pa = \frac{\alpha WE}{2l}$ gefunden; und wissen hiernach, daß dasselbe umgekehrt wie die Länge $OD = l$ des Fadens und direct wie der Torsionswinkel $MDC = \alpha$ wächst; ist nun $T = Gr^2$ das Trägheitsmoment des Armes $C\bar{D}C_1$, folglich $\frac{r^2}{a^2}\frac{G}{g}$ die auf die Armenden C und C_1 reducirte träge Masse M desselben, so folgt die Acceleration dieser Punkte:

Fig. 647.



$$p = \frac{P}{M} = \frac{\alpha WE}{2la} : \frac{r^2 G}{a^2 g} = \frac{\alpha a WEg}{2Gr^2 l}.$$

Setzen wir noch den Bogen $CM = \alpha a$, welcher der Armlänge $DA = DC$

$= a$ und dem veränderlichen Elongationswinkel $CDM = \alpha$ entspricht $= x$, so erhalten wir den Ausdruck Torsionsschwingungen.

$$p = \frac{WEg}{2Gr^2l}\,x = \frac{WE}{2\,Tl}\,gx,$$

und können wieder $p = \mu x$, also $\mu = \dfrac{WEg}{2\,Tl}$ setzen.

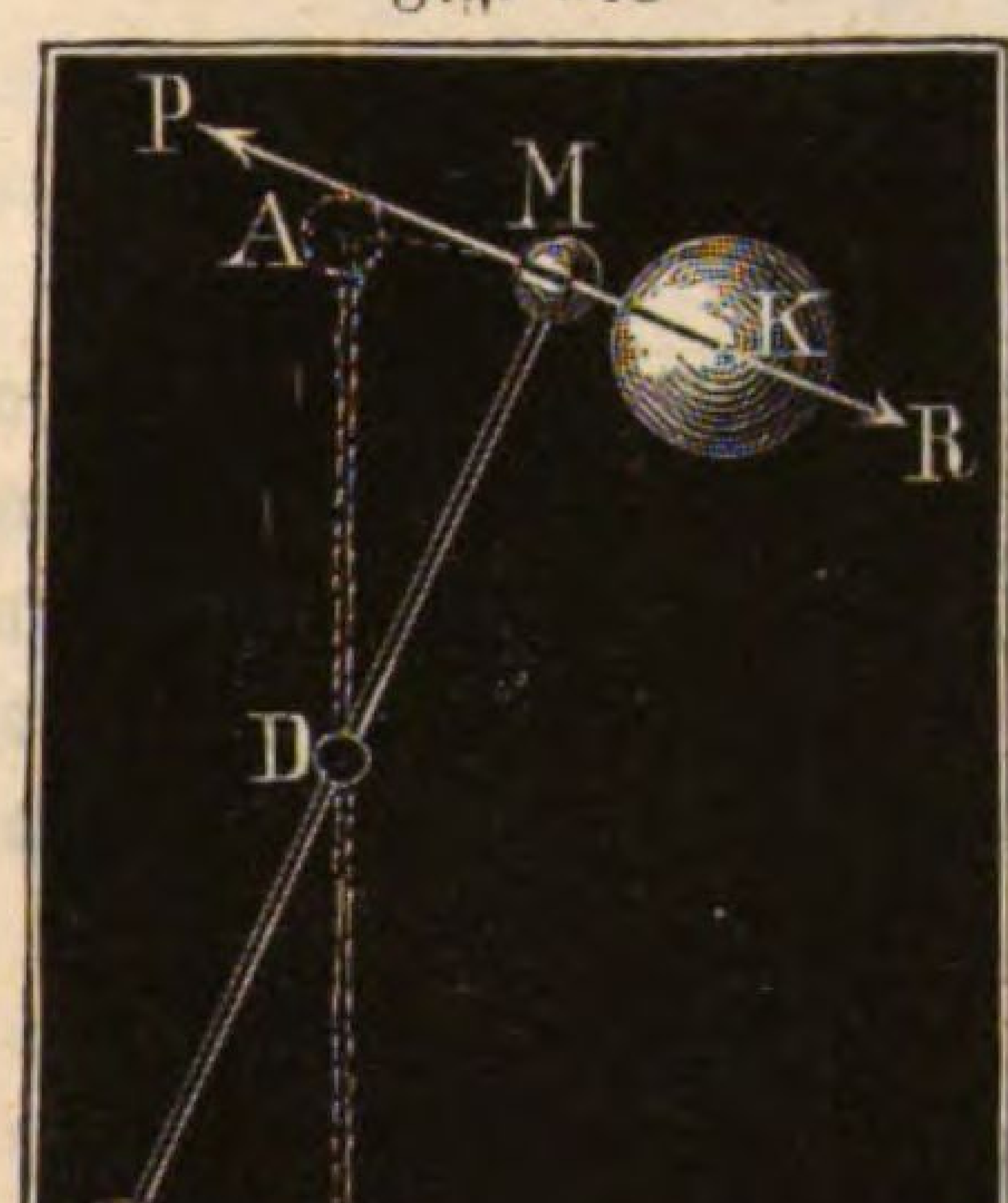
Es ist folglich auch die Schwingungsdauer, der Schwingungsbogen $ACB = A_1C_1B_1$ mag groß oder klein sein,

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} = \frac{\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{2\,Tl}{WE}}.$$

Anmerkung. Vorstehende Formeln für die Schwingungen, welche durch die Elasticität fester Körper hervorgebracht werden, gelten natürlich nur so lange, als mit den Schwingungselongationen die Elasticitätsgrenze nicht erreicht wird. Bei allen Maschinentheilen sind die Schwingungen möglichst zu vermeiden, weil das Arbeitsquantum, welches auf dieselben verwendet wird, für die Maschinen verloren geht; deshalb sind diese Theile höchst sorgfältig mit einander zu verbinden, und es ist zumal ein sogenannter tauber Gang zu vermeiden, der zu Stößen und Schwingungen Veranlassung giebt.

§. 7. Die Theorie des Torsionspendels findet ihre unmittelbare Anwendung bei der Bestimmung der mittleren Dichtigkeit oder des specifischen Gewichtes ε unserer Erde. Nähert man dem einen Gewichte G am Armende ADA_1, Fig. 648, eines Torsionspendels eine schwere Kugel K, so nähert sich dasselbe in Folge der Anziehung um einen Weg $AM = x$, es setzt sich in diesem neuen Orte M von G die Anziehungskraft R von K mit der Torsionskraft P ins Gleichgewicht, und es läßt sich daher auch die eine durch die andere bestimmen. Lassen wir nun nach Entfernung der Kugel K das Torsionspendel schwingen, so können wir die Schwingungsdauer desselben ermitteln und hieraus die Torsionskraft berechnen. Nach dem vorigen Paragraphen ist die Schwingungsdauer Dichtigkeit der Erde.

Fig. 648



$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}},\quad \mu = \frac{p}{x},\ \text{und}\ p = \frac{\text{Torsionskraft}}{\text{Masse des Pendels}} = \frac{Pa^2}{T}\,g,$$

wenn T das Trägheitsmoment und a die Armlänge des Pendels bezeichnet; daher hat man umgekehrt die Torsions- oder Anziehungskraft

Dichtigkeit der Erde. $P = \frac{Tp}{ga^2} = \frac{\mu Tx}{ga^2} = \frac{\pi^2}{gt^2} \cdot \frac{Tx}{a^2} = \frac{\pi^2}{gt^2} \cdot \frac{T\alpha}{a}$, und das dem Drehungswinkel α entsprechende Torsionsmoment $Pa = \frac{\pi^2}{gt^2} \cdot T\alpha$.

Wenn nun die Anziehungskräfte der Körper wie die Massen derselben und umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen wachsen (s. §. 246, Beisp. 3), so können wir die von K hervorgebrachte Anziehungskraft P mit dem der Anziehungskraft der Erde entsprechenden Gewichte G des kleinen Körpers an der Torsionswaage wie folgt vergleichen:

$$\frac{P}{G} = \frac{K : s^2}{E : r^2},$$

wobei s die Entfernung MK der Mittelpunkte r beider Massen G und K von einander, r den Halbmesser der Erde und E das Gewicht derselben bezeichnet. Wir erhalten nun das letztere

$$E = \frac{KGr^2}{Ps^2},$$

und wenn wir statt $E = {}^4/_3\, \pi\, r^3 \, . \, \varepsilon\gamma$ setzen, die Dichtigkeit der Erde:

$$\gamma_1 = \varepsilon\gamma = \frac{3E}{4\pi r^3} = \frac{3KGr^2}{4\pi P r^3 s^2} = \frac{3KG}{4\pi P r s^2} = \frac{3KG}{4\pi r s^2} \cdot \frac{gt^2a^2}{\pi^2 Tx},$$

oder wenn wir statt $\frac{g}{\pi^2}$ die Länge l des Secundenpendels (s. §. 263) einführen,

$$\gamma_1 = \varepsilon\gamma = \frac{3Klt^2}{4\pi r x s^2} \cdot \frac{Ga^2}{T},$$

und daher das specifische Gewicht derselben:

$$\varepsilon = \frac{3Klt^2}{4\pi r x s^2} \cdot \frac{Ga^2}{T\gamma}.$$

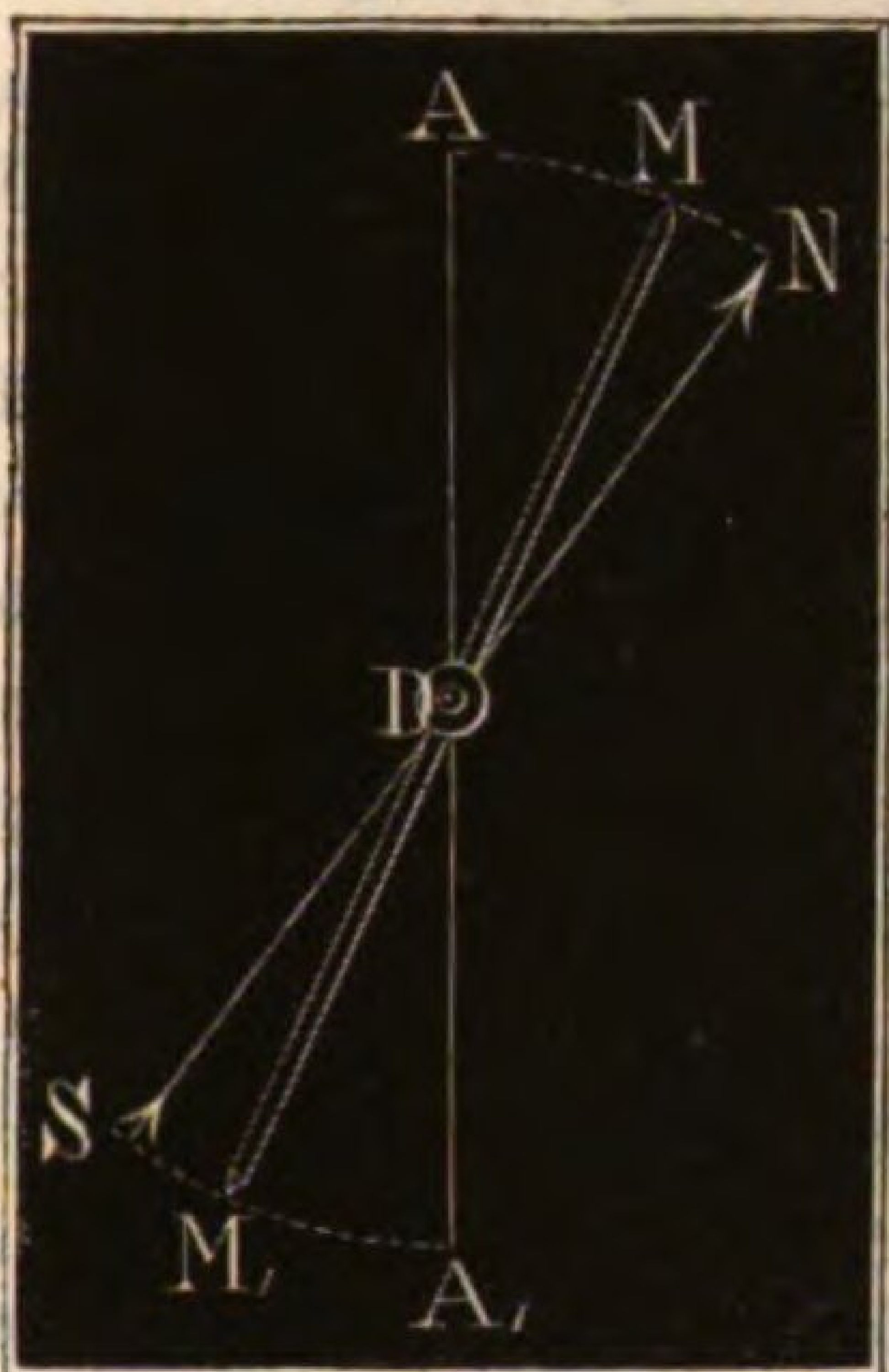
Mittels des einfachen Torsionspendels oder der sogenannten Coulomb'schen Drehwaage fand zuerst Cavendish: $\varepsilon = 5{,}48$; oder nach Hutton's Revision: $\varepsilon = 5{,}32$; später bei Zuhülfenahme des Gauß-Poggendorff'schen Spiegelapparates, Reich: $\varepsilon = 5{,}43$, endlich Baily, durch Versuche in größerem Maaßstabe: $\varepsilon = 5{,}675$. Es ist also die mittlere Dichtigkeit der Erde ohngefähr gleich der Dichtigkeit des Eisenglanzes.

Anmerkung. Ueber die Ausführung der Versuche zur Bestimmung der Dichtigkeit der Erde ist nachzusehen: Gehler's physikal. Wörterbuch, Bd. III, ferner die Abhandlung von Reich »Versuche über die mittlere Dichtigkeit der Erde, Freiberg 1838« und die von Baily, Experiments with the torsion rod for determining the mean density of the Earth, London 1843.

Magnetismus. §. 8. Die Torsionswaage wird auch angewandt, um die Directionskraft oder das Drehungsmoment eines Magneten oder einer Magnetnadel (franz. aiguille aimantée, engl. magnetic-needle) zu fin-

den. Ersetzen wir den Querarm einer solchen Waage durch eine Magnetnadel oder einen Magnetstab MDM_1, Fig. 649, so stellt sich derselbe so, daß seine Directionskraft von der Torsionskraft aufgehoben wird. Weicht der unmagnetische Arm in der Ruhelage AA_1 um den Winkel $ADN = \alpha$ vom magnetischen Meridiane NS ab, und stellt sich der Magnetstab MM_1 so, daß seine Axe um den Winkel $MDN = \delta$ von dem Meridiane NS absteht, so haben wir denjenigen Componenten R_1 der Directionskraft R, welcher die Umdrehung der Nadel bewirkt und von der Torsionskraft aufgehoben wird, $R_1 = R \sin. \delta$. Die Torsionskraft P ist hingegen dem Torsionswinkel $MDA = \alpha - \delta$ proportional, läßt sich daher $= P = P_1 (\alpha - \delta)$ setzen; man hat daher $R \sin. \delta = P_1 (\alpha - \delta)$ und folglich Magnetismus.

Fig. 649



$$R = \left(\frac{\alpha - \delta}{\sin. \delta}\right) P_1 = \left(\frac{\alpha - \delta}{\delta}\right) P_1,$$

wenn die Declination oder der Ablenkungswinkel δ klein ist.

Nach dem vorigen Paragraphen läßt sich aber die Torsionskraft P mittels der Formel

$$P = \frac{\pi^2}{gt^2} \cdot \frac{Tx}{a^2} = \frac{\pi^2}{gt^2} \cdot \frac{Ta(\alpha - \delta)}{a^2} = \frac{\pi^2}{gt^2} \cdot \frac{T(\alpha - \delta)}{a}$$

aus der Schwingungsdauer t u. s. w. des unmagnetischen Torsionspendel berechnen, und folglich hiernach auch die Directionskraft

$$R = \left(\frac{\alpha - \delta}{\delta}\right) P_1 = \frac{P}{\delta} = \frac{\alpha - \delta}{\delta} \cdot \frac{\pi^2}{gt^2} \cdot \frac{T}{a}$$

des Magnetstabes finden.

Das Moment dieser Kraft ist bei der Declination $MDN = \delta$ der Nadel, wenn wir annehmen, daß dieselbe ihren Sitz in dem Abstande $DM = a$ von der Drehungsaxe habe,

$R_1 a = R a \sin. \delta$ annähernd, bei kleiner Declination

$$= R a \delta = (\alpha - \delta) \cdot \frac{\pi^2}{gt^2} \cdot T.$$

Dieses Moment $(R a \sin. \delta)$ ist für $\delta = 1$, d. h. wenn die Magnetnadel rechtwinkelig gegen die Magnetrichtung steht, am größten, und zwar $= Ra$, und dagegen für $\delta = 0$, d. h. wenn die Axe der Magnetnadel in den magnetischen Meridian fällt, am kleinsten, nämlich $=$ Null.

§. 9. Da die Directionskraft R der Magnetnadel keinen Druck auf die Drehaxe verursacht, also die Nadel kein Bestreben zum Fortschreiten,

Magnetismus. sondern nur ein Bestreben zur Drehung hat, wenn sie außerhalb des magnetischen Meridians steht, so folgt, daß die ganze Wirkung des Erdmagnetismus auf einen Magnet aus einem Kräftepaare $\frac{R}{2}, -\frac{R}{2}$ mit dem größten Momente Ra bestehen müsse. Da sich ferner jedes Kräftepaar $\frac{R}{2}, -\frac{R}{2}$ durch unendlich viele andere Paare $\frac{R}{2}, -\frac{R_1}{2}; \frac{R_2}{2}, -\frac{R_2}{2}$ u. s. w. ersetzen läßt, deren Momente Ra, $R_1 a_1$, $R_2 a_2$ u. s. w. alle einander gleich sind, so folgt, daß weder R noch a, also weder die Directionskraft noch ihr Angriffspunkt, sondern nur ihr Moment Ra bestimmt ist. Dieses Drehungsmoment Ra ist überdies noch von zwei Factoren μ_1 und S, wovon μ_1 dem Erd- und S dem Stab- oder Nadelmagnetismus entspricht, abhängig, weshalb wir $R = \mu_1 S$ und $Ra = \mu_1 Sa$ setzen können. Was endlich noch das Maaß μ_1 des Erdmagnetismus anlangt, so ist dieses bei einer horizontalschwingenden Nadel, wie wir seither angenommen haben, nur der horizontale Component der Intensität μ des ganzen Erdmagnetismus, denn der vertikale Component μ_2 wird durch die Unterstützung oder Aufhängung der Nadel aufgehoben. Ist ι die Inclination oder die Abweichung der magnetischen Erdaxe von dem Horizonte, so haben wir den horizontalen Componenten

$$\mu_1 = \mu \cos.\iota,$$

dagegen den vertikalen

$$\mu_2 = \mu \sin.\iota,$$

und endlich das Drehungsmoment einer Magnetnadel:

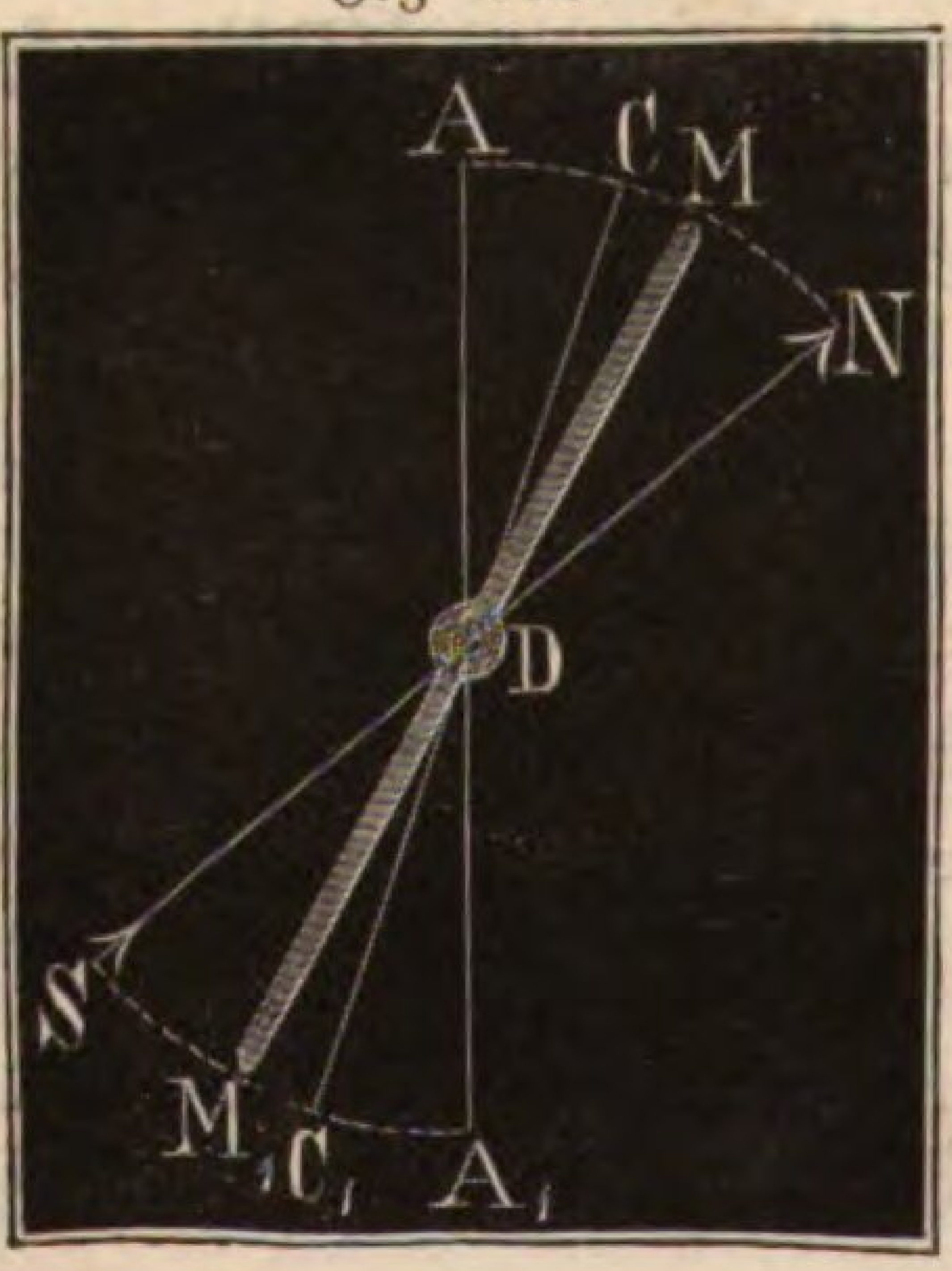
$$R\, a \sin.\delta = \mu \cos.\iota \,.\, Sa \sin.\delta,$$

also ihren größten Werth

$$Ra = \mu Sa \cos.\iota.$$

Schwingungen einer Magnetnadel. §. 10. Man kann auch das Drehungsmoment einer Magnetnadel aus der Schwingungszeit derselben selbst berechnen. Bringt man die aufgehängte Magnetnadel MDM_1, Fig. 650, aus ihrer durch das Gleichgewicht zwischen der Torsions- und der Magnetkraft bedingten Ruhelage, so daß sie von dieser um den kleinen Winkel $MDC = \varphi$ abweicht, so nimmt entweder die magnetische Directionskraft R um $R\varphi$ zu und die Torsionskraft um $P_1 \varphi$ ab, oder es tritt das Umgekehrte ein, in jedem Falle erwächst also aus beiden eine Kraft $(R + P_1)\varphi$ oder ein Mo-

Fig. 650.



ment $(R+P_1)\varphi a = (R+P_1)x$, welches den Magneten nach der Ruhelage zurücktreibt. Ist nun T das Trägheitsmoment der Nadel, so haben wir folglich die Beschleunigung, welche dieser Kraft entspricht, Schwingungen einer Magnetnadel.

$$p = \frac{(R+P_1)\,ax}{T}\,g,$$

und setzen wir dieselbe $= \mu x$, so erhalten wir

$$\mu = \left(\frac{R+P_1}{T}\right) ag,$$

so wie die Schwingungsdauer

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} = \pi\sqrt{\frac{T}{(R+P_1)ag}} = \frac{\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{T}{(R+P_1)a}},$$

oder, wenn ν das Verhältniß $\frac{P_1}{R} = \frac{\delta}{\alpha-\delta}$ der Torsionskraft zur magnetischen Kraft bezeichnet,

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{T}{(1+\nu)Ra}}.$$

Hat man t durch Beobachtungen gefunden, so kann man hiernach umgekehrt das magnetische Umdrehungsmoment finden, es ist nämlich

$$Ra = \frac{\pi^2}{gt^2}\cdot\frac{T}{1+\nu}.$$

Ist die Torsionskraft klein, fällt namentlich die Ruhelage MM_1 nahe in den magnetischen Meridian, so kann man ν vernachlässigen und

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{T}{Ra}}, \text{ so wie } Ra = \frac{\pi^2}{gt^2}\cdot T \text{ setzen.}$$

Noch können wir statt Ra den oben angegebenen Werth ein- und daher

$$\mu\, Sa\, cos.\,\iota = \frac{\pi^2}{gt^2}\cdot T \text{ setzen.}$$

Für eine im magnetischen Meridiane schwingende Inclinationsnadel ist dagegen $\mu Sa = \frac{\pi^2}{gt^2}\cdot T$, und für eine Nadel, deren Umdrehungsaxe in dem magnetischen Meridiane liegt, die sich daher selbst vertikal zu stellen sucht:

$$\mu Sa\, sin.\,\iota = \frac{\pi^2}{gt^2}\cdot T.$$

Die Formel $\mu Sa\, cos.\,\iota = \frac{\pi^2}{gt^2}\cdot T$ giebt uns in $\mu Sa\, cos.\,\iota$ ein Product von vier Factoren; da sich aber die Inclination ι durch Beobachtungen an einer Magnetnadel bestimmen und sich Sa auf eine bestimmte Weise nicht in seine Factoren zerlegen läßt, so bleibt nur eine Zerlegung

des bekannten Productes μSa in die Factoren μ und Sa zu vollziehen übrig. Wie sich diese Zerlegung mittels Declinationsbeobachtungen ermöglichen läßt, wird aus Folgendem hervorgehen.

Magnetische Anziehungsgesetze.

§. 11. Die Kräfte, mit welchen sich die ungleichnamigen Pole zweier Magnete anziehen und die gleichnamigen Pole derselben abstoßen, stehen im umgekehrten Verhältnisse der Quadrate der Entfernungen. Man überzeugt sich hiervon am einfachsten durch die Beobachtungen an einer kleinen Magnetnadel, welche man in der Nähe eines größeren Magnetstabes schwingen läßt. Zu diesem Zwecke legt man den Magnetstab horizontal und parallel dem magnetischen Meridiane, so daß sein Nordpol gegen Nord, also sein Südpol gegen Süd gekehrt ist, und bringt eine kleine Declinationsnadel in die Verlängerung der Axe des Magnetstabes. Ist nun der Abstand s des Stiftes dieser Nadel von dem einen Pol des Magnetstabes viel kleiner als der Abstand von dem anderen, so kann man die Wirkung des letzteren auf die Nadel Null setzen und annehmen, daß durch die Wirkung des näheren Poles der Coefficient μ_1 der erdmagnetischen Kraft noch um einen gewissen Werth $\varkappa_1$ oder $\varkappa_2$ vergrößert werde. Ist nun die Schwingungszeit der Nadel $= t$, wenn der Magnetstab sich gar nicht in der Nähe derselben befindet, dagegen $= t_1$, wenn der nähere Pol dieses Stabes um s_1 von dem Stifte der Nadel absteht, und $= t_2$, wenn dieser Pol um s_2 von dem Nadelstifte absteht, so haben wir

$$\mu_1 Sa = \frac{\pi^2}{g\,t^2} \cdot T,\ (\mu_1 + \varkappa_1)\ Sa = \frac{\pi^2}{g t_1^2}\,T \text{ und } (\mu_1 + \varkappa_2) Sa = \frac{\pi^2}{g t_2^2} \cdot T,$$

daher folgt durch Division

$$\frac{\mu_1 + \varkappa_1}{\mu_1} = \frac{t^2}{t_1^2} \text{ und } \frac{\mu_1 + \varkappa_2}{\mu_1} = \frac{t^2}{t_2^2}, \text{ folglich}$$

$$\varkappa_1 = \left(\frac{t^2 - t_1^2}{t_1^2}\right) \mu_1 \text{ und } \varkappa_2 = \left(\frac{t^2 - t_2^2}{t_2^2}\right) \mu_1, \text{ endlich}$$

$$\varkappa_1 : \varkappa_2 = \frac{t^2 - t_1^2}{t_1^2} : \frac{t^2 - t_2^2}{t_2^2},$$

oder, wenn statt t, t_1 und t_2 die Schwingungszahlen $n = \frac{60''}{t}$, $n_1 = \frac{60''}{t_1}$ und $n_2 = \frac{60''}{t_2}$ eingeführt werden,

$$\varkappa_1 : \varkappa_2 = n_1^2 - n^2 : n_2^2 - n^2.$$

Wenn nun die Wirkung des Magnetstabes auf die Nadel dem umgekehrten Quadrate der Entfernung proportional ist, so muß auch

$$\varkappa_1 : \varkappa_2 = s_2^2 : s_1^2, \text{ und folglich auch}$$

$$\frac{n_1^2 - n^2}{n_2^2 - n_1} = \frac{s_2^2}{s_1^2}$$

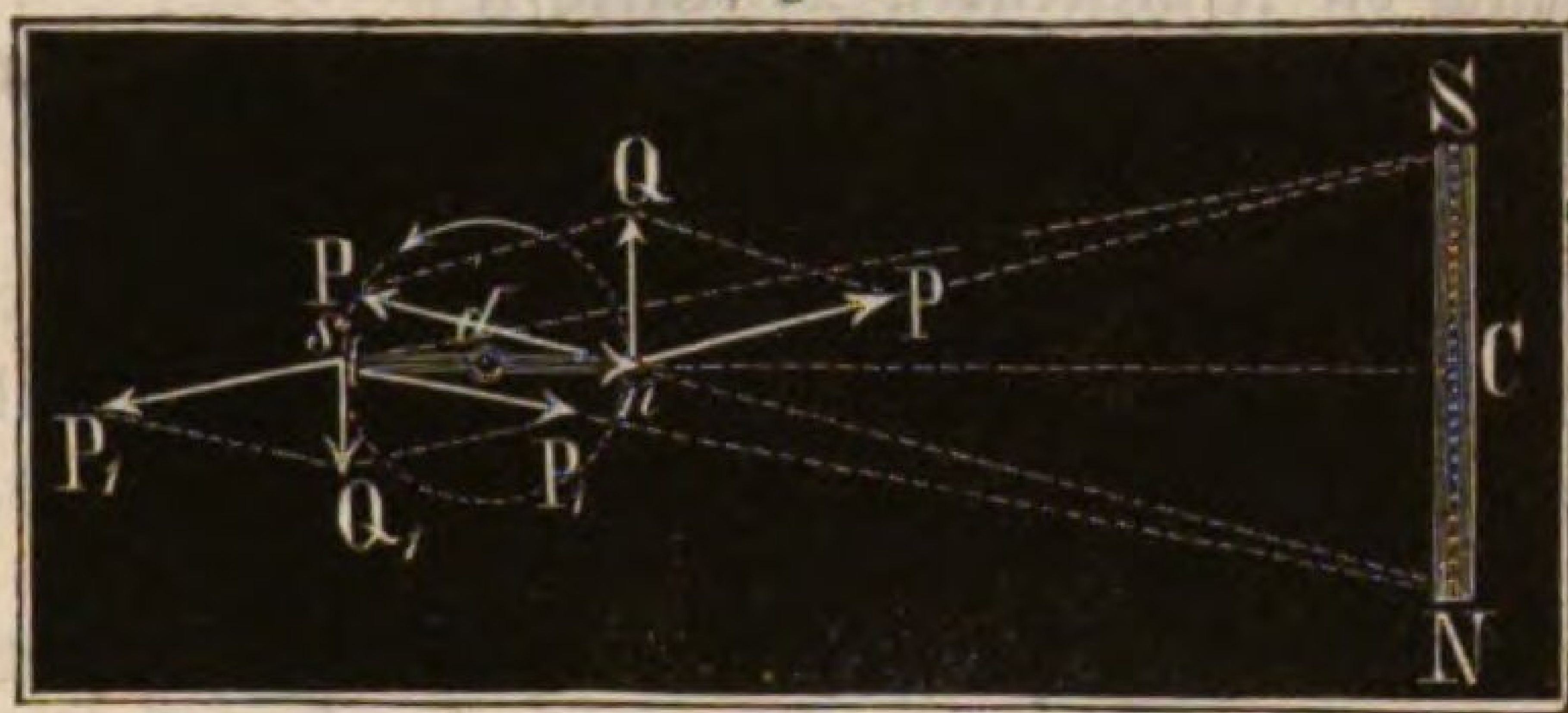
sein, was auch durch die Beobachtungen bestätigt wird.

§. 12. Die Wirkungen eines Magnetstabes NS auf eine Magnetnadel ns fallen am einfachsten aus, wenn der Magnetstab rechtwinkelig gegen den magnetischen Meridian gelegt wird, und zwar entweder so, daß sich der Stift d der Nadel ns, Fig. 651, in der Verlängerung von NS, oder so, daß er sich in dem durch die Mitte C gehenden Perpendikel von NS, Fig. 652, befindet. Setzen wir vor der Hand die Kraft, welche ein Magnetische Anziehungsgesetze.

Fig. 651.



Fig. 652.



Pol von NS auf einen Pol von ns in der Entfernung Eins ausübt, $= K$, so haben wir für den ersten Fall, Fig. 651, wenn a die Länge NS und e die Entfernung Cd der Mittelpunkte C und d von NS und ns bezeichnet, die Kraft s, mit welcher von N angezogen wird, $P = \frac{K}{Ns^2}$, annähernd $= \frac{K}{(e - \frac{1}{2}a)^2}$, und die, mit welcher s von S abgestoßen wird,

$$P_1 = \frac{K}{Ss^2} = \frac{K}{(e + \frac{1}{2}a)^2},$$

daher die Mittelkraft aus P und P_1:

$$Q = P - P_1 = K\left(\frac{1}{(e - \frac{1}{2}a)^2} - \frac{1}{(e + \frac{1}{2}a)^2}\right)$$

$$= \frac{(e + \frac{1}{2}a)^2 - (e - \frac{1}{2}a)^2}{(e + \frac{1}{2}a)^2\,(e - \frac{1}{2}a)^2}\,K = \frac{2\,a\,e\,K}{(e + \frac{1}{2}a)^2\,(e - \frac{1}{2}a)^2},$$

oder, wenn $\frac{1}{2}a$ gegen e klein ist,

$$Q = \frac{2\,a\,e\,K}{e^4} = \frac{2\,a\,K}{e^3}.$$

Ebenso ist die Mittelkraft aus der Anziehungs- und Abstoßungskraft des Nordpoles n:

$$-Q = -\frac{2\,a\,K}{e^3},$$

und daher das Moment des von diesen Mittelkräften gebildeten Kräftepaares, wenn l die Entfernung der Pole der Nadel bezeichnet,

$$Q\,l = \frac{2\,a\,l\,K}{e^3}.$$

Magnetische Anziehungsgesetze.

Für den zweiten Fall (Fig. 652) sind hingegen die Anziehungs- und Abstoßungskräfte in s:

$$P = \frac{K}{Ns^2} = \frac{K}{Ss^2}, \text{ und die in } n:$$

$$P_1 = \frac{K}{Sn^2} = \frac{K}{Nn^2},$$

folglich die resultirenden Mittelkräfte:

$$Q = 2 \cdot \frac{CN}{Ns} \cdot P = \frac{aP}{Ns} = \frac{aK}{Ns^3} \text{ und } Q_1 = \frac{aK}{Nn^3}.$$

Wenn nun $\frac{1}{2}a$ und $\frac{1}{2}l$ ansehnlich kleiner sind als e, so können wir statt $Ns = Ss$ und $Nn = Sn$ den Mittelwerth $Nd = Sd$ und dafür den Näherungswerth $Cd = e$ einführen, erhalten demnach

$$Q = Q_1 = \frac{aK}{e^3},$$

und daher das Moment des von Q und Q_1 gebildeten Kräftepaares

$$Ql = \frac{alK}{e^3},$$

d. i. halb so groß als im vorigen Falle, was auch durch die Beobachtungen vollkommen bestätigt wird.

Uebrigens ist aber die Kraft K selbst noch ein Product von der Intensität $\varkappa$ des Magnetismus in ns und von der (S) in NS, also $K = \varkappa S$ zu setzen, weshalb nun für den ersten Fall

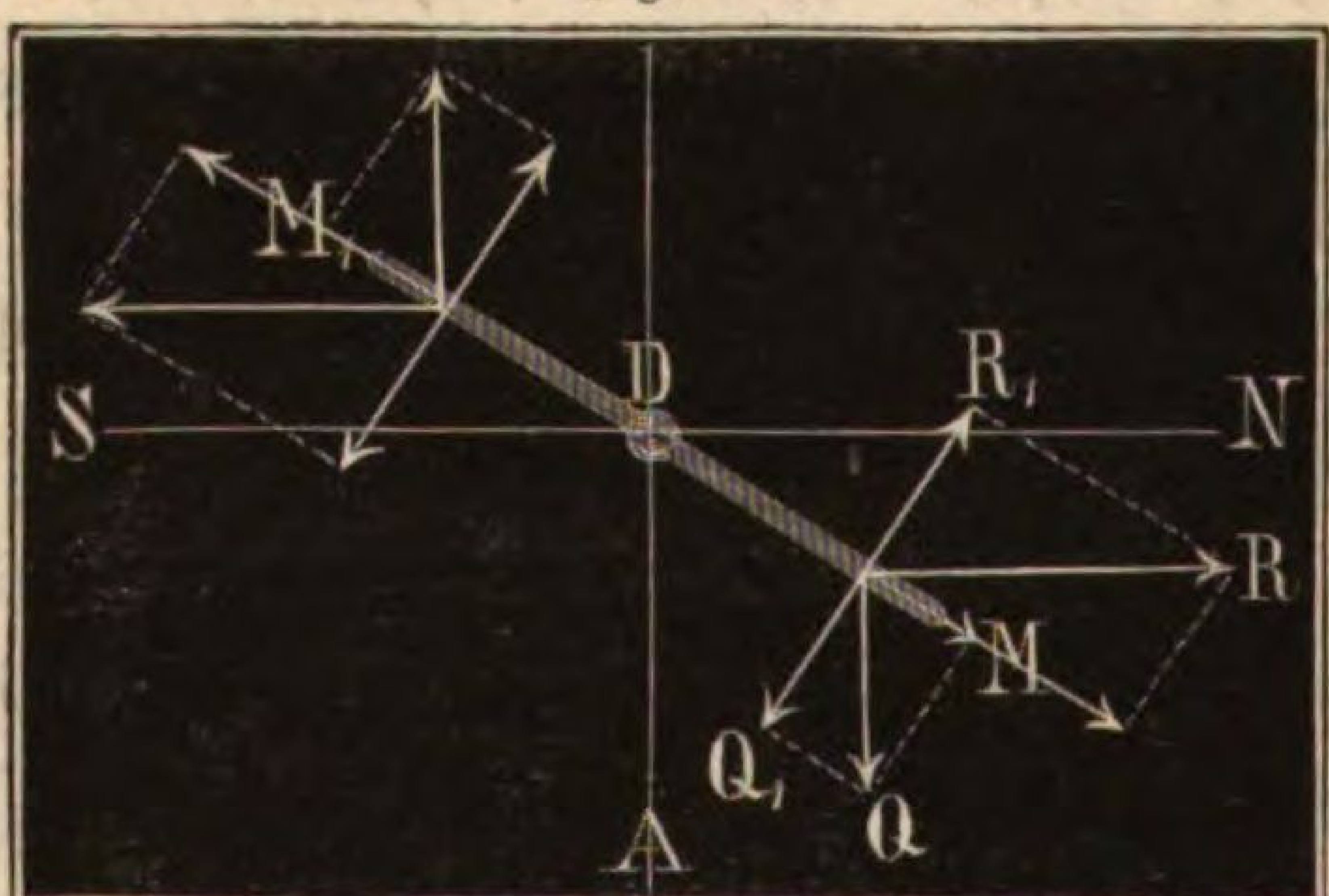
$$Q = \frac{2\varkappa Sa}{e^3}, \text{ und für den zweiten}$$

$$Q = \frac{\varkappa Sa}{e^3} \text{ resultirt.}$$

Bestimmung des Erdmagnetismus.

§. 13. Ueberlassen wir in beiden der vorher betrachteten Fälle die Magnetnadel ns der Einwirkung des Magneten NS, so nimmt dieselbe eine neue Stellung MM_1, Fig. 653, ein, wobei sich die Kraft Q, mit welcher der Magnetstab auf die Nadel einwirkt, mit der Kraft R, die der Erdmagnetismus auf sie ausübt, ins Gleichgewicht setzt. Ist nun δ der Ablenkungswinkel $MDN = SDM_1$, so haben wir die sich das Gleichgewicht haltenden

Fig. 653.



Seitenkräfte von Q und R: $Q_1 = Q \cos.\delta$ und $R_1 = R \sin\delta$, folglich $Q \cos.\delta = R \sin.\delta$, und sonach $tang\,\delta = \frac{Q}{R}$, oder, wenn wir nach dem vorigen Paragraphen entweder $Q = \frac{2\varkappa Sa}{e^3}$ oder $Q = \frac{\varkappa Sa}{e^3}$, und nach §. 9, $R = \mu_1 \varkappa$ setzen, entweder Bestimmung des Erdmagnetismus.

$$tang.\,\delta = \frac{2\varkappa Sa}{\mu_1 \varkappa e^3} = \frac{2Sa}{\mu_1 e^3} \text{ oder } tang.\,\delta = \frac{Sa}{\mu_1 e^3}.$$

Hiernach läßt sich nun umgekehrt das Verhältniß des magnetischen Momentes des Stabes NS zu der Intensität des Erdmagnetismus finden, denn es ist entweder

$$\frac{Sa}{\mu_1} = \tfrac{1}{2} e^3\, tang.\,\delta \text{ oder } = e^3\, tang.\,\delta.$$

Die Beobachtung der Schwingungsdauer des Magnetstabes NS giebt uns aber (nach §. 10) das Product

$$\mu_1 Sa = \frac{\pi^2}{g t^2} \cdot T;$$

daher folgt durch Combination beider Gleichungen das magnetische Moment des Stabes entweder

$$Sa = \frac{\pi}{t\sqrt{g}} \sqrt{\tfrac{1}{2} T e^3\, tang.\,\delta} \text{ oder } Sa = \frac{\pi}{t\sqrt{g}} \sqrt{T e^3\, tang.\,\delta},$$

und das Maaß der horizontalen Componenten des Erdmagnetismus, entweder

$$\mu_1 = \frac{\pi}{t\sqrt{g}} \sqrt{\frac{2\,T\, cotang.\,\delta}{e^3}} \text{ oder } = \frac{\pi}{t\sqrt{g}} \sqrt{\frac{T\, cotang.\,\delta}{e^3}},$$

je nachdem man δ auf die eine oder die andere Weise beobachtet hat.

Durch Division mit dem Cosinus der Inclination ($cos.\,\iota$) bekommt man die ganze Stärke des Erdmagnetismus: $\mu = \frac{\mu_1}{cos.\,\iota}$.

Um sich einen klaren Begriff von dem Coefficienten oder dem Maaße μ des Erdmagnetismus zu verschaffen, muß man in der Formel

$Ra = \mu Sa$ und $Ql = \frac{\varkappa S l a}{e^3}$, $a = l = e = 1$, so wie auch $\varkappa = S = 1$ setzen; dann bekommt man $Ra = \mu$ und $Ql = 1$; es ist hiernach

1) das Maaß μ der Intensität des Erdmagnetismus dasjenige Moment, mit welchem durch den Erdmagnetismus eine Magnetnadel umgedreht wird, deren magnetisches Moment = Eins ist; und es ist

2) das magnetische Moment einer Magnetnadel = Eins, wenn sie einer andern ihr gleichen und mit ihr gleich starken Magnetnadel bei der zweiten, in Fig. 652 abgebildeten Stellung in der Entfernung Eins ein Moment Eins (1 Millimetermilligramm) ertheilt.

Bestimmung des Erdmagnetismus.

Nach Weber's Angaben ist, wenn die Acceleration der Schwere 1 Millimeter wäre:

in Göttingen $\mu = 1,774$ Millimetermilligramm,
in München $\mu = 1,905$ » »
in Mailand $\mu = 2,018$ » »

für die Acceleration der Schwere von 9810 Millimeter im mittleren Europa sind aber diese Werthe $\sqrt{9810} = 99$mal so klein.

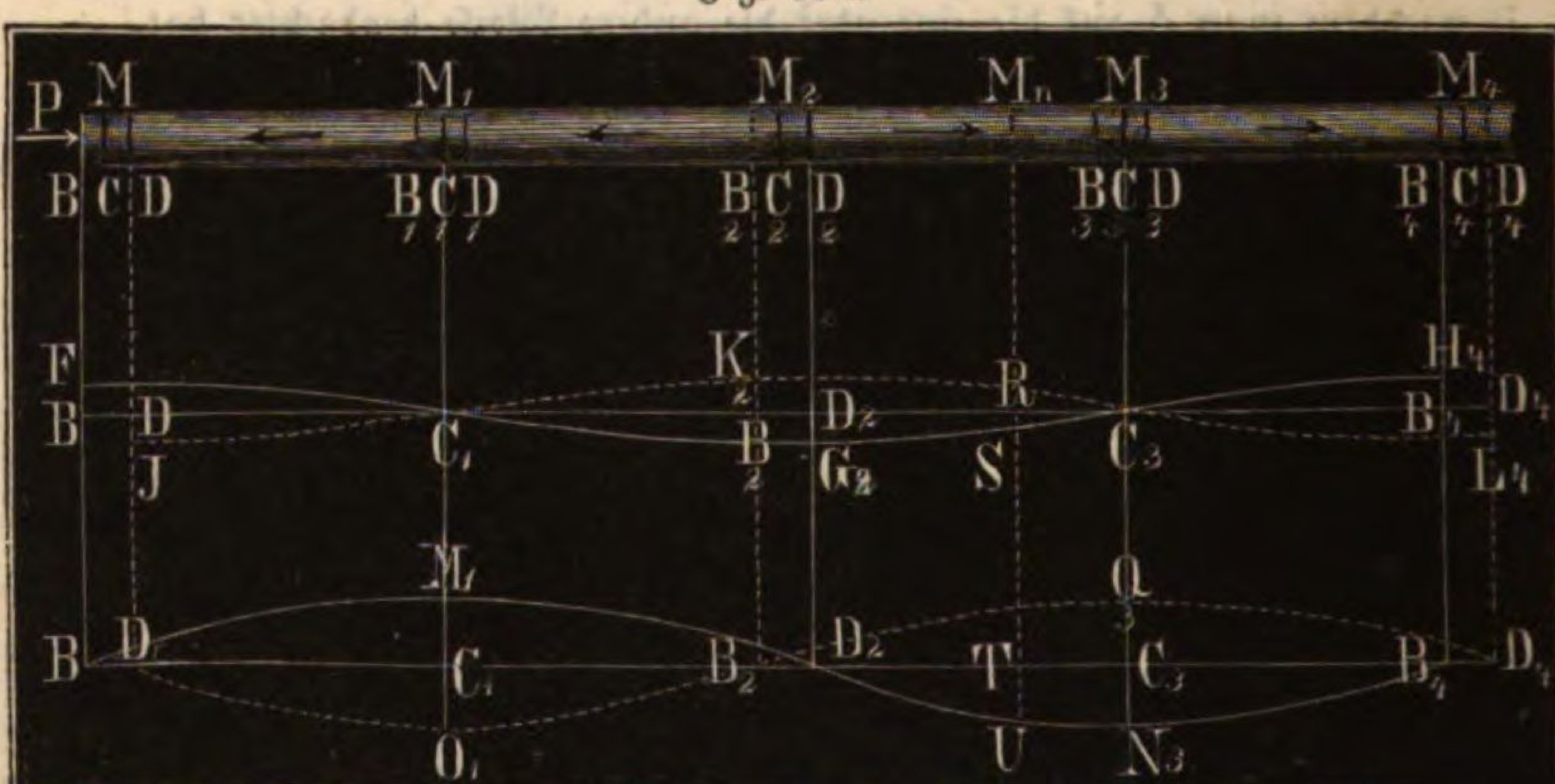
Anmerkung. Zum tieferen Studium des Magnetismus sind außer der Physik von Pouillet und Müller, vorzüglich noch Lamont's Handbuch des Erdmagnetismus (Berlin 1849) und Gauß und Weber's Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereines, Göttingen und Leipzig 1837 bis 1843, zu empfehlen.

Wellen.

§. 14. Wir haben bei den Längen- und Querschwingungen prismatischer Körper im Obigen (§. 3, 4 und 5) gar nicht auf die Masse dieser Körper Rücksicht genommen, sondern nur die Masse des den Körper spannenden Gewichtes in Betracht gezogen. Im Folgenden wollen wir hingegen von einem spannenden Gewichte ganz absehen, und voraussetzen, daß der Körper durch einen momentanen Impuls, oder durch eine nur eine kurze Zeit lang wirkende Kraft in eine schwingende Bewegung gesetzt worden sei, und daher den schwingenden Körper allein als träge Masse behandeln. Den einfachsten Fall bieten auch hier die Längenschwingungen dar, betrachten wir daher auch diese zunächst.

Wir wissen aus dem Obigen, daß sämmtliche Theile einer prismatischen Stange BM_4, Fig. 654, in Schwingungen versetzt werden, wenn man

Fig. 654.



diese Stange durch eine in ihrer Axenrichtung wirkende Kraft P ausgedehnt oder comprimirt hat. Nicht allein das Endelement M, sondern auch

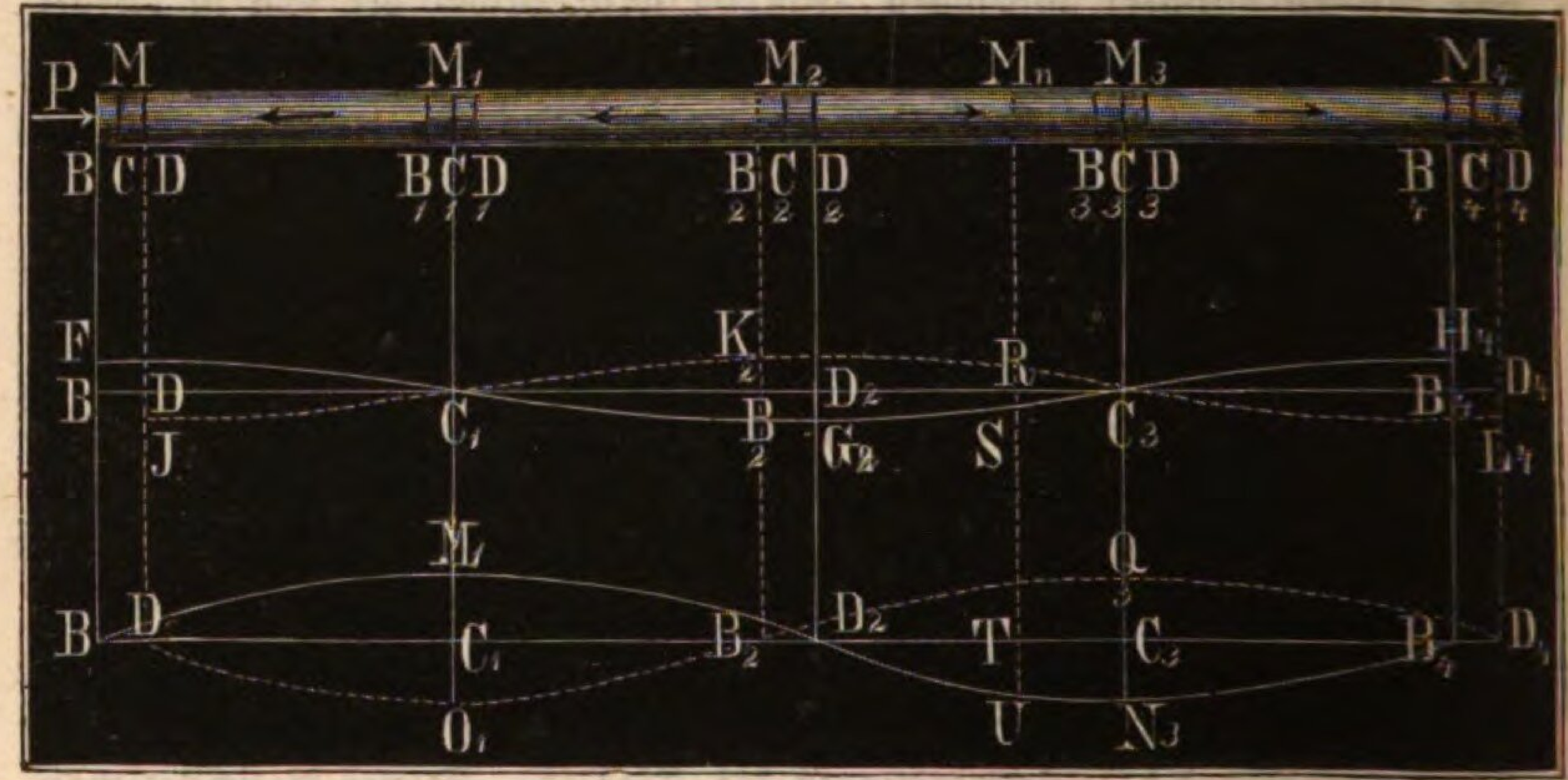
jedes andere Element M_1, M_2 . . . der Stange schwingt dann innerhalb eines gewissen Raumes BD, B_1D_1, B_2D_2 . . . hin und her, den man die Schwingungsamplitude nennt; auch läßt sich, wenn die Stange sehr lang ist, annehmen, daß dieser Raum bei allen Elementen einer und derselbe sei. Wenn nun auch die Zeit, innerhalb welcher ein Stangenelement eine Schwingung vollendet, an allen Stellen der Stange eine und dieselbe ist, so können wir doch nicht voraussetzen, daß sich alle diese Elemente M, M_1, M_2 u. s. w. gleichzeitig in derselben Bewegungsphase, z. B. gleichzeitig in der Mitte ihrer Schwingung befinden, sondern wir müssen vielmehr annehmen, daß die Mittheilung der von M ausgehenden Bewegung Zeit erfordere und derselbe Bewegungszustand eines Elementes um so später eintrete, je entfernter dieses Element von der Bewegungsquelle P entfernt ist. Es ist hiernach möglich, daß in dem Augenblicke, wenn M einen Schwung BD hin und zurück gemacht hat, das Element M_1 noch auf dem Rückwege begriffen, z. B. erst in C_1 sei, daß ferner das Element M_2 erst einen einfachen Schwung gemacht habe, also den Ort D_2 einnehme, daß das Element M_3 erst die Hälfte des Hinweges zurückgelegt habe, daher in C_3 stehe, daß endlich ein Element M_4 erst eine Schwingung beginne, also mit M gleichzeitig schwinge. Die Geschwindigkeit, mit welcher eine und dieselbe Bewegungsphase von M aus nach und nach in dem Körper fortschreitet, heißt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit (franz. vitesse de propagation, engl. velocity of propagation) der Schwingungen des Körpers. Ferner bezeichnet man den Inbegriff aller derjenigen Elemente von M bis M_4 des Körpers, welche sich in den sämmtlichen Bewegungsphasen einer Schwingung befinden, also zwischen zwei Elementen M und M_4 von gleichem Bewegungszustande enthalten sind, mit dem Namen einer Welle (franz. ondulation, engl. undulation, waving) des schwingenden Körpers, und nennt den Abstand MM_4 selbst die Länge der Welle. Eine Welle besteht aus einem Hintertheile BD_2, innerhalb dessen sich die rückkehrenden Elemente, wie M_1, M_2 . . . befinden, und aus einem Vordertheile D_2B_2, welcher die noch vorwärtsgehenden Elemente M_3, M_4 . . . einschließt; man nennt auch wohl BD_2 den verdünnten und D_2B_4 den verdichteten Theil der Welle, weil alle rückkehrenden Elemente innerhalb BD_2 in Ausdehnung, und alle hingehenden Elemente D_2B_4 noch im Zusammendrücken begriffen sind.

Wellen.

§. 15. Die Bewegungs- und Geschwindigkeitsphasen innerhalb einer Welle lassen sich recht gut durch die Ordinaten von Schlangenlinien wie $FC_1G_2C_3H_4$ und $BM_1D_2N_3B_4$ darstellen. In dem Augenblicke, wenn M in B eine neue Schwingung beginnt, und die größte Elongation und Null Geschwindigkeit hat, befindet sich M_1 in der Ruhelage,

Wellen. hat also die Elongation Null und die größte Geschwindigkeit; beides wird auch durch die genannten Curven angezeigt, denn die erste oder Elongationscurve geht in B um die Amplitude $BF = CB$ über die Axe BD_4 hin und durchschneidet in C_1 diese Axe, wogegen die zweite oder Geschwindigkeitscurve in B durch die Axe hindurchgeht und in C_1 um die Maximalgeschwindigkeit $C_1 M_1$ über der Axe hinläuft In demselben Augenblicke befindet sich ferner das Element M_2 auf der andern Seite im größten Abstande von seiner Ruhelage C_2 und es ist seine Geschwindigkeit wie bei

Fig. 655.



M gleich Null; auch dies ist aus beiden Curven zu ersehen, denn die eine läuft in D_2 um die Amplitude D_2G_2 unterhalb der Axe hin, und die andere schneidet die Axe daselbst, hat also die der Geschwindigkeit entsprechende Ordinate Null. Ebenso werden durch diese Curven die Bewegungs- und Geschwindigkeitsphasen der Elemente M_3, M_4 u. s. w. angegeben. Da z. B. die erste Curve die Axe in C_3 schneidet und die zweite daselbst um den Maximalwerth $C_3 N_3$ unter der Axe hinläuft, so wird dadurch angezeigt, daß in diesem Augenblicke das Element M_3 durch seine Ruhelage mit der Maximalgeschwindigkeit in positiver Richtung hindurch gehe. Will man die Bewegungsphase irgend eines anderen Elementes M_n zwischen M, M_1, M_2 u s. w. im Augenblicke kennen lernen, wo das erste Element M eine neue Schwingung beginnt, so darf man nur von demselben ein Perpendikel auf die besprochenen Curven herablassen. Das Stück RS dieses Perpendikels zwischen der ersten Curve und ihrer Axe entspricht der Elongation dieses Elementes und das Stück TU zwischen der zweiten Curve und ihrer Axe giebt die Geschwindigkeit desselben an. Da beide Ordinaten abwärts gerichtet sind, so deuten sie auch an, daß sowohl die

Elongation als auch die Geschwindigkeit positiv sei, d. i. die Richtung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit habe. Wellen.

Befände sich das Element M in D, träte es also eine rückgängige Bewegung an, so würden sich die verschiedenen Elongationen der übrigen Elemente einer Welle durch die Ordinaten der punktirten Curve $JC_1K_2C_3L_4$, und die Geschwindigkeiten derselben durch die Ordinaten der punktirten Curve $DO_1B_2Q_3D_4$ repräsentiren lassen. Die doppelte Schwingungsdauer eines Elementes, d. i. die Zeit t, innerhalb welcher dasselbe den Weg $BD + DB$ zurücklegt, ist auch gleich der Zeit, innerhalb welcher die Schwingungsbewegung um die ganze Länge l einer Welle fortgepflanzt wird, ist daher c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, so hat man die ganze Länge der Welle:

$$AB_4 = l = c\,.\,2t = 2ct.$$

Die Länge des Hintertheils der Welle ist aber

$$BD_2 = l_1 = BB_2 + B_2D_2 = ct + \lambda,$$

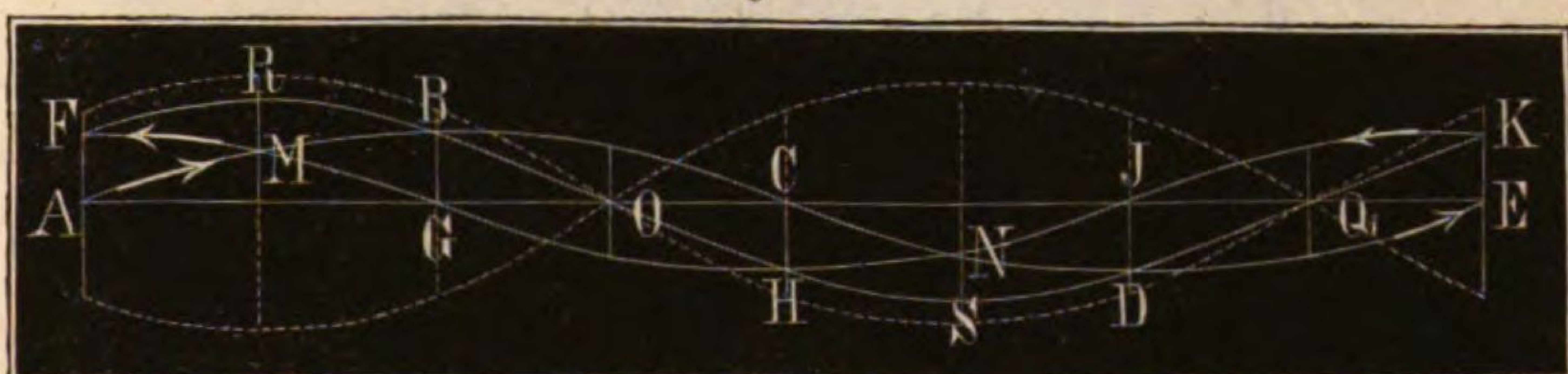
und die des Vordertheiles:

$$D_2B_4 = l_2 = D_2D_4 - B_2D_4 = ct - \lambda,$$

wo λ die ganze Schwingungsamplitude eines Elementes bezeichnet.

Anmerkung. Mit Hülfe der Schwingungscurven lassen sich auch die Erscheinungen vor Augen führen, welche mit der Interferenz der Wellen begleitet sind. Ziehen wir nur zwei gleiche und entgegengesetzt laufende Wellenzüge in Betracht, und hiervon wieder in *ABCDE* und *FGHIK*, Fig. 656, nur diejenigen Curven, deren Ordinaten die Schwingungselongationen abschneiden. Aus den

Fig. 656.



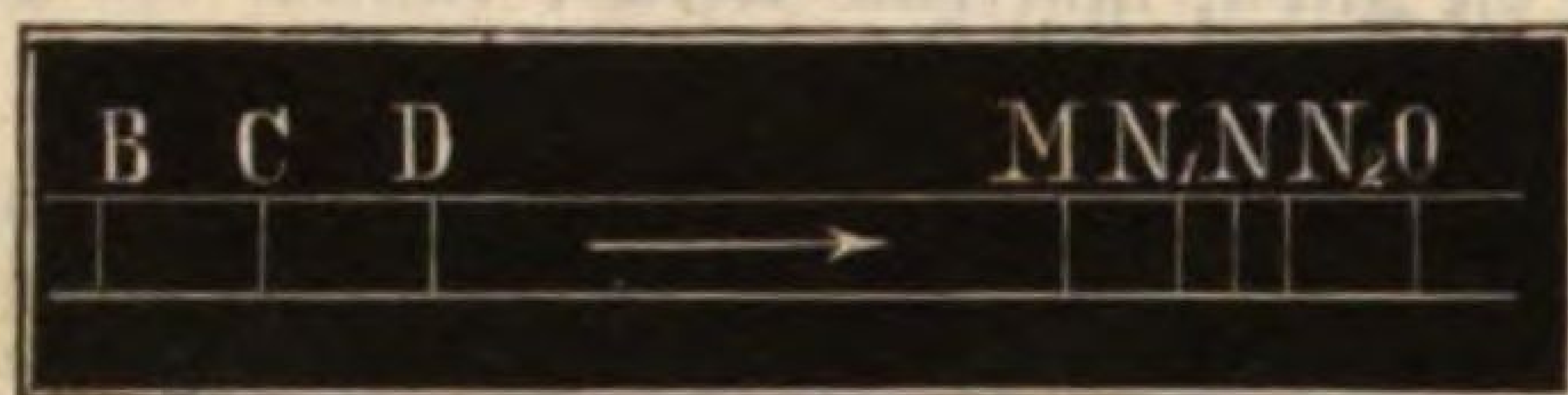
Schwingungselongationen eines zwei Wellen angehörenden Elementes entspringt eine mittlere Elongation, welche genau so gefunden wird, wie jede mittlere Bewegung aus zwei Seitenbewegungen (S. §. 27), und zwar hier durch die algebraische Addition der einfachen Elongationen. Hiernach werden in den Punkten *M* und *N*, wo sich beide Wellen urven begegnen, die Ordinaten verdoppelt, und dagegen in den Punkten *O* und *Q*, wo beide Curven auf entgegengesetzten Seiten von der Axe *AE* gleichviel abstehen, die Ordinaten vernullt, und es resultirt aus beiden Wellencurven eine dritte *FRBOHSDQK*, deren Ordinaten die Elongationen aller Elemente in der Axe *AE* angeben. Während die Wellenzüge *ABC* und *FGH* einander entgegenrücken, ändert sich natürlich auch die resultirende Wellencurve *FRBO* u. s. w.; es ist indessen leicht zu ermessen, daß hierbei die Ruhepunkte *O* und *Q* ihren Ort nicht ändern, da hier die Ordinaten der einfachen Wellenzüge auch während der fortgesetzten Bewegung derselben gleich groß

und entgegengesetzt bleiben. Diese Punkte sind die sogenannten Schwingungsknoten.

Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

§. 16*). Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen läßt sich auf folgende Weise ausmitteln. Denken wir uns den schwingenden Körper BO, Fig. 657, aus unendlichen Elementen, jedes vom Querschnitte A und von der Länge $BC = CD = dx$ bestehend, und nehmen wir an, daß der Bewegungszustand des einen Elementes $BC = Adx$ in einem Zeitelemente dt vollkommen auf das folgende Element $CD = Adx$ übergehe, daß also die Bewegungsphasen in der Axenrichtung des Körpers mit der Geschwindigkeit $c = \frac{dx}{dt}$ fortschreiten. Setzen wir voraus, daß die Elemente BC und CD in der Zeit t von C nach N schwingen und dadurch in die Lagen $MN = dx_1$ und $NO = dx_2$ kommen, und bezeichnen wir die entsprechende Elongation CN durch y. War nun die Trennungsfläche zwischen beiden Elementen vor dt Secunden in N_1 und gelangt diese dt Secunden später nach N_2, so haben wir die entsprechenden Wege der Elemente: $NN_1 = dy_1$ und $NN_2 = dy_2$, ferner die Geschwindigkeiten $v_1 = \frac{dy_1}{dt}$ und $v_2 = \frac{dy_2}{dt}$, und daher die Retardation:

Fig. 657.



$$p = \frac{v_1 - v_2}{dt} = \frac{dy_1 - dy_2}{dt^2}.$$

Da dt Secunden vor dem Zeitpunkte, wo die Elemente BC und CD die Stellen MN und NO einnahmen, N_1 genau in derselben Phase war wie jetzt O, so hat man auch $CN_1 = DO$; und da dt Secunden nach diesem Zeitpunkte N_2 mit M in einerlei Phase war, so folgt auch $CN_2 = BM$. Aus beiden Gleichungen ergiebt sich nun

$N_1O = DO - DN_1 = DO - (CN_1 - CD) = CD$ und
$MN_2 = CN_2 - CM = CN_2 - (BM - BC) = BC$, und daher
$NN_1 = dy_1 = N_1O - NO = CD - NO = dx - dx_2$, sowie
$NN_2 = dy_2 = MN_2 - MN = BC - MN = dx - dx_1$.

Es ist also das Wegelement dy_1 zugleich die Zusammendrückung $dx - dx_2$ des Elementes NO und das Wegelement dy_2 die Zusammendrückung $dx - dx_1$ des Elementes MN. Ist nun noch E der Elasticitätsmodul des schwingenden Stabes, so hat man die aus den Zusammendrückungen hervorgehenden Spannungen der Elemente MN und NO:

$$S_1 = \left(\frac{dx - dx_1}{dx}\right) AE = \frac{dy_2}{dx} \cdot AE \text{ und}$$

Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

$$S_2 = \left(\frac{dx - dx_2}{dx}\right) AE = \frac{dy_1}{dx} \cdot AE.$$

Durch Subtraction dieser beiden Spannungen von einander erhält man nun die verzögernde Kraft: $P = S_2 - S_1 = \left(\frac{dy_1 - dy_2}{dx}\right) AE$, und ist nun noch γ die Dichtigkeit der Stangenelemente BC, CD, also $Adx.\gamma$ das Gewicht und $\frac{Adx.\gamma}{g}$ die Masse M eines Stangenelementes, so hat man die Beschleunigung desselben in N_1 auch

$$p = \frac{P}{M} = \left(\frac{dy_1 - dy_2}{dx}\right) AE \cdot \frac{g}{Adx\gamma} = \frac{gE}{\gamma} \cdot \frac{dy_1 - dy_2}{dx^2}.$$

Durch Gleichsetzen beider Werthe für p erhält man nun die Gleichung

$$\frac{dy_1 - dy_2}{dt^2} = \frac{gE}{\gamma} \cdot \frac{dy_1 - dy_2}{dx^2}, \text{ woraus}$$

$$\frac{dx^2}{dt^2} = \frac{gE}{\gamma}, \text{ oder } c^2 = \frac{gE}{\gamma},$$

also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit (Schallgeschwindigkeit),

$$c = \sqrt{\frac{gE}{\gamma}} = \sqrt{gL},$$

wo L den Elasticitätsmodul nach Länge bezeichnet, folgt.

Beispiel. Nimmt man den Elasticitätsmodul des Tannenholzes $E = 1'800000$ Pfund und das Gewicht eines Cubikfußes desselben $= 30$ Pfd. an, so erhält man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit desselben

$$c = \sqrt{\frac{144.1'8000000}{30} \cdot g} = \sqrt{144 \,.\, 60000 \,.\, g} = 16432 \text{ Fuß},$$

d. i. ungefähr 15 mal so groß als die der Luft.

Anmerkung. Diese Formel für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit gilt auch für eine gespannte Saite, und sogar für das Wasser und für die Luft. Ist p der Druck der Luft auf die Flächeneinheit, so hat man die den Verdichtungsverhältnissen $\frac{dy_1}{dx}$ und $\frac{dy_2}{dx}$ entsprechenden Spannungen nach dem Mariotte'schen Gesetze $S_2 = \frac{pdx}{dx - dy_1}$ und $S_1 = \frac{pdx}{dx - dy_2}$, und daher die bewegende Kraft auf ein Element vom Querschnitte A:

$$P = A\,(S_2 - S_1) = \frac{(dy_1 - dy_2)\,Apdx}{(dx - dy_1)\,(dx - dy_2)},$$

oder da $\frac{dy}{dx}$ nur ein kleiner Bruch ist, also $(dx - dy_1)\,(dx - dy_2) = dx^2$ gesetzt werden kann, $P = \frac{(dy_1 - dy_2)\,Ap}{dx}$. Dieser Ausdruck stimmt mit dem

Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Obigen, wenn man statt p, E einsetzt, vollkommen überein, es ist folglich die Schallgeschwindigkeit in der Luft $c = \sqrt{g \cdot \frac{p}{\gamma}}$.

Bei der Lehre von der Wärme wird im zweiten Bande gezeigt, daß wegen der Wärmeveränderung, welche mit der Dichtigkeitsveränderung der Luft nothwendig verbunden ist, an dieser Formel noch ein Coefficient anzubringen ist. Da die Dichtigkeit γ der Luft ihrer Spannung p proportional ist, so fällt auch p aus der Formel heraus, und es bleibt nur noch die Temperatur t in derselben zurück. Gewöhnlich nimmt man für Luft

$$c = 333 \sqrt{1 + 0{,}00367 \,.\, t} \text{ Meter} = 1061 \sqrt{1 + 0{,}00367 \,.\, t} \text{ Fuß}.$$

Beispiel. Wenn nach der Anmerkung des §. 295, eine Wassersäule durch 15 Pfd. Kraft um 0,000050 seines Volumens zusammengedrückt wird, so läßt sich für diese Flüssigkeit $E = \frac{15}{0{,}000050} = 300000$ Pfd., und daher die Schallgeschwindigkeit in derselben

$$c = \sqrt{31{,}25 \,.\, \frac{300000 \,.\, 144}{66}} = \sqrt{31{,}25 \,.\, \frac{7200000}{11}} = 4523 \text{ Fuß},$$

also ungefähr 4,3 mal so groß als die Schallgeschwindigkeit in der Luft setzen.

Schwingungszeit. §. 17 *). Wir können nun auch die Zeit einer Schwingung finden, indem wir zunächst die Gleichung suchen, welche die Abhängigkeit der Schwingungselongation von der Zeit und von der die Ruhelage des schwingenden Elementes bestimmenden Abscisse x ausdrückt. Sicherlich ist y sowohl eine Funktion von t als auch eine von x, es läßt sich folglich $y = \varphi(t)$ und auch $y = \psi(x)$ setzen.

Aus der ersten dieser beiden Funktionen folgt durch Differenziiren die variable Schwingungsgeschwindigkeit

$$v = \frac{dy}{dt} = \varphi_1(t),$$

und ebenso die entsprechende Acceleration

$$p = \frac{dv}{dt} = \varphi_2(t),$$

wo $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ andere Funktionen von t ausdrücken (vergl. §. 19 *).

Die zweite Funktion giebt das Ausdehnungsverhältniß $\frac{dy}{dx} = \psi_1(x)$, also die Spannung

$$S = AE \cdot \frac{dy}{dx} = AE \cdot \psi_1(x),$$

daher die bewegende Kraft des Massenelementes $dM = Adx \cdot \frac{\gamma}{g}$,

$$dS = AE \cdot \frac{d[\psi_1(x)]}{dx} = \frac{AE\, \psi_2(x)}{dx},$$

und die entsprechende Acceleration $p = \frac{dS}{dM} = \frac{gE}{\gamma}\, \psi_2(x)$; wobei natürlich $\psi_1(x)$ und $\psi_2(x)$ andere Funktionen von x anzeigen.

Setzen wir die beiden Ausdrücke für p einander gleich, so erhalten wir folgende Endgleichung: Schwingungszeit.

$$\varphi_2(t) = \frac{gE}{\gamma} \cdot \psi_2(x), \text{ oder, da } \frac{gE}{\gamma} = c^2 \text{ ist,}$$

$$\varphi_2(t) = c^2 \cdot \psi_2(x).$$

Dieser Differenzialgleichung wird durch folgende Integralgleichung

$$y = \varphi(t) = \psi(x) = F(ct+x) + f(ct-x),$$

wo F und f unbestimmte Funktionen von den in den Parenthesen enthaltenen Größen bezeichnen, entsprochen, denn es ist

$$\varphi_1(t) = \frac{d[\varphi(t)]}{dt} = cF_1(ct+x) + cf_1(ct-x),$$

$$\varphi_2(t) = \frac{d[\varphi_1(t)]}{dt} = c^2F_2(ct+x) + c^2f_2(ct-x)$$

$$= c^2[F_2(ct+x) + f_2(ct-x)], \text{ ferner}$$

$$\psi_1(x) = \frac{d[\psi(x)]}{dx} = F_1(ct+x) - f_2(ct-x) \text{ und}$$

$$\psi_2(x) = \frac{d[\psi_1(x)]}{dx} = F_2(ct+x) + f_1(ct-x), \text{ also wirklich}$$

$$\varphi_2(t) = c^2 \cdot \psi_2(x).$$

Obgleich die Funktion $y = F(ct+x) + f(ct-x)$ eine unbestimmte ist, so läßt sie sich doch, wenn man noch nähere Bestimmungen des schwingenden Körpers giebt, dazu benutzen, um die Schwingungszeit des schwingenden Körpers zu finden. Wie dies in einigen Fällen möglich ist, wird aus Folgendem erhellen.

Anmerkung. Wenn man aus den Formeln $dy = vdt$ und $dx = cdt$, dt eliminirt, so erhält man den Ausdruck $\frac{dy}{dx} = \frac{v}{c}$, oder, da $\frac{dy}{dx}$ die Verdichtung σ des schwingenden Elementes ausdrückt, $\sigma = \frac{v}{c}$; es ist also die Verdichtung an jeder Stelle des schwingenden Stabes in einem und demselben Augenblicke der Schwingungsgeschwindigkeit dieser Stelle proportional.

§. 18 *). Nehmen wir zunächst an, der schwingende Körper habe die Länge l und sei an beiden Enden festgeklemmt. In diesem Falle ist sowohl für $x = 0$, als auch für $x = l$, $y = 0$, folglich Bestimmung der Elasticitätsmodul.

$$F(ct) + f(ct) = 0 \text{ und } F(ct+l) + f(ct-l) = 0.$$

Aus der ersten Gleichung folgt $f = - F$, und bringen wir diese Beziehung in der zweiten Gleichung an, so erhält man

$$f(ct+l) - f(ct-l) = 0, \text{ d. i. } f(ct+l) = f(ct-l),$$

oder, wenn man $ct - l = ct_1$ nimmt, $f(ct_1+2l) = f(ct_1)$. Es nimmt

Bestimmung der Elasticitätsmodul.

also die Funktion f stets denselben Werth wieder an, wenn ct_1 um $2l$, also die Zeit $t_1 = \frac{2l}{c}$ größer wird, und es ist folglich auch

$$t_1 = \frac{2l}{c} = 2l\sqrt{\frac{\gamma}{gE}}$$

die Zeit eines Doppelschwunges. Setzen wir zweitens voraus, daß der schwingende Körper an beiden Enden frei sei, so haben wir für $x = 0$ und $x = l$, S, also auch $\psi_1(x)$, $= 0$, daher

$$F_1(ct) - f_1(ct) = 0 \text{ und } F_1(ct+l) - f_1(ct-l) = 0.$$

Hiernach ist $f_1 = F_1$ und $f_1(ct+l) = f_1(ct-l)$, oder $f_1(ct_1 + 2l) = f_1(ct_1)$, und folglich wieder die Schwingungsdauer $t_1 = \frac{2l}{c}$.

Ist ferner der Körper an einem Ende frei und an dem anderen fest, so hat man für $x = 0$, $y = 0$ und für $x = l$, $S = 0$, daher

$$F(ct) + f(ct) = 0 \text{ und } F_1(ct+l) - f_1(ct-l) = 0,$$

es folgt nun $f = -F$, und folglich auch $f_1 = -F_1$, und daher

$$f_1(ct+l) + f_1(ct-l) = 0, \text{ oder } f_1(ct_1+2l) = -f_1(ct_1).$$

Hiernach nimmt also der Körper nach der Zeit $t_1 = \frac{2l}{c}$ stets den umgekehrten Bewegungszustand an, und es ist folglich erst in der doppelten Zeit $2t_1 = \frac{4l}{c}$ eine Schwingung vollendet. Man hat also hier die Schwingungsdauer

$$t_2 = \frac{4l}{c} = 4l\sqrt{\frac{\gamma}{gE}},$$

also doppelt so groß als in den beiden ersten Fällen.

Mittels der gefundenen Formeln kann man aus der beobachteten Schwingungszeit t, oder vielmehr aus der Anzahl n der Längenschwingungen, welche ein prismatischer Körper in einer gewissen Zeit macht, den Elasticitätsmodul $E = \left(\frac{2l}{t}\right)^2 \cdot \frac{\gamma}{g}$, und die Fortpflanzungs- oder Schallgeschwindigkeit in demselben, $c = \frac{2l}{t}$ berechnen.

Beispiel. Ein ganz an beiden Enden eingeklemmter Eisendraht von 60 Zoll Länge wurde durch Reibung nach seiner Axenrichtung in Longitudinalschwingungen versetzt, deren 1589 auf eine Secunde gingen. Wie groß ist hiernach der Elasticitätsmodul und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Drahteisens? Nach einer der obigen Formeln hat man den Elasticitätsmodul nach Länge oder Höhe

$$L = \frac{1}{g}\left(\frac{2l}{t}\right)^2 = \frac{1}{g}(2nl)^2 = \frac{(1589 \cdot 120)^2}{31{,}25 \cdot 12} = 96'950000 \text{ Zoll},$$

und wenn nun ein Cubikzoll dieses Eisens 0,294 Pfund wiegt, der Elasticitätsmodul nach Gewicht: Bestimmung der Elasticitätsmodul.

$E = 96'950000 \,.\, 0{,}294 = 28'500000$ Pfund (Vergl. Tabelle §. 189).

Die Fortpflanzungs- oder Schallgeschwindigkeit ist

$c = \sqrt{gL} = \sqrt{31{,}25 \,.\, 96'950000 \,.\, {}^1/_{12}} = \sqrt{31{,}25 \,.\, 8'080000} = 15890$ Fuß,

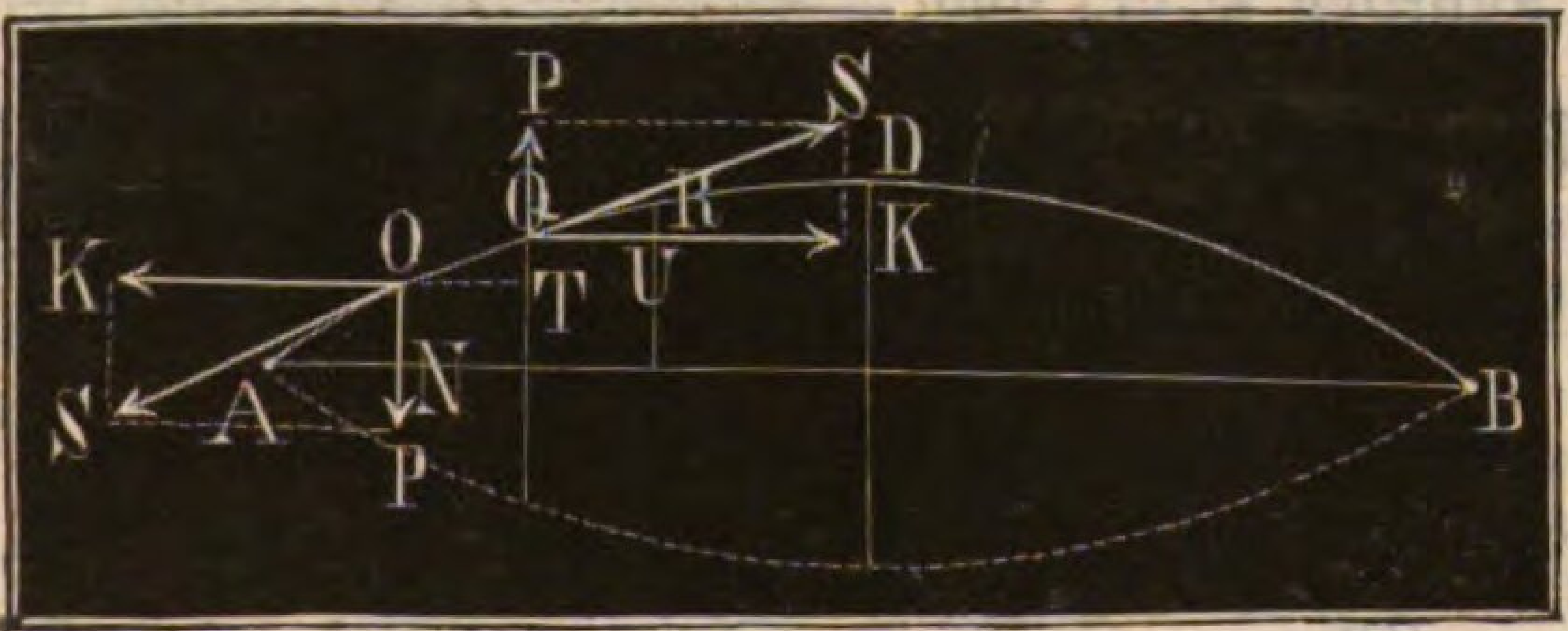
oder, die Schallgeschwindigkeit $c_1 = 1060$ Fuß der Luft als Einheit angenommen,

$$c = \frac{15890}{1060} = 15.$$

Anmerkung. Sind die schwingenden Säulen sehr lang, so hängt die Schwingungszeit von der Wellenlänge oder, nach Befinden, von dem Abstand l zweier Schwingungsknoten ab; es ist dann aber stets $t_1 = \frac{2l}{c}$. Diese Zeit bestimmt auch die Höhe des mit den Schwingungen verbundenen Tones; je größer oder kleiner t_1 ist, desto tiefer oder höher fällt auch der Ton aus. Die Stärke des Schalles hingegen wächst und nimmt ab mit den Schwingungselongationen. Bei den sphärischen Wellen, in welchen sich der Schall in der Luft und im Wasser ausbreitet, bleibt c und t unverändert, und es nimmt nur die Schwingungselongation, also die Stärke des Schalles allmälig ab.

§. 19*). Die Querschwingungen der Saiten und elastischen Stäbe lassen sich auf ähnliche Weise ausmitteln, wie die Longitudinalschwingungen. Querschwingungen einer Saite. Die gespannten Saiten (franz. cordes, engl. strings) bieten den einfachern Fall dar, daher sei auch von diesen zunächst die Rede. Es sei ADB, Fig. 658, irgend eine Position der schwingenden Saite, A der eine,

Fig. 658.



B der andere Stützpunkt, $l = AB$ ihre Länge, G ihr Gewicht und S ihre als constant anzusehende Spannung. Fassen wir einen den Coordinaten $AN = x$ und $NO = y$ entsprechenden Punkt O der Saite in's Auge; zerlegen wir dessen Spannkraft S parallel zu AB und rechtwinkelig gegen AB in die Seitenkräfte K und P, so können wir die letztere als die bewegende Kraft an einem Ende O des Elementes OQ ansehen. Läßt man den Bogen $AO = s$ um das Element $OQ = ds$, und eben dadurch auch die Ordinate y um ein Element $QT = dy$ wachsen, so erhalten wir in P, S, dy und ds die Kathetenpaare von zwei ähnlichen rechtwinkeligen Dreiecken OPS und QTO, und es ist

$$\frac{P}{S} = \frac{QT}{OQ} = \frac{dy}{ds}; \text{ also } P = \frac{dy}{ds} \cdot S.$$

Querschwingungen einer Saite.

Auf dasselbe Element OQ wirkt aber auch noch eine aus der Zerlegung der Gegenspannung hervorgehende Kraft $P_1 = \frac{RU}{QR} \cdot S = \frac{dy_1}{ds} S$ entgegen, daher bleibt die bewegende, das Element OQ nach der Axe AB zurückführende Kraft: $P - P_1 = \left(\frac{dy - dy_1}{ds}\right) S$ übrig.

Die Masse M des Elementes ist zwar der Länge $OQ = ds$ desselben proportional, setzen wir indessen nur kleine Schwingungselongationen y voraus, so können wir auch dieselbe dem Elemente $OT = QU = dx$ der Abscisse proportional wachsend annehmen, also $M = \frac{dx}{l} \cdot \frac{G}{g}$ setzen. Dies vorausgesetzt, erhalten wir nun die Acceleration, mit welcher das Element OQ sich der Ruhelage in AB nähert:

$$p = \frac{P - P_1}{M} = \frac{dy - dy_1}{ds \,.\, dx} \cdot \frac{gSl}{G}, \text{ oder } ds = dx \text{ gesetzt,}$$

$$p = \frac{dy - dy_1}{dx^2} \cdot \frac{gSl}{G}.$$

Nun ist y irgend eine Funktion von x, z. B. $\psi(x)$, daher auch $\frac{dy}{dx}$ eine andere Funktion $\psi_1(x)$ und $\frac{dy - dy_1}{dx^2} = \frac{d(dy - dy_1)}{dx^2} = \frac{d[\psi_1(x)]}{dx}$ eine dritte Funktion von $\psi_2(x)$ dieser Größe, so wie

$$p = \psi_2(x) \cdot \frac{gSl}{G}.$$

Da aber auch y eine Funktion der Zeit t also etwa $y = \varphi(t)$ ist, so hat man ebenso die Geschwindigkeit, mit welcher OQ zur Ruhelage zurückkehrt, $v = \frac{dy}{dt} = \varphi_1(t)$, und die entsprechende Acceleration:

$$p = \frac{d\varphi_1(t)}{dt} = \varphi_2(t).$$

Wenn man nun beide Ausdrücke für p einander gleichsetzt, so erhält man ganz wie in Anhang, §. 17, die Differenzialgleichung

$$\varphi_2(t) = \psi_2(t) \cdot \frac{gSl}{G} = c^2 \psi_2(x),$$

und es läßt sich daher auch wie dort

$$y = \varphi(t) = \psi(x) = F(ct + x) + f(ct - x) \text{ und}$$
$$v = c\,[F_1(ct + x) + f_1(ct - x)] \text{ setzen.}$$

Da auch hier für $x = 0$ und $x = l$, y und $v = 0$ ist, so haben

wir wieder $f_1 = -F_1$ und $f_1(ct+l) = f(ct-l)$, oder $f(ct_1+2l) = f(ct_1)$; Querschwingungen einer Saite.
es ist daher die Zeit einer Schwingung hin und zurück:

$$t_1 = \frac{2l}{c} = 2l\sqrt{\frac{G}{gSl}}\text{, oder, wenn man } G = Al\gamma \text{ setzt,}$$

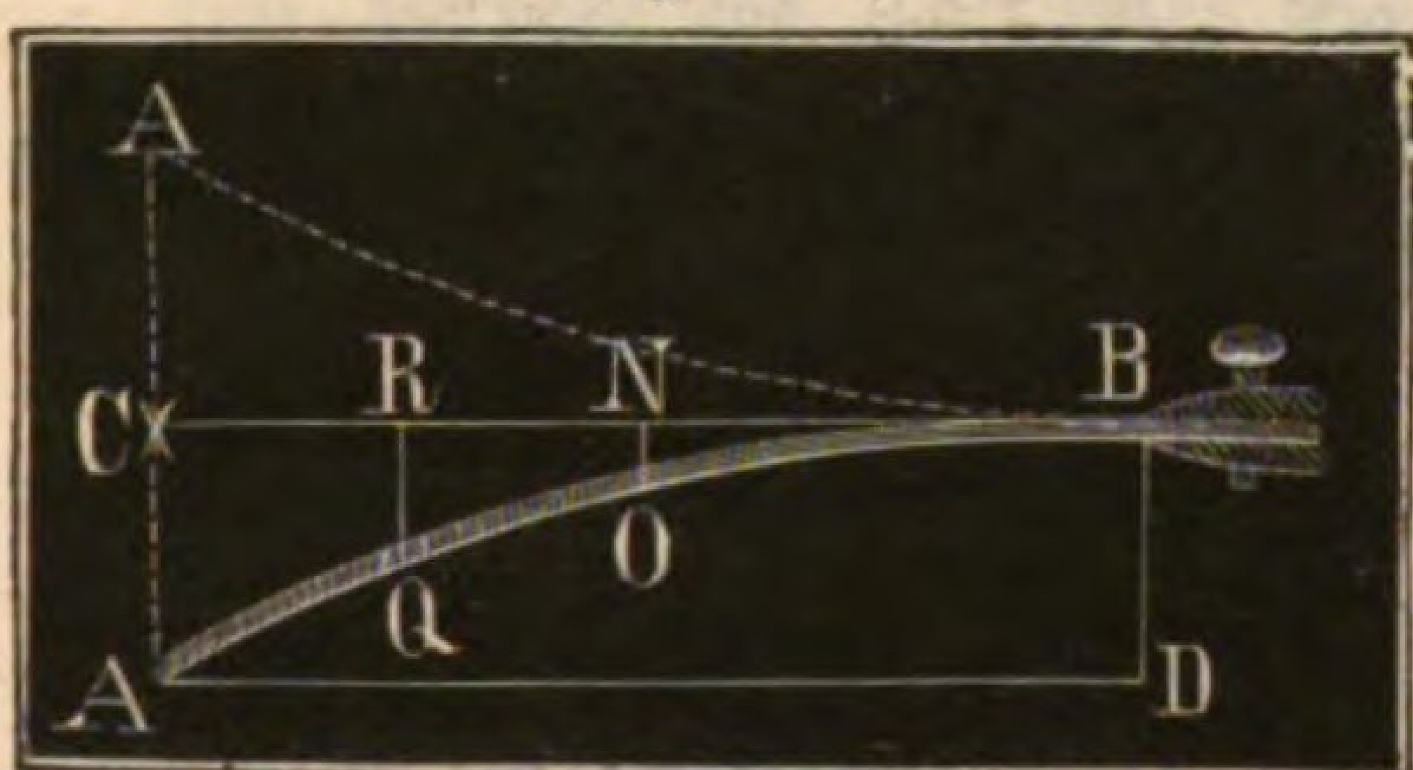
$$t_1 = 2l\sqrt{\frac{A\gamma}{gS}}.$$

Es wächst also die Schwingungsdauer einer Saite direct wie die Länge, wie die Quadratwurzel aus dem Gewichte $A\gamma$ der Längeneinheit und umgekehrt wie die Quadratwurzel aus der Spannung der Saite.

Beispiel. Da der halben Schwingungszeit der nächste Octaventon entspricht, so wird nach dieser Regel eine Saite die Octave zu dem anfänglichen Grundton geben, wenn man sie bis zur Hälfte abkürzt, oder in ihrer Mitte unterstützt, oder, wenn man sie viermal so stark spannt, oder wenn man sie bei gleicher Spannung durch eine Saite ersetzt, von der die laufende Längeneinheit viermal so leicht ist als bei der ersten Saite.

§. 20 *). Die Bestimmung der Schwingungsdauer eines elastischen Stabes AB (franz. lames; engl. springs), Fig. 659, welcher an einem Ende B festgehalten wird, läßt sich auf folgendem, allerdings etwas umständlichem Wege finden. Querschwingungen eines Stabes.

Fig. 659.



Nach §. 191 ist, wenn r den Krümmungshalbmesser des Stabes an einer durch die Coordinaten $CN = x_1$ und $NO = y_1$ bestimmten Stelle O bezeichnet, das Biegungsmoment des Bogens $AO = s_1$, $M = \frac{WE}{r}$.

Setzen wir nun die Kraft, mit welcher sich ein den Coordinaten $CR = x$ und $RQ = y$ entsprechendes Element der Axe oder Ruhelage CB nähert, $= Pdx$, also dessen Moment $= \overline{NR} \,.\, Pdx = (x_1 - x)\, Pdx$, so haben wir $\frac{WE}{r} = \int_0^{x_1} (x_1 - x)\, Pdx$.

Nun ist aber

$$\int_0^{x_1} (x_1 - x)\, Pdx = \int_0^{x_1} Px_1 dx - \int_0^{x_1} Pxdx$$

$$= x_1 \int_0^{x_1} Pdx - \int_0^{x_1} Pxdx,$$

oder wenn man $\int_0^{x_1} Pdx = P_1$ und hiernach

$$\int_0^{x_1} Pxdx = \int_0^{x_1} Pdx \,.\, x = P_1 x_1 - \int_0^{x_1} P_1 dx \text{ setzt,}$$

Querschwingungen eines Stabes.

$$\int_0^{x_1} (x_1 - x)\, P dx = \int_0^{x_1} P_1 dx, \text{ also auch } \frac{WE}{r} = \int_0^{x_1} P_1 dx.$$

Ferner ist $r = -\frac{ds^3}{dx^2 d\,(tang.\,\alpha)}$ (s. Art. 27 der analytischen Hülfslehren), oder, da bei einer kleinen Biegung $ds = dx$ gesetzt werden kann, $r = -\frac{dx}{d\,(tang.\,\alpha)}$, daher folgt

$$-WE\frac{d\,(tang.\,\alpha)}{dx} = \int_0^{x_1} P_1 dx, \text{ und durch Differenziiren}$$

$$-WEd\left(\frac{d\,(tang.\,\alpha)}{dx}\right) = P_1 dx.$$

Setzt man nun $y = \psi(x)$, ferner $tang.\,\alpha = \frac{dy}{dx} = \psi_1(x)$, $\frac{d\,(tang.\,\alpha)}{dx} = \psi_2(x)$ und $d\left(\frac{d\,(tang.\,\alpha)}{dx^2}\right) = \psi_3(x)$, so erhält man die einfache Gleichung $P_1 = -WE\,.\,\psi_3(x)$, woraus durch nochmaliges Differenziiren $dP_1 = -WEd\psi_3(x)$, d. i. $Pdx = -WEd\psi_3(x)$ oder $P = -WE\frac{d\psi_3(x)}{dx} = -WE\,\psi_4(x)$ folgt.

Damit der Stab symmetrisch schwinge, können wir nur noch annehmen, daß P proportional mit y wachse, also $P = Ky$ sei; und hiernach erhalten wir nun

$WE\psi_4(x) = Ky$, oder $\psi_4(x) = \frac{K}{WE}\cdot y = k^4 y$, wenn wir $\frac{K}{WE}$ mit k^4 bezeichnen.

Dieser Differenzialgleichung $\psi_4(x) = k^4 y$ entspricht die Gleichung

$$y = \psi(x) = A\cos.(kx) + B\sin.(kx) + Ce^{kx} + De^{-kx},$$

denn wenn man diese successiv differenziirt, so erhält man

$$\psi_1(x) = k\,[-A\sin.(kx) + B\cos.(kx) + Ce^{kx} - De^{-kx}],$$
$$\psi_2(x) = k^2\,[-A\cos.(kx) - B\sin.(kx) + Ce^{kx} + De^{-kx}],$$
$$\psi_3(x) = k^3\,[A\sin.(kx) - B\cos.(kx) + Ce^{kx} - De^{-kx}] \text{ und}$$
$$\psi_4(x) = k^4\,[A\cos.(kx) + B\sin.(kx) + Ce^{kx} + De^{kx}],$$

also wirklich

$$\psi_4(x) = k^4 y.$$

§. 21*). Die Schwingungszeit t des elastischen Stabes finden wir wieder wie oben, wenn wir $p = \varphi_2(t) = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}}$ setzen. Nun ist aber die Kraft eines Elementes, $= Pdx = -Kydx = -WEk^4ydx$, und die Masse desselben $= Adx\,.\,\frac{\gamma}{g}$, daher folgt die Gleichung

$$\varphi_2(t) = -\frac{gWEk^4}{A\gamma} \cdot y = -\mu^2 y,$$ Querschwingungen eines Stabes.

wenn wir den Ausdruck $\frac{gWEk^4}{A\gamma}$ durch μ^2 bezeichnen.

Dieser Differenzialgleichung entspricht schon die einfache Formel

$$y = \varphi(t) = sin.\,(\mu t + \tau),$$

wo τ eine beliebige Anfangszeit ausdrückt, denn es ist

$$v = \frac{dy}{dt} = \varphi_1(t) = \mu\,.\,cos.(\mu t + \tau) \text{ und}$$

$$p = \frac{dv}{dt} = \varphi_2(t) = -\mu\, sin.(\mu t + \tau), \text{ d. i. } \varphi_2(t) = -\mu^2 y.$$

Nehmen wir nun in der Gleichung

$$y = sin.\,(\mu t + \tau),\quad \tau = 0,$$

so bekommen wir $y = sin.\,(\mu t)$, daher für $\mu t = 0,\ \pi,\ 2\pi$ u. s. w. $y = 0$; und es ist folglich $t_1 = \frac{\pi}{\mu}$ die halbe und

$$t = \frac{2\pi}{\mu} = \frac{2\pi}{k}\sqrt{\frac{A\gamma}{gWE}} \text{ die ganze Schwingungsdauer.}$$

Um hiernach die Zeit einer Schwingung berechnen zu können, muß nicht allein die Größe k, sondern auch das Verhältniß $\frac{A}{W}$ bekannt sein. Ist der Stab cylindrisch und sein Halbmesser $= r$, so hat man

$$\frac{A}{W} = \frac{\pi r^2}{\frac{1}{4}\pi r^4} = \frac{4}{r^2},$$

und ist er parallelepipedisch, seine Breite b und Höhe h, so ist

$$\frac{A}{W} = \frac{bh}{\frac{1}{12}bh^3} = \frac{12}{h^2} \text{ (s. §. 196 und §. 199).}$$

Hiernach folgt für die erste Stabform

$$t = \frac{4\pi}{rk^2}\sqrt{\frac{\gamma}{gE}} \text{ und für den Stab von der zweiten Form}$$

$$t = \frac{4\pi}{hk^2}\sqrt{\frac{3\gamma}{gE}}.$$

Die Größe k wird endlich aus der Gleichung

$$y = A\, cos.(kx) + B\, sin.(kx) + Ce^{kx} + De^{-kx}$$

auf folgende Weise gefunden.

Setzen wir in diese Formel die zusammengehörigen Werthe $x = l$ und $y = 0$, so erhalten wir

1) $0 = A\, cos\,(kl) + B\, sin.\,(kl) + Ce^{kl} + De^{-kl}$.

Thun wir ferner dasselbe auch in der Gleichung

$$tang.\,\alpha = \frac{dy}{ds} = \varphi_1(x),$$

Querschwingungen eines Stabes.

so bekommen wir

$$2)\quad 0 = -A\sin.(kl) + B\cos.(kl) + Ce^{kl} - De^{-kl}.$$

Da ferner das Biegungsmoment am Ende A des Stabes = Null, und folglich der Krümmungshalbmesser $r = \infty$, also $\psi_2(x) = 0$ und ebenso $\psi_3(x) = 0$ ist, so folgt $0 = -A\cos.0 - B\sin.0 + Ce^0 + De^{-0}$, d. i. $-A + C + D = 0$, und

$0 = A\sin.0 - B\cos.0 + Ce^0 - De^{-0}$, d. i. $-B + C - D = 0$,

daher 3) $A = C + D$ und 4) $B = C - D$.

Eliminirt man nun aus diesen vier Gleichungen A und B, so erhält man

$(C+D)\cos.(kl) + (C-D)\sin.(kl) + Ce^{kl} + De^{-kl} = 0$, und

$-(C+D)\sin.(kl) + (C-D)\cos.(kl) + Ce^{kl} - De^{-kl} = 0$;

hieraus folgt durch Addition

$$C\cos.(kl) - D\sin.(kl) + Ce^{kl} = 0,$$

und durch Subtraction

$$D\cos.(kl) + C\sin.(kl) + De^{-kl} = 0, \text{ oder}$$

$$C[\cos.(kl) + e^{kl}] = D\sin.(kl) \text{ und}$$

$$D[\cos.(kl) + e^{-kl}] = -C\sin.(kl);$$

daher durch Division:

$$-\frac{\cos.(kl) + e^{kl}}{\sin(kl)} = \frac{\sin.(kl)}{\cos.(kl) + e^{-kl}}, \text{ endlich}$$

$$2 + \cos.(kl)(e^{kl} + e^{-kl}) = 0, \text{ oder } \cos.kl = -\frac{2}{e^{kl} + e^{-kl}}.$$

Von den verschiedenen Werthen, welche, entsprechend den verschiedenen Tönen, die der Stab je nach der Anzahl seiner Schwingungsknoten geben kann, ist der kleinste $kl = 1{,}87501$, wogegen die größeren nahe $= \frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{2}$ u. s. w. ausfallen. Kommt es darauf an, aus der beobachteten Schwingungsdauer t den Elasticitätsmodul E zu finden, so hat man in der Regel nur den kleinsten Werth in Betracht zu ziehen, es ist daher $k = \frac{1{,}8751}{l}$ und $k^2 = \frac{3{,}516}{l^2}$, folglich für einen cylindrischen Stab

$$E = \frac{\gamma}{g}\left(\frac{4\pi}{rk^2t}\right)^2 = \frac{\gamma}{g}\left(\frac{4\pi l^2}{3{,}516\,rt}\right)^2 = 12{,}774\,\frac{\gamma}{g}\,\frac{l^4}{r^2t^2},$$

und für einen parallelepipedischen:

$$E = \frac{\gamma}{3g}\left(\frac{4\pi}{hk^2t}\right)^2 = \frac{\gamma}{3g}\left(\frac{4\pi l^2}{3{,}516\,ht}\right)^2 = 4{,}2579\cdot\frac{\gamma}{g}\,\frac{l^4}{h^2t^2}.$$

Anmerkung 1. Vergleicht man die Formel $t = \frac{4\pi}{r k^2} \sqrt{\frac{\gamma}{g E}}$ und $t_1 = 2 l_1 \sqrt{\frac{\gamma}{g E}}$ für die Quer- und Längenschwingungen eines und desselben Stabes mit einander, so erhält man die Proportion Querschwingungen eines Stabes.

$$t_1 : t = \frac{l^2}{r} : \frac{3{,}516}{2\pi} \, l_1, \text{ d. i. } t_1 : t = \frac{l^2}{r} : 0{,}5596 \, l_1.$$

Wertheim hat für Gußstahl und Messing dieses Verhältniß durch Versuche bestätigt gefunden.

Anmerkung 2. Ueber die Querschwingungen elastischer Stäbe handelt ausführlich Seebeck in einer Abhandlung der Leipziger Gesellschaft der Wissenschaften, Leipzig 1849, sowie in dem Programme der technischen Bildungsanstalt im Dresden vom Jahre 1846. Wertheim's Untersuchungen über die Elasticität der Metalle und des Holzes mittels Längen- und Querschwingungen werden in Poggendorff's Annalen, Ergänzungsband II. 1845, ziemlich ausführlich abgehandelt.

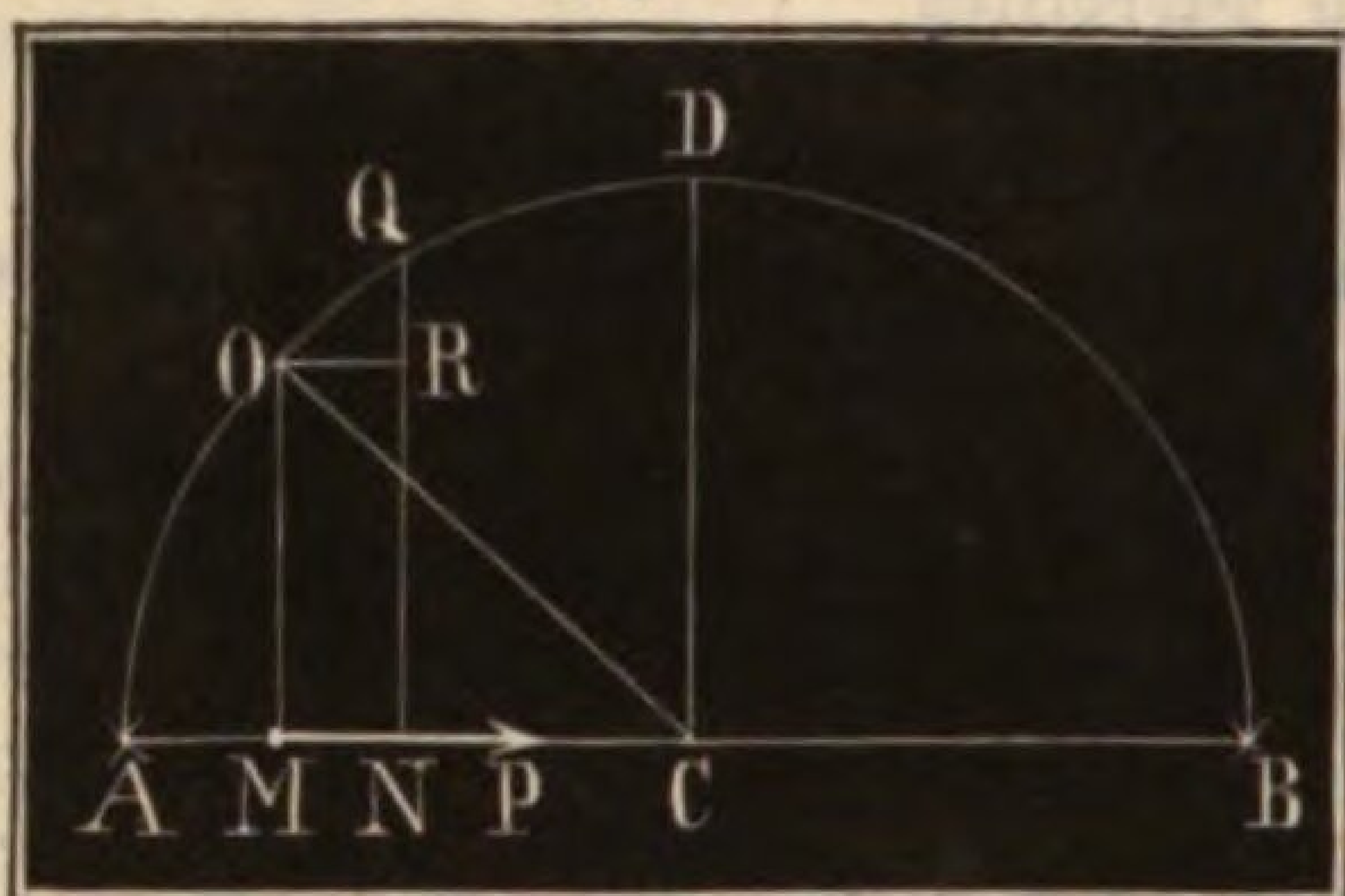
Anmerkung 3. Die Schwingungsdauer, oder vielmehr die Anzahl der Schwingungen eines Stabes in einer gewissen Zeit läßt sich wegen ihrer Kürze in der Regel nicht unmittelbar beobachten, sondern man muß sich hierbei besonderer Hülfsmittel bedienen. Man benutzt hierzu entweder nach Chladni, Savart u. s. w. die Höhe des von den Schwingungen erzeugten Tones, oder man wendet das zuerst von Duhamel angegebene Verfahren an, welches darin besteht, daß man von dem schwingenden Stab mittelst eines feinen Häkchens auf eine ganz gleichförmig umlaufende und mit Kienruß überzogene Glastafel eine Wellenlinie aufreißen läßt. Zur Erzielung einer möglichst gleichförmigen Umdrehungsbewegung kann man sich eines chronometrischen Apparates bedienen, welcher mit einem Windfange, ähnlich wie ein Bratenwender oder das Schlagwerk einer Thurmuhr, ausgerüstet ist, und von Morin in der Abhandlung »Description des appareils dynamometriques etc. Paris 1838« beschrieben wird. Wertheim findet die Anzahl der Schwingungen in einer gewissen Zeit dadurch, daß er mit dem zu untersuchenden Stabe noch einen andern Körper, z. B. eine Stimmgabel, schwingen läßt, dessen Schwingungszahl bekannt ist. Wenn man nun von beiden Körpern Wellencurven in die Rußschicht der rotirenden Glastafel einkratzen läßt und die Wellen derselben zählt, welche einem und demselben Centriwinkel entsprechen, so erhält man in dem Verhältnisse dieser Zahlen auch das Verhältniß der Schwingungszahlen. Was die Longitudinalschwingungen anlangt, so sind diese in der Regel auch mit kleinen Querschwingungen verbunden, weshalb hier die Stäbe zweifache Wellenlinien beschreiben, und die Anzahl der Längenschwingungen mit der der Querschwingungen leicht verglichen werden kann, wenn man die kleinen Wellen innerhalb einer Welle der großen Wellencurve auszählt.

§. 22. Zu den Kräften, welche die Schwingungen eines Körpers erzeugen, gesellen sich noch gewisse Bewegungshindernisse, deren Einfluß wir nun noch kennen lernen müssen. Ist ein solches Hinderniß constant, wie z. B. die Reibung an der Drehungsaxe eines Pendels oder an dem Stifte einer Magnetnadel, so hat dasselbe auf die Schwingungsdauer gar keinen Einfluß, sondern es wird nur durch dasselbe die Schwin- Schwingungshindernisse.

Schwingungshindernisse.

gungsweite bei jedem Ausschlag um eine gewisse Größe kleiner. Wir haben oben in §. 1 (Anhang) in dem Falle, wenn die bewegende Kraft der Entfernung x vom Ruhe- oder Mittelpunkte C der Bewegung AB, Fig. 660, proportional ist,

Fig. 660.



$$p = \mu x = \mu\,(a - x_1),$$

wo x_1 den durchlaufenen Weg AM bezeichnet, gesetzt. Bei Berücksichtigung der Reibung f haben wir dagegen für das Durchlaufen der ersten Weghälfte AC,

$$p = \mu(a - f - x_1),$$

und für das der zweiten Weghälfte CB, $p = -\mu\,[x_1 - (a + f)]$ zu schreiben; es besteht also der Einfluß der Reibung f nur darin, daß durch sie bei der einen Weghälfte a in $a - f$ und bei der anderen a in $a + f$, also der ganze Schwingungsweg $2a$, um $2a - 2f$ umgeändert, d. i. die Schwingungsweite bei jedem Ausschlage um eine constante Größe $2f$ abgekürzt wird. Da endlich in der Formel $t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}}$ die Schwingungsweite gar nicht vorkommt, so kann folglich auch f keinen Einfluß auf dieselbe ausüben.

Anders ist es dagegen mit dem Widerstande der Luft. Dieser wächst bei kleinen Geschwindigkeiten, wie sie bei Pendelbewegungen vorkommen, mehr nach der einfachen Geschwindigkeit als nach dem Quadrate derselben, wie besonders aus Bessel's Untersuchungen (über die Länge des einfachen Pendels, Abhandl. der Akademie der Wissensch. zu Berlin, 1826) hervorgeht, und sich auch dadurch erklären läßt, daß dieses Hinderniß vorzüglich aus der mit der Geschwindigkeit v des schwingenden Körpers wachsenden Verdichtung und Verdünnung der Luft vor und hinter demselben (s. den Anhang, §. 17, Anmerkung) erwächst. Dies vorausgesetzt, können wir die Acceleration des schwingenden Körpers, wenn wir denselben im Auswärtsschwingen begriffen annehmen, und seinen Weg vom Ruhepunkte aus messen,

$$p = -(\mu x + \nu v) \text{ oder } p + \nu v + \mu x = 0 \text{ annehmen.}$$

Setzen wir nun

$$x = f(t),\ \ v = \frac{dx}{dt} = f_1(t) \text{ und } p = \frac{dv}{dt} = f_2(t),$$

so können wir auch $f_2(t) + \nu f_1(t) + \mu f(t) = 0$ schreiben, und diesem durch die Integralgleichung

$$x = [b\,cos.(\psi t\sqrt{\mu}) + b_1\,sin.(\psi t\sqrt{\mu})]\; e^{-\frac{\nu t}{2}},$$

wo b und b_1 noch zu bestimmende Constanten sind und $\psi = \sqrt{1 + \frac{\nu^2}{4\mu}}$ ist, entsprechen. Nun ist aber für $t = 0$, auch $x = 0$, daher $b = 0$ und einfacher

Schwingungshindernisse.

$$x = b_1 \sin.(\psi t \sqrt{\mu})\, e^{-\frac{\nu t}{2}}.$$

Da dieser Werth für $\psi t \sqrt{\mu} = \pi$ wieder Null wird, so ist folglich die Zeit einer einfachen Schwingung

$$t = \frac{\pi}{\psi \sqrt{\mu}} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu + \frac{\nu^2}{4}}},\ \text{d. i. } \frac{1}{\psi} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\nu^2}{4\mu}}} \text{ mal so groß}$$

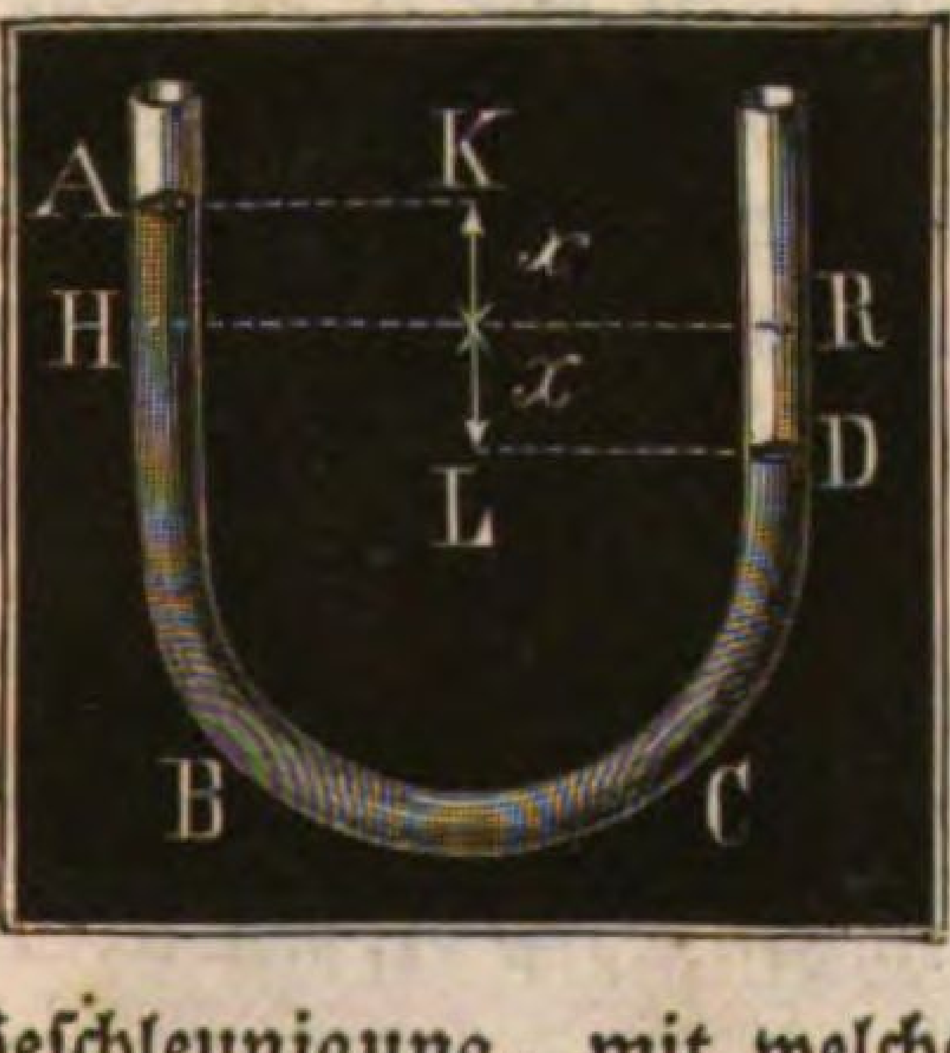
als wenn der Widerstand der Luft nicht vorhanden wäre.

Anmerkung. Es ist leicht zu erklären, weshalb die in Schwingungen versetzten Körper nach und nach immer kleinere und kleinere Schwingungen machen und zuletzt in Ruhe übergehen. Die Ursache dieser Erscheinung ist zwar zunächst der Widerstand der Luft, dann aber auch noch die Unvollkommenheit der Elasticität der schwingenden Körper, vermöge welcher sich die Körper, namentlich innerhalb kurzer Zeiten den auf sie wirkenden Kräften nicht vollkommen proportional ausdehnen und zusammendrücken.

§. 23. Den einfachsten Fall der **Wellenbewegung des Wassers** bieten die Schwingungen desselben in zwei communicirenden Röhren $ABCD$, Fig. 661, dar. Nehmen wir zunächst an, daß dieselben von gleichem Querschnitte A seien, und denken wir uns das Wasser in dem einen Schenkel um $HA = x$ über dem der Ruhelage entsprechenden Niveau HR gehoben, und im anderen um $RD = x$ gesunken. Wir haben dann die bewegende Kraft $P = A \,.\, 2 x \gamma$, ferner, wenn l die ganze Länge $ABCD = HBCR$ der Wassermasse bezeichnet, die bewegte Masse $M = \frac{A l \gamma}{g}$, und daher die Beschleunigung, mit welcher der eine Wasserspiegel sinkt und der andere steigt:

Schwingungen des Wassers.

Fig. 661.



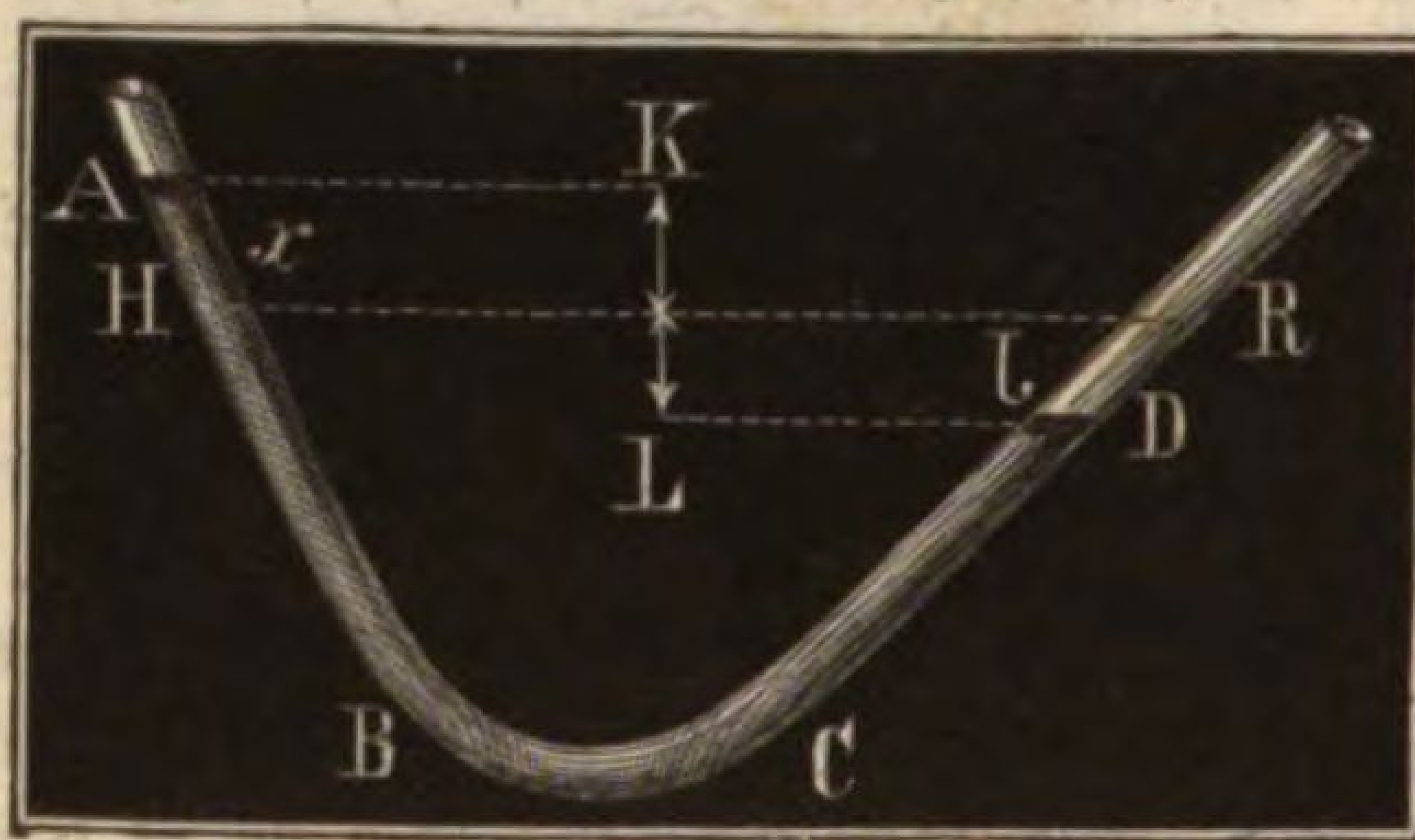
$$p = \frac{P}{M} = \frac{2 A x \gamma}{A l \gamma} g = \frac{2 g x}{l}.$$

Da diese Formel ganz dem im Anhange §. 1 und §. 2 abgehandelten Schwingungsgesetze $p = \mu x$ entspricht, so haben wir auch hier die Zeit einer Schwingung $t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} = \pi \sqrt{\frac{l}{2g}}$. Da ferner beim einfachen

Schwingungen des Wassers. Kreispendel von der Länge $\frac{l}{2}$, ebenfalls $t = \pi \sqrt{\frac{l}{2g}}$ ist, so schwingt also das Wasser in den communicirenden Röhren von gleicher Weite mit diesem Pendel isochron.

Sind die beiden Schenkel der Röhre $ABCD$, Fig. 662, gegen den Horizont geneigt, bildet z. B. die Axe des einen den Winkel α, und die des anderen den Winkel β mit dem Horizonte, so entspricht dem Wege $AH = DR = x$, welchen der Wasserspiegel in dem einen Schenkel auf- und in dem anderen abwärts gemacht hat, der Niveauabstand

Fig. 662.



$$= x\, sin.\alpha + x\, sin.\beta$$
$$= x\,(sin.\alpha + sin.\beta),$$

daher ist die Kraft

$P = A\gamma x\,(sin.\alpha + sin\,\beta)$, ferner die Acceleration

$$p = \frac{g\,(sin.\alpha + sin\,\beta)\,.\,x}{l},$$ und die Schwingungsdauer

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g\,(sin.\,\alpha + sin.\beta)}}.$$

Sind endlich die Röhren von ungleicher Weite, so fällt die Bestimmung der Schwingungsdauer bedeutend complicirter aus. Es sei A der Querschnitt und l die Länge der Mittelröhre, ferner α_1, A_1 und l_1 Neigungswinkel, Querschnitt und Länge der einen, so wie α_2, A_2 und l_2 Neigungswinkel, Querschnitt und Länge der anderen Seitenröhre; denken wir uns endlich das Wasser in der Axe des einen Schenkels um x_1 gestiegen und im anderen um x_2 gesunken. Wir haben zunächst

$$A_1 x_1 = A_2 x_2, \text{ daher } x_2 = \frac{A_1}{A_2}\, x_1,$$

und die bewegende Kraft, auf A_1 reducirt:

$$P = A_1\,(x_1 sin.\alpha_1 + x_2 sin.\alpha_2)\,\gamma = \frac{A_1\gamma}{A_2}\,(A_2\, sin.\alpha_1 + A_1\, sin.\alpha_2)\, x_1.$$

Die Wassermasse in der Zwischenröhre ist constant, und zwar $= \frac{Al\gamma}{g}$, und da ihre Geschwindigkeit in dem Verhältnisse $\frac{A_1}{A}$ zu der der Kraft steht, dieselbe auf den Kraftpunkt reducirt: $= \left(\frac{A_1}{A}\right)^2 \cdot A\,l\,\gamma$. Die Wassermasse im ersten Schenkel ist $= \frac{A_1\,(l_1 + x_1)\,\gamma}{g}$ und die im zweiten

$= \frac{A_2(l_2 - x_2)\gamma}{g}$, oder auf den Kraftpunkt reducirt Schwingungen des Wassers.

$$= \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 \frac{A_2(l_2 - x_2)\gamma}{g}.$$

Endlich folgt die von P zu bewegende Masse:

$$M = A_1^2 \cdot \frac{\gamma}{g}\left(\frac{l}{A} + \frac{l_1 + x_1}{A_1} + \frac{l_2 - x_2}{A_2}\right)$$

$$= A_1^2 \cdot \frac{\gamma}{g}\left(\frac{l}{A} + \frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2} + \frac{x_1}{A_1} - \frac{A_1 x_1}{A_2^2}\right)$$

$$= \frac{A_1^2\gamma}{g}\left[\frac{l}{A} + \frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2} + \left(\frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_2^2}\right) A_1 x\right],$$

und die Acceleration

$$p = \frac{P}{M} = \frac{\left(\frac{sin.\,\alpha_1}{A_1} + \frac{sin.\,\alpha_2}{A_2}\right) g x}{\frac{l}{A} + \frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2} + \left(\frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_2^2}\right) A_1 x}.$$

Wären die beiden Seitenröhren von gleichem Querschnitte, so hätte man $A_1 = A_2$, daher

$$p = \frac{(sin\,\alpha_1 + sin.\,\alpha_2)\, gx}{\left(\frac{l}{A} + \frac{l_1 + l_2}{A_1}\right) A_1} = \frac{(sin.\,\alpha_1 + sin.\,\alpha_2)\, g x}{\frac{A_1 l}{A} + l_1 + l_2},$$

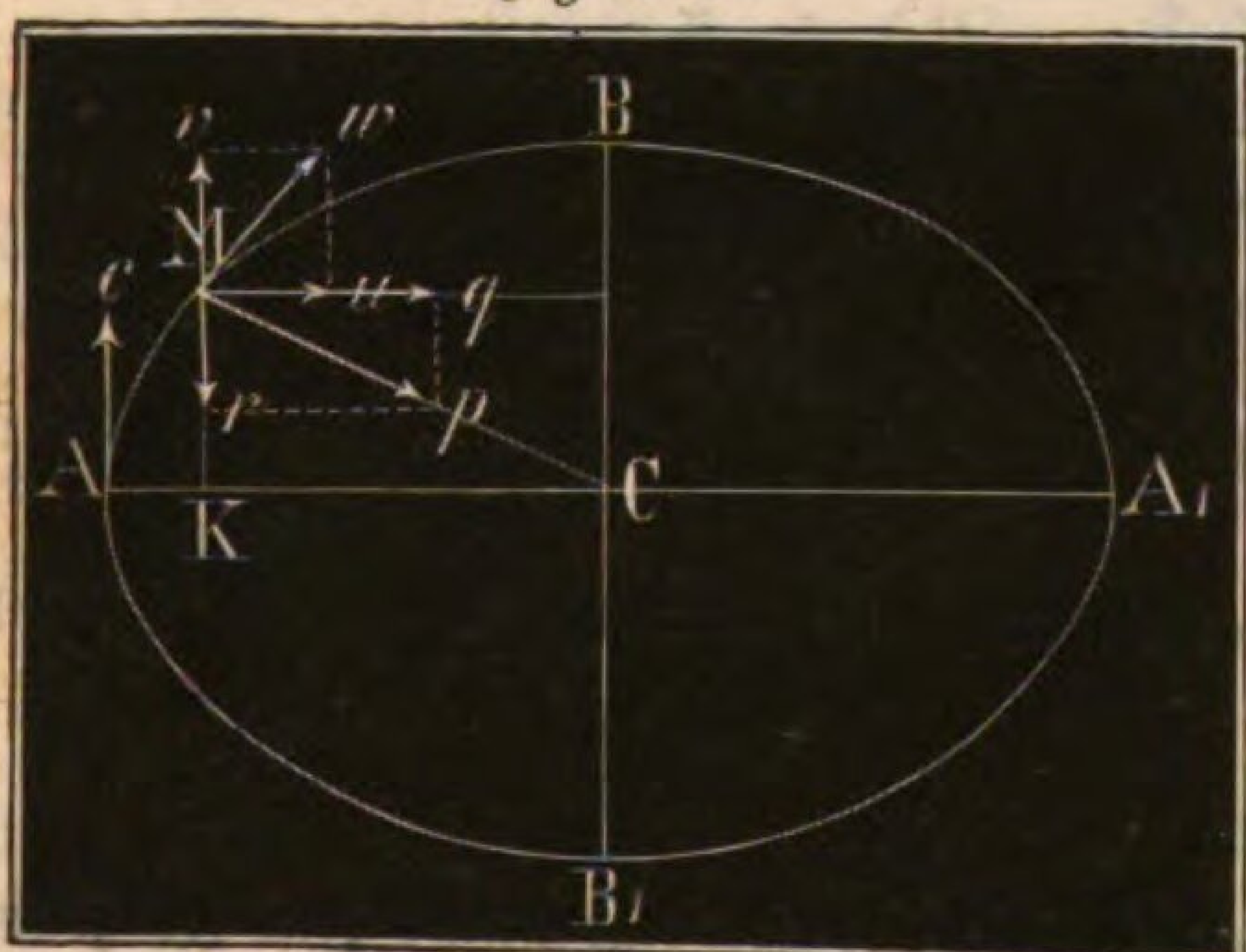
und die Schwingungszeit:

$$t = \pi \sqrt{\frac{A_1 l + A(l_1 + l_2)}{g A\,(sin.\,\alpha_1 + sin.\,\alpha_2)}}.$$

Anmerkung. Durch die Reibung und durch den Krümmungswiderstand erleiden natürlich diese Formeln noch einige Modificationen (vergl. Anhang, §. 22).

§. 24 *). Wenn der Körper M, welcher durch eine Kraft P nach einem Wasserwellen. festen Punkte C, Fig. 663, mit einer Acceleration $\mu z = \mu\,.\,CM$ hingetrieben wird, eine Anfangsgeschwindigkeit c hat, deren Richtung von der Kraftrichtung abweicht, so erfolgen seine Schwingungen nicht mehr in der geraden Linie, sondern in einer Ellipse, wie aus Folgendem hervorgehen wird. Es sei in dem Anfangspunkte A der Bewegung, die Bewegungsrichtung recht=

Fig. 663.



Wasserwellen. winkelig auf dem Abstande $CA = a$ und die entsprechende Geschwindigkeit $= c$. Legen wir die Coordinatenaxen durch C, und zwar die eine auf und die andere rechtwinkelig gegen CA. Bezeichnen wir nun die Coordinaten CK und KM durch x und y, so haben wir die mit den Axen parallel gehenden Componenten q und r von $p = \mu z$, da $\frac{q}{p} = \frac{x}{z}$ und $\frac{r}{p} = \frac{y}{z}$ ist, $q = \mu x$ und $r = \mu y$. Sind nun u und v die ebenfalls den Axen parallel gerichteten Componenten der Geschwindigkeit w des Körpers M, so haben wir nach §. 1, Anhang, $u = \sqrt{\mu(a^2 - x^2)}$; zugleich $c^2 - v^2 = 2\int r dy = 2\mu \int y dy = \mu y^2$, und daher $v = \sqrt{c^2 - \mu y^2}$. Wenn für $y = b$, $v = 0$ ist, so hat man $0 = c^2 - \mu b^2$, daher $c = b\sqrt{\mu}$ und $v = \sqrt{\mu(b^2 - y^2)}$.

Nun ist aber $u = \frac{dx}{dt}$ und $v = \frac{dy}{dt}$, daher folgt auch

$$\frac{u}{v} = \frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{b^2 - y^2}}, \text{ oder } \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{dy}{\sqrt{b^2 - y^2}}, \text{ oder}$$

$$\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{d\left(\frac{y}{b}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}},$$

und daher (nach Art. 19, V. der analytischen Hülfslehren):

$$arc.\left(sin. = \frac{x}{a}\right) = arc.\left(sin. = \frac{y}{b}\right) + Con., \text{ oder da für } x = a, \; y = 0 \text{ ist,}$$

$$arc.\left(sin. = \frac{a}{a}\right) = arc.\left(sin. = \frac{0}{b}\right) + Con., \text{ oder}$$

$$arc. (sin. = 1) = arc. (sin. = 0) + Con., \text{ d. i. } \frac{\pi}{2} = Con., \text{ und}$$

$$arc.\left(sin. = \frac{x}{a}\right) = arc.\left(sin. = \frac{y}{b}\right) + \frac{\pi}{2}, \text{ oder}$$

$$arc.\left(sin. = \frac{x}{a}\right) - arc.\left(sin. = \frac{y}{b}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Wenn aber die Differenz zweier Bögen $= \frac{\pi}{2}$ beträgt, so ist der Sinus des einen gleich dem Cosinus des andern, d. i. $\frac{x}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}$, oder

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Da dies die Gleichung einer Ellipse ist, so folgt auch, daß der Punkt,

welcher mit der Acceleration μz nach C getrieben oder gezogen wird, in einer Ellipse von den Halbaxen $CA = a$ und $CB = b$ um C läuft. Wasserwellen.

Auch folgt nun $dt = \frac{dy}{v} = \frac{dy}{\sqrt{\mu(b^2-y^2)}}$, daher die Zeit

$$t = \sqrt{\frac{1}{\mu}} \cdot arc. \left(sin. = \frac{y}{b}\right), \text{ oder umgekehrt}$$

$$y = b \; sin. \, (t\sqrt{\mu}), \text{ so wie } x = a \; cos. \, (t\sqrt{\mu}),$$

und die Zeit zum Durchlaufen eines elliptischen Quadranten, wenn man $y = b$ setzt,

$$t_1 = \sqrt{\frac{1}{\mu}} \; arc. \left(sin. = \frac{b}{b}\right) = \sqrt{\frac{1}{\mu}} \; arc. \, (sin. = 1) = \frac{\pi}{2\sqrt{\mu}},$$

also die Zeit zum Durchlaufen der halben Ellipse: $2t_1 = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}}$, und die Zeit einer ganzen Umdrehung oder Schwingung $= \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$; also genau so groß, als wenn die Bewegung eine geradlinig wiederkehrende wäre. Noch folgt

$$u = \sqrt{\mu(a^2-x^2)} = \sqrt{\mu[a^2-a^2[cos. \, (t\sqrt{\mu})]^2]} = \mu a \; sin. (t\sqrt{\mu}) \text{ und}$$

$$v = \sqrt{\mu(b^2-y^2)} = \mu b \; cos. \, (t\sqrt{\mu}),$$

und daher die Umdrehungsgeschwindigkeit

$$w = \sqrt{u^2+v^2} = \mu\sqrt{(a \; sin. \, t\sqrt{\mu})^2 + (b \; cos. \, t\sqrt{\mu})^2}.$$

Endlich kann man noch

$$x = \frac{a+b}{2} \; cos. \, (t\sqrt{\mu}) + \frac{a-b}{2} \; cos. \, (t\sqrt{\mu}) \text{ und}$$

$$y = \frac{a+b}{2} \; sin. \, (t\sqrt{\mu}) - \frac{a-b}{2} \; sin. \, (t\sqrt{\mu}) \text{ setzen,}$$

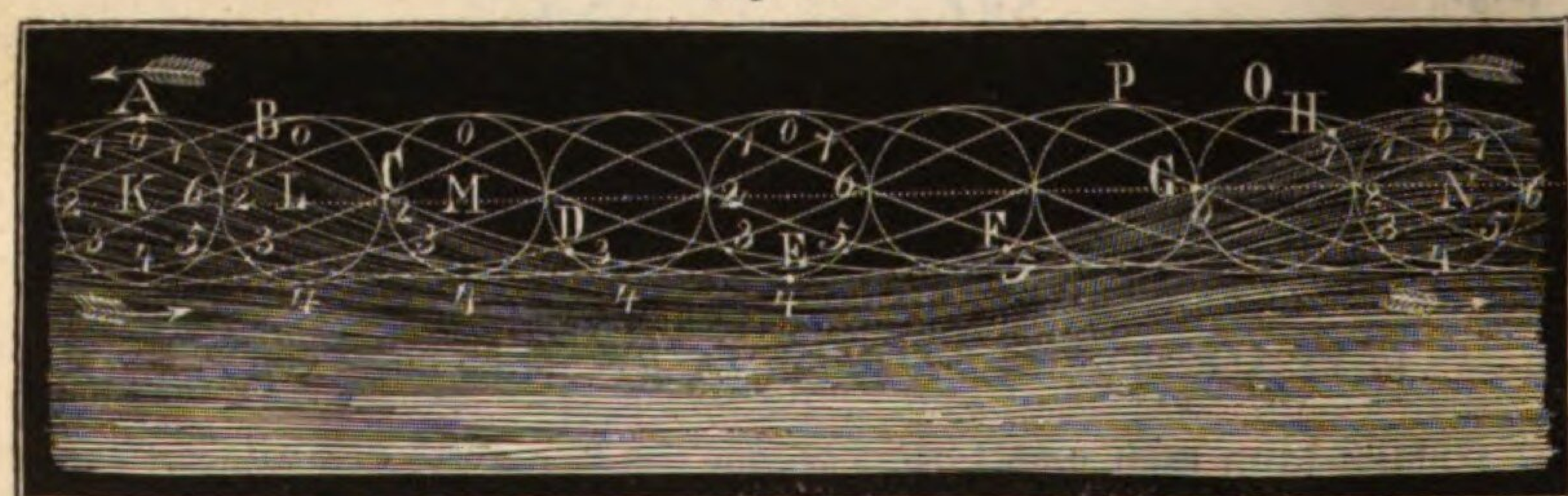
und da nun die ersten Glieder $\frac{a+b}{2} \; cos. \, (t\sqrt{\mu})$ und $\frac{a+b}{2} sin. \, (t\sqrt{\mu})$ einer gleichförmigen Bewegung in einem Kreise vom Halbmesser $\frac{a+b}{2}$, und die beiden anderen Glieder einer entgegengesetzten gleichförmigen in einem Kreise vom Halbmesser $\frac{a-b}{2}$ entsprechen, so kann man auch annehmen, daß die elliptische Bewegung des Punktes aus zwei kreisförmigen Bewegungen zusammengesetzt sei, daß nämlich der Punkt gleichförmig in

Wasserwellen. einem Kreise vom Halbmesser $\frac{a-b}{2}$ umlaufe, während das Centrum dieses Kreises gleichförmig in einem Kreise vom Halbmesser $\frac{a+b}{2}$ fortrückt.

Ist $b = 0$, so erfolgt zwar die Schwingung in einer geraden Linie, allein man kann sich auch denken, daß diese Schwingung aus zwei gleichen und entgegengesetzten Kreisbewegungen zusammengesetzt sei.

§. 25. Die elliptischen Schwingungsbewegungen finden sich den genauen Beobachtungen der Gebrüder Weber zu Folge bei den Bewegungen der Wasserwellen (franz. ondes, engl. waves) vor. Nicht allein jedes Wassertheilchen in der Oberfläche, sondern auch jedes Wassertheilchen unter derselben beschreibt während der Wellenbewegung des Wassers eine Ellipse. Wegen des Widerstandes am Boden sind jedoch die Ellipsen unter dem Wasser kleiner als die an der Oberfläche, und nehmen überhaupt mit dem Abstande von der Oberfläche ab. Die verschiedenen Elemente im Wasserspiegel, so wie in jeder andern Fläche parallel zu demselben, befinden sich in demselben Augenblicke in den verschiedensten Bewegungsphasen; während ein Element A, Fig. 664, seine Bahn in (0) beginnt, ist ein Element

Fig. 664.

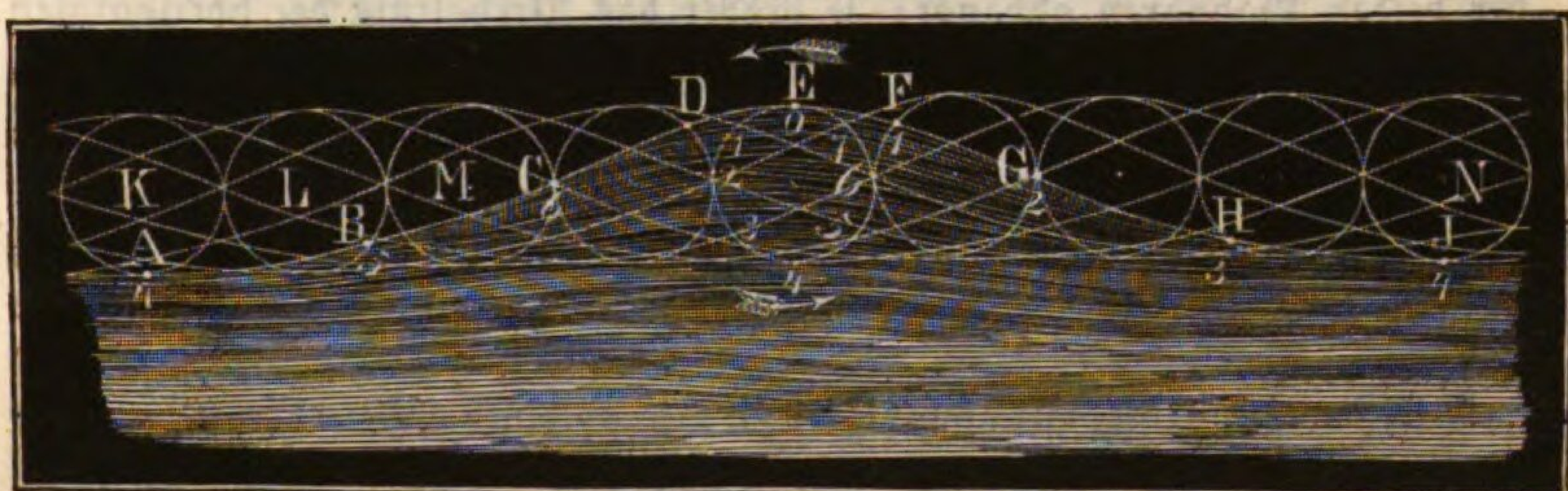


B schon in (1), ein anderes C in (2), ein drittes D in (3), ein viertes E in (4) u. s. w.; es bildet also in diesem Augenblicke der vertikale Durchschnitt der Oberfläche des Wassers eine cycloiden- oder trochoidenförmige Curve $ABCDEFGHJ$. Vor dem Eintritte der Wellenbewegung waren die Elemente in den Mittelpunkten $K, L \ldots N$ ihrer Bahnen und bildeten den horizontalen Wasserspiegel KN, während der Wellenbewegung hingegen befinden sie sich zum Theil über, zum Theil unter dieser Ebene, und haben natürlich stets ein Bestreben nach ihren Ruhepunkten $K, L \ldots O$ zurückzukehren. Die elliptischen Schwingungen finden jedoch nur so lange statt, als die Wellen unverändert bleiben, nimmt aber die Größe derselben allmälig ab, so wird auch die Bahn eines Elementes nach und nach eine engere und engere, und bildet daher keine Ellipse mehr, sondern eine Spi-

rallinie. Umgekehrt bildet sich sicherlich bei der Entstehung und dem Wasserwellen.
Wachsen der Wellen die elliptische Bahn erst allmälig aus einer Spirallinie heraus.

Nach einem Zeittheilchen ist *A* in seiner Bahn nach (1), *B* nach (2), *C* nach (3) u. s. w. gerückt, und dadurch die Welle um den Horizontalabstand *KL* zwischen je zwei Elementen fortgeschoben worden; nach Verlauf eines zweiten Zeittheilchens befindet sich ferner *A* in (2), *B* in (3), *C* in (4), und es ist die Welle wieder um den Abstand $KL = LM$ fortgerückt; und so bewegt sich bei dem fernern Umlaufe der Wasserelemente, die Welle immer weiter und weiter fort, bis sie am Ende einer vollständigen Umdrehung eines Elementes in seiner Bahn ihre eigene Länge *KN* durchlaufen hat. Nach einer halben Umdrehung eines Wasserelementes ist, wie Fig. 665 zeigt, an die Stelle eines Wellenberges ein

Fig. 665.



Wellenthal und an die des letzteren ein Wellenberg gekommen. Dieses Fortschreiten der Welle besteht natürlich in keiner besonderen Bewegung des Wassers, sondern nur in einem Fortrücken einer und derselben Bewegungsphase, z. B. in dem Fortrücken des Wellengipfels *J* nach *O*, *P* u. s w. Kennt man die Umlaufszeit *t* eines Wasserelementes und die Länge $AJ = s$ einer Welle, so kann man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit derselben durch die Formel $c = \frac{s}{t}$ berechnen.

Die Höhe einer Welle, oder die Summe von der Höhe eines Wellenberges und der Tiefe eines Wellenthales ist der vertikalen Axe $2b$ der Ellipse gleich, in welcher die Wasserelemente an der Oberfläche umlaufen; die Länge *CG* des Wellenthales übertrifft die halbe Wellenlänge um die horizontale Axe $2a$ jener Ellipse, und die des Wellenberges ist natürlich um so viel kürzer als die halbe Länge der ganzen Welle. Hiernach wäre der Querschnitt eines Wellenthales größer, als der eines Wellenberges; da dies aber wegen der Unveränderlichkeit des Wasservolumens nicht möglich ist, so müssen die Mittelpunkte der elliptischen Bahnen noch etwas über dem Niveau des ruhigen Wasserspiegels stehen.

Wasserwellen. §. 26. Nach Weber's Versuchen ist die Bahn, in welcher sich jedes Wasserelement an der Oberfläche einer Welle bewegt, eine wenig gedrückte Ellipse, nach Emy sollen hingegen bei den Meereswellen die Wasserelemente aufrecht stehende Ellipsen durchlaufen. Mit der Tiefe der Elemente unter der Oberfläche nehmen beide Axen ihrer elliptischen Bahnen ab, jedoch, besonders nach Weber, die vertikalen Axen mehr als die horizontalen Axen. Nach der Tiefe zu scheint ein Fortschreiten der Wellen nicht statt zu finden; senkrecht unter einander befindliche Wasserelemente befinden sich, den Beobachtungen der Gebrüder Weber zu Folge, gleichzeitig in einer und derselben Bewegungsphase, wogegen die in einer horizontalen Linie liegenden Elemente eine stetige Folge der Bewegungsphasen bilden. Aus den erwähnten Beobachtungen geht ferner noch hervor, daß die Umlaufszeit eines Elementes, oder die Zeit, innerhalb welcher eine Welle um ihre eigene Länge fortschreitet, vorzüglich von dem Verhältnisse der beiden Bahnaxen abhängt; je größer das Verhältniß der horizontalen Axe $2a$ zur vertikalen Axe $2b$ der Bahn ist, desto größer ist auch die Umlaufszeit. Die tiefer liegenden Wassertheile durchlaufen ferner ihre Bahnen in kürzerer Zeit, als die in der Oberfläche, woraus wieder gefolgert werden muß, daß auch die Wellenlängen nach dem Boden zu abnehmen.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $c = \frac{s}{t}$ einer Welle hängt, da die Umlaufszeit t mit dem Verhältnisse $\frac{a}{b}$ wächst, nicht allein von der Länge s, sondern auch von der Höhe b ab. Wenn eine Welle zwischen parallelen Wänden, z. B. in einem Kanale fortschreitet, so bleibt ihre Breite unverändert; es nimmt aber ihre Höhe b allmälig ab und ihre Länge allmälig so zu, daß in der Fortpflanzungsgeschwindigkeit nur diejenige Veränderung eintritt, welche aus der Reibung des Wassers an den Wänden resultirt. Wenn hingegen eine Welle auf keiner Seite in ihrem Fortschreiten gehindert wird, und dieselbe einen in sich selbst zurücklaufenden Wall bildet, so vergrößert sich ihre Länge und Breite zugleich, und zwar auf Unkosten ihrer Höhe, und sie wird allmälig so flach, daß sie in kurzer Zeit von dem Auge nicht mehr wahrgenommen werden kann. Ist eine solche Welle anfangs nicht kreisförmig, so nähert sie sich wenigstens der Kreisgestalt immer mehr und mehr, je weiter sie fortschreitet. Nach den Weber'schen Versuchen soll die Höhe in arithmetischer Progression abnehmen, wenn die Welle in geometrischer Progression fortschreitet. Die Geschwindigkeit des Fortschreitens einer solchen Welle nimmt allmälig ab, je weiter dieselbe fortschreitet. Wenn umgekehrt eine Welle von außen nach innen fortschreitet, und sich dabei immer mehr und mehr zusam-

menzieht, so nimmt dieselbe an Höhe und Länge, so wie auch an Geschwindigkeit, allmälig zu. Wasserwellen.

Es findet hiernach ein großer Unterschied zwischen den Wasserwellen und den Schallwellen statt. Während bei diesen Wellen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nur von der Elasticität und Dichtigkeit des Mediums abhängt; ist dieselbe bei jenen Wellen nur eine Funktion der Wellenhöhe und Wellenlänge. Wenn die Wellenbewegung durch eine fast momentan wirkende Kraft, z. B. durch Eintauchen und schnelles Herausziehen eines festen Körpers aus dem Wasser veranlaßt wird, so beschreiben die Wasserelemente immer kleiner und kleiner werdende elliptische Bahnen, oder vielmehr im Ganzen sich immer mehr und mehr zusammenziehende Spirallinien, und es fallen hierbei auch die Umdrehungszeiten immer kleiner und kleiner aus. Diesem Bewegungsverhältnisse ist die Entstehung einer ganzen Reihe immer kleiner und kleiner ausfallenden Wellen beizumessen. Bei dem weiteren Fortschreiten werden die folgenden Wellen von den vorhergehenden immer mehr und mehr verstärkt, während die vorderste Welle sich in kurzer Zeit so sehr verflacht, daß sie von dem Auge nicht mehr wahrgenommen wird. Dieses Zusammenfließen der Wellen verursacht die Entstehung kleiner Wellensysteme, welche besonders auf den Vorderflächen der Hauptwellen zahnförmig auftreten. Diese kleineren Wellen oder Zähne schreiten, nach Poisson und Cauchy, gleichförmig beschleunigt fort.

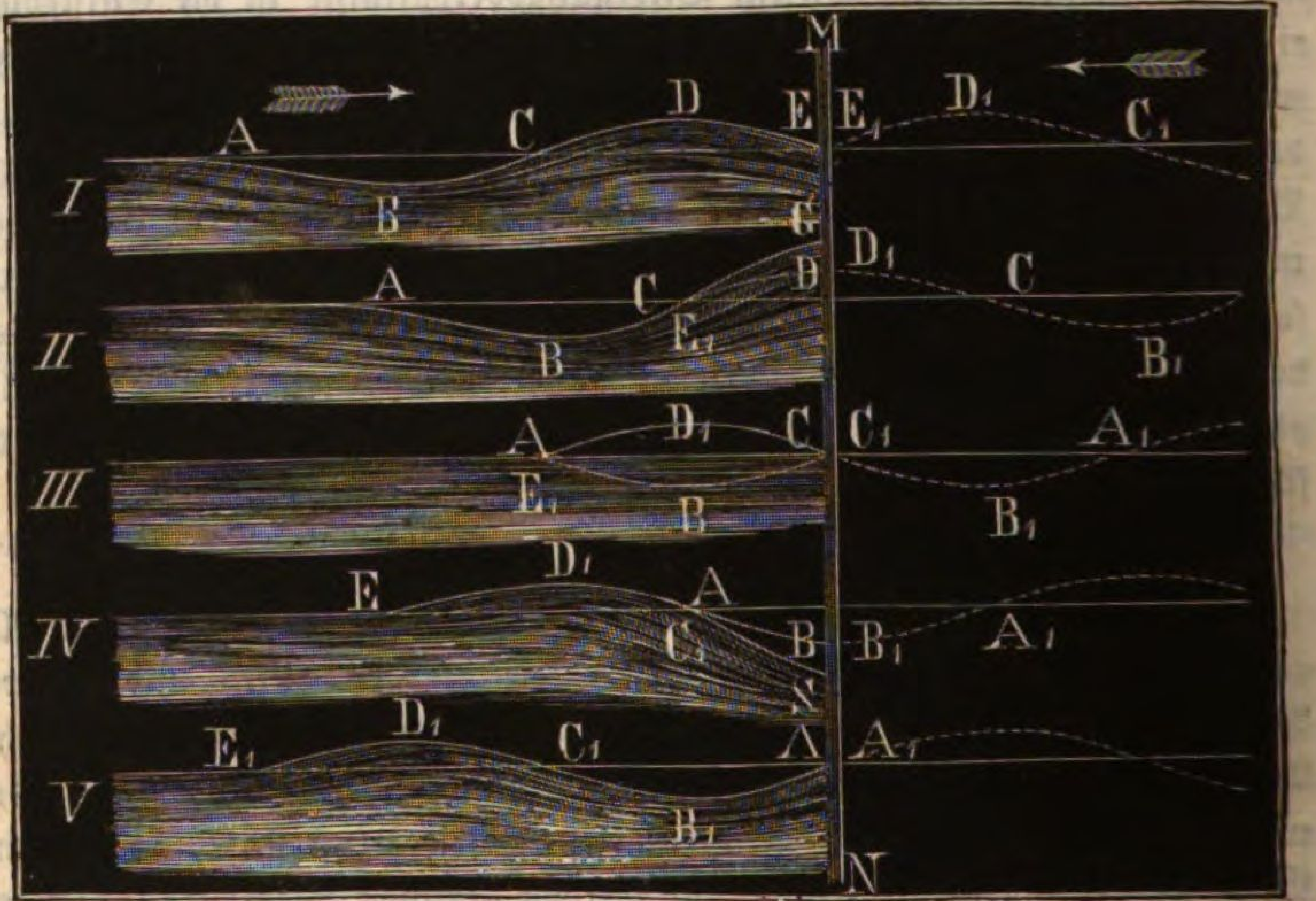
§. 27. Wenn sich zwei Wasserwellen durchkreuzen, so treten im Allgemeinen dieselben Erscheinungen ein, wie bei den Luft- und anderen Wellen; es setzt auch hier jede Welle nach dem Zusammentreffen ihre Bewegung fort, als wenn es gar nicht stattgefunden hätte; nur findet, nach Weber's Beobachtungen, ein kleiner Zeitverlust statt, so daß eine Welle nur wenig mehr Zeit braucht, einen gewissen Weg zu durchlaufen, wenn sie durch eine andere Welle hindurchgeht, als wenn sie frei fortschreitet. Kommen zwei Wellenberge zusammen, so entsteht ein fast doppelt so hoher Berg, und ebenso geben zwei Wellenthäler bei ihrem Zusammentreffen ein fast doppelt so tiefes Thal, als bei einer einfachen Welle. Die Weber'schen Versuche führen auf das Verhältniß 1 : 1,79 zwischen den Berghöhen der einfachen und der Doppelwelle. Bei der Interferenz oder dem Zusammenkommen eines Wellenberges mit einem Wellenthale heben sich beide gegenseitig auf und es bleibt die betreffende Stelle im Niveau des ruhigen Wasserspiegels. Was die Bahnen der einzelnen Wasserelemente anlangt, so gehen diese bei dem Zusammentreffen von zwei gleichen Wellen in gerade Linien über, die im Berggipfel senkrecht,

Wasserwellen. entfernt von demselben aber schief, jedoch so stehen, daß sie sich oben gegen den Gipfel neigen.

Wenn ferner eine Wasserwelle gegen eine feste Wand anstößt, so wird sie von derselben so zurückgeworfen, als wenn sie von einem Orte herkäme, der eben so weit hinter der Wand absteht, als der Ausgangspunkt der Welle vor derselben, und es geht die zurückgeworfene Welle ebenso durch die ankommende hindurch wie zwei sich kreuzende Wellen überhaupt.

In Fig. 666, I., II. bis V. sind die Erscheinungen, welche sich beim Zurückwerfen einer Welle *ABCDE* durch eine feste Wand *MN* darbieten, vor Augen geführt. In I. kommt eben der Wellenberg *CDE* an der

Fig. 666.



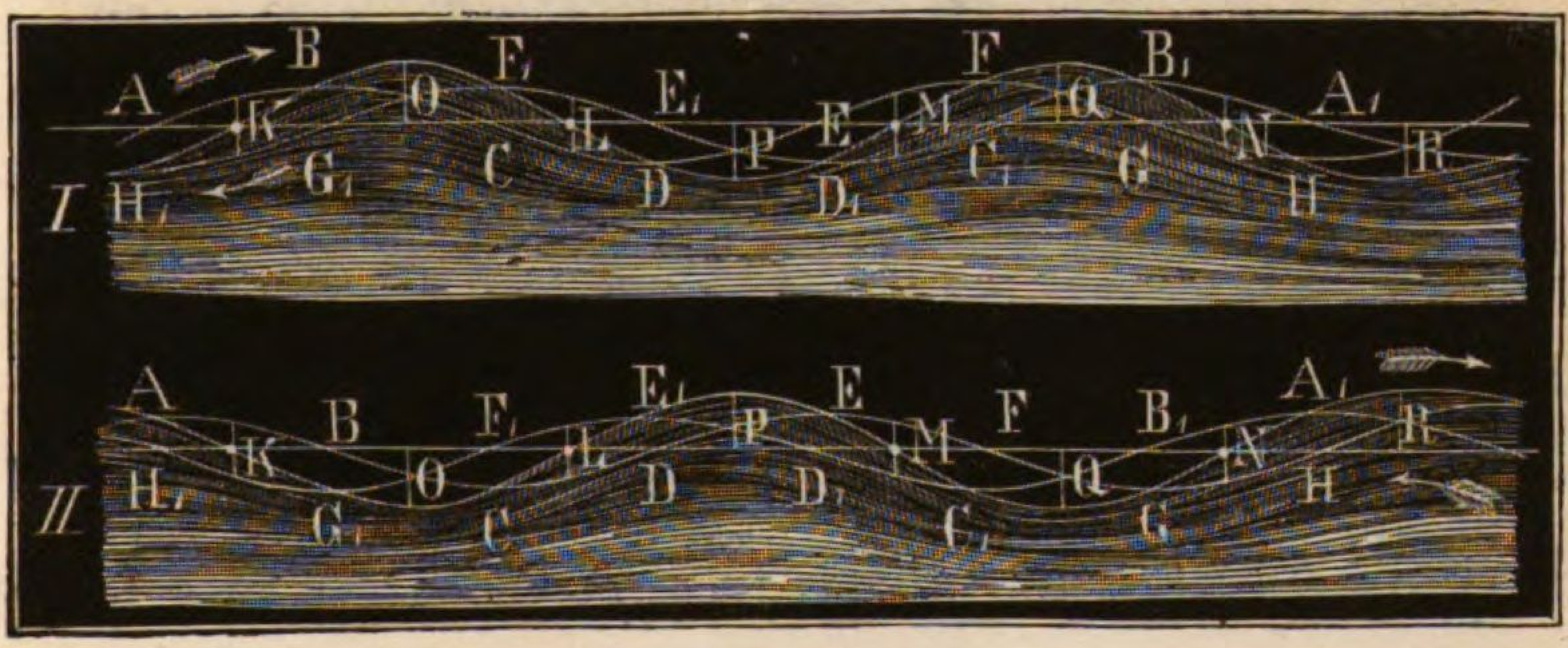
Wand *MN* an, und es beginnt das Reflectiren in Form einer umgekehrt laufenden Welle $C_1 D_1 E_1$; in II. ist der Gipfel *D* des Wellenberges an der Wand angekommen, und es hat sich mit demselben die Hälfte $D_1 E_1$ des zurückgeworfenen Wellenberges vereinigt, folglich entsteht ein halber Wellenberg *CG* von fast doppelter Höhe. In III. erreicht eben erst das Wellenthal *ABC* die feste Wand, während der zurückgeworfene Wellenberg $C_1 D_1 E_1$ über demselben hinweggeht; es tritt daher eine Interferenz ein, wobei die Welle einen Augenblick lang ganz verschwindet. In IV. trifft die Thalsohle *B* der ankommenden Welle mit der Thalsohle B_1 der zurückgeworfenen Welle an der Wand zusammen, es bildet sich folglich

ein halbes Thal AS von der doppelten Tiefe. In V. ist endlich die ankommende Welle $ABCDE$ vollständig durch die Wand MN zurückgeworfen, und dadurch in die umgekehrt laufende Welle $A_1B_1C_1D_1E_1$ verwandelt worden. Wasserwellen.

Die Bahnen der Wasserelemente erleiden durch den Anstoß an die feste Wand dieselben Veränderungen, wie bei dem Durchkreuzen zweier Wellen; es wird auch hier in der Nähe der Wand der horizontale Theil dieser Bewegung immer mehr und mehr aufgehoben, und dagegen der vertikale Component mehr und mehr verstärkt, so daß nahe an der Wand diese Bahn in eine vertikale, und entfernter davon in eine schiefe Linie übergeht. Stößt die Welle schief gegen eine feste Wand, so wird sie, wie jeder elastische Körper, unter demselben Winkel zurückgeworfen, unter welchen sie auftrifft. Trifft die Welle nur theilweise gegen ein Hinderniß, so treten die Erscheinungen der sogenannten Inflexion ein, wobei sich neue Wellen um die äußersten Enden dieser Hindernisse herum bilden.

Endlich entstehen die stehenden Wellen des Wassers wie die einer Saite oder eines anderen festen Körpers, wenn sich zwei gleich lange Wellen kreuzen, deren Ausgangspunkte um das 1, 3, 5, 7 . . . fache des Viertels einer Wellenlänge von einander abstehen. Es sei $ABCDEFGH$, Fig. 667 I. und II., die eine, und $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$ die andere Welle.

Fig. 667.



In den Punkten K, L, M, N, wo beide Wellenzüge von der Mittellinie gleich weit abstehen, sich also die Bewegungen aufheben, bilden sich feste Interferenzpunkte, dagegen über und unter den Punkten O, P, Q, R, wo sich beide Wellenlinien schneiden und daher die Wege verdoppeln, entstehen abwechselnd Berggipfel und Thalsohlen.

Anmerkung. Den vollständigsten Unterricht über die Wellenbewegung ertheilt folgendes Werk: Wellenlehre auf Experimente gegründet, u. s. w. von den Brüdern E. H. Weber und W. Weber, Leipzig 1825.« Einen guten Auszug hiervon findet man in dem Lehrbuche der mechanischen Naturlehre von August.

Wasserwellen. Die Abhandlungen über die Wellen von Laplace, Lagrange, Flaugergues, Gerstner und Poisson findet man in dem Weber'schen Werke sehr vollständig mitgetheilt und criticirt. Ueber Cauchy's Wellen-Theorie und Bidone's Versuche findet man Ausführlicheres in Gehler's physikalischem Wörterbuche, Art. Wellen. Emy's Wellentheorie ist unter dem Titel »Ueber die Bewegung der Wellen und über deren Bau am Meere und im Meere« von Wiesenfeld übersetzt, und 1839 in Wien erschienen.

Berichtigungen.

Seite 9,	Zeile 2	von	unten,	$\sqrt{x^3{}_1}$, statt $\sqrt{x^3 =}$.
» 13,	» 1	»	»	d ($tang$ α) statt ($tang.$ α).
» 19,	» 7	»	oben,	und statt oder.
» 25,	» 6	»	»	($sin.$ x) statt $sin.$ x.
» 28,	» 10	»	»	dx statt dx^0.
» 34,	» 9	»	»	Art. statt §.
» 37,	» 4	»	oben	Art » §.
» 38,	» 10	»	unten	Art. » §.
» 39,	» 4	»	»	Art. » §.
» 53,	» 12	»	»	IV statt VI.
» 68,	» 15	»	oben	$sin.$ φ statt $sin.$ ψ.
» 213,	» 14	»	unten,	Glockengut auf Gußeisen statt Gußeisen auf Glockengut.
» 228,	die Figur 235 betreffend,			F statt $2F$ und F_1 statt F.
» 255,	Zeile 12	von	unten,	P^2l^3 statt Pl^3 und $3a^2$ statt 3.
» 257,	» 9	»	oben,	a statt α.
» 368,	» 5	»	unten,	C statt B.
» 408,	» 9	»	»	$^1/_{12}$ statt $^1/_6$.
» »	» 11	»	»	$\frac{\pi r^2}{4}$ statt $\frac{\pi r^2}{2}$.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Weisbach, Julius,

Lehrbuch der Ingenieur- u. Maschinen-Mechanik In drei Theilen

Bd.: 1

Braunschweig 1850